Домашнее задание 1 для магистров (лектор Шахов Е.М.)

Задача 1 (6 баллов). Методом разделения переменных найти решение уравнения Лапласа $u_{xx}+u_{yy}=0$ на плоскости для прямоугольной области с условиями Дирихле на границе. Выписав решение в виде ряда, нарисовать на плоскости линии уровня частичных сумм этого ряда (S_0, S_2, S_{20}).

№	a	b	$u(0,y)$	$u(a,y)$	$u(x,0)$	$u(x,b)$
1	2	3	0	0	x	0
2	1	4	0	0	0	x
3	3	2	0	0	x^2	0
4	4	1	0	0	0	x^2
5	2	3	0	0	$x+1$	0
6	1	4	0	0	0	$x+1$
7	3	2	0	0	x^2-1	0
8	4	1	0	0	0	x^2-1

Задача 2 (6 баллов). Найти стационарное распределение температуры в однородном секторе $0\le\rho\le a$, $0\le\varphi\le\alpha$, удовлетворяющее краевым условиям $u(\rho,0)=u(\rho,\alpha)=0$, $u(a,\varphi)=f(\varphi)$ и уравнению $\Delta u=0$. Выписав решение в виде ряда, нарисовать на плоскости линии уровня частичных сумм этого ряда (S_0, S_2, S_{20}).

№	a	α	$f(\varphi)$
1	2	$\pi/3$	φ^2
2	1	$\pi/2$	$\varphi+1$
3	3	$2\pi/3$	$\cos^2\varphi$
4	4	$3\pi/4$	$\sin^2\varphi$
5	2	π	$\cos 2\varphi+1$
6	1	$5\pi/6$	$\sin 2\varphi+1$
7	3	$5\pi/4$	e^{φ}
8	4	$4\pi/3$	$e^{-\varphi}$

Задача 3 (6 баллов). Решить задачу Коши (выписать решение в виде интеграла)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)+F(r,t),\ r>0,\ t>0$$

$$u(r,0)=\varphi(r),\ r>0$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Считая, что $F(r,t)=0$, построить график $u(R,t)$, $0\le t\le T$. Если график получается неинформативным (функция константа, интеграл не сходится), то выбрать момент времени T и расстояние R самостоятельно.

№	a	R	T	$\varphi(r)$	$F(r,t)$
1	1	10	9	$\begin{cases} r^2, r<1 \\ 0, r\ge 1\end{cases}$	$\sin t$
2	3	20	7	$\begin{cases} r, r<1 \\ 0, r\ge 1\end{cases}$	$\cos t$
3	2	3	3	$\sin r$	t^2
4	4	2	2	$\cos r$	t
5	2	300	0.01	$\begin{cases} 1-r^2, r<1 \\ 0, r\ge 1\end{cases}$	$\sin^2 t$
6	1	1.5	10	$\begin{cases} 1-r, r<1 \\ 0, r\ge 1\end{cases}$	$\cos^2 t$
7	3	7	0.1	$\begin{cases} 0, r<1 \\ 1/r, r\ge 1\end{cases}$	tr
8	4	9	0.001	$\begin{cases} 0, r<1 \\ 1/r^2, r\ge 1\end{cases}$	$t+r$

Задача 4 (6 баллов). Дан однородный шар радиуса R, центр которого расположен в начале координат. Известно, что начальная температура $f(r)$ любой точки шара зависит только от расстояния r этой точки от центра шара. Во все время наблюдения внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре. Определить температуру любой точки внутри сферы в момент времени $t>0$. Выписав решение в виде ряда, построить график частичной суммы S_{20} в моменты времени $T/10$, $T/2$, T.

№	a	R	T	$f(r)$
1	2	1	0.01	$\cos 2r+1$
2	1	10	0.1	$\sin 2r+1$
3	3	2	0.02	e^r
4	4	20	0.2	e^{-r}
5	2	3	0.03	r^2
6	1	30	0.3	$r+1$
7	3	4	0.04	$\cos^2 r$
8	4	40	0.4	$\sin^2 r$

Задача 5 (6 баллов). Методом конечных разностей найти решение уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ на плоскости для прямоугольной области с условиями Дирихле на границе. Нарисовать на плоскости линии уровня функции $u(x, y)$. Сравнить результаты с решением задачи 1.

№	a	b	$u(0, y)$	$u(a, y)$	$u(x, 0)$	$u(x, b)$
1	2	3	0	0	x	0
2	1	4	0	0	0	x
3	3	2	0	0	x^2	0
4	4	1	0	0	0	x^2
5	2	3	0	0	$x + 1$	0
6	1	4	0	0	0	$x + 1$
7	3	2	0	0	$x^2 - 1$	0
8	4	1	0	0	0	$x^2 - 1$