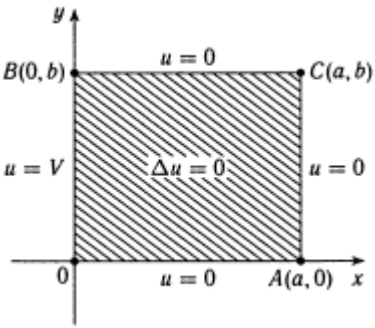
Решение типового варианта из "Домашнее задание 1 для магистров (лектор Шахов Е.М.)"

Задача 1. Методом разделения переменных найти решение уравнения Лапласа $u_{xx}+u_{yy}=0$ на плоскости для прямоугольной области с условиями Дирихле на границе. Выписав решение в виде ряда, нарисовать на плоскости линии уровня частичных сумм этого ряда (S_0, S_2, S_{20}). Граничные условия:

$u(0,y)=V$, $u(a,y)=0$, $u(x,0)=0$, $u(x,b)=0$



Решение. Будем искать вначале нетривиальные частные решения уравнения Лапласа, удовлетворяющие только граничным условиям

$$u(x,0)=0,\ u(x,b)=0$$

в виде $u(x,y)=X(x)Y(y)$. Подставляя это выражение в уравнение $u_{xx}+u_{yy}=0$, получим $X''Y+Y''X=0$, откуда делением на XY найдем

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda^2$$

Учитывая, что $Y(0)=Y(b)=0$, получим задачу Штурма−Лиувилля

$$Y''+\lambda^2Y=0,\ \ 0<y<b, Y(0)=Y(b)=0$$

для определения собственных значений и собственных функций нашей задачи. Имеем

$$\lambda^2=\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,\ Y_n(y)=\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),\ \ n=1,2,...$$

Соответствующие функции $X_n(x)$ являются решениями уравнения $X''-\lambda^2X=0$, откуда

$$X_n(x)=a_n\,\mathrm{ch}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)+b_n\,\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

(a_n и b_n − произвольные постоянные). Значит, нетривиальные частные («атомы») решения будут иметь вид

$$u_n(x,y)=\left[a_n\,\mathrm{ch}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)+b_n\,\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),\ \ n=1,2,...$$

В качестве решения исходной задачи возьмем ряд

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\,\mathrm{ch}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)+b_n\,\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad (1)$$

Постоянные a_n и b_n (n = 1, 2, ...) находим из условий $u(0,y)=V$, $u(a,y)=0$.

Полагая в (1) $x = a$, получим

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{b}a\right)+b_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}a\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

откуда следует

$$a_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{b}a\right)+b_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}a\right)=0\,,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Полагая теперь в (1) $x = 0$, будем иметь

$$V=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

откуда вытекает

$$a_n=\frac{2}{b}\int_0^b V\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy \ \text{ или } \ a_n=\begin{cases}0,\ n=2k\\ \dfrac{4V}{n\pi},\ n=2k+1\end{cases}$$

Таким образом, решение имеет вид

$$u(x,y)=\frac{4V}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{(2k+1)(a-x)\pi}{b}\right)}{(2k+1)\operatorname{sh}\left(\dfrac{(2k+1)\pi a}{b}\right)}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{b}y\right) \qquad (2)$$

На Рис. 1 и 2 показаны частичные суммы S_0 и S_{50} ряда (2). Файлы помогающие построить рисунок z1graph1.m и uk.m.

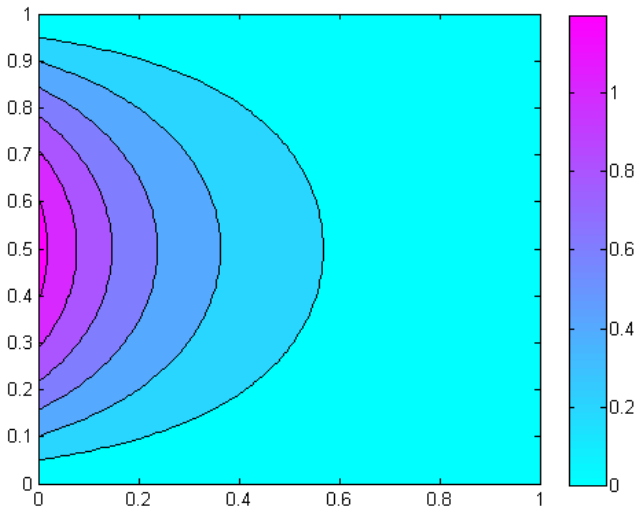


Рис. 1. S_0. Сплошные линии − линии уровня S_0.

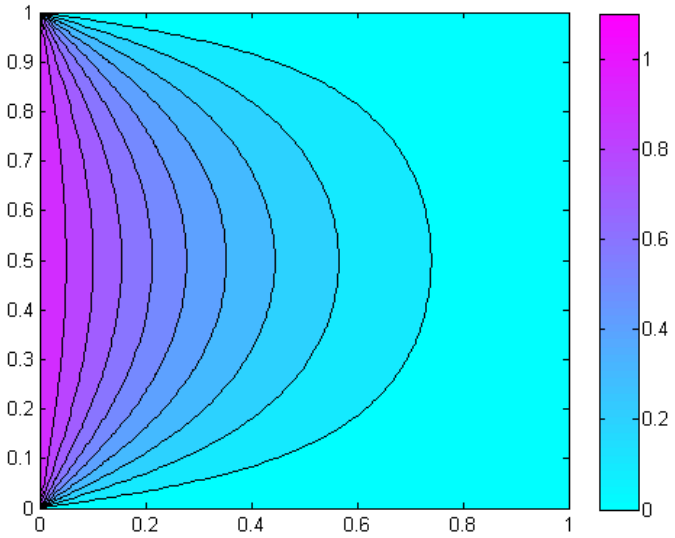


Рис. 2. S_{50}. Сплошные линии − линии уровня S_{50}.

На Рис. 3. показаны линии уровня частичной суммы S_{20}.

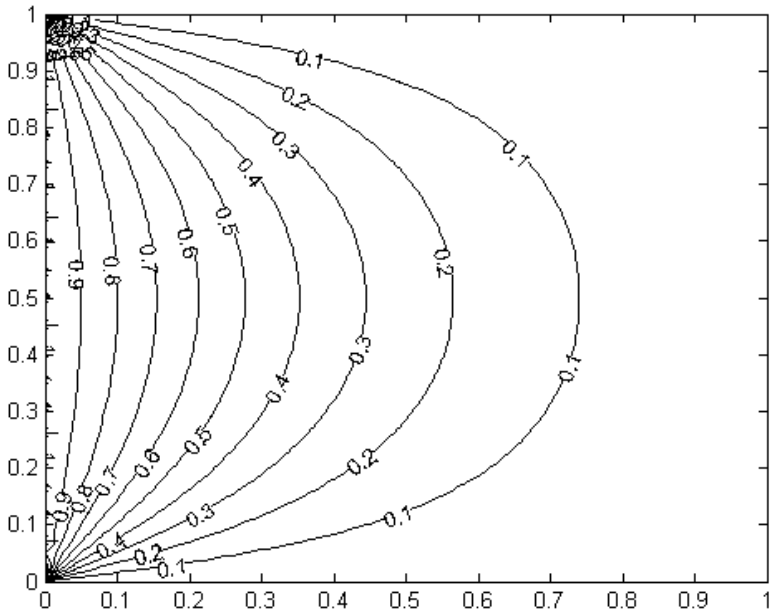
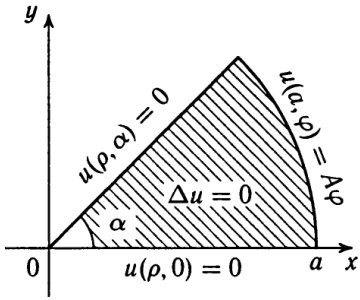


Рис. 3. S_{20}. Сплошные линии − линии уровня S_{20}.

Задача 2. Найти стационарное распределение температуры в однородном секторе $0 \le \rho \le a$, $0 \le \varphi \le \alpha$, удовлетворяющее краевым условиям $u(\rho,0) = u(\rho,\alpha) = 0$, $u(a,\varphi) = A\varphi$ (A = const).



Решение. Нахождение стационарной температуры сводится к решению задачи Дирихле

$$\rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0,\ 0 < \rho < a,\ 0 < \varphi < \alpha < 2\pi$$

$$u(\rho,0) = u(\rho,\alpha) = 0,\ 0 \le \rho \le a$$

$$u(a,\varphi) = A\varphi,\ 0 \le \varphi \le \alpha$$

Полагая $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ и проведя разделение переменных, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\rho^2 R'' + \rho R' - n^2 R = 0,\ \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \qquad (3)$$

Из условий $0 = u(\rho,0) = R(\rho)\Phi(0)$ и $0 = u(\rho,\alpha) = R(\rho)\Phi(\alpha)$ следует $\Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0$. Постоянную разделения λ определяем, решая задачу Штурма−Лиувилля

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0,\ \Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0,\ 0 < \varphi < \alpha$$

Имеем $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2$ и $\Phi_n(\varphi) = \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)$, n = 1, 2, ... Функцию $R(\rho)$ ищем в виде $R(\rho) = \rho^\mu$. Подставляя это выражение в уравнение (3), найдем

$$\mu(\mu - 1) + \mu - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 = 0, \text{ откуда } \mu = \pm\frac{n\pi}{\alpha}$$

Учитывая ограниченность (по смыслу задачи) функции $R(\rho)$, пишем $R(\rho) = \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}$. Атомы, из которых построим решение задачи, образуются функциями

$$u_n(\rho,\varphi) = \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right),\ \text{n = 1, 2, ...}$$

Отсюда решение задачи есть

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)$$

Постоянные c_n (n = 1, 2, ...) определяем из условия $u(a,\varphi) = A\varphi$. Имеем

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)$$

откуда

$$c_n = \frac{2A}{\alpha a^{\frac{n\pi}{\alpha}}} \int_0^{\alpha} \varphi \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right) d\varphi$$

Итак, решение записывается в виде

$$u(\rho,\varphi) = \frac{2\alpha A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)}{n} \tag{4}$$

На Рис. 4 показана частичная сумма S_{50} ряда (4). Файлы помогающие построить рисунок z2graph1.m и un.m.

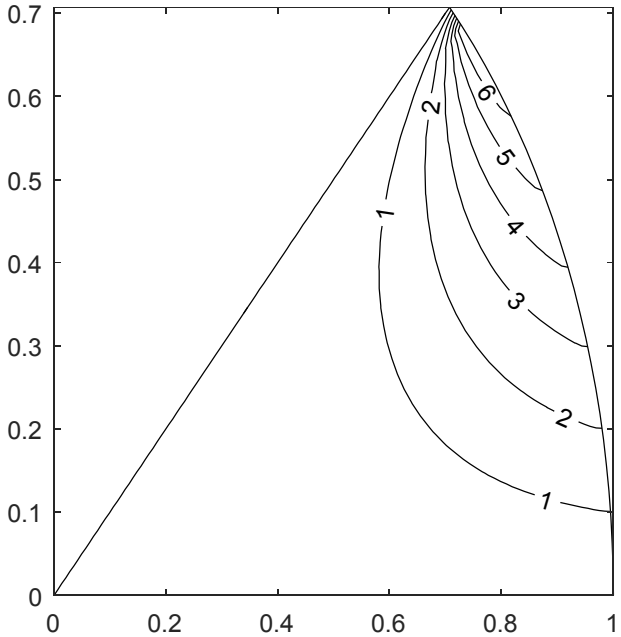


Рис. 4. К задаче 2.

Задача 3 Решить задачу Коши (выписать решение в виде интеграла)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + F(r,t)\,,\ r > 0\,,\ t > 0$$

$$u(r,0) = \varphi(r)\,,\ r > 0$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Построить график $u(R,t)$, $0 \le t \le T$.

Решение. Используем функцию температурного влияния, запишем решение в виде интеграла

$$u(r,t)=\frac{1}{2ar\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty} z^2\varphi(z)\left[e^{-\frac{(r-z)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(r+z)^2}{4a^2t}}\right]dz+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^{t}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty} z^2F(z,\tau)\left[e^{-\frac{(r-z)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(r+z)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]dz$$

В файле z3graph1.m показан пример построения графика (используется также файл u0z3.m). На Рис. 5 показан график $u(R,t)$

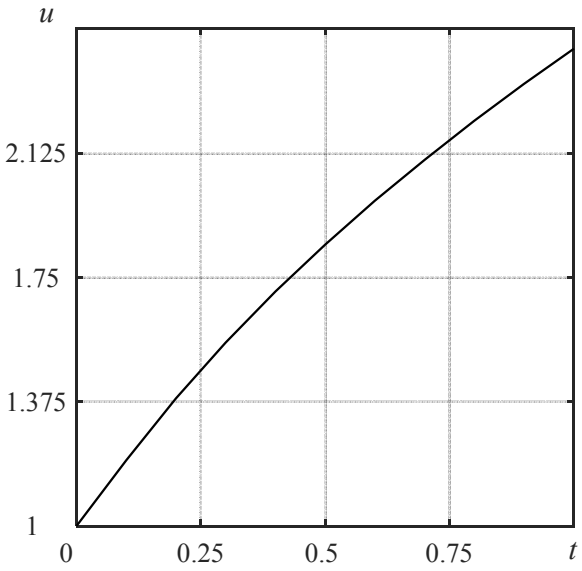


Рис. 5. К задаче 3.

Задача 4 (6 баллов). Дан однородный шар радиуса R, центр которого расположен в начале координат. Известно, что начальная температура $f(r)$ любой точки шара зависит только от расстояния r этой точки от центра шара. Во все время наблюдения внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре. Определить температуру любой точки внутри сферы в момент времени $t>0$. Выписав решение в виде ряда, построить график частичной суммы S_{20} в моменты времени T.

Решение. Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u$$

с начальным условием

$$u(x,y,z,0)=f(r),\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

и граничным условием

$$u(x,y,z,t)\big|_{\partial\Omega}=0\,,\ \Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le R^2\right\}$$

Так как начальное распределение давления зависит только от r, то эту задачу можно упростить

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$u(r,0)=f(r)\,,\ u(R,t)=0$$

Можно показать (см., например, [3] bил [4]), что задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\text{, где } v=ru$$

при условиях

$$v(0,t)=0\,,\ v(R,t)=0\,,\ v(R,0)=rf(r)$$

Применяя метод разделения переменных, будем искать решение в виде $v(r,t)=F(r)T(t)$. Получим уравнение

$$FT'=a^2F''T \text{ или } \frac{1}{a^2}\frac{T'}{T}=\frac{F''}{F}=\lambda$$

Из уравнения $F''+\lambda F=0$, находим $\lambda_n=-\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2$, $F_n(r)=\sin\left(\frac{n\pi}{R}r\right)$, n = 1, 2, ...

Решая уравнение $T'-a^2\lambda T=0$, в котором $\lambda=\lambda_n=-\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2$, получаем $T_n(t)=e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{R^2}t}$. Значит

$$v(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nF_n(r)T_n(t)$$

Коэффициенты c_n определим из условия $v(R,0)=rf(r)$ и получим

$$u(r,t)=\frac{2}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{R^2}t}\sin\frac{n\pi r}{R}\cdot\int_0^R\rho f(\rho)\sin\frac{n\pi\rho}{R}d\rho\,.$$

Чтобы построить график $u(r,T)$ выберем a = 1, R = 1, T = 0.01, $f(r)=1/r$. Результат (частичная сумма ряда S_{20}) показан на рис. 6. В файле z4graph1.m дан пример построения графика (используется также файл u0z4.m).

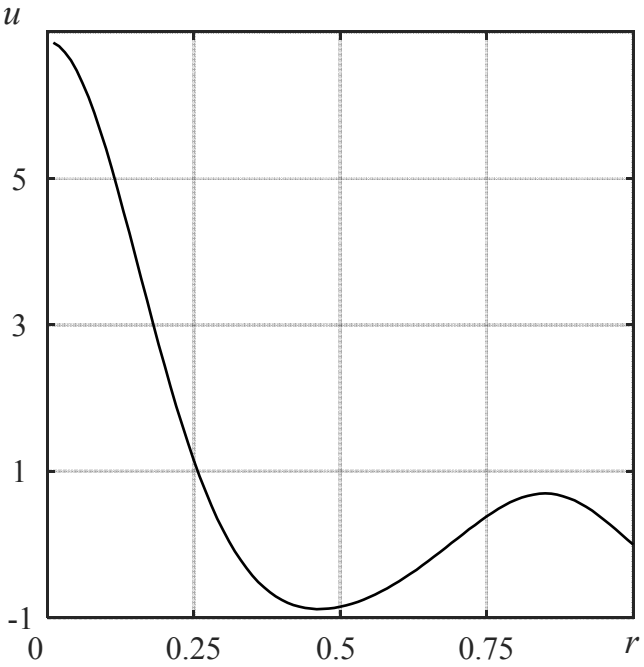


Рис. 6. К задаче 4.

Задача 5. Решить задачу 1 методом конечных разностей.

Решение. Воспользуемся итерационным методом Якоби (подробнее в [5])

$$\left(\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2}\right)y_{n,m}^k=\frac{1}{h_1^2}\left(y_{n+1,m}^{k-1}+y_{n-1,m}^{k-1}\right)+\frac{1}{h_1^2}\left(y_{n,m+1}^{k-1}+y_{n,m-1}^{k-1}\right)+F_{nm}$$

Результаты решения по этой формуле показаны на рис. 7. Файл помогающий реализовать метод z5graph1.m

На Рис. 8 показано решение задачи 1 с граничным условием

$$u(0,y)=0\,,\ u(a,y)=0\,,\ u(x,0)=x^3+\sin x+1\,,\ u(x,b)=0$$

Файл помогающий получить этот результат z5graph2.m

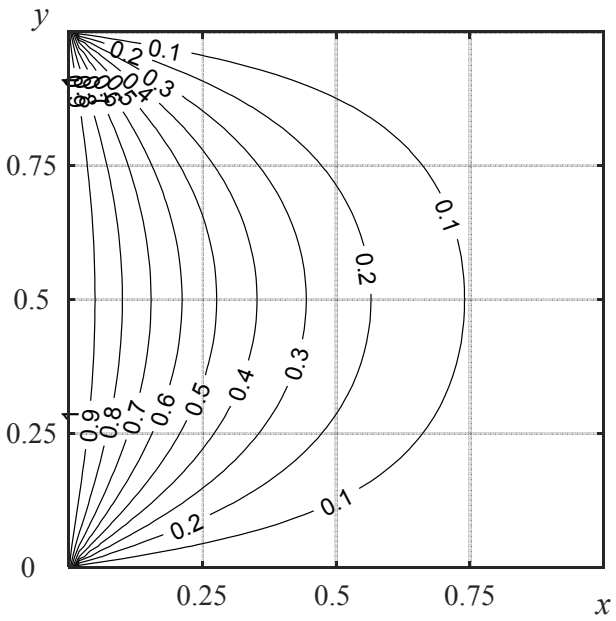


Рис. 7. К задаче 5.

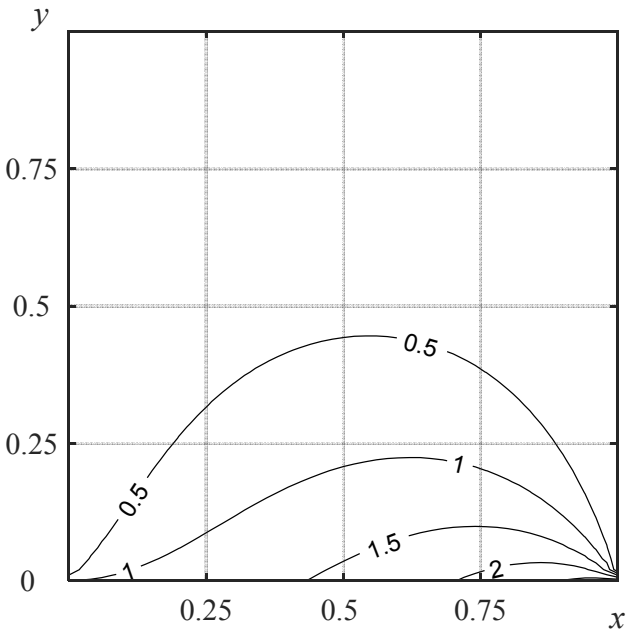


Рис. 8. К задаче 5; решение для граничного условия $u(x,0) = x^3 + \sin x + 1$.

Список литературы

1. Тихонов А.Н. и Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004

2. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1975.

3. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.Наука, 1980.

4. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. М. Наука-Физматлит. 1995.

Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978.