

Домашнее задание №2 "Функции нескольких переменных"

Задача 1

Для заданной поверхности $z = z(x, y)$ найти в точке М:

- а) уравнение линии уровня функции $z(x, y)$;
- б) производную $z(x, y)$ по направлению, заданному вектором или углом с осью Ох;
- в) направление наибольшего возрастания z и производную по этому направлению;
- г) уравнения касательной плоскости и нормали.

Вариант	Функция	Точка	Угол и вектор
1	$z = x^3 - x^2y + y^3 - 1$	$M(2; 1)$	$\alpha = \pi/6$
2	$z = x - x^2y + y^4$	$M(1; 1)$	$\overline{MB}, B(4; -2)$
3	$z = x^2 - xy + y^2 + 2$	$M(1; 2)$	$\overline{a} = (1; 1)$
4	$z = \ln(x^2 + y^2)$	$M(1; 1)$	$\alpha = \pi/4$
5	$z = xy$	$M(5; 1)$	$\overline{a} = (1; 1)$
6	$z = x^2y^3 - xy^2 - \frac{3}{8}$	$M\left(2; \frac{1}{2}\right)$	$\overline{a} = (1; 0)$
7	$5z = 7 - x^2 - y^{13}$	$M(1; 1)$	$\overline{a} = (1; 2)$
8	$x^3 + z^3 - 3xz = 3$	$M(1; 4), z=2$	$\overline{a} = (1; 1)$
9	$xy + xz + yz = x^3 + y^3 + z^3$	$M(1; 1), z = 1$	$\overline{a} = (0; -1)$
10	$2^{y/z} + 2^{z/x} = 6$	$M(1; 2), z = 2$	$\overline{a} = (1; 1)$

11	$z = x^2 + y^2$	$M(1; 1)$	$\alpha = \pi/3$
12	$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$	$M\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}}\right), z = \frac{a}{\sqrt{3}}$	$\bar{a} = (2;1)$
13	$z = (x-y)^2 - x + 2y$	$M(1; 1)$	$\bar{a} = (-1;-2)$
14	$z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$	$M(-3; 4)$	$\bar{a} = (1;-1)$
15	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$M(0; 0)$	$\bar{a} = (1;1)$
16	$e^z - z + xy = 3$	$M(2; 1), z=0$	$\alpha = \pi/4$
17	$2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$	$M(2; 2), z=1$	$\bar{a} = (-1;1)$
18	$x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$	$M(1;2)$	$\alpha = 5\pi/6$
19	$xy^2 + z^3 = 12$	$M(1; 2)$	$\bar{a} = (2;1)$
20	$z = e^x \cos y$	$M(1; 0)$	$\bar{a} = (1;-2)$
21	$z = x - y + \sqrt{ xy }$	$M(1; 0)$	$\alpha = \arccos(5/13)$
22	$xyz(z^2 - x^2) = 5 + y^5$	$M(1; 1), z = 2$	$\alpha = \arcsin(2/3)$
23	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$	$M(2; 3), z = 6$	$\bar{a} = (1;1)$

Задача 2

Исследовать на экстремум функции двух и трех переменных.

Вариант	Функции двух и трех переменных	Вариант	Функции двух и трех переменных
1	$Z = x^3 - 6xy + 3y^2 - 9x$ $U = x^3 + y^2 + (z + 1)^2 - xy + z$	2	$Z = y^3 + 6y^2 + 6xy + 3x^2 - 9y$ $U = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2$
3	$Z = 2y\sqrt{x} + x + 2y^2 + 2y$ $U = x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6y - 2z$	4	$Z = 2x^3 + 12xy - 3y^2 + 18x$ $U = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z$
5	$Z = y^3 - 4xy - 4x^2 - y^2 - 45y$ $u = xyz(16 - x - y - 2z)$	6	$z = x - y - \frac{4}{x^2} - \frac{1}{2y^2} + 11$ $U = xy^2z^3(49 - x - 2y - 3z)$
7	$Z = y^3 + 3x^2y - 3x^2 - 12y$ $u = \frac{xy + xz^2 + y^2z}{xyz} + x + 1$	8	$z = 2x^3 + 6xy - y^2 - 4$ $u = \frac{256}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + z^2$
9	$Z = 2x^3 - 6x^2 - 6xy + 3y^2 - 5$ $u = \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} + \frac{z^2}{xy}$	10	$Z = x^3 + 2xy + 2y^2 + 2x^2 - 36x$ $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z),$ $x, y, z \in (0, \pi)$
11	$Z = 2x^3 + y^2 + 2xy - 4x - 1$ $u = (x + 7z)e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$	12	$Z = y^3 + 3xy - x^3 + 9$ $U = 2 \ln x + 3 \ln y + 5 \ln z + \ln(22 - x - y - z)$
13	$Z = x\sqrt{y} - x^2 + 3x - y + 7$ $U = x^3 + 2y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 1$	14	$z = x^3 - 6xy + 3y^2 - 18x - 6y + 7$ $u = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x$
15	$z = x^3 - 8y^3 - 6xy - 9$ $u = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$	16	$Z = 2x\sqrt{y} + x^2 + y^2 - y + 3$ $u = xyz(1 - x - y - z)$
17	$Z = x^3 + 2xy - y^2 + 2x^2 - 7x + 2y - 3$ $u = 2\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$	18	$z = xy^2 - 2x^3 + 2y^2 + 8x$ $u = (x + y + z)e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$
19	$z = x^2y - y^3 - 3x^2 + 2y$ $u = x^2 - 2xy + 4y^2 + 6z^2 + 6yz - 6z$	20	$z = x^3 - y^3 - 3x + 12y$ $U = xy + yz + xz$
21	$z = 2xy^2 - 2x^3 + 2y^2 + 24x$ $u = x^3yz^2(2 - y - 2z - 3x)$	22	$Z = x^3 - 4y^3 + 6xy + 2$ $U = \ln(xy) - z(x - y) - x^2 - y^2 + 2xy - y$
23	$Z = 2xy^2 - 6x^3 + 4y^2 - 18x + 5$ $U = z \ln z - z - z \ln(xy) + xy + x^2 + 2y^2 - 4x - 2y$		

Задача 3

Найти условный экстремум функции $z(x, y)$ при указанном уравнении связи.

№	$z(x, y)$	уравнение связи
1	$6 - 5x - 4y$	$x^2 + y^2 = 9$
2	$\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{y}}$	$2x + 4y = 1$
3	$\frac{\sqrt[3]{y}}{x^2} - 2 \ln x + \frac{\ln y}{3}$	$\frac{6x}{5} - \frac{y}{5} = 1$
4	$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{8}$
5	$12x^2 + 12xy + 3y^2 + 4$	$4x^2 + y^2 = 25, (x > 0)$
6	xy	$x^2 + y^2 = 1, (x > 0)$
7	$5 - 3x - 4y$	$x^2 + y^2 = 25$
8	$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{\sqrt[3]{y}}$	$8x + 32y = 1$
9	$\frac{xy}{5} + \frac{x}{6} - \frac{y}{6}$	$x^2 + y^2 = 1 (x < 0, y > 0)$
10	$2x^2 + 12xy + y^2$	$x^2 + 4y^2 = 25, (x > 0)$
11	$\frac{1}{x} + \frac{1}{2y^2}$	$x - y = 2$
12	$2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}$	$4x + 6y = 1$
13	$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y$	$x + 2y = 8$
14	$1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{y}$	$\frac{4}{x^2} + \frac{6}{y^2} = \frac{1}{10}$
15	$x + 8y + 10$	$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{5}$
16	$x^2 + xy + y^2$	$x^2 + y^2 = 1, (x > 0)$
17	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[7]{y}} + \frac{\ln x}{2} - \frac{\ln y}{7}$	$\frac{7x}{5} - \frac{2y}{5} = 1$
18	$4 + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{2y^2}$	$x + y = 3$
19	$\frac{5xy}{2} - 3x - 3y$	$x^2 + y^2 = 1 (x < 0, y < 0)$
20	$x + y$	$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$
21	$x^3 y^7 + 3 \ln x + 7 \ln y$	$\frac{3x}{10} + \frac{7y}{10} = 1$
22	$1 - 4x - 8y$	$x^2 - 8y^2 = 8$
23	$2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}$	$4x - 6y = -1$

Задача 4

Решить прикладные задачи на наибольшее и наименьшее значения.

1. Найти размеры цилиндра наибольшего объема, изготовленного из заготовки в форме шара радиуса R .
2. Крыша дома имеет поперечное сечение в форме равнобедренного треугольника. Каковы должны быть размеры поперечного сечения помещения прямоугольной формы, встроенного на чердаке, чтобы объем помещения был наибольшим.
3. Найти размеры заготовки наибольшего периметра в форме прямоугольного треугольника, гипотенуза которого задана.
4. Изготовить из жести прямоугольную коробку (без крышки) данной емкости V с наименьшими затратами материала.
5. В шар диаметра d вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.
6. Найти размеры цилиндрического сосуда наибольшей вместимости с поверхностью S .
7. Имеется прямоугольный лист железа заданных размеров. Вырезать в его углах одинаковые квадраты такого размера, чтобы объем получившейся при загибании краев емкости был наибольшим.
8. Поверхность прямоугольного параллелепипеда равна Q . Найти размеры параллелепипеда наибольшего объема.
9. Сумма ребер прямоугольного параллелепипеда равна a . Найти размеры параллелепипеда наибольшего объема.
10. Найти прямоугольный параллелепипед наибольшего объема при условии, что длина его диагонали равна d .
11. В шар диаметра d вписать цилиндр с наименьшей полной поверхностью.
12. Из всех прямоугольных параллелепипедов с полной поверхностью S найти тот, который имеет наибольший объем.
13. Определить размеры конуса наибольшего объема, при условии, что его боковая поверхность равна S .
14. Из всех прямоугольных треугольников площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.
15. Из всех треугольников, вписанных в круг, найти тот, площадь которого наибольшая.
16. Из всех треугольников, имеющих периметр p , найти наибольший по площади.
17. Из всех прямоугольников с заданной площадью S найти такой, периметр которого имеет наименьшее значение.
18. Из всех прямоугольных параллелепипедов объемом V найти тот, полная поверхность которого наименьшая.
19. Представить число $a > 0$ в виде произведения четырех положительных сомножителей так, чтобы их сумма была наименьшей.
20. Найти треугольник данного периметра $2p$, который при вращении около одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.
21. Определить наружные размеры открытого прямоугольного ящика с заданной толщиной стенок d и емкостью V так, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала.
22. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же углом при вершине найти наибольший по площади.
23. В данный прямой круговой конус вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.