№ 3977

51
Т 338

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания

НОВОСИБИРСК
2011

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

№ 3977

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания и варианты заданий
для студентов II курса ФЛА
направления 150300 – прикладная механика

НОВОСИБИРСК
2011

УДК 517.53(07)
Т 338

Составили
д-р техн. наук, профессор *В.Л. Присекин*,
ст. преп. *Е.Н. Белоусова*

Рецензент
Е.Г. Подружин, д-р техн. наук, профессор кафедры самолето-
и вертолетостроения

Работа подготовлена
на кафедре прочности летательных аппаратов

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *Л.Н. Киншт*
Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Подписано в печать 29.03.2011. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная
Тираж 100 экз. Уч.-изд. л. 1,62. Печ. л. 1,75. Изд. № 407. Заказ №
Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

ВВЕДЕНИЕ

Комплексными числами называются выражения вида $z = x + iy$.

Комплексное число i названо мнимой единицей, и ее главное свойство $ii = i^2 = -1$.

Эта форма записи называется **алгебраической**, и ее значение заключается в том, что можно перенести на множество комплексных чисел все законы алгебры вещественных чисел. Например, операция умножения чисел записывается как произведение биномов $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + a_1 i b_2 + i b_1 a_2 + i b_1 i b_2$. После преобразования этого выражения получим запись произведения исходных чисел в виде $a_1 a_2 - b_1 b_2 + i\,(a_1 b_2 - a_2 b_1)$.

x – действительная часть комплексного числа z ($\operatorname{Re} z$), а y – мнимая часть ($\operatorname{Im} z$).

1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ

Свойства операций сложения и умножения на множестве комплексных чисел определены следующими законами.

а) Переместительный закон для сложения или умножения

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,\ z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

б) Сочетательный закон для сложения или умножения

$$\left(z_1 + z_2\right) + z_3 = z_1 + \left(z_2 + z_3\right),\ \left(z_1 z_2\right) z_3 = z_1 \left(z_2 z_3\right).$$

Здесь круглые скобки определяют очередность выполнения операций.

в) Распределительный закон

$$z_1 \left(z_2 + z_3\right) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

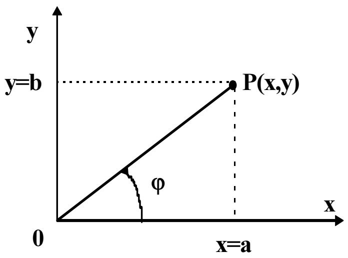
г) Вычитание комплексных чисел. Для любых комплексных чисел z_1, z_2 всегда можно найти такое z, при котором будет выполняться равенство $z_1 + z = z_2$. Число z называют **разностью** чисел z_1, z_2 и записывают как результат операции вычитания: $z = z_2 - z_1$.

д) Деление комплексных чисел. Для любых комплексных чисел $z_1 \neq 0$ и z_2 всегда существует такое z, что $z_1 z = z_2$. Число z называют **частным** чисел z_2 и z_1 и представляют как результат операции деления: $z = \dfrac{z_2}{z_1}$.

е) Если произведение $z_1 z_2 = 0$, то $z_1 = 0$, либо $z_2 = 0$, либо $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$.

2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМЫ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Можно установить взаимно однозначное соответствие между любым комплексным числом $c = a + ib$ и точками плоскости (x, y), где x и y – оси декартовой системы координат (рис. 1). Для этого достаточно принять, что $x = a,\ y = b$.



Выражение «выберем некоторую точку (x, y) на комплексной плоскости z» означает, что задается комплексное число $z = x + iy$.

Известно, что положение любой точки P плоскости можно задать в декартовой (x, y) или полярной (r, φ) системе координат. Между координатами этих систем существует связь:

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi .$$

Здесь r – расстояние от начала координат до точки P: $r^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, эту величину называют модулем комплексного числа и обозначают $r = |z|$. Величина φ – полярный угол, отсчитываемый от оси x против часовой стрелки. Угол находится из совместного решения уравнений:

$$\cos\varphi = x / r, \ \sin\varphi = y / r \ . \qquad (1)$$

Например, для точек мнимой оси $z = i\,y$ получим: $r = |y|$, $\varphi = \pi / 2 + 2\pi k$, если $y > 0$, и $\varphi = -\pi / 2 + 2\pi k$, если $y < 0$. Здесь через k обозначено любое целое число. Появление дополнительного слагаемого $2\pi k$ объясняется свойством периодичности тригонометрических функций: $\cos(\varphi + 2\pi k) = \cos\varphi$, $\sin(\varphi + 2\pi k) = \sin\varphi$. Теперь комплексные числа $z = x + i\,y$ можно представить в тригонометрической форме:

$$z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \ . \qquad (2)$$

Здесь r называют модулем, а φ – аргументом комплексного числа. Для операций выделения этих параметров примем следующие обозначения:

$$r = |z|, \quad \varphi = Arg\,z \ . \qquad (3)$$

Эйлер при изучении степенного ряда показательной функции $e^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \frac{1}{2!}\varepsilon^2 + ...$ получил замечательный результат. Заменим ε в правой и левой частях ряда на чисто мнимое число $i\varphi$. Тогда будем иметь

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{1}{2!}\varphi^2 - \frac{i}{3!}\varphi^3 + ... \, .$$

Объединяя вещественные и мнимые величины и учитывая, что для любых вещественных значений φ имеют место разложения функций в степенные ряды: $\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 - ...$ и $\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + ...$, после замены рядов на тригонометрические функции получим формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi \ . \qquad (4)$$

Формула (4) позволяет ввести весьма компактную показательную форму представления комплексных чисел:

$$z = r\,e^{i\varphi}\,. \tag{5}$$

В дальнейшем форма записи комплексных чисел будет выбираться исходя из условия наиболее простого решения поставленной задачи.

Отметим важные частные случаи.

1.Число вида $z = 0 + i\,0$ является нулевым (алгебраическая форма), и его принято записывать в виде $z = 0$. В тригонометрической форме представления нулевого числа имеется неопределенность: модуль $r = 0$, а аргумент числа $z = 0$ не определен. В уравнениях (1) правые части содержат операцию деления ноля на ноль: $\cos\varphi = 0/0$, $\sin\varphi = 0/0$.

2. Комплексные числа $1,\ i,\ -i,\ -1$ можно записать в следующем виде: $e^{i\,0}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $e^{i\,\pi}$. Учитывая свойство многозначности аргумента, запишем для этих же чисел более общее выражение:

$$e^{2\pi i\,k},\ e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)},\ e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)},\ e^{i(\pi+2\pi k)}\,.$$

Здесь k является произвольным целым числом, которое может принимать любые значения: $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

3. ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Рассмотрим подробнее свойства приведенных выше операций над комплексными числами, учитывая при этом введенные формы их записи: алгебраическую $z = x + i\,y$, тригонометрическую $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ и показательную $z = r\,e^{i\varphi}$.

Сложение чисел

Результат операций $z = z_1 + z_2$ следует из алгебраической формы записи комплексных чисел:

$$z = \left(x_1 + i\,y_1\right) + \left(x_2 + i\,y_2\right) = \left(x_1 + x_2\right) + i\left(y_1 + y_2\right).$$

Умножение комплексных чисел

По определению $z = z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i\left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right)$. К этому же результату приходим, применяя отмеченные ранее законы алгебры чисел: $z = \left(x_1 + i\,y_1\right)\left(x_2 + i\,y_2\right) = x_1 x_2 + i\,x_1 y_2 + i\,x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2$. Учитывая, что $i^2 = -1$, и группируя слагаемые, получим тот же результат. Правило умножения комплексных чисел получим, применяя тригонометрическую форму представления $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$, $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$. Умножая эти двучлены и учитывая формулы приведения типа $\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2$, придем к результату:

$$z = r_1 r_2\left\{\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right\}.$$

Деление комплексных чисел

Операция деления чисел z_1 на z_2 определена при условии $z_2 \neq 0$. Результат деления $z = x + i\,y$ для z_1 и z_2 найдем в соответствии с определением: $z z_2 = z_1$. Это для вычисления x и y приводит к системе уравнений: $xx_2 - yy_2 = x_1$, $xy_2 + yx_2 = y_2$. Ее решение имеет вид

$$x = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2},\quad y = \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Отметим, что число в знаменателе может быть получено умножением следующих чисел: $(x_2 + i\,y_2)(x_2 - i\,y_2)$. Если числа z_1 и z_2 заданы в показательной форме, то их деление выполняется весьма просто:

$$z = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Если $z = x + i\,y$, то число $\bar{z} = x - i\,y$ называется сопряженным.

Примеры. Пусть $z_1 = 3 + i4$, $z_2 = 2 - i5$. Тогда $\bar{z}_1 = 3 - i4$ и $\bar{z}_2 = 2 + i5$. С помощью операции сопряжения удобно записать выражение для модуля комплексного числа z: $r^2 = |z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$. В случае деления комплексных чисел z_1 на z_2 операция сопряжения позволяет с минимальными выкладками получить результат:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Аргумент комплексного числа

Было установлено, что для представления комплексного числа $z = x + iy$ в тригонометрической или показательной форме следует вычислить модуль $|z|$ и аргумент φ согласно уравнениям (1). Отметим, что эти соотношения принято записывать в виде одного уравнения для случая, когда число не располагается на мнимой оси $\operatorname{Re} z \neq 0$:

$$\operatorname{tg}\varphi = y / x.$$

Примем условие: пусть главные значения функции $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ лежат в диапазоне $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Тогда аргумент φ числа z можно выразить следующей формулой:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + 2\pi k,\ x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi + 2\pi k,\quad x < 0. \end{cases} \tag{6}$$

В формуле (6) применено обозначение Arg с заглавной буквы. По общепринятому соглашению подобное обозначение указывает на бесконечное множество значений аргумента (k – произвольное целое). Условимся применять обозначение arg для следующего конкретного диапазона значений угла:

$$-\pi \leqslant \arg z \leqslant \pi.$$

Можно отметить еще одну формулу для аргумента комплексных чисел:

$$\varphi = \arg z + 2\pi k .$$

Возведение в степень z^n

а) Степень n – целое положительное число. В этом случае операция возведения в степень эквивалентна умножению n раз исходного числа (основание степени) на себя: $z^n = z \cdot z \cdots z$.

Для вычисления результата операции z^n воспользуемся показательной формой комплексного числа $z = r \cdot e^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg z + 2\pi k$, k – целое. Тогда имеем

$$z^n = r^n e^{i\varphi n} = r^n e^{i n \arg z} . \qquad (7)$$

Слагаемое $2\pi k n$ является периодом тригонометрических функций и не влияет на значение результата возведения числа в целую степень.

б) Степень a – иррациональное положительное число. Для показательной формы имеем $z^a = \left(r e^{i\varphi}\right)^a = r^a e^{i a\varphi}$. Значение аргумента степени комплексного числа равно $\varphi a = a \arg z + 2\pi k a$. Однако величина $2\pi k a$ не является периодом тригонометрических функций, так как произведение ka в общем случае не может быть целым числом из-за иррациональности a. Таким образом, результат возведения в степень a зависит от значения аргумента, приписанного числу z. Множеству значений k будет соответствовать и множество значений z^a.

Извлечение корня целой степени

Сохранено обозначение корня, принятое в алгебре вещественных чисел: $w = \sqrt[n]{z}$, где z – комплексное число. Операция извлечения корня в этом случае является обратной по отношению к возведению в степень: $w^n = z$. Это приводит к формулам: $|w|^n = |z|$, $n \arg w = \operatorname{Arg} z$.

Следовательно, для модуля и аргумента корня имеем

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} = \rho, \quad \arg w = \frac{1}{n} \operatorname{Arg} z . \qquad (8)$$

Представляя $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, приходим к заключению: корень целой степени n из числа z имеет n различных значений, отличающихся между собой лишь значением аргумента:

$$w_k = \rho e^{i\left(\frac{1}{n}\arg z + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \; k = 0,\, 1, \ldots, n-1 .$$

На плоскости z корни располагаются на окружности радиусом ρ, а углы между корнями кратны величине $2\pi / n$.

4. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть задана непрерывная в области D функция комплексной переменной $w = f(z)$. Выделим действительную и мнимую части функции:

$$w = u(x, y) + i\, v(x, y),$$

где u и v – непрерывные по условию функции. Потребуем, чтобы u и v были дифференцируемыми, т. е. существовали непрерывные частные производные по переменным x и y.

Определение. Пусть функция $w = f(z)$ непрерывна в некоторой области D и для всех точек области выполняются условия дифференцируемости Даламбера–Эйлера (Коши–Римана):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{9}$$

Тогда такую функцию называют аналитической (регулярной) в области D.

Условия Даламбера–Эйлера в форме (9) удобно применять для установления свойств конкретной функции комплексного переменного.

Пример 1. Задана функция $w = x^2 - y^2 + 2i\, xy$. Здесь $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Непосредственные вычисления дают $u'_x = 2x,\; v'_y = 2x$; $u'_y = -2y,\; v'_x = 2y$. Следовательно, для этой функции выполняются условия (9) и она является аналитической во всей комплексной плоскости, за исключением бесконечно удаленной точки ($z = \infty$).

Пример 2. $w = x^2 - y^2 + ixy$. Вычисления позволяют сделать вывод: функция $w = f(z)$ непрерывна всюду, u и v являются дифференцируемыми, но условия (9) не выполняются. Следовательно, эта функция не аналитическая.

5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

К таким функциям принято относить логарифмы, показательную, степенную, корни целой степени, гиперболические и тригонометрические.

Логарифм в комплексной области

Определение логарифма комплексной переменной z представим в следующем виде:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z < \pi .$$

Это значение логарифма принято называть главным.

Общую функцию принято обозначать Ln z:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k).$$

Показательная функция

Пусть $z = \mathrm{Ln}\, w$. Тогда показательную функцию определим как обратную логарифму и примем обозначение:

$$w = e^z .$$

Заметим, что данные ранее определения этой функции и рассматриваемое здесь не противоречат друг другу. Однако, принимая $w = e^z$, мы теперь не нуждаемся в допущении $e^x e^{iy} = e^{x+iy}$, так как это соотношение следует из основного свойства логарифма:

$$\mathrm{Ln}(e^x e^{iy}) = x + iy + 2\pi i k .$$

Показательная функция e^z определена и однозначна для всех точек комплексной плоскости, кроме $z = \infty$. В этом можно убедиться, если представить e^z в алгебраической форме $u+iv$:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) .$$

Обобщенная степенная функция

Для произвольного числа a можно дать определение степенной функции, используя свойства логарифма:

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Изученные выше свойства логарифма позволяют установить многозначность этой функции для рациональных значений a. Представим степенную функцию в развернутом виде:

$$w = e^{a(\ln|z| + i \operatorname{Arg} z)}.$$

Если a является иррациональной или комплексной величиной, то степенная функция принимает бесконечное число значений. Точки разветвления имеют значения $z = 0,\ z = \infty$.

Гиперболические функции

Функции $\operatorname{ch} z,\ \operatorname{sh} z$ определены как линейная комбинация показательной функции:

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right), \quad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right),$$

$$\operatorname{ch}(nz) = \frac{1}{2}\left\{(\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z)^n + (\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z)^n\right\},$$

$$\operatorname{sh}(nz) = \frac{1}{2}\left\{(\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z)^n - (\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z)^n\right\}.$$

Тригонометрические функции

Из формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ следует, что тригонометрические функции вещественной переменной можно выразить через показательную функцию:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right). \qquad (10)$$

На основе этих формул определим следующие функции, полагая, что угол φ может быть комплексной переменной:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \quad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

Можно отметить существенное внешнее сходство с определением гиперболических функций. Из (10) непосредственно следуют формулы, отражающие глубокую связь указанных функций:

$$\operatorname{ch}(iz) = \cos z, \ \operatorname{sh}(iz) = i\sin z .$$

Заменяя z на iz, получим симметричную запись этих формул:

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z, \ \sin(iz) = i\operatorname{sh} z .$$

Очевидно, на основе полученных результатов можно преобразовать любые формулы, содержащие гиперболические функции, в аналогичные формулы для тригонометрических функций:

$$\operatorname{sh}(2iz) = 2\operatorname{ch}(iz)\operatorname{sh}(iz), \ \sin 2z = 2\cos z \sin z .$$

Подобные преобразования являются взаимными.

Тригонометрические функции определены, непрерывны и аналитические во всей открытой плоскости z. Они имеют действительный период 2π:

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \ \sin(z + 2\pi) = \sin z .$$

Наиболее примечательным свойством $\cos z$, $\sin z$ является явное представление обратных функций $w = \arccos z$ и $w = \arcsin z$, которое не могло быть получено в анализе. По определению имеем $z = \cos w = \frac{1}{2}\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)$. Для переменной $\zeta = e^{iw}$ запишем уравнение: $\zeta^2 - 2z\zeta + 1 = 0$. Его решение: $\zeta = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$. Тогда для обратной тригонометрической функции получим:

$$\arccos z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Следовательно, обратные тригонометрические функции имеют бесчисленное множество значений. Ветви этих функций отличаются друг от друга в одинаковых точках на величину $2\pi k$, где k – целое.

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пример. Вычислим интеграл $J = \int\limits_L e^{\lambda\xi} d\xi$ по линии, соединяющей точки a, b с ориентацией от $a \to b$ (при этом $e^{\lambda\xi}$ – аналитическая функция). Первообразная подынтегральной функции $e^{\lambda\xi}$ имеет вид $F(\xi) = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda\xi} + C$. Поэтому интеграл равен разности значений первообразной в концевых точках линии интегрирования: $J = F(b) - F(a) = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda b} - e^{\lambda a})$.

УПРАЖЕННИЯ

1. Вычислить

1	$\frac{(-1+i)^{17}}{1+\sqrt{3}\cdot i^3}$	2	$\frac{(1+i)^7}{(1-i)^8}+i^{25}$	3	$\frac{(-1+i^3)^{17}}{1+2i}$
4	$\frac{(2-2i^5)^7}{(1+i)^8}$	5	$\frac{(i^3+\sqrt{3}\cdot i)^6}{3-2i}$	6	$\frac{(1+i^5)^7}{3+2i}$
7	$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{1+i}\right)^{60}$	8	$\frac{\sqrt{3}-i}{(1+i)^{20}}$	9	$\left(\frac{1+\sqrt{3}\cdot i}{1-i}\right)^{20}$
10	$\frac{5i^9}{(-2-2i)^5}$	11	$\frac{2i^3}{(3+3i)^6}$	12	$\frac{3-3i}{\left(-1-\sqrt{3}\cdot i\right)^6}$
13	$\frac{(1-i)^4}{(-2+2\sqrt{3}\cdot i)^6}$	14	$\frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8}$	15	$\frac{-5+5i}{(1+\sqrt{3}\cdot i)^3}$

16	$\dfrac{i^{17}}{(-\sqrt{3}+3i^3)^6}$	17	$\dfrac{(1+i^3)^4}{(-3+\sqrt{3}\cdot i^3)^9}$	18	$\dfrac{(-1+i^{15})^2}{(-\sqrt{3}+i^5)^{12}}$
19	$\dfrac{(1+i^3)^4}{(-\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot i)^9}$	20	$\dfrac{(-1+i^7)^2}{(\sqrt{3}-i^5)^{12}}$	21	$\dfrac{1+i^{17}}{(-3+\sqrt{3}\cdot i^3)^6}$
22	$\dfrac{2-2i}{\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)^6}$	23	$\dfrac{2i^{13}}{(\sqrt{3}+3i)^6}$	24	$\dfrac{5i^{11}}{(-2+2i^3)^5}$
25	$\dfrac{-4+5i}{(1+\sqrt{3}\cdot i)^3}$	26	$\dfrac{(1+i^5)^{10}}{(1+i^3)^8}$	27	$\dfrac{(1-i)^4}{(-1+\sqrt{3}\cdot i)^6}$
28	$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\cdot i}{\sqrt{3}-i}\right)^{18}$	29	$\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2\sqrt{3}+2i}\right)^{60}$	30	$\dfrac{(\sqrt{3}-i)^6}{(1+\sqrt{3}\cdot i)^{18}}$

2. Найти все решения уравнения, представить в тригонометрической, показательной формах и изобразить на комплексной плоскости.

1	$w^6=-3-\sqrt{3}\cdot e^{-\pi i/2}$	2	$w^3=8(-1-i)$	3	$w^6=-3-\sqrt{3}\cdot i$
4	$w^4=\sqrt{3}-e^{\pi i/2}$	5	$w^6=-6-2\sqrt{3}\cdot i$	6	$w^4=\sqrt{3}-e^{-\pi i/2}$
7	$w^4=2\sqrt{3}-6e^{\pi i/2}$	8	$w^5=e^{\pi i}+\sqrt{3}\,i$	9	$w^6=2\sqrt{3}-6e^{\pi i/2}$
10	$w^4=\sqrt{3}\cdot e^{2\pi i}-i$	11	$w^8=-1+e^{\pi i/2}$	12	$w^4=-\sqrt{3}\cdot e^{-2\pi i}-i$
13	$w^6=\sqrt{3}-i$	14	$w^7=e^{\pi i}+\sqrt{3}\cdot i$	15	$w^6=-\sqrt{3}-i$
16	$w^6=8(-1-e^{-\pi i/2})$	17	$w^5=\sqrt{3/2}-\sqrt{1/2}\cdot i$	18	$w^6=8(-1+e^{-\pi i/2})$
19	$w^3=(e^{\pi i}+e^{-\pi i/2})$	20	$w^5=-e^{\pi i}-\sqrt{3}\cdot i$	21	$w^3=(e^{\pi i}+e^{-\pi i/2})$
22	$w^8=-1$	23	$w^5=-1-\sqrt{3}\cdot e^{\pi i/2}$	24	$w^5=-1$
25	$w^4=\sqrt{3}-3i$	26	$w^5=+1-\sqrt{3}\cdot i$	27	$w^6=\sqrt{3}-3i$
28	$w^4=-1$	29	$w^2=2\sqrt{3}-6e^{\pi i/2}$	30	$w^6=-1$

3. Найти и изобразить на рисунке множество точек.

1	$\lvert 2z-2-3i\rvert > \lvert z-6-2i\rvert$	2	$\lvert z-8-2i\rvert > \lvert z-5-3i\rvert$
3	$2\lvert z-8-2i\rvert > \lvert z-5-3i\rvert$	4	$2\lvert z-2-3i\rvert > \lvert z-6-2i\rvert$
5	$\lvert z\rvert^2 - 2\lvert z\rvert - 3 > 0$	6	$\lvert z\rvert^2 - 4\lvert z\rvert - 2 > 0$
7	$\mathrm{Re}[2/(z-2-3i)] > 1$	8	$\mathrm{Re}[3/(z-2-2i)] > 2$
9	$\mathrm{Im}[(z-3i)/(z+1)] > 1$	10	$\mathrm{Im}[(z-2i)/(z+4i)] > 2$
11	$\mathrm{Re}[(z-2i)/(z+2i)] > 0$	12	$\mathrm{Re}[(z-3i)/(z+i)] > 0$
13	$\lvert z\rvert^2 - 6\lvert z\rvert + 3 > 0$	14	$\lvert z\rvert^2 - 6\lvert z\rvert - 7 < 0$
15	$\lvert 2z-2-i\rvert > \lvert z-3-2i\rvert$	16	$\lvert z-4-3i\rvert > \lvert z-6-5i\rvert$
17	$3\lvert z-4-3i\rvert > \lvert z-6-5i\rvert$	18	$2\lvert z-2-i\rvert > \lvert z-3-2i\rvert$
19	$\mathrm{Re}[1/(z-3-3i)] > 3$	20	$\mathrm{Re}[3/(2z-1-2i)] > 2$
21	$\mathrm{Im}[(z-2i)/(z+4)] > 3$	22	$\mathrm{Im}[(z-2i)/(z+3i)] > 1$
23	$\mathrm{Re}[(z-3i)/(z+i)] > 0$	24	$\mathrm{Re}[(z-4i)/(z+2)] > 0$
25	$\lvert z\rvert^2 - 8\lvert z\rvert - 9 < 0$	26	$\lvert z\rvert^2 - 6\lvert z\rvert - 7 < 0$
27	$\lvert 2z-1-3i\rvert > \lvert z-3-4i\rvert$	28	$\lvert z-7-2i\rvert > \lvert z-3-3i\rvert$
29	$2\lvert z-7-2i\rvert > \lvert z-3-3i\rvert$	30	$2\lvert z-1-3i\rvert > \lvert z-3-4i\rvert$

4. Вычислить.

1	$\mathrm{Ln}\left(-6+2\sqrt{3}\cdot i\right)$	$\left(2-\sqrt{12}\cdot i\right)^{-1+2i}$	$\cos(-3+2i)$
2	$\mathrm{Ln}\left(-2\sqrt{3}+6i\right)$	$\arcsin\left\{(1+i)^2\right\}$	$(-1-i)^{-3+2i}$
3	$\mathrm{Ln}\left(-6-2\sqrt{3}\cdot i\right)$	$\arccos\left\{(1+i)^2\right\}$	$(-2-2i)^{-1+2i}$
4	$\mathrm{Ln}\left(3-\sqrt{3}\cdot i\right)$	$\mathrm{ar\,sh}\left\{(2+3i)^2\right\}$	$(-3-\sqrt{9}\cdot i)^{-2+2i}$
5	$\mathrm{Ln}\left(-\sqrt{3}+i\right)$	$\mathrm{ar\,ch}\left\{(-3+i)^2\right\}$	$(\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i)^{-3+2i}$
6	$\mathrm{Ln}\left(-2i^2+2i\right)$	$\mathrm{tg}(3+4i)$	$(3-\sqrt{3}\cdot i)^{-3+2i}$
7	$\mathrm{Ln}\left(-3-\sqrt{3}\cdot i\right)$	$\mathrm{th}(2-3i)$	$(\sqrt{2}-\sqrt{6}\cdot i)^{-2+i}$

8	$\mathrm{Ln}\left(-1-i\right)$	$\sin\left\{(2+i)^2\right\}$	$(-\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i)^{-2+2i}$
9	$\mathrm{Ln}\left(-2+3i\right)$	$\mathrm{sh}\left\{(2+i)^2\right\}$	$(-5-\sqrt{75}\cdot i)^{-3-2i}$
10	$\mathrm{Ln}\left(-\sqrt{3}+3i\right)$	$\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i\right)^{-2+3i}$	$\cos(-\pi/4+3i)$
11	$\mathrm{Ln}\left(-\sqrt{3}+2i\right)$	$\arcsin\left\{(1+2i)^2\right\}$	$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\cdot i\right)^{-1+i}$
12	$\mathrm{Ln}\left(-\sqrt{3}-3i\right)$	$\arccos\left\{(1-2i)^2\right\}$	$\left(-3-\sqrt{3}\cdot i\right)^{-4+2i}$
13	$\mathrm{Ln}\left(-\sqrt{3}+4i\right)$	$\mathrm{ar\,sh}\left\{(-2+2i)^2\right\}$	$\left(-\sqrt{6}-\sqrt{2}\cdot i\right)^{-1-3i}$
14	$\mathrm{Ln}\left(-2+3i\right)$	$\mathrm{ar\,ch}\left\{(3+2i)^2\right\}$	$\left(-2-\sqrt{4}\cdot i\right)^{-1+3i}$
15	$\mathrm{Ln}(-4-3i)$	$\mathrm{tg}(3+4i)$	$\left(\sqrt{3}-i\right)^{-1+4i}$
16	$\mathrm{Ln}(-2+6i)$	$\mathrm{th}(2-3i)$	$(-2-2i)^{-2+2i}$
17	$\mathrm{Ln}(-3-3i)$	$\sin\left\{(2+i)^2\right\}$	$\left(2-\sqrt{4}\cdot i\right)^{-1-3i}$
18	$\mathrm{Ln}(-4+6i)$	$\mathrm{sh}\left\{(2+i)^2\right\}$	$\left(-\sqrt{2}-\sqrt{6}\cdot i\right)^{-1-3i}$
19	$\mathrm{Ln}(-1+5i)$	$\sin\left\{(2+i)^2\right\}$	$\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot i\right)^{-1+2i}$
20	$\mathrm{Ln}(-5-2i)$	$\left(-3-\sqrt{3}\cdot i\right)^{-2-3i}$	$\cos(-3\pi/2+2i)$
21	$\mathrm{Ln}(-2-\sqrt{3}\,i)$	$\arcsin\left\{(2+i)^2\right\}$	$\left(-4-\sqrt{48}\cdot i\right)^{-1+3i}$
22	$\mathrm{Ln}(-3-2i)$	$\arccos\left\{(2+i)^2\right\}$	$\left(3-\sqrt{3}\cdot i\right)^{-4+2i}$
23	$\mathrm{Ln}(-2+\sqrt{3}\cdot i)$	$\mathrm{ar\,sh}\left\{(-31+2i)^2\right\}$	$\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\cdot i\right)^{-1-2i}$
24	$\mathrm{Ln}(-3+\sqrt{3}\cdot i^3)$	$\mathrm{ar\,ch}\left\{(-1+2i)^2\right\}$	$\left(-3-\sqrt{9}\cdot i\right)^{-2+2i}$
25	$\mathrm{Ln}(-4-3i)$	$\mathrm{tg}(3+4i)$	$\left(-3-\sqrt{3}\cdot i\right)^{-3+2i}$
26	$\mathrm{Ln}(-1+5i)$	$\mathrm{th}(2-3i)$	$\left(-1-\sqrt{3}\cdot i\right)^{-1+2i}$

27	$\mathrm{Ln}(-\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot i)$	$\sin\left\{(2+i)^2\right\}$	$\left(\sqrt{3}-3i\right)^{-1-3i}$
28	$\mathrm{Ln}(-2+\sqrt{2}\cdot i)$	$\mathrm{sh}\left\{(2+i)^2\right\}$	$\left(3-\sqrt{3}\cdot i\right)^{-3+2i}$
29	$\mathrm{Ln}(-3-\sqrt{6}\cdot i)$	$\mathrm{sh}\left\{(2+i)^2\right\}$	$\left(-2-\sqrt{12}\cdot i\right)^{-2-3i}$
30	$\mathrm{Ln}(-6-\sqrt{12}\cdot i)$	$(-5+\sqrt{75}\cdot i)^{-1-i}$	$\cos(-\pi/4+3i)$

5. Проверить аналитичность функций комплексной переменной.

1	$f=z\,\mathrm{sh}(z+2)$	2	$f=e^z(\overline{z}+3i)$	3	$f=(\mathrm{Im}\,z)\sin z$
4	$f=z\sin(\overline{z}+1)$	5	$f=\overline{z}\,\mathrm{sh}(z+2)$	6	$f=e^z(2\overline{z}+3)$
7	$f=z^2\sin z$	8	$f=z\sin(z+1)^2$	9	$f=z\,\mathrm{sh}(z+2\overline{z})$
10	$f=e^z(\overline{z}+3i)$	11	$f=z\,\mathrm{sh}(z+2)$	12	$f=(\mathrm{Re}\,z)\sin z$
13	$f=z\,\mathrm{sh}(z^2+2)$	12	$f=e^z\cos(z-1)$	14	$f=z\cos(z+2\overline{z})$
16	$f=(z+\overline{z})\sin z$	17	$f=z\,\mathrm{ch}(z+2i)$	18	$f=z\sin(z+2\overline{z})$
19	$f=e^{z-i}\cos z$	20	$f=e^z(\overline{z}+3i)$	21	$f=z\,\mathrm{sh}(z^2+2)$
22	$f=(z+\overline{z})\cos z$	23	$f=z\,\mathrm{sh}(z+2)$	24	$f=e^z(\overline{z}+3i)$
25	$f=z^2\,\mathrm{ch}(z+2)$	26	$f=e^z\cos(z+2i)$	27	$f=(2z+\overline{z})\cos z$
28	$f=e^z(\overline{z}+3i)$	29	$f=z\,\mathrm{sh}(2z+i)$	30	$f=e^z\cos(z+1)$

6. Является ли заданная функция $u(x, y)$ (или $v(x, y)$) действительной (или мнимой) частью аналитической функции $f(z)=u(x, y)+$ $+iv(x, y)$? Если да, то найти $f(z)$, удовлетворяющую указанному условию.

1	$u=x^3-3xy^2;$ $\quad f(0)=0$	2	$v=x^3+3xy^2$ $\quad f(0)=0$
3	$u=\ln(x^2+y^2)$ $\quad f(1)=0$	4	$v=\mathrm{arc\,tg}\,y/x$ $\quad f(1)=0$
5	$u=x^2+2y^2+x$ $\quad f(0)=0$	6	$v=xy+y$ $\quad f(0)=0$
7	$u=2xy$ $\quad f(1)=i$	8	$v=x^2+y^2$ $\quad f(0)=0$
9	$u=x^2-y^2+y$ $\quad f(0)=0$	10	$v=2xy-x$ $\quad f(1)=0$

11	$u = x^2 - y^2 - y$ $\quad f(1) = i$	12	$v = -e^x \sin y$ $\quad f(0) = 0$
13	$u = e^x \cos y$ $\quad f(1) = i$	14	$v = \operatorname{ch} x \sin y$ $\quad f(0) = 0$
15	$u = \operatorname{sh} x \cos y$ $\quad f(1) = 0$	16	$v = x^3 + 2xy^2$ $\quad f(1) = 0$
17	$u = \cos x \operatorname{ch} y$ $\quad f(1) = i$	18	$v = \cos x \operatorname{sh} y$ $\quad f(0) = 0$
19	$u = x^3 + 3xy$ $\quad f(1) = 0$	20	$v = e^{-x} \cos y$ $\quad f(1) = 0$
21	$u = e^{-y} \cos x$ $\quad f(1) = i$	22	$v = e^x \cos y$ $\quad f(1) = 0$
23	$u = \sin y \operatorname{ch} x$ $\quad f(1) = 0$	24	$v = -x(y-5)$ $\quad f(0) = 0$
25	$u = x(y+2)$ $\quad f(1) = 0$	26	$v = 5xy - 6x$ $\quad f(1) = 0$
27	$u = y(2x+1)$ $\quad f(1) = i$	28	$v = e^{-y} + \cos x$ $\quad f(0) = 0$
29	$u = y^3 + 3xy^2$ $\quad f(1) = 0$	30	$v = e^{-y} \sin x$ $\quad f(0) = 0$

7. Найти точки ветвления функции и определить их порядок.

1	$f(z) = \sqrt{z^2 - (1+i)z + i}$	2	$f(z) = \sqrt{(1-z^2)(4-z^2)}$
3	$f(z) = \sqrt{z^2 + 5}$	4	$f(z) = \sqrt[4]{(z+i)^3 (z-i)}$
5	$f(z) = z^{1/2} \operatorname{Ln}(z-5)$	6	$f(z) = \sqrt[3]{(z+1)^2 (z-2i)}$
7	$f(z) = \sqrt[3]{z-5}$	8	$f(z) = z^{3/2} \operatorname{Ln}(z-3)$
9	$f(z) = \sqrt{z(-5+z)}$	10	$f(z) = (z+5)\sqrt{\sin z}$
11	$f(z) = \operatorname{Ln}\left(z(z-3)\right)$	12	$f(z) = \sqrt[3]{z^2} + \sqrt[5]{z}$
13	$f(z) = \sqrt[4]{z^3} + \sqrt[3]{z}$	14	$f(z) = \ln(iz+1)$
15	$f(z) = \sqrt{z^2 + 4}$	16	$f(z) = \sqrt{z(5+z)}$
17	$f(z) = \sqrt[3]{z^2 + 4}$	18	$f(z) = \ln(iz)$
19	$f(z) = (z-5)\sqrt{\operatorname{ch} z}$	20	$f(z) = \sqrt[4]{(z-2)^3 (z-2i)}$
21	$f(z) = \sqrt{z} + \sqrt[4]{z}$	22	$f(z) = \sqrt[4]{(z^2+4)} + \sqrt{z+2i}$
23	$f(z) = \sqrt[3]{z(z+i)^2}$	24	$f(z) = \sqrt[3]{(z-1)^2} + \sqrt{z^2 - 1}$

25	$f(z)=\sqrt[5]{z^4(z-1)^3(z+1)}$	26	$f(z)=(z-5)\sqrt{\operatorname{sh} z}$
27	$f(z)=\sqrt{\operatorname{ch}^2 z+\operatorname{sh}^2 z}$	28	$f(z)=\operatorname{Ln}\left(z^2(z-3)\right)$
29	$f(z)=\sqrt{z(-5-z)}$	30	$f(z)=\sqrt{\cos^2 z-\sin^2 z}$

8. Проверить конформность отображения, осуществляемого функцией $w(z)$.

1	$w=2z^4+z \quad z_0=i$	2	$w=\dfrac{1}{(iz+2)^2} \quad z_0=-2$
3	$w=3z^2 \quad z_0=-1$	4	$w=(1-i)\ln\left(\sqrt{3}-1\right) \quad z_0=i$
5	$w=\ln(z-i) \quad z_0=-1$	6	$w=5z^2+4 \quad z_0=i$
7	$w=(z+i)^3 \quad z_0=1$	8	$w=\dfrac{i}{z-3} \quad z_0=-3i$
9	$w=\dfrac{1+iz}{1-iz} \quad z_0=i$	10	$w=\dfrac{z+2}{z-2} \quad z_0=2i$
11	$w=\dfrac{z-i}{z+i} \quad z_0=-1$	12	$w=\dfrac{1+i}{z-i} \quad z_0=-1$
13	$w=z^2+3z \quad z_0=\dfrac{3}{2}i$	14	$w=e^{2iz-1} \quad z_0=1-i$
15	$w=z^2+2z-2i \quad z_0=i$	16	$w=\ln(iz-2) \quad z_0=2$
17	$w=e^{z+1+i} \quad z_0=-2$	18	$w=\dfrac{1}{(1+iz)^2} \quad z_0=-1$
19	$w=i\ln(z+2i) \quad z_0=-2$	20	$w=(z-i)^2+2iz \quad z_0=i-1$
21	$w=\left(z-\sqrt{3}\right)^3+\sqrt{3}\cdot i \quad z_0=-i$	22	$w=i(z-1)^2-z \quad z_0=0$
23	$w=(z-i)^4 \quad z_0=-1$	24	$w=(iz+1)^2 \quad z_0=1$
25	$w=z^4+i \quad z_0=1+\sqrt{3}\cdot i$	26	$w=\ln(iz+4) \quad z_0=-4$
27	$w=iz^3+2 \quad z_0=-i$	28	$w=iz^2+2z \quad z_0=-1$
29	$w=\dfrac{1}{(1+i)^3} \quad z_0=-1$	30	$w=iz^3 \quad z_0=1-i$

9. Найти образ множества D при отображении с помощью функции $w(z)$.

1	$w=(z+2)/(z-2)$, $D=\{\lvert z\rvert<1\}$	2	$w=1/z$, $D=\{\lvert z-1\rvert<1\}$
3	$w=(z+1/z)/2$, $D=\{\lvert z\rvert<1/2\}$	4	$w=1/z$, $D=\{\lvert z\rvert<1\}$
5	$w=z+e^{z}$, $D=\{-\pi<\operatorname{Im} z<\pi\}$	6	$w=\operatorname{ch} z$, $D=\{0<\operatorname{Im} z<\pi\}$
7	$w=\operatorname{sh} z$, $D=\{-\pi<\operatorname{Im} z<\pi,\quad \operatorname{Re} z>0\}$	8	$w=\cos z$, $D=\{-\pi<\operatorname{Re} z<\pi,\quad \operatorname{Im} z>0\}$
9	$w=3\mathrm{e}^{iz}$, $D=\{0<\operatorname{Re} z<\pi,\quad \operatorname{Im} z>0\}$	10	$w=\mathrm{e}^{2iz}$, $D=\{0<\operatorname{Re} z<\pi/2,\quad 0<\operatorname{Im} z<1\}$
11	$w=i\ln z$, $D=\{\lvert z\rvert=1,\ 0<\arg z<\pi/2\}$	12	$w=\ln iz$, $D=\{1<\lvert z\rvert<\infty,\quad \pi/2<\arg z<\pi\}$
13	$w=\sin z$, $D=\{-\pi<\operatorname{Re} z<\pi,\quad \operatorname{Im} z>0\}$	14	$w=\operatorname{ch}\pi z$, $D=\{\operatorname{Re} z>0,\quad -1<\operatorname{Im} z<0\}$
15	$w=\operatorname{sh}\pi z$, $D=\{-1<\operatorname{Im} z<1,\quad \operatorname{Re} z>0\}$	16	$w=\sin\pi z$, $D=\{0<\operatorname{Re} z<1,\quad \operatorname{Im} z<0\}$
17	$w=z^2$, $D=\{0<\operatorname{Re} z<1,\quad 0<\operatorname{Im} z<1\}$	18	$w=\frac{1}{2}(1+1/z)$, $D=\{1<\lvert z\rvert<\infty,\ 0<\arg z<\pi/2\}$
19	$w=2z/(z^2+1)$, $D=\{\lvert z\rvert>3\}$	20	$w=\frac{1}{4}(1+1/z)$, $D=\{1<\lvert z\rvert<\infty,\ \ 0<\arg z<\pi/3\}$
21	$w=(3z+2)/(z-2)$, $D=\{\lvert z\rvert<1\}$	22	$w=e^{2z+1}$, $D=\left\{0<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{2},\quad \operatorname{Re} z>-\frac{1}{2}\right\}$
23	$w=1/(z-1)\ \ D=\{\lvert z-2\rvert>2\}$	24	$w=\operatorname{tg}\pi z$, $D=\{0<\operatorname{Re} z<1,\quad \operatorname{Im} z>0\}$

25	$w = z + e^z$, $D = \{-\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$	26	$w = \operatorname{tg} z$ $D = \{-\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4\}$
27	$w = (z+2)/(z+i)$, $D = \{\lvert z\rvert < 1\}$	28	$w = \operatorname{ctg} z$ $D = \{0 < \operatorname{Re} z < \pi/4\}$
29	$w = 2/(z+5)$, $D = \{\lvert z\rvert < 3\}$	30	$w = \operatorname{th} z$ $D = \{-\pi/4 < \operatorname{Im} z < \pi/4\}$

10. Вычислить интеграл: $\int\limits_L f(\varsigma)d\varsigma$

1	$f(\varsigma) = \varsigma e^{i\varsigma} + \varsigma + \sin\varsigma;$	$L:\{\lvert\varsigma\rvert = 2;\quad 0 < \arg\varsigma < \pi\}$
2	$f(\varsigma) = \frac{1}{\varsigma}\ln\varsigma + \frac{\varsigma^2}{\varsigma};$	$L:\{\lvert\varsigma\rvert = 2;\quad 0 \le \arg\varsigma \le \pi\}$
3	$f(\varsigma) = \varsigma^2 \operatorname{Im}\varsigma^2;$	$L:\{\lvert\varsigma\rvert = 1;\quad -\pi \le \arg\varsigma \le 0\}$
4	$f(\varsigma) = e^{\lvert\varsigma\rvert^2} \operatorname{Re}\varsigma;$	$L:\{\varsigma = (1+i)t;\quad 0 \le t \le 1\}$
5	$f(\varsigma) = \ln\varsigma;$	$L:\{\lvert\varsigma\rvert = 1;\quad -\pi \le \arg\varsigma \le \pi\}$
6	$f(\varsigma) = \varsigma^2 \lvert\bar{\varsigma}\rvert;$	$L:\{\lvert\varsigma\rvert = 1;\quad -\pi \le \arg\varsigma \le \pi\}$
7	$f(\varsigma) = \lvert\varsigma^2\rvert\bar{\varsigma};$	$L:\{\lvert\varsigma\rvert = 5;\quad -\pi \le \arg\varsigma \le 0\}$
8	$f(\varsigma) = \frac{1}{\varsigma - 1}\ln(\varsigma - 1);$	$L:\{\varsigma = t(t^3 + i);\quad 0 \le t \le 1\}$
9	$f(\varsigma) = \frac{1}{\varsigma}\ln^3\varsigma;$	$L:\left\{\lvert\varsigma\rvert = 1;\quad 0 \le \arg\varsigma \le \frac{\pi}{2}\right\}$
10	$f(\varsigma) = \varsigma e^{\varsigma};$	$L:\left\{\lvert\varsigma\rvert = 1;\quad 0 \le \arg\varsigma \le \frac{\pi}{4}\right\}$
11	$f(\varsigma) = \frac{1}{\sqrt[4]{\varsigma^3}},\quad \sqrt[4]{1^3} = 1;$	$L:\{\lvert\varsigma\rvert = 1;\quad 0 \le \arg\varsigma \le \pi\}$
12	$f(\varsigma) = (1+i)\varsigma - 2\varsigma;$	$L:\{\lvert\varsigma\rvert = t(1+it);\quad 0 \le t \le 1\}$

13	$f(\varsigma)=\dfrac{1}{\varsigma-i};$	$L:\{\lvert\varsigma\rvert=2;\quad -\pi\le\arg\varsigma\le\pi\}$
14	$f(\varsigma)=(\bar{\varsigma})^3\varsigma;$	$L:\left\{\lvert\varsigma\rvert=2;\quad 0\le\arg\varsigma\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$
15	$f(\varsigma)=\bar{\varsigma}\operatorname{Re}\varsigma^3;$	$L:\left\{\lvert\varsigma\rvert=t(1+it^3);\quad 0\le t\le 2\right\}$
16	$f(\varsigma)=\varsigma\operatorname{Im}(\bar{\varsigma})^2;$	$L:\{\lvert\varsigma\rvert=t(1-it);\quad 0\le t\le 1\}$
17	$f(\varsigma)=\dfrac{1}{\varsigma}\ln^2\varsigma;$	$L:\left\{\lvert\varsigma\rvert=5;\quad \dfrac{\pi}{2}\le\arg\varsigma\le\pi\right\}$
18	$f(\varsigma)=\varsigma^2\lvert\varsigma\rvert;$	$L:\{\varsigma=(2-i)t;\quad 0\le t\le 1\}$
19	$f(\varsigma)=\varsigma^2+\bar{\varsigma};$	$L:\{\lvert\varsigma\rvert=1;\quad 0\le\arg\varsigma\le\pi\}$
20	$f(\varsigma)=\varsigma^3\bar{\varsigma};$	$L:\left\{\lvert\varsigma\rvert=2;\quad -\dfrac{\pi}{2}\le\arg\varsigma\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$
21	$f(\varsigma)=\varsigma e^{\varsigma^2};$	$L:\left\{\lvert\varsigma\rvert=t(1+it^2);\quad 0\le t\le 1\right\}$
22	$f(\varsigma)=\varsigma^2+\bar{\varsigma}\varsigma^3;$	$L:\left\{\varsigma=t(2t^2+i);\quad 0\le t\le 1\right\}$
23	$f(\varsigma)=\dfrac{\varsigma}{\varsigma^2+1};$	$L:\{\varsigma=t(1-it);\quad 0\le t\le 1\}$
24	$f(\varsigma)=(\bar{\varsigma})^2\operatorname{Im}\varsigma;$	$L:\left\{\varsigma=t(t^3+i);\quad 0\le t\le 1\right\}$
25	$f(\varsigma)=\varsigma\operatorname{Re}\varsigma^2;$	$L:\left\{\varsigma=t(1+2it^2);\quad 0\le t\le 1\right\}$
26	$f(\varsigma)=\bar{\varsigma}\varsigma^2;$	$L:\{\varsigma=t(2+it);\quad -1\le t\le 1\}$
27	$f(\varsigma)=\lvert\varsigma\rvert^3\varsigma;$	$L:\{\varsigma=t(t-i);\quad 0\le t\le 1\}$
28	$f(\varsigma)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{\varsigma^2}},\quad \sqrt[5]{1^2}=1;$	$L:\{\lvert\varsigma\rvert=2;\quad 0\le\arg\varsigma\le\pi\}$
29	$f(\varsigma)=\dfrac{1}{\varsigma}\ln\varsigma;$	$L:\{\lvert\varsigma\rvert=1;\quad 0\le\arg\varsigma\le\pi\}$
30	$f(\varsigma)=(\bar{\varsigma})^3\varsigma;$	$L:\{\varsigma=t(1+2it);\quad 0\le t\le 2\}$

11. Вычислить по теореме Коши о вычетах следующие интегралы:

1	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\lambda\zeta}d\zeta}{\zeta^2-(1+i)\zeta+i}$	$\Gamma: \quad \lvert\zeta-i\rvert=1$
2	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{(\zeta+\lambda)e^{\lambda\zeta}d\zeta}{\zeta^2-2(1+i)\zeta+4i}$	$\Gamma: \quad \lvert\zeta-2\rvert=1$
3	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{\mathrm{sh}\lambda\zeta d\zeta}{\zeta^2-4i\zeta-3}$	$\Gamma: \quad \lvert\zeta-i\rvert=1.5$
4	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{\zeta\,\mathrm{ch}\lambda\zeta d\zeta}{\zeta^2+2(1-i)\zeta-4i}$	$\Gamma: \quad \lvert\zeta-2i\rvert=1$
5	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{\sin\pi(\zeta-i)d\zeta}{\zeta^2-3i\zeta-2}$	$\Gamma: \quad \lvert\zeta-2i\rvert=0.5$
6	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\lambda\zeta}\sin\pi\zeta d\zeta}{\zeta^2-5i\zeta-6}$	$\Gamma: \quad \lvert\zeta-3i\rvert=0.8$
7	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{\zeta e^{\lambda\zeta}d\zeta}{\zeta^2-2(1+i)\zeta+4i}$	$\Gamma: \quad \lvert\zeta-2i\rvert=1$
8	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\lambda\zeta}\cos\zeta d\zeta}{\zeta^2+2(1-i)\zeta-4i}$	$\Gamma: \quad \lvert\zeta+2\rvert=2$
9	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{\mathrm{sh}(\zeta-i)d\zeta}{\zeta^2-3i\zeta-2}$	$\Gamma: \quad \lvert\zeta-2i\rvert=0.6$
10	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{\zeta^2\mathrm{sh}(\zeta-2i)d\zeta}{\zeta^2-5i\zeta-6}$	$\Gamma: \quad \lvert\zeta-3i\rvert=0.8$
11	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{\mathrm{ch}\pi(\zeta-2i)d\zeta}{\zeta^2-4i\zeta-3}$	$\Gamma: \quad \lvert\zeta-i\rvert=0.3$
12	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{\mathrm{sh}\frac{\pi\zeta}{2}d\zeta}{\zeta^2-3i\zeta-2}$	$\Gamma: \quad \lvert\zeta-i\rvert=0.5$
13	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{(\mathrm{ch}\pi\zeta+1)d\zeta}{\zeta^2-(1+i)\zeta+i}$	$\Gamma: \quad \lvert\zeta-1\rvert=1$

14	Вычислить интеграл	$\int\limits_{\Gamma}\frac{(\operatorname{ch}\pi\zeta-1)d\zeta}{\zeta^2-2(1+i)\zeta+4i}$	$\Gamma:\quad \lvert\zeta-2\rvert=1$
15	Вычислить интеграл	$\int\limits_{\Gamma}\frac{\sin(\zeta-2)d\zeta}{\zeta^2-2(1+i)\zeta+4i}$	$\Gamma:\quad \lvert\zeta-2i\rvert=1$
16	Вычислить интеграл	$\int\limits_{\Gamma}\frac{(e^{\lambda(\zeta-1)}-1)d\zeta}{\zeta^2-(1+i)\zeta+i}$	$\Gamma:\quad \lvert\zeta-i\rvert=1$
17	Вычислить интеграл	$\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\zeta}d\zeta}{2\zeta^2-1}$	$\Gamma:\quad \lvert\zeta\rvert=1$
18	Вычислить интеграл	$\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\zeta^2}d\zeta}{\zeta^2(\zeta-6)}$	$\Gamma:\quad \lvert\zeta\rvert=8$
19	Вычислить интеграл	$\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\zeta}d\zeta}{\zeta^2-\zeta-12}$	$\Gamma:\quad \lvert\zeta\rvert=5$
20	Вычислить интеграл	$\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{i\zeta}d\zeta}{(\zeta^2+9)^2}$	$\Gamma:\quad \lvert\zeta-3i\rvert=3$
21	Вычислить интеграл	$\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\zeta}d\zeta}{(\zeta-3)(\zeta^2+4)}$	$\Gamma:\quad \lvert\zeta\rvert=4$
22	Вычислить интеграл	$\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\zeta}d\zeta}{i+e^{\zeta}}$	$\Gamma:\quad \lvert\zeta\rvert=6$
23	Вычислить интеграл	$\int\limits_{\Gamma}\frac{(\zeta+i)d\zeta}{(\zeta-i)^2(3\zeta-1)}$	$\Gamma:\quad \lvert\zeta\rvert=2$
23	Вычислить интеграл	$\int\limits_{\Gamma}\frac{\zeta d\zeta}{(\zeta-2)^2(\zeta-i)}$	$\Gamma:\quad \lvert\zeta\rvert=3$
24	Вычислить интеграл	$\int\limits_{\Gamma}\frac{d\zeta}{(\zeta-1)^2(\zeta+1)}$	$\Gamma:\quad \lvert\zeta\rvert=2$
25	Вычислить интеграл	$\int\limits_{\Gamma}\frac{\zeta^2\sin^2\zeta d\zeta}{(\zeta-2)^2(\zeta+i)}$	$\Gamma:\quad \lvert\zeta\rvert=3$
26	Вычислить интеграл	$\int\limits_{\Gamma}\frac{\operatorname{sh}\zeta d\zeta}{\zeta^3(\zeta-1)}$	$\Gamma:\quad \lvert\zeta\rvert=2$

27	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{\sin(\zeta+2)d\zeta}{e^{\zeta}(\zeta+2)^3(\zeta-2)}$	$\Gamma:$	$\lvert\zeta\rvert=3$
28	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{\sin(\zeta+i)d\zeta}{(\zeta+i)^3\zeta}$	$\Gamma:$	$\lvert\zeta\rvert=2$
29	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{\sin(\zeta-1)d\zeta}{(2\zeta+i)^2(\zeta-1)}$	$\Gamma:$	$\lvert\zeta\rvert=2$
30	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{\sin i\zeta d\zeta}{(2\zeta^2+1)\zeta^2}$	$\Gamma:$	$\lvert\zeta\rvert=1$

12. Разложить функцию в ряды Тейлора или Лорана в окрестностях точек a_1, a_2 и точки $a_3=\infty$.

1	$\frac{z}{(z+1)^2(z-2i)}$,	$a_1=3i$, $a_2=-1$
2	$\frac{1}{z(z-3)^2}$,	$a_1=-i$, $a_2=3$
3	$\frac{z-5}{(z^2+25)(z-2i)}$,	$a_1=0$, $a_2=2i$
4	$\frac{z+1}{(z+i)^2(z-2)}$,	$a_1=0$, $a_2=2$
5	$\frac{1}{z^2(z+2)}$,	$a_1=0$, $a_2=2i$
6	$\frac{2z-5i}{z^2-(4+3i)z+12i}$,	$a_1=0$, $a_2=3i$
7	$\frac{1}{z(z-1)^2}$,	$a_1=0$, $a_2=i$
8	$\frac{z+2i}{z^2-6z+5}$,	$a_1=1$, $a_2=3i$
9	$\frac{z}{(1-z)^2}$,	$a_1=i$, $a_2=1$

10	$\dfrac{z-1}{(z+i)^2(z+1)}$,	$a_1 = 0$, $a_2 = -i$
11	$\dfrac{z}{z^2-4}$,	$a_1 = 0$, $a_2 = -2$
12	$\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$,	$a_1 = i$, $a_2 = 3$
13	$\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$,	$a_1 = 0$, $a_2 = i$
14	$\dfrac{z-1}{z(z+2)^2}$,	$a_1 = -2$, $a_2 = -i$
15	$\dfrac{z}{z^2+3iz-2}$,	$a_1 = 0$, $a_2 = -2i$
16	$\dfrac{1}{z^2+9}$,	$a_1 = 3i$, $a_2 = 0$
17	$\dfrac{2z+3}{z^2-3z+2}$,	$a_1 = 1$, $a_2 = 2+2i$
18	$\dfrac{1}{z^2(z-1)}$,	$a_1 = 0$, $a_2 = i$
19	$\dfrac{1}{(z^2+16)^2}$,	$a_1 = 0$, $a_2 = 4i$
20	$\dfrac{1}{z^2-8iz-15}$,	$a_1 = 3i$, $a_2 = 0$
21	$\dfrac{3z+1}{z(z-3i)^2}$,	$a_1 = 3i$, $a_2 = 1$
22	$\dfrac{1}{z(z^2+4)}$,	$a_1 = 0$, $a_2 = 1$
23	$\dfrac{1}{z^2(z+6)}$,	$a_1 = 0$, $a_2 = 1+i$
24	$\dfrac{1}{(z+i)(z-2i)}$,	$a_1 = 0$, $a_2 = 1-i$

25	$\dfrac{z}{(z^2-25)z^2}$,	$a_1=0$, $a_2=i$
26	$\dfrac{z+i}{(z-1)(z^2+9)}$,	$a_1=1$, $a_2=3$
27	$\dfrac{z-i}{(z+1)(z+5i)^2}$,	$a_1=-1$, $a_2=i$
28	$\dfrac{1}{z^2-5iz-4}$,	$a_1=4i$, $a_2=0$
29	$\dfrac{z+5i}{z^2+3z+2}$,	$a_1=-2$, $a_2=0$
30	$\dfrac{z}{(z-1)(z+i)(z-2)}$,	$a_1=1$, $a_2=0$