Решение типового варианта из "Домашнее задание 3 для магистров (лектор Шахов Е.М.)"

Задача 11. Решить краевую задачу

$$-y'' + y = f(x),\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} -x, x \le 0.5 \\ 0, \quad x > 0.5 \end{cases}$$

методом Галеркина (конечных элементов) и аналитически.

Решение. Найдем сначала аналитическое решение. На отрезке [0, 0.5] общее решение уравнения имеет вид $y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x$, а на отрезке [0.5, 1] – $y_2 = C_3 e^x + C_4 e^{-x}$. Константы C_1, C_2, C_3, C_4 определим из граничных условий

$$y(0) = 0 = y_1(0) = C_1 + C_2 \text{ и } y(1) = 0 = y_2(1) = C_3 e + C_4 e^{-1}$$

И условия непрерывности функции y и непрерывности ее производной y' в точке $x = 0.5$

$$y_1(0.5) = y_2(0.5) \text{ и } y_1'(0.5) = y_2'(0.5)$$

Из первого условия получаем

$$C_1 e^{1/2} + C_2 e^{-1/2} - 1/2 = C_3 e^{1/2} + C_4 e^{-1/2}$$

Из второго

$$C_1 e^{1/2} - C_2 e^{-1/2} - 1 = C_3 e^{1/2} - C_4 e^{-1/2}$$

Таким образом, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_3 e + C_4 e^{-1} = 0 \\ C_1 e^{1/2} + C_2 e^{-1/2} - 1/2 = C_3 e^{1/2} + C_4 e^{-1/2} \\ C_1 e^{1/2} - C_2 e^{-1/2} - 1 = C_3 e^{1/2} - C_4 e^{-1/2} \end{cases}$$

Откуда

$$C_1 = \frac{\sqrt{e}(3e-1)}{4(e^2-1)},\ C_2 = -\frac{\sqrt{e}(3e-1)}{4(e^2-1)},\ C_3 = -\frac{e-3}{4\sqrt{e}(e^2-1)},\ C_3 = \frac{(e-3)e^{3/2}}{4(e^2-1)}$$

Окончательно получаем аналитическое решение

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{e}(3e-1)}{4(e^2-1)}\left(e^x - e^{-x}\right) - x, x \in [0, 0.5] \\ \dfrac{\sqrt{e}(e-3)}{4(e^2-1)}\left(-e^x + e^{-x+2}\right) - x, x \in (0.5, 1] \end{cases}$$

Для численного решения используем формулы метода Галеркина, которые для данного уравнения имеют вид

$$a_k y_{k-1} - b_k y_k + c_k y_{k+1} = -F_k\,,\ k = 2,\ \ldots,\ n,\ \ y_1 = 0\,,\ \ y_{n+1} = 0$$

где

$$a_k = \frac{p_{k-1/2}}{\Delta x_{k-1/2}} - \frac{\Delta x_{k-1/2}}{6} q_{k-1/2}\,,\ \ c_k = \frac{p_{k+1/2}}{\Delta x_{k+1/2}} - \frac{\Delta x_{k+1/2}}{6} q_{k+1/2}\,,$$

$$b_k = \frac{p_{k+1/2}}{\Delta x_{k+1/2}} + \frac{p_{k-1/2}}{\Delta x_{k-1/2}} + \frac{1}{3}\left(\Delta x_{k+1/2} q_{k+1/2} + \Delta x_{k-1/2} q_{k-1/2}\right)$$

$$p_{k+1/2} = \frac{1}{\Delta x_{k+1/2}} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} p(x)dx\,,\ \ q_{k+1/2}^{i,j} = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_i \omega_j q(x) dx$$

$$F_k = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f\,\omega_1 dx + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f\,\omega_2 dx = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f\,\omega_k dx$$

Файл, помогающий считать по этим формулами: z11graph3.m (также используется tridiag.m). Результаты расчетов и сравнение с аналитическим решением показаны на рис. 1.

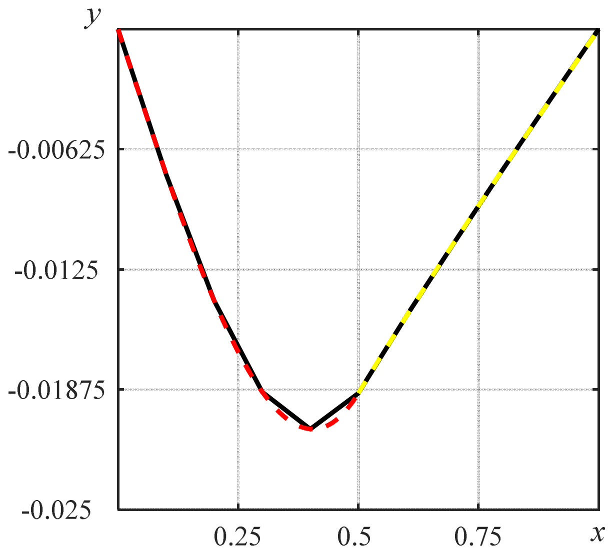


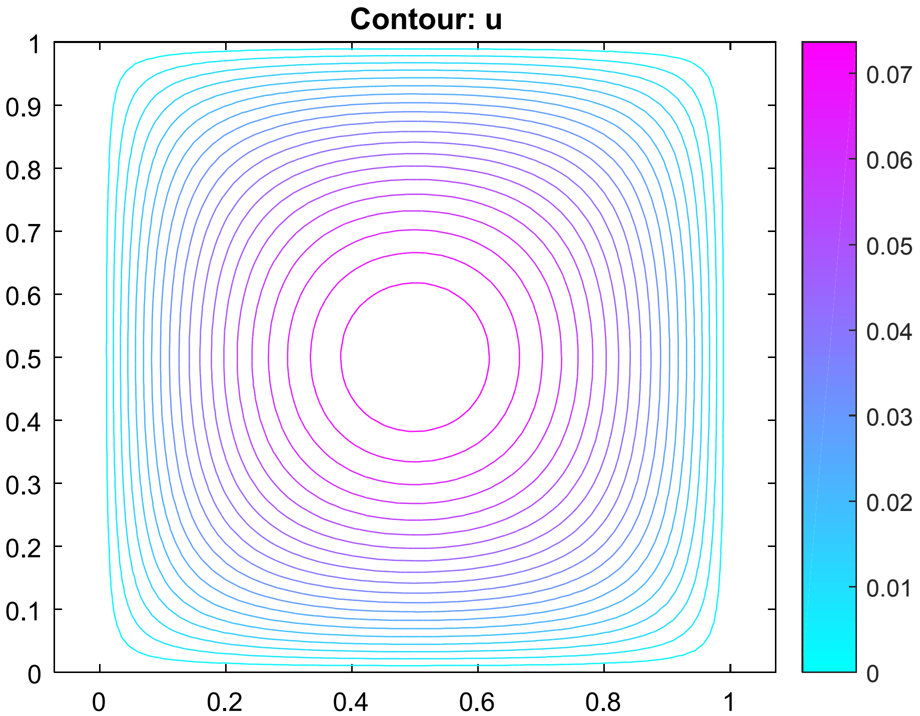
Рис. 1. Результаты расчетов для примера 2; красная пунктирная кривая − точное решение на отрезке [0, 0.5]; желтая пунктирная кривая − точное решение на отрезке [0.5, 1]; черная сплошная − решение, полученное с помощью метода Галеркина (отрезок [0, 1] разбит на 10 равных частей).

Задача 12. Решить задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-1,\ u\big|_{\partial\Omega}=0, (x,y)\in\partial\Omega\ ,\ \Omega=\{(x,y), 0<x,y<1\}$$

Построить линии уровня функции u.

Решение. Подробная инструкция дана в занятии 12. Здесь покажем только результат (файл z12graph1.m).



Список литературы

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – 1989.

2. Федотов А.А., Храпов П.В. Численные методы. Электронное учебное издание. Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу "Численные методы". − 2012.

3. Владимиров В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики. – "Наука" Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1982.

4. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 3: Учебное пособие для втузов /Под общ. ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова. − 4-е изд. перераб. и доп. − М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. − 576 с. − ISBN 5-94052-036-7 (Ч. 3).

5. Марчук Г.И. Методы математической физики. М.Наука. 1980.

6. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: наука, 1987. – Т. 598. – №. 6.3.