

### Домашнее задание 3 для магистров (лектор Шахов Е.М.)

**Задача 11** (6 баллов). Решить краевую задачу

$$-(py')' + qy = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

методом Галеркина (конечных элементов) и аналитически. В численном решении рассмотреть два разбиения отрезка  $[0, 1]$ :

1)  $x_1 = 0, x_2 = c, x_3 = 1$

2)  $x_k = (k-1)/10, k = 1, \dots, 11$ .

В каждом случае сравнить на графике точное и приближенное решение.

Функции  $p, q, f(x)$  и константу  $c$  взять из таблицы.

№	$p$	$q$	$f(x)$	$c$
1	4	16	$\begin{cases} e^x, & x < c \\ 0, & x \geq c \end{cases}$	0.1
2	2	8	$\begin{cases} 0, & x < c \\ e^{-x}, & x \geq c \end{cases}$	0.3
3	3	3	$\begin{cases} x^2, & x < c \\ 0, & x \geq c \end{cases}$	0.5
4	1	4	$\begin{cases} 0, & x < c \\ e^{-2x}, & x \geq c \end{cases}$	0.7

№	$p$	$q$	$f(x)$	$c$
5	4	4	$\begin{cases} x+1, & x < c \\ 0, & x \geq c \end{cases}$	0.8
6	3	12	$\begin{cases} 0, & x < c \\ -x^2, & x \geq c \end{cases}$	0.6
7	2	8	$\begin{cases} x^2 - 1, & x < c \\ 0, & x \geq c \end{cases}$	0.4
8	1	9	$\begin{cases} 0, & x < c \\ xe^{-x}, & x \geq c \end{cases}$	0.2

**Задача 12** (6 баллов). Решить задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y), \quad u|_{\partial\Omega} = \alpha(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega$$

Найти решение конечно-элементным методом с помощью системы MATLAB. Построить линии уровня функции  $u$ .

Во всех вариантах область представляет собой комбинацию прямоугольника ( $\Pi$ ), и двух кругов ( $K_1$  и  $K_2$ ).

№	$f(x, y)$	$\Pi, K_1, K_2$	$\alpha(x, y)$
1	4	Область $\Omega = \Pi + K_1 - K_2$ $\Pi = \{(x, y), 0 < x < 1, -1 < y < 1\}$ $K_1 = \{(x, y), x^2 + (y - 0.5)^2 < 0.25\}$ $K_2 = \{(x, y), (x - 1)^2 + (y + 0.5)^2 < 0.25\}$	$u _{\Pi} = 0$ $u _{K_1} = 0.1$ $u _{K_2} = -0.1$
2	2	Область $\Omega = \Pi - K_1 + K_2$ $\Pi = \{(x, y), 0 < x < 1, -1 < y < 1\}$ $K_1 = \{(x, y), x^2 + (y + 0.5)^2 < 0.25\}$	$u _{\Pi} = 0.1$ $u _{K_1} = 0$ $u _{K_2} = -0.1$

		$K_2 = \{(x, y), (x - 0.5)^2 + (y - 1)^2 < 0.25\}$	
3	3	<p>Область <math>\Omega = \Pi + K_1 + K_2</math></p> <p><math>\Pi = \{(x, y), 0 &lt; x &lt; 2, 0 &lt; y &lt; 1\}</math></p> <p><math>K_1 = \{(x, y), x^2 + (y - 1)^2 &lt; 0.25\}</math></p> <p><math>K_2 = \{(x, y), (x - 1)^2 + y^2 &lt; 0.25\}</math></p>	<p><math>u _{\Pi} = -0.1</math></p> <p><math>u _{K_1} = 0.1</math></p> <p><math>u _{K_2} = 0</math></p>
4	1	<p>Область <math>\Omega = \Pi - K_1 - K_2</math></p> <p><math>\Pi = \{(x, y), -1 &lt; x &lt; 1, -1 &lt; y &lt; 1\}</math></p> <p><math>K_1 = \{(x, y), x^2 + y^2 &lt; 0.25\}</math></p> <p><math>K_2 = \{(x, y), (x - 1)^2 + (y - 1)^2 &lt; 0.25\}</math></p>	<p><math>u _{\Pi} = 0</math></p> <p><math>u _{K_1} = 0.2</math></p> <p><math>u _{K_2} = -0.3</math></p>
5	7	<p>Область <math>\Omega = \Pi + K_1 - K_2</math></p> <p><math>\Pi = \{(x, y), 0 &lt; x &lt; 2, -1 &lt; y &lt; 0\}</math></p> <p><math>K_1 = \{(x, y), (x - 1)^2 + y^2 &lt; 1\}</math></p> <p><math>K_2 = \{(x, y), (x - 1)^2 + y^2 &lt; 0.25\}</math></p>	<p><math>u _{\Pi} = 0.2</math></p> <p><math>u _{K_1} = 0</math></p> <p><math>u _{K_2} = -0.1</math></p>
6	-1	<p>Область <math>\Omega = \Pi + K_1 - K_2</math></p> <p><math>\Pi = \{(x, y), 0 &lt; x &lt; 1, 0 &lt; y &lt; 1\}</math></p> <p><math>K_1 = \{(x, y), (x - 1)^2 + (y - 1)^2 &lt; 1\}</math></p> <p><math>K_2 = \{(x, y), (x - 1)^2 + (y + 1)^2 &lt; 0.25\}</math></p>	<p><math>u _{\Pi} = -0.1</math></p> <p><math>u _{K_1} = 0.1</math></p> <p><math>u _{K_2} = 0</math></p>
7	10	<p>Область <math>\Omega = \Pi - K_1 - K_2</math></p> <p><math>\Pi = \{(x, y), 0 &lt; x &lt; 2, 0 &lt; y &lt; 1\}</math></p> <p><math>K_1 = \{(x, y), x^2 + (y - 0.5)^2 &lt; 0.25\}</math></p> <p><math>K_2 = \{(x, y), (x - 2)^2 + (y - 0.5)^2 &lt; 0.25\}</math></p>	<p><math>u _{\Pi} = 0.3</math></p> <p><math>u _{K_1} = 0</math></p> <p><math>u _{K_2} = -0.3</math></p>
8	-2	<p>Область <math>\Omega = \Pi + K_1 + K_2</math></p> <p><math>\Pi = \{(x, y), 0 &lt; x &lt; 1, 0 &lt; y &lt; 3\}</math></p> <p><math>K_1 = \{(x, y), (x - 0.5)^2 + (y - 3)^2 &lt; 1\}</math></p> <p><math>K_2 = \{(x, y), (x - 0.5)^2 + y^2 &lt; 1\}</math></p>	<p><math>u _{\Pi} = 0.1</math></p> <p><math>u _{K_1} = -0.1</math></p> <p><math>u _{K_2} = 0</math></p>