**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное Бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**«российский государственный аграрный университет –**

**МСха имени К.А. Тимирязева»**  
 **(ФГБОУ ВО ргау - МСХА имени К.А. Тимирязева)**

Кафедра метрологии, стандартизации и управления качеством

**РАСЧЕТНАЯ РАБОТА**

по дисциплине: «Метрология, стандартизация и сертификаций»

на тему:

**«ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ**

**С МНОГОКРАТНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ»**

Вариант \_\_\_\_\_

Выполнил студент(ка)

2 курса, факультет «Энергетический»

группа 204 ЭН

Иванов И.И. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(подпись, дата)

Проверил к.т.н., проф.

Шкаруба Н.Ж. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(подпись, дата)

Москва, 2017

**СОДЕРЖАНИЕ**

[1 ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С МНОГОКРАТНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ (МАЛОЕ ЧИСЛО НАБЛЮДЕНИЙ) 3](#_Toc480979127)

[1.1 Определение систематической погрешности 4](#_Toc480979128)

[1.2 Определение среднего арифметического и оценки СКО исправленных результатов 6](#_Toc480979129)

[1. 3 Проверка результатов измерений на наличие грубых погрешностей 7](#_Toc480979130)

[1.4 Проверка гипотезы о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению 8](#_Toc480979131)

[1.5 Определение доверительных границ случайной погрешности 9](#_Toc480979132)

[1.6 Определение доверительных границ неисключенной систематической погрешности 10](#_Toc480979133)

[1.7 Определение доверительных границ суммарной погрешности результата измерения 12](#_Toc480979134)

[2 ОБРАБОТКА КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С МНОГОКРАТНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ 13](#_Toc480979135)

[2.1 Определение оценки истинного значения искомого параметра 13](#_Toc480979136)

[2.2 Определение оценки среднеквадратического отклонения искомого параметра 14](#_Toc480979137)

[2.3 Определение доверительных границ случайной погрешности 16](#_Toc480979138)

[2.4 Определение доверительных границ неисключенной систематической погрешности 17](#_Toc480979139)

[2.5 Определение доверительных границ суммарной погрешности результата косвенного измерения 18](#_Toc480979140)

[2.6 Определение доверительных границ систематической погрешности результата косвенного измерения 18](#_Toc480979141)

[3 ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С МНОГОКРАТНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ (БОЛЬШОЕ ЧИСЛО НАБЛЮДЕНИЙ) 20](#_Toc480979142)

[3.1 Определение систематической погрешности 21](#_Toc480979143)

[3.2 Построение укрупненного статистического ряда 22](#_Toc480979144)

[3.3 Определение среднего арифметического значения, оценки СКО результатов наблюдений и оценки СКО среднего арифметического 24](#_Toc480979145)

[3.4 Проверка результатов измерений на наличие грубых погрешностей 25](#_Toc480979146)

[3.5 Проверка гипотезы о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению 26](#_Toc480979147)

[3.6 Определение доверительных границ погрешностей результата измерения 28](#_Toc480979148)

[СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 30](#_Toc480979149)

#### 1 ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С МНОГОКРАТНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ (МАЛОЕ ЧИСЛО НАБЛЮДЕНИЙ)

Цифровым измерителем иммитанса Е7-14 проводились прямые многократные измерения сопротивления магазина сопротивлений марки Р33, номинальное значение которого равно 0,1 Ом. Измерения проводились в диапазоне рабочих температур измерителя иммитанса.

Получены результаты измерения *Ri*, мОм.

Проведенные измерения характеризуются неисключенной систематической погрешностью, задаваемой пределом допускаемого значения:

основной погрешности измерения измерителя Е7–14, определяемой по формуле (для диапазона измерения от 0,1 … 1000 мОм)

, (1.1)



где *Q* – добротность катушки сопротивления (для данного магазина сопротивлений добротность *Q* = 0); *Rk* – конечное значение диапазона, Ом;

дополнительной погрешности измерения в диапазоне рабочих темпера­тур, которая задана формулой

, (1.2)



где *k* – множитель, определяемый по таблице 6.1 [1].

Для устранения влияния соединительных проводов и переходных со­противлений контактов был проведен ряд измерений при нулевом значе­нии магазина сопротивлений. Получены результаты измере­ния *R*0*i*, мОм.

Требуетсяпровести обработку результатов наблюдений:

− определить и исключить систематические погрешности;

− для исправленных результатов наблюдений вычислить сред­нее арифметическое значение, оценку СКО результатов наблюдений и оценку СКО среднего арифметического;

− проверить результаты измерений на наличие грубых по­грешностей и промахов;

− проверить гипотезу о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению;

− вычислить доверительные (интервальные) границы случай­ной погрешности результата измерения;

− вычислить границы неисключенной систематической погрешности θ;

− вычислить доверительные границы суммарной погрешности результата измерения и записать результат измерения.

Уровень значимости проверки гипотез принять *q* = 0,05, доверительные границы при расчете погрешностей *Рд* = 0,95.

*Исходные данные:*

− результаты измерения *Ri*: 145,44; 145,36; 145,43; 145,38; 145,44; 145,42; 45,41; 145,39; 145,40; 145,41; 145,45; 145,43; 145,46; 145,37; 145,48; 145,48 мОм.

− результаты измере­ния *R*0*i*: 45,30; 45,29; 45,28; 45,31 45,26 мОм.

#### 1.1 Определение систематической погрешности

Систематическая погреш­ность измерения сопротивления состоит из трех составляющих, обус­ловленных:

ненулевым значением сопротивления соединительных проводов и пе­реходных контактов зажимов используемых средств измерений;

основной и дополнительной погрешностями измерителя иммитанса Е7−14.

Первая из них может быть оценена исходя из данных измерений нуле­вого сопротивления магазина. Полученный ряд данных характеризуется средним арифметическим значением и оценкой его СКО:

; (1.3)



, (1.4)



где *n* – количество измерений; – среднее арифметическое значение нулевого сопротивления магазина, мОм; – оценка СКО нулевого сопротивления магазина, мОм.



Для удобства расчетов составим таблицу 1.1.

Таблица 1.1 − Расчет среднего арифме­тического значения и оценки СКО сопротивления соединительных проводов и пе­реходных контактов зажимов

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *R*0*i* |  |  |
| 45,26 | -0,028 | 0,000784 |
| 45,28 | -0,008 | 0,000064 |
| 45,29 | 0,002 | 0,000004 |
| 45,30 | 0,012 | 0,000144 |
| 45,31 | 0,022 | 0,000484 |
| Σ*R*0*i* = 226,44 |  | 0,0148 |

мОм;





Сопротивление проводов постоянно присутствует в результатах изме­рений и по своей сути является систематической погрешностью, которая может быть исключена из результатов измерений путем введения поправ­ки, равной θ = –45,288 мОм.

После введения поправки получается исправленный ряд значений сопро­тивления *R*и*i*: 100,072; 100,082; 100,092; 100,102; 100,112; 100,122; 100,122; 100,132; 100,142; 100,142; 100,152; 100,152; 100,162; 100,172; 100,192; 100,192 мОм.

#### 1.2 Определение среднего арифметического и оценки СКО исправленных результатов

Среднее арифме­тическое исправленных значений сопротивления и его оценку СКО определяем по формуле:

; (1.5)



. (1.6)



где *Rиi* – значений сопро­тивления исправленного ряда, мОм; – оценка СКО среднего арифметического исправленных значений сопротивления, мОм.



Для удобства расчетов составим таблицу 1.2.

Таблица 1.2 − Расчет среднего арифме­тического значения и оценки СКО сопротивления магазина сопротивлений (по исправленному ряду значений)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Rиi* |  |  |
| 100,072 | -0,058 | 0,003364 |
| 100,082 | -0,048 | 0,002304 |
| 100,092 | -0,038 | 0,001444 |
| 100,102 | -0,028 | 0,000784 |
| 100,112 | -0,018 | 0,000324 |
| 100,122 | -0,008 | 0,000064 |
| 100,122 | -0,008 | 0,000064 |
| 100,132 | 0,002 | 0,000004 |
| 100,142 | 0,012 | 0,000144 |
| 100,142 | 0,012 | 0,000144 |
| 100,152 | 0,022 | 0,000484 |
| 100,152 | 0,022 | 0,000484 |
| 100,162 | 0,032 | 0,001024 |
| 100,172 | 0,042 | 0,001764 |
| 100,192 | 0,062 | 0,003844 |
| 100,192 | 0,062 | 0,003844 |
| Σ*Rиi* = 1602,14 |  | 0,02008 |

мОм;



мОм.



Оценка СКО исправленных результатов измерений определяем по формуле:

; (1.7)



мОм.



#### 1. 3 Проверка результатов измерений на наличие грубых погрешностей

Для проверки результатов измерений на наличие грубых погрешностей используем критерий Романовского.

Вычисляем отношение

 (1.8)

и полученное значение β сравниваем с теоретическим βт при заданном уровне значимости *q* (табл. 6.7) [1]. Если полученное значение β ≥ βт, результат измерения исключают и проверяют следующий и т.д. По новой выборке заново проводят все расчеты.

Для нашего примера при уровне значимости *q* = 1− *Р* = 0,05 и *n* = 16, табличный коэффициент βт = 2,64.

Проверим крайние значения результатов измерения *Rи*max и *Rи*min

;



,



т.е. все результаты измерений приняты.

#### 1.4 Проверка гипотезы о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению

Для проверки гипотезы используем составной критерий [4], т.к. число измерений *n* = 16. Уровень значимости проверки гипотез принять в зависимости от варианта по таблице 6.8 [1].

В нашем примере уровень значимости проверки гипотез принимаем *q*1 = *q*2 = 0,02.

Вычисляем статистику по формуле

. (1.9)

Квантили (квантиль − абсцисса, соответствующая определенной вероятности) распределения которых приведены в таблице 6.9 [1].

Если при данном числе измерений *n* и выбранном уровне зна­чимости *q*1 соблюдается условие

*d*1-0,5*q* < *d* ≤  *d*0,5*q*, (1.10)

то гипотеза о нормальности распределения на основании первого критерия принимается, если − нет, то отвергается.

В нашем случае по формуле

.



Из табл. 6.9 [1] для *n* = 16 и *q*1 = 0,02 находим квантили *d*0,01 = 0,9137 и *d*0,99 = 0,6829.

Сравнение статистики *d* с квантилями показывает, что 0,6829 < *d* = 0,8362 < 0,9137. Это означает, что в соответствии с первым крите­рием (при уровне значимости 0,02) результаты измерений рас­пределены по нормальному закону.

Гипотеза по второму критерию принимается, если не более *m* аб­солютных разностей результатов измерений |*Rиi* −| при задан­ном уровне значимости, превышают значение

*tp*⋅*SRи*, (1.11)

где *tp* – квантиль, соответствующая интегральной функции нормированного нормального распределения *Ф*(*tp*) = 0,5(1 + *Р*), определяемая по табл. 1 или 2 (приложение Б) [1]. Величина *Р* нахо­дится при заданном уровне значимости *q*2 по данным табл. 6.10 [1].

При *q*2 = 0,02, *n* = 16 по табл. 6.10 [1] находим *Р* = 0,99, *m* = 1. По табл. 2 (приложения Б) [1] для *Ф*(*tp*) = 0,995 значение *tp* = 2,575 и значение допускаемого уровня (6.13)

2,575 ∙ 0,03543 = 0,09123.

Анализ ре­зультатов измерений, приведенных в таблице 6.6 [1], показывает, что ни один из результатов не превышает 0,09123, поэтому распределение результатов наблюдений можно считать близким к нормальному в соответствии со вторым критерием при уровне значимости 0,02.

Таким образом, оба критерия говорят о том, что распределение результатов измерений с уровнем значимости *q*  ≤ *q*1 + *q*2 = 0,04 можно признать нормальным.

#### 1.5 Определение доверительных границ случайной погрешности

Случайную составляющую погрешности измерений определяем по формуле:

; (1.12)

где *tp*– величина, определяемая по таблице 4 (см. приложение Б) [1], для *Рд* = 0,95 и *k* = 15, это значение *tp* = 2,131.

 мОм.

Доверительный интервал погрешности измерения сопротивления про­водов определяем по формуле

, (1.13)

где *tp*– величина определяемая по таблице 4 (см. приложение Б) [1], для *Рд* = 0,95 и *k* = 4, это значение *tp* = 2,776.

мОм.

Эту погрешность можно рассмат­ривать двояко: как неисключенную систематическую погрешность и как составляющую случайной погрешности.

Случайные погрешности измерений исследуемого сопротивления и сопро­тивления подводящих проводов можно считать некоррелированными, так как измерения проводились в разное время. Поэтому суммарную случайную по­грешность определяем по формуле

, (1.14)

где  – суммарная случайная погрешность измерения, мОм;  – границы  *i*-й элементарной случайной погрешности, мОм.

мОм.

#### 1.6 Определение доверительных границ неисключенной систематической погрешности

Обычно эта погрешность образуется из ряда составляющих: погрешности метода и средства измерения, субъективной погрешности и т.д. При суммировании эти составляющие рассматривают как случайные величины. При отсутствии информации о законе распределения неисключенных составляющих систематических погрешностей, их распределения принимают за равномерные, и границы неисключенной систематической погрешности результата измерения вычисляют по формуле

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| θΣ = | , если  < ,  , если  ≥ , | (1.15) |

где θ*i* – границы *i*-й элементарной случайной погрешности; *k* – поправочный коэффициент, зависящий от числа слагаемых *m*, их соотношения и доверительной вероятности. При *P* < 0,99 он мало зависит от числа слагаемых и может быть представлен усредненными значениями, приведенными в таблице 6.11 [1].

Составляющую систематической погрешности, обусловленную основной погрешностью измерителя иммитанса Е7−14, рассчитываем по формуле (1.1). В формуле (1.1) за измеряемое значение *R* принимаем – среднее арифметическое значений ряда неисправленных пока­заний измерителя иммитанса, Ом.

Среднее арифметическое значение ряда неисправленных пока­заний измерителя иммитанса определяем по формуле

. (1.16)

мОм.

Следовательно, систе­матическая погрешность, обусловленная основной погрешностью Е7–14 по формуле (1.1) составит:

Ом.

Систематическую погрешность, обусловленную дополнительной погреш­ностью средства измерений определяем по формуле (1.2). В нашем случае принимаем *k* = 2, тогда

; (1.17)

.

Суммарную систематическую погрешность определяем по формуле (1.15)

.

#### 1.7 Определение доверительных границ суммарной погрешности результата измерения

Вычисляют доверительные границы суммарной погрешности результата измерения:

если θΣ / < 0,8, то границы погрешности результата измерения принимаются равными случайной погрешности, ΔΣ =Σ;

если θΣ /> 8, то границы погрешности результата измерения принимаются равными систематической погрешности, ΔΣ = θΣ;

если 0,8 ≤ θΣ / ≤ 8, то общую погрешность измерения определяют по формуле

Δ Σ = *K*·*S*∑, (1.18)

где *К* – коэффициент, зависящий от соотношения Σи θ∑; *S*∑**–** оценка суммарного среднего квадратического отклонения результата измерений;

; (1.19)

. (1.20)

В нашем случае θΣ / = 1,095/0,009148 = 119 > 8.

Из полученных данных видно, что систематическая погрешность значительно больше случайной, поэтому, последнюю можно не учитывать.

Результат измерения записываем в виде

*R* = (100,1 ± 1,1) мОм при *Р* = 0,95, *n* = 16

#### 

#### 2 ОБРАБОТКА КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С МНОГОКРАТНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

Определение параметра *Z* = *f*(*х*1, *х*2, *х*3) проводится с помощью прямых многократных измерений параметров *х*1, *х*2, *х*3, для каждого из которых известны основные метрологические характеристики применяемых средств измерений – пределы измерений (ПИ) и класс точности (КТ).

*Требуется:*

провести обработку результатов измерений;

найти суммар­ную погрешность косвенного измерения параметра *Z* измерения c доверительной вероятностью *Р* = 95 %.

Таблица 2.1. − Исходные данные

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Измеряемый  параметр | | Пределы  измерений | Класс  точности | Вид  функции |
| *х*1 | 21,21; 21,22; 21,22; 21,23; 21,23 | 0 … 40 | 0,02 |  |
| *х*2 | 10,12; 10,11; 10,10; 10,13; 10,11 | ±25 | 0,01 |
| *х*3 | 12,05; 12,06; 12,06; 12,07; 12,08 | ±20 | 0,06 |
| *х*4 | 6,02; 6,018; 6,019; 6,02; 6,021 | 0 … 20 | 0,03 |

#### 2.1 Определение оценки истинного значения искомого параметра

При ограниченном числе измерений (*n* ≠ ∞) оценкой истинного значения физической величины *Z*, определяемой как функция случайных величин (аргументов), может служить ее значение , полученное после выполнения вычислительных операций со средними арифметическими значениями  аргументов в соответствии с этой функцией.

Средние арифметические значения параметров *хi*определяем по формуле

; (2.1.)

;

;

;

.

Оценка истинного значения  с учетом вида ее функции

.

#### 2.2 Определение оценки среднеквадратического отклонения искомого параметра

Оценка дисперсии косвенно измеряемой величины *Z* определяем по формуле:

 (2.2)

Оценку среднеквадратического отклонения результата измерения *j*-го аргумента входящего в формулу (2.2) определяем по формуле:

; (2.3)

;

;

;

.

Вычислим частные производные и частные погрешности косвенных измерений по каждому параметру *хj*

;

;

;



;

;

;

.

Таким образом, оценка СКО косвенного измерения параметра *Z*, рассчитанное по формуле (2.2), составляет

.

#### 2.3 Определение доверительных границ случайной погрешности

Доверительную границу случайной погрешности результата косвенного измерения вычисляем по формуле

. (2.4)

Эффективное число степеней свободы определяем по формуле

 , (2.5)

где *nj* – число наблюдений, выполненное при измерении *j*-го аргумента.

Для удобства расчетов составим таблицу 2.2.

Таблица 2.2 − Вспомогательные расчеты

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Параметр |  |  |  |  |  |  |
|  | 0,139685 | 0,019512 | 0,000381 | 0,00374 | 1,39 ∙10-5 | 1,95 ∙ 10-10 |
|  | 0,292232 | 0,085399 | 0,007293 | 0,0051 | 0,000026 | 6,76 ∙ 10-10 |
|  | 0,244996 | 0,060023 | 0,003603 | 0,0051 | 0,000026 | 6,76 ∙ 10-10 |
|  | 0,491001 | 0,241082 | 0,058121 | 0,00051 | 2,6 ∙ 10-7 | 6,76 ∙ 10-14 |

.

При таком числе степеней свободы для доверительной вероятности *Р* = 95 % интерполяцией данных по таблице 4 (приложение Б) [1] находим *t*0,95 = 2,44. Тогда доверительные границы случайной погрешности

.

#### 2.4 Определение доверительных границ неисключенной систематической погрешности

Доверительные границы неисключенной систематической по­грешности результата косвенного измерения θ*Р* в слу­чае, если неисключенные систематические погрешности аргумен­тов заданы границами θ*j*, вычисляем по формуле

, (2.6)

где *k* – поправочный коэффициент, определяемый принятой дове­рительной вероятностью *Р* и числом *m* составляющих θ*j*. Его зна­чения приведены в таблице 7.1 [1].

В нашем случае, неисключенные систематические погрешности аргументов определяются границами основной погрешности средств измерений.

Так как класс точности всех трех средств измерений указан в виде приведенной погрешности, то в абсолютной форме погрешность средств измерений определяем по формуле

,

где *хN* – нормированное значение, выбираемое в зависимости от шкалы прибора; *γi* – приведенная погрешность измерения.

Для нашего случая

;

;

;

.

Тогда по формуле (2.6) определим границы неисключенной систематические погрешности



#### 2.5 Определение доверительных границ суммарной погрешности результата косвенного измерения

Суммарная погрешность ре­зультата кос­венного измерения оценивается на основе компо­зиции распределений случайных и неисключенных систематических погрешностей. Формулы для ее расчета в зависимости от соотношения границ не­исключенной систематической составляющей и СКО случайной со­ставляющей погрешности приведены в таблице 7.2 [1].

Коэффициент *kP* определяется по таблице 7.3 [1].

Так как отношение θ*Р*/ = 0,0075/0,002029 = 3,7, то суммарная погрешность результата косвенных измерений будем определять по формуле

∆ = .

Для вероятности *Р* = 95 % по таблице 7.3 *k*0,95 = 0,75, тогда

.

#### 2.6 Определение доверительных границ систематической погрешности результата косвенного измерения

Систематическую погрешность, возникающую при косвенных измерениях, при отсутствии корреляции между погрешностями аргументов определяем по формуле

 (2.7)

В нашем случае

,

поскольку вторые производные по остальным аргументам равны нулю. Тогда

;

.

Полученная величина значительно меньше пяти единиц разряда, следующего за последней значащей цифрой погрешности результата. Если эту погрешность учесть путем введения в итог измерения соответствующей поправки, то она все равно пропадает при округлении. Поэтому принимаем θ = 0.

Результат косвенного измерения при оценках в виде погрешностей измеряемых величин записываем в виде

 при *Р* = 95 %,

после округления

 при *Р* = 95 %.

#### 3 ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С МНОГОКРАТНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ (БОЛЬШОЕ ЧИСЛО НАБЛЮДЕНИЙ)

При проведении поверки рабочего средства измерений проводили прямые многократные измерения образцовой величины *Z* в количестве *n* = 100 раз. Действительное значение измеряемой величины усиливалось в *К* раз, поэтому при ее определении требуется корректировка на величину множителя φ.

Требуетсяпровести обработку результатов наблюдений:

− определить и исключить систематические погрешности;

− построить укрупненный статистический ряд для исправленных результатов наблюдений;

− определить сред­нее арифметическое значение, оценку СКО результатов наблюдений и оценку СКО среднего арифметического;

− проверить результаты измерений на наличие грубых по­грешностей и промахов;

− проверить гипотезу о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению;

− определить доверительные границы результата измерения;

− записать результат измерения.

Уровень значимости проверки гипотез принять *q* = 0,05, доверительные границы при расчете погрешностей *Рд* = 0,95.

Исходные данные для расчетов представлены в таблице 3.1, 3.2.

Таблица 3.1 − Исходные данные

|  |  |
| --- | --- |
| Показатель | Значения |
| Образцовая величина *Z* | 10 |
| Погрешность образцовой величины | ±0,02 |
| Единица измерения | Ом |
| Множитель к показанию прибора φ | 0,1 |

Таблица 3.2 − Исходные данные

|  |  |
| --- | --- |
| Показания прибора при поверке | Количество повторения показания прибора |
| 9,6 | 5 |
| 9,7 | 12 |
| 9,8 | 21 |
| 9,9 | 25 |
| 10,0 | 23 |
| 10,1 | 11 |
| 10,2 | 3 |

Полученные данные располагают в порядке возрастания, т.е. записывается вариационный ряд: 9,6; 9,6; 9,6; 9,6; 9,6; 9,7; 9,7; 9,7; 9,7; 9,7; 9,7; 9,7; 9,7; 9,7; 9,7; 9,7; 9,7; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1; 10,2; 10,2;, 10,2 Ом.

#### 3.1 Определение систематической погрешности

В общем случае, если известна величина *Z*, воздействующая на прибор, с точностью в три и более раз превышающей точность самого прибора (например, образцовая, эталонная), то систематическую погрешность определяем по формуле

, (3.1)

где  – среднее арифметическое значение неисправленного ряда наблюдений, Ом.

Среднее арифметическое значение неисправленного ряда наблюдений определяем по формуле

 , (3.2)

В нашем случае значение неисправленного ряда наблюдений:

 = (9,6 ⋅ 5 + 9,7⋅12 + 9,8 ⋅ 21 + 9,9 ⋅ 25 + 10,0 ⋅23 + 10,1 ⋅11 + 10,2 ⋅ 3)/100 = 9,894 Ом.

Тогда систематическая погрешность по формуле (3.1) составит

Δ*с* = 9,894 – 10,0 = –0,106 Ом.

Систематическая погрешность должна быть исключена из результатов измерений путем введения поправ­ки. Поправка берется равной систематической погрешности с обратным знаком, в нашем случае Δ*п* = 0,106 Ом.

После введения поправки получается исправленный ряд значений *хиi*:

9,706; 9,706; 9,706; 9,706; 9,706; 9,806; 9,806; 9,806; 9,806; 9,806; 9,806; 9,806; 9,806; 9,806; 9,806; 9,806; 9,806; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,8906; 9,906; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,206; 10,206; 10,206; 10,206; 10,206; 10,206; 10,206; 10,206; 10,206; 10,206; 10,206; 10,306; 10,306; 10,306 Ом.

#### 3.2 Построение укрупненного статистического ряда

Для удобства обработки результатов наблюдений построим укрупненный статистический ряд.

Определяем область изменения признака (размах выборки):

*R* = *х*max – *х*min , (3.3)

где *х*max и *х*min – наибольшее и наименьшее показания прибора при измерениях.

Для нашего примера

*R* = 10,306 – 9,706 = 0,6 Ом.

Число классов (интервалов) укрупненного статистического ряда *m* определяют по формуле:

*mmin* = 0,55 ∙ *n* 0,4; (3.4)

*mтах =* 1,25 ∙ *n* 0,4. (3.5)

В нашем случае число классов укрупненного статистического ряда *m*:

*m*min = 0,55 ∙ 100 0,4 = 3,47;

*m*mах = 1,25 ∙ 100 0,4 = 7,88.

Примем *m* = 7.

Определяем ширину класса (интервал):

, при условии *dm* ≥ *R*. (3.6)

Значение *d* округляем в бо́льшую сторону со значащими цифрами, как и у выборки (или в два раза точнее). Тогда:

*d* = 0,6/7 = 0,086, примем *d* = 0,1 Ом.

Строим таблицу укрупненного статистического ряда (табл. 3.3). В первой строке таблицы записываем номера классов укрупненного ряда 1...*j*…*m*. Во второй строке располагаем наибольшие и наименьшие значения результатов наблюдений для каждого класса. Наименьшее значение первого класса приравниваем к наименьшему значению выборки: *х*1min ≤ *х*min (примем *х*1min = 9,656 Ом, чтобы величина 9,706 стала серединой класса); наибольшее значение первого класса получается так: *х*1min+ *d* = *х*1max . Для всех классов последовательность выбора повторяем: *х*2min = *х*1mах и *х*2max = *х*2min + *d*; *х*3min = *х*2mах и *х*3max = *х*3min + *d*; *х*4min = *х*3mах и *х*4max = *х*4min + *d* и т.д.

Таблица 3.3 − Параметры статистического ряда, эмпирического

и теоретического распределений

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер класса *m* | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ∑ |
| Границы  класса | *хj* min | 9,656 | 9,756 | 9,856 | 9,956 | 10,056 | 10,156 | 10,256 | – |
| *хj* mах | 9,756 | 9,856 | 9,956 | 10,056 | 10,156 | 10,256 | 10,356 | – |
| Средняя точка класса *хj* | | 9,706 | 9,806 | 9,906 | 10,006 | 10,106 | 10,206 | 10,306 | – |
| Частота *nj* | | 5,000 | 12,000 | 21,000 | 25,000 | 23,000 | 11,000 | 3,000 | 100,00 |
| Относительная частота | | 0,050 | 0,120 | 0,210 | 0,250 | 0,230 | 0,110 | 0,030 | 1,00 |
| (*хj* – ) | | -0,294 | -0,194 | -0,094 | 0,006 | 0,106 | 0,206 | 0,306 | – |
| (*хj*–)2 | | 0,00432 | 0,00452 | 0,0010 | 0 | 0,0026 | 0,0047 | 0,0028 | 0,0208 |
| *Pj* | | 0,0441 | 0,0924 | 0,2404 | 0,2734 | 0,2082 | 0,1026 | 0,0307 |  |
| *Pj ∙ n* | | 4,41 | 9,24 | 24,04 | 27,34 | 20,82 | 10,26 | 3,07 |  |
| (*nj* – *Pj ∙ n*)2 | | 0,0348 | 7,6176 | 9,2416 | 5,4756 | 4,7524 | 0,5476 | 0,0049 |  |
| (*nj* – *Pj ∙ n*)2/(*Pj ∙ n*) | | 0,0789 | 0,82441 | 0,3844 | 0,2003 | 0,2283 | 0,0534 | 0,0016 | 1,77 |

Частота *nj* в *j*-м классе – это попавшие в интервал *хj*min ≤ *хi* ≤ *хj*mах значения *хi* выборки 1 ... *i*... *n*. Для первого класса, исходя из вышеуказанного, *х*1min ≤ *хi* ≤ *х*1mах. В нашем случае из вариационного ряда видно, что в класс 9,656 ...9,756 Ом пять раза попадают значения 9,706 Ом, в класс 9,7526 ... 9,856 двенадцать раз – 9,806 и т.д. Заполняется четвертая строка таблицы 6.16. При этом сумма частот

. (3.7)

В нашем случае: 5 + 12 + 21 + 25 + 23 + 11 + 3 = 100.

Относительную частоту  записываем в пятой строке таблицы 6.16 и определяем так:

, (3.8)

поэтому .

#### 3.**3 Определение сред­него арифметического значения, оценки СКО результатов наблюдений и оценки СКО среднего арифметического**

Среднее арифметическое значение для укрупненного статистического ряда исправленных наблюдений определяем по формуле:

. (3.9)

В нашем случае после введения поправки среднее арифметическое для исправленного ряда наблюдений должно быть равно *Z*:

 (3.10)

Определяем точечную оценку дисперсии (второго центрального момента выборки):

, (3.11)

Для нашего случая, пользуясь таблицей 3.3, имеем

 (–0,294)2 ⋅ 0,05 + (–0,194)2 ⋅ 0,12 + (–0,094)2 ⋅ 0,21 + 0,0062 ⋅ 0,25 + 0,1062 ⋅ ⋅ 0,23 + 0,2062 ⋅ 0,11 + 0,3062 ⋅ 0,03 = 0,021 Ом2.

Точечная оценка СКО определяется по формуле:

*Sх* = . (3.12)

В нашем случае

*Sх* =  = 0,144 Ом.

Точечная оценка СКО среднего арифметического значения определяется по выражению

. (3.13)

Для нашего случая:

 Ом.

#### 3.4 Проверка результатов измерений на наличие грубых погрешностей

Так как число измерений *n* = 100 > 50, то для проверки результатов измерений на наличие грубых погрешностей применим критерий 3σ [1]. В этом случае считает­ся, что результат, полученный с вероятностью *Р* = 0,003, малове­роятен и его можно квалифицировать как промах, т. е. сомнитель­ный результат должен быть исключен из измерений, если

. (3.14)

Для этого берем крайние точки выборки и определяются отношения (3.14)

10,0 – 9,706 = 0,294 < 3 · 0,144 = 0,432;

10,306 – 10,0 = 0,306 < 3 · 0,144 = 0,432.

Следовательно, крайние точки выборки не являются грубыми погрешностями.

#### 3.5 Проверка гипотезы о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению

*Построение эмпирического распределения погрешности.* Для нашего примера, по данным таблицы 6.16, построим гистограмму и полигон для наглядного представления формы закона распределения погрешностей (рис.3.1).



Рисунок 3.1 − Распределение погрешностей

Из рисунка 3.1 видно, что форма гистограммы и полигона эмпирического распределения указывает на то, что результаты наблюдений могут быть распределены по нормальному закону.

Проверяют выдвинутую гипотезу о нормальности распределе­ния результатов измерения, используя метод Пирсона. Расхождение между экспериментальной гистограммой и выбранной теорети­ческой кривой в этом методе оценивается с помощью критерий χ2 [1]

, (3.15)

где *Сi* − коэффициент весов разрядов, выбранный для усиления веса составляющих с малой вероятностью в виде *Сi* = *п/Рi*;− значение вероятности в *i*-м интервале экспериментальной гисто­граммы; *Рi* − значение вероятности в *i*-м интервале, определен­ное по теоретической кривой как площадь под *i*-м интервалом:

*.* (3.16)

Мера расхождения − величина случайная, и плотность вероятности распределения этой величины подчиняется распреде­лению Пирсона при *mi* > 5 и *n* →∞ (реально при *п >* 40).

Заметим, что число степеней свободы здесь *k = m −* 3, поскольку результаты измерений использованы для вычисления среднего, дисперсии и общей площади под гистограммой.

Задаваясь уровнем значимости *q* = 1 − *Р*, по табл. 6.17 [1] находят значение *,* соответствующее значению *q* или вероят­ности *Р.* Если  ≤ , то распределение результатов измерений принимают нормальным и гипотеза о нормальности распределения считается верной.

Для определения меры расхождения (3.15) необходимо вычис­лить вероятности

, (3.17)

где *хi*+1,  *хi*‒1,  − верхняя и нижняя границы *i*-го интервала укрупненного статистического ряда (табл.6.16), а *Ф*(*z*) находится из табл.1 (см. приложение Б) [1].

Для первого интервала (9,656; 9,756) имеем

.



Результаты вычислений остальных вероятностей сведены в табл. 3.3.

Подставив соответствующие значения в формулу (3.15), полу­чим расхождение  = 1,77.

Поскольку число степеней свободы *k* = 4, то из табл. 6.17 [1] для уровня значимости *q* = 0,05 или вероятности принятия гипотезы верной *Р* = 0,95 находим *=*= 9,488.

Так как,  = 1,77 < = 9,488, то гипотезу о том, что резуль­таты наблюдений распределены по нормальному закону, можно считать правдоподобной.

#### 3.6 Определение доверительных границ погрешностей результата измерения

Сначала определяют границы доверительного интервала случайной погрешности измерений:

, (3.18)

где *tР* – квантиль распределения.

В нашем примере

 Ом.

Определяем доверительные границы неисключенной систематической погрешности θ.

В качестве границ неисключенной систематической погрешности принимаем погрешности изготовления меры θ = ± 0,02 Ом.

Доверительные границы суммарной погрешности результата измерения определяют в зависимости от соотношения:

если θ / < 0,8, то границы погрешности результата измерения принимаются равными случайной погрешности, ΔΣ =;

если θ / > 8, то границы погрешности результата измерения принимаются равными систематической погрешности, ΔΣ = θ;

если 0,8 ≤ θ / ≤ 8, то общую погрешность измерения определяют по формуле

Δ Σ = *K*·*S*∑, (3.19)

где *К* – коэффициент, зависящий от соотношения и θ; *S*∑**–** оценка суммарного среднего квадратического отклонения результата измерений;

; (3.20)

. (3.21)

Доверительные границы суммарной погрешности результата измерения зависят от соотношения θ/. Для нашего примера θ /= 0,02 / 0,0144 = 1,39, тогда определяем суммарную погрешность результата измерения по формуле (3.19)

;

Ом;

ΔΣ = 3,317 ∙ 0,0185 = 0,061 Ом.

Результат измерения записываем в виде

А = (10,00 ± 0,06) Ом, при *Р* = 0,95 %; *n* = 100.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шкаруба Н.Ж. Теоретическая метрология: Учебное пособие/ Н.Ж. Шкаруба. М.: Изд-во РГАУ-МСХА, 2016. 132 с.