Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Дифференциальные уравнения

Методические указания и контрольная работа № 4
для студентов 2-го курса заочной формы обучения
технических специальностей

Санкт-Петербург
2013

Составители: Ю.А.Гусман, А.О.Смирнов

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор В.Г.Фарафонов

Методические указания и контрольная работа № 4 предназначены для студентов 2-го курса заочной формы обучения технических специальностей Излагаются основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений; приведены варианты соответствующих контрольных заданий. Даны образцы выполнения типового контрольного задания.

Подготовлены к публикации кафедрой высшей математики и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом

Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

Редактор
Верстальщик

Сдано в набор Подписано к печати
Формат 60*x*84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.-печ. Л.
Уч.- изд. Л. Тираж экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., д. 67

Общие методические указания

Общий курс математики является фундаментом математического образования. Его изучение необходимо для успешного усвоения в дальнейшем общенаучных и специальных дисциплин.

Основной формой обучения студента заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, самопроверка, выполнение контрольных работ. В помощь студентам-заочникам в университете организовано чтение лекций и практические занятия. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса высшей математики является сдача экзаменов.

Курс высшей математики (математика – 1) изучается студентами младших курсов. В первом семестре студенты сдают два экзамена: первый – по линейной алгебре и аналитической геометрии; второй – по дифференциальному и интегральному исчислению одной переменной. Во втором семестре студенты изучают теорию рядов, функций нескольких переменных, двойные и криволинейные интегралы. В третьем семестре студенты изучают курс обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для изучения теоретического материала и решения задач по этой тематике рекомендуется следующая литература:

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н.Берман // «Лань», 2005. 608 с.
2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С.Пискунов // М.:Интеграл – Пресс, 2009. 544 с.
3. Филиппов, А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А.Ф.Филиппов // М.: КомКнига, 2010. 240 с.
4. Системы дифференциальных уравнений: учебное пособие / М.В.Макарова СПб. ГУАП, 2009. 76 с.
5. Дифференциальные уравнения: методические указания к выполнению индивидуального задания / Ю.А. Гусман, Г.М.Головачев, А.О. Смирнов //СПб.: ГУАП, 2008. 119 с.

В процессе изучения курса высшей математики студенты должны выполнить на первом курсе 3 контрольные работы, на втором курсе – четвертую контрольную работу. Данное пособие посвящено обыкновенным дифференциальным уравнениям; выполнение 4-й контрольной работы покажет степень усвоения этой темы.

Указания по выполнению контрольных работ

Студент должен выполнять контрольные работы по заданным задачам конкретного варианта, номер которого получается из следующей формулы: следует разделить номер учебного шифра на 20, остаток от деления – номер варианта (если остаток 0, то номер варианта – 20).

При оформлении и выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила:

1. В начале работы должны быть ясно написаны фамилия студента, инициалы, номер студенческого билета, шифр, номер контрольной работы и дата отсылки работы в университет.

2. Контрольная работа выполняется в тетради, а не на листах, обязательно чернилами или шариковой ручкой (но не красными) с полями для замечаний рецензента.

3. Решения задач контрольной работы располагаются в порядке номеров, указанных в контрольных работах; перед решением задачи должно быть записано полностью ее условие, исходя из данных своего варианта задания. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, переписывая условие задачи, следует заменить общие данные конкретными из своего варианта.

4. Решения задач и объяснения к ним должны быть подробными, аккуратными, без сокращений слов; чертежи можно выполнять от руки.

Получив из университета прорецензированную работу, студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и недочеты. Если работа не зачтена, она должна быть в короткий срок либо выполнена заново целиком, либо должны быть заново решены задачи, указанные рецензентом. Зачтенные контрольные работы предъявляют преподавателю на экзамене.

Краткие теоретические сведения

В школьном курсе математики решается задача обратная задачи дифференцирования, т.е. если нам дана функция f(x), то надо найти функцию F(x), так чтобы выполнялось равенство $F'(x) = f(x).$ Функция F(x)называется первообразной (функцией) функции f(x) или

$F(x) = \int f(x)dx + C,$ где C произвольная постоянная.

Кроме непосредственного нахождения первообразной, могла быть поставлена задача, чтобы из полученного семейства кривых была выделена конкретная кривая, проходящая через заданную точку.

Забегая вперед, отметим, что мы решали сперва простейшее дифференциальное уравнение $y' = f(x),$ а потом удовлетворяли начальному условию (задача Коши).

Дадим формальные определения.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, которое, кроме независимых переменных и неизвестных функций этих переменных, содержит производные неизвестных функций или их дифференциалы. Если функции, входящие в дифференциальное уравнение, зависят от одной независимой переменной, то уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Пусть x - независимая переменная и y - неизвестная функция этой переменной. Дифференциальное уравнение общего вида n–ого порядка имеет вид:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Наивысший порядок производных неизвестной функции называется порядком дифференциального уравнения.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1 Теоремы существования и единственности

Запишем дифференциальное уравнение общего вида 1–ого порядка

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.1)$$

Введем основные понятия.

Функция $y = \varphi(x)$ называется решением уравнения (1.1), если оно обращается в тождество относительно x при подстановке $\varphi(x)$ в уравнение.

Решение уравнения (1.1) при дополнительном условии

$$y(x_0) = y_0 \quad (1.2)$$

называется решением задачи Коши данного уравнения.

Само условие (1.2) называется начальным условием.

Общим решением дифференциального уравнения (1.1) называется функция

$$y = \varphi(x, c), \quad (1.3)$$

где c = произвольная постоянная, удовлетворяющая следующим условиям:

1) при любом фиксированном значении c функция (1.3) является решением уравнения (1.1);
2) каково бы ни было начальное условие (1,2) всегда можно подобрать значение постоянной c так, чтобы функция (1.3) удовлетворяло этому условию.

Частным решением (1.1) называется любое решение этого уравнения, полученное из общего решения (1.3) при фиксированном значении произвольной постоянной c.

Общее решение (1.3), заданное в неявном виде, то есть $\phi(x, y, c) = 0,$ называется общим интегралом уравнения (1.1); частное решение, заданное в неявном виде, называется частным интегралом уравнения (1.1).

Рассмотрим частный случай уравнения (1.1) уравнение, разрешенное относительно производной, то есть

$$y' = f(x, y). \tag{1.4}$$

Для уравнений вида (1.4) справедлива теорема существования и единственности.

Пусть f(x,y) непрерывна и имеет непрерывную частную производную по y в открытой области B, лежащей в плоскости XOY и содержащей точку $(x_0.,y_0)$ Тогда уравнение (1.4) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию (1.2).

Сформулируем основные методы нахождения общих или частных решений (общих или частных интегралов) (1.4).

1.2 Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Всякое дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, может быть приведено к виду

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{1.5}$$

Если уравнение (1.5) имеет вид

$$M_1(x)\,dx + N_1(y)\,dy = 0 \text{ или } M_1(x)\,dx = -N_1(y)\,dy, \tag{1.6}$$

то мы имеем (во втором случае) равенство дифференциалов разных переменных (переменные разделены), и, интегрируя, получаем общее решение или общий интеграл.

Уравнение вида (1.6) называется уравнением с разделенными переменными.

Пример 1.2.1

Решить уравнение $\frac{1}{x}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0.$

Решение.

Данное уравнение с разделенными переменными, поэтому, интегрируя, получаем общее решение.

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{ydy}{1+y^2} = \ln c \quad \to \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) = \ln c \quad \to x\sqrt{1+y^2} = c.$$

Ответ. $x\sqrt{1+y^2} = c.$

Если уравнение (1.5) имеет вид

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0, \tag{1.7}$$

то оно называется уравнением с разделяющимися переменными и после соответствующего деления приводится к уравнению с разделенными переменными.

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0, \quad M_2(y) \neq 0, \quad N_1(x) \neq 0.$$

Пример 1.2.2

Найти решение уравнения $\frac{x}{1+y}dx - \frac{y}{1+x}dy = 0,$

удовлетворяющее условию y(0)=1.

Решение.

Данное уравнение с разделяющимися переменными, поэтому, разделив переменные и интегрируя, получаем общее решение.

$$\frac{x}{1+y}dx - \frac{y}{1+x}dy = 0 \quad \to x(1+x)dx - y(1+y)dy = 0 \to$$

$$\to \int x(1+x)dx - \int y(1+y)dy = c_1 \quad \to \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} = c_1 \to$$

$$\to 3x^2 + 2x^3 - 3y^2 - 2y^3 = c.$$

В полученный общий интеграл подставляем начальные условия и находим произвольную постоянную.

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = c \to c = -5.$$

Следовательно, частный интеграл, решающий данную задачу Коши, имеет вид: $3x^2+2x^3-3y^2-2y^3+5=0$.

Ответ. $3x^2+2x^3-3y^2-2y^3+5=0$.

Уравнение с разделяющимися переменными вида:

$\frac{dy}{dx} = P(y)$ называется автономным.

Пример 1.2.3

Известно, что рост количества бактерий в сосуде удовлетворяет уравнению логистики с постоянной k=pm=0,2. Пусть в начальный момент времени количество бактерий составляло 1% от максимально возможного значения m. За какое время количество бактерий достигнет 80% от максимального?

Решение.

Уравнением снабжения или логистики называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dt} = py(m-y), \quad \text{ãäå} \quad p \quad \text{è} \quad m \quad -\text{ïîñòîÿííûå}.$$

Подставим в уравнение данные из условия задачи и получим

$$\frac{dy}{dt} = py(m-y) = \frac{0,2y}{m}(m-y) \quad \to \frac{mdy}{y(m-y)} = 0,2dt.$$

Интегрируем и, используя условие y<m, получаем

$$\ln\frac{m-y}{y} = -0,2t - c.$$

Пользуясь начальным условием y=0,01m при t=0, находим значение c и подставляем его в решение:

$$\ln\frac{0,99}{0,01} = -c \quad \to c = -\ln 99,$$

$$\ln\frac{m-y}{99y} = -0,2t \quad \to \frac{m-y}{99y} = e^{-0,2t} \quad \to y = \frac{m}{1+99e^{-0,2t}}.$$

Теперь найдем значение t, при котором y=0,8m:

$$0,8 = \frac{1}{1+99e^{-0,2t}} \quad \to e^{-0,2t} = \frac{1}{396} \to -0,2t = -\ln 396 \quad \to t = 5\ln 396 \approx 29,91.$$

Ответ. t=29,91.

1.3 Однородные уравнения

Функция $\varphi(x,y)$ называется однородной функцией нулевого измерения, если она зависит только от отношения $\frac{y}{x}$, т.е. $\varphi(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Однородным дифференциальным уравнением называется уравнение вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. (1.8)

Введем новую неизвестную функцию, положив $t = \frac{y}{x}$, или y=tx.

Дифференцируя, получим $y' = t'x + t$.

Подставив в уравнение (1.8), преобразуем его к виду

$$x\frac{dt}{dx} = f(t) - t.$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{f(t) - t}, \text{ или}$$

$$\ln|x| = \int \frac{dt}{f(t) - t} + \ln c \quad \to x = ce^{\int \frac{dt}{f(t) - t}}.$$

После выполнения интегрирования нужно вернуться к функции y, положив

$$t = \frac{y}{x}.$$

Пример 1.3.1

Решить уравнение $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0.$

Решение.

Разрешая уравнение относительно производной, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y} \quad \to \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Обозначив $t = \frac{y}{x}$, получим

$$x\frac{dt}{dx} + t = \frac{1 + t}{1 - t} \quad \to x\frac{dt}{dx} = \frac{1 + t^2}{1 - t}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-t}{1+t^2}dt \quad \to \int\frac{dx}{x}=\int\frac{1-t}{1+t^2}dt \to$$
$$\to \ln|x|+\ln c = arctgt-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) \quad \to cx\sqrt{1+t^2}=e^{arctgt} \to$$
$$\to cx\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=e^{arctg\frac{y}{x}} \quad \to c\sqrt{x^2+y^2}=e^{arctg\frac{y}{x}}.$$

Ответ. $c\sqrt{x^2+y^2}=e^{arctg\frac{y}{x}}.$

1.4 Линейные уравнения

Линейным уравнением называется уравнение вида

$$y'+P(x)y=Q(x). \tag{1.9}$$

Если правая часть равна нулю, уравнение (1.9) называется линейным однородным, в противном случае – линейным неоднородным.

Будем искать решение (1.9) в виде y(x)=u(x)v(x), причем в качестве v(x) возьмем любое (частное) решение однородного линейного уравнения

$$v'+P(x)v=0. \tag{1.10}$$

Интегрируя данное уравнение с разделяющимися переменными и полагая произвольную постоянную равную единице, получим

$$\frac{dv}{dx}+P(x)v=0 \to \frac{dv}{dx}=-P(x)v \to \frac{dv}{v}=-P(x)dx \to$$
$$\to \ln|v|=-\int P(x)dx \to v=e^{-\int P(x)dx}.$$

Решение (1.9) ищем в виде $y(x)=u(x)e^{-\int P(x)dx}$.

Изложенный метод решения называется методом Лагранжа, или методом вариации произвольной постоянной (изменения произвольной постоянной).

Подставляя y(x) в (1.9), находим u(x) и тогда

$$y(x)=u(x)e^{-\int P(x)dx}=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c\right) \tag{1.11}$$

Пример 1.4.1

Решить уравнение $xy'+2y=3x.$

Решение.

Подставляя в (1.11), получим

$$y(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(\int 3\cdot e^{\int \frac{2}{x}dx}dx + c\right) = e^{-2\ln x}\left(3\int e^{2\ln x}dx + c\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(3\int x^2 dx + c\right) = \frac{1}{x^2}\left(3\cdot\frac{x^3}{3} + c\right) = x + \frac{c}{x^2}.$$

Ответ. $x + \frac{c}{x^2}.$

1.5 Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}. \qquad (1.12)$$

Данное нелинейное уравнение при $\alpha \neq 0, \ \alpha \neq 1,$ приводится к линейному заменой $z = y^{1-\alpha}.$

Пример 1.5.1

Решить уравнение $xy' - y = y^2 \ln x.$

Решение.

Сделаем замену переменной $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}, \quad z' = -\frac{1}{y^2}y'.$

Тогда искомое уравнение перепишется в виде

$$xy' + y = y^2 \ln x \quad \to -\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = -\frac{\ln x}{x} \quad \to z' + \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}.$$

Полученное линейное уравнение решаем по формуле (1.11)

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x}}\left(\int\left(-\frac{\ln x}{x}\right)e^{\int \frac{dx}{x}}dx + c\right) = e^{-\ln x}\left(\int\left(-\frac{\ln x}{x}\right)e^{\ln x}dx + c\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\left(-\int \ln x dx + c\right) = \frac{1}{x}\left(-x\ln x + x + c\right).$$

Делая обратную замену, получаем:

$$z = \frac{1}{y} \quad \to y = \frac{1}{z} = \frac{x}{-x\ln x + x + c}.$$

Ответ. $\frac{x}{-x\ln x + x + c}.$

1.6 Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \qquad (1.13)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции u(x,y). В этом случае уравнение (1.13) можно переписать в виде du(x,y)=0. И тогда общий интеграл уравнения (1.13) имеет вид

u(x,y)=C. (1.14)

Допустим, что функции P(x,y) и Q(x,y) имеют непрерывные частные производные в некоторой области D плоскости XOY. Справедлива теорема: для того, чтобы выражение $P\ x,y\ dx+Q\ x,y\ dy$ было полным дифференциалом некоторой функции u(x,y), необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (1.15)$$

Таким образом, если (1.13) является уравнением в полных дифференциалах, то существует такая функция u(x,y), что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y). \quad (1.16)$$

Находя из (1.16) функцию u(x,y), получаем общий интеграл (1.14).

Пример 1.6.1

Найти решение уравнения $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0,$

удовлетворяющее условию y(1)=1.

Решение.

Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y^3}\right)=-\frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}\right)=-\frac{6x}{y^4},$

то условие (1.15) выполняется и искомое уравнение является уравнением в полных дифференциалах и поэтому существует функция u(x,y), что

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y^3}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{y^2}-3\frac{x^2}{y^4}. \end{cases}$$

Интегрируя первое равенство по x, получаем:

$$u=\frac{2}{y^3}\int x dx=\frac{x^2}{y^3}+\varphi\left(y\right).\qquad(1.17)$$

Здесь неизвестная функция $\varphi(y)$ играет роль постоянной интегрирования. Для нахождения $\varphi(y)$ продифференцируем (1.17) по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'\left(y\right).$$

С другой стороны

$$-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'\left(y\right)=\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}\quad\to\varphi'\left(y\right)=\frac{1}{y^2}.$$

Отсюда $\varphi\left(y\right)=\int\frac{dy}{y^2}=-\frac{1}{y}.$

И тогда общий интеграл имеет вид $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C$

Удовлетворим начальному условию y(1)=1:

$$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C\quad\to\frac{1^2}{1^3}-\frac{1}{1}=C\quad\to C=0.$$

И частный интеграл имеет вид $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=0.$

Ответ. $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=0.$

2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Запишем дифференциальное уравнение n - го порядка

$$F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0.\qquad(2.1)$$

Дифференциальные уравнения, начиная со второго порядка, называются дифференциальными уравнениями высших порядков.

Остановимся на рассмотрении дифференциальных уравнений второго порядка.

$$F\left(x,y,y',y''\right)=0.\qquad(2.2)$$

Задачей Коши для данного уравнения (2.2) называется решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Определения общего решения, общего интеграла, частного решения, частного интеграла, а также теорема о существовании и единственности решения для уравнения (2.2) аналогичны соответствующим понятиям для уравнений первого порядка и поэтому на них не останавливаемся и перейдем к методам нахождения их решений.

2.1 Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим уравнение (2.2), разрешенное относительно старшей производной:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{2.4}$$

В ряде случаев решение таких уравнений возможно путем понижения порядка уравнения, т.е. путем последовательного решения уравнений первого порядка.

1) Пусть (2.4) имеет вид:

$$y'' = f(x). \tag{2.5}$$

Интегрируя обе части уравнения, получаем:

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Полученное уравнение первого порядка интегрируем еще раз и получаем общее решение (2.4):

$$y = \int \left(\int f(x)\,dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

2) Если (2.4) имеет вид:

$$y'' = f(x, y'), \tag{2.6}$$

то можно понизить порядок (2.6) заменой:

$$y' = z, \quad y'' = z'.$$

И тогда (2.6) принимает вид:

$$z' = f(x, z).$$

Если нам удастся проинтегрировать это уравнение первого порядка, то делая обратную замену, получим опять дифференциальное уравнение первого порядка.

Пример 2.1.1

Решить уравнение $xy'' = y'.$

Решение.

Понижаем порядок уравнения заменой $y' = z, \quad y'' = z'.$

Тогда уравнение принимает вид: $xz' = z.$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$x\frac{dz}{dx} = z \quad \to \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \quad \to \ln z = \ln x + \ln C_1 \quad \to z = C_1 x.$$

Делая обратную замену, получаем уравнение первого порядка, интегрируя которое, получаем общее решение первоначального уравнения:

$$y' = C_1 x \quad \to y = C_1\frac{x^2}{2} + C_2.$$

Ответ. $y = C_1\frac{x^2}{2} + C_2.$

3) Если (2.4) имеет вид:

$$y'' = f(y, y'), \tag{2.7}$$

то можно понизить порядок (2.7) заменой:

$$y' = z, \quad y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}.$$

И тогда (2.7) принимает вид:

$$z\frac{dz}{dy} = f(y, z).$$

Отметим, что это уравнение первого порядка с неизвестной функцией z и переменной x.

Если нам удастся проинтегрировать это уравнение первого порядка, то делая обратную замену, получим опять дифференциальное уравнение первого порядка.

Пример 2.1.2

Решить уравнение $y''=y.$

Решение.

Понижаем порядок уравнения заменой $y'=z, \quad y''=z\dfrac{dz}{dy}.$

Тогда уравнение принимает вид:

$$y''=y \quad \to z\frac{dz}{dy}=y \quad \to zdz=ydy \quad \to \frac{z^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{C_1}{2} \quad \to z=\pm\sqrt{y^2+C_1}.$$

Отсюда $\dfrac{dy}{dx}=\pm\sqrt{y^2+C_1} \quad \to \dfrac{dy}{\sqrt{y^2+C_1}}=\pm dx \quad \to \ln\left|y+\sqrt{y^2+C_1}\right|=C_2\pm x.$

Ответ. $\ln\left|y+\sqrt{y^2+C_1}\right|=C_2\pm x.$

2.2 Линейные дифференциальные уравнения

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид:

$$y''+a_1 \; x \; y'+a_1 \; x \; y=f \; x \; . \tag{2.8}$$

Сначала рассмотрим линейные однородные дифференциальные уравнения.

2.2.1 Линейные однородные дифференциальные уравнения

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид:

$$y''+a_1 \; x \; y'+a_1 \; x \; y=0. \tag{2.9}$$

Его общим решением будет

$$y=C_1y_1+C_2y_2, \tag{2.10}$$

где y_1 и y_2 линейно независимые решения уравнения (2.9).

Напомним, что y_1 и y_2 будут линейно независимыми, если $\dfrac{y_2}{y_1}\neq C.$

Отметим, что для уравнения (2.9) с переменными коэффициентами не существует общих методов нахождения частных решений, но в случае постоянных коэффициентов такие методы существуют.

Если уравнение (2.9) имеет вид:

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (2.11)$$

Будем искать частные решения в виде $y = e^{kx}$. Подставляя в (2.11), получаем характеристическое уравнение:

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (2.12)$$

Если корни характеристического уравнения вещественны и различны: $k_1 \neq k_2$, то общее решение (2.11) запишется в виде:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (2.13)$$

Пример 2.2.1

Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0.$

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \quad \to k_1 = 1, \quad k_2 = 3.$$

Тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Ответ. $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$

Если характеристическое уравнение имеет один двукратный корень: $k_1 = k_2 = k$, то общее решение (2.11) запишется в виде:

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \qquad (2.14)$$

Пример 2.2.2

Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0.$

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k + 4 = 0 \quad \to k = -2.$$

Тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x).$$

Ответ. $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x).$

Если характеристическое уравнение имеет комплексные корни:

$k=\alpha\pm\beta i,$ то общее решение (2.11) запишется в виде:

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x). \qquad (2.15)$$

Пример 2.2.3

Найти общее решение уравнения $y''-4y'+13y=0.$

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$k^2-4k+13=0 \quad \to k_{1;2}=2\pm 3i.$$

Тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

Ответ. $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$

2.2.2 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид:

$$y''+a_1\ x\ y'+a_1\ x\ y=f\ x\ . \qquad (2.16)$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения y_o и какого-либо частного решения данного неоднородного уравнения y_r:

$$y=y_o+y_r. \qquad (2.17)$$

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) служит для нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения при условии, что удалось найти общее решение соответствующего однородного уравнения.

Пусть $\quad y_o=C_1y_1+C_2y_2.$

Будем искать общее решение линейного неоднородного уравнения, варьируя произвольные постоянные:

$$y=C_1\ x\ y_1+C_2\ x\ y_2. \qquad (2.18)$$

Сами $C_1(x)$, $C_2(x)$ можно найти из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1{}' y_1 + C_2{}' y_2 = 0, \\ C_1{}' y_1' + C_2{}' y_2' = f(x). \end{cases} \tag{2.19}$$

Решив эту систему и выполнив интегрирование, после подстановки в (2.18) получим общее решение (2.16).

Пример 2.2.4

Найти общее решение уравнения $y'' + y = tgx.$

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 1 = 0 \quad \to k_{1;2} = \pm i.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Для нахождения $C_1(x)$, $C_2(x)$ составим систему (2.19):

$$\begin{cases} C_1{}' \cos x + C_2{}' \sin x = 0, \\ -C_1{}' \sin x + C_2{}' \cos x = tgx, \end{cases} \to \begin{cases} C_1{}' = -C_2{}' tgx, \\ C_2{}' \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + C_2{}' \cos x = tgx, \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} C_1{}' = -C_2{}' tgx, \\ C_2{}' = \sin x, \end{cases} \to \begin{cases} C_1{}' = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}, \\ C_2{}' = \sin x. \end{cases}$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1(x) = \int \left(-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) dx = -\ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \sin x + A,$$

$$C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x + B.$$

В итоге $y = A\cos x + B\sin x - \cos x \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$

Ответ. $y = A\cos x + B\sin x - \cos x \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$

2.2.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + py' + qy = P_n(x)\, e^{\alpha x}, \tag{2.20}$$

где $P_n(x)$ - многочлен степени n.

Для нахождения частного решения такого уравнения может быть использован метод неопределенных коэффициентов, который заключается в следующем.

Если α не является корнем характеристического уравнения для левой части (2.20), то будем искать частное решение в виде:

$$y_r = R_n(x)\, e^{\alpha x} = (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n)\, e^{\alpha x}, \tag{2.21}$$

где коэффициенты $R_n(x)$ – неизвестны.

Подставляя в (2.20) и сокращая на $e^{\alpha x}$, получаем тождественное равенство двух полиномов n - ой степени, и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем линейную систему относительно неизвестных коэффициентов. Этот метод позволяет найти частное решение не прибегая к интегрированию.

Пример 2.2.5

Найти общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)\, e^{3x}$. (2.22)

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \quad \to k_1 = 1, \quad k_2 = 2.$$

Так как 3 не является корнем характеристического уравнения, то ищем частное решение в виде:

$$y_r = (Ax + B)\, e^{3x}.$$

Подставляя в (2.22) и сокращая на e^{3x}, получаем линейную систему двух уравнений.

$$6Ae^{3x}+9(Ax+B)e^{3x}-3Ae^{3x}-9(Ax+B)e^{3x}+2(Ax+B)e^{3x}=(3-4x)e^{3x}\rightarrow$$
$$\rightarrow 6A-3A+2(Ax+B)=3-4x \quad \rightarrow\begin{cases}2A=-4,\\3A+2B=3,\end{cases}\quad\rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=4,5.\end{cases}$$

Поэтому частное решение имеет вид:

$$y_r=(-2x+4,5)e^{3x}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+(-2x+4,5)e^{3x}.$$

Ответ. $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+(-2x+4,5)e^{3x}.$

Если α является простым (однократным) корнем характеристического уравнения для левой части (2.20), то будем искать частное решение в виде:

$$y_r=xR_n(x)e^{\alpha x}=(a_0x^{n+1}+a_1x^{n}+...+a_nx)e^{\alpha x}. \qquad (2.23)$$

Если α является двукратным корнем характеристического уравнения для левой части (2.20), то будем искать частное решение в виде:

$$y_r=x^2R_n(x)e^{\alpha x}=(a_0x^{n+2}+a_1x^{n+1}+...+a_nx^2)e^{\alpha x}. \qquad (2.24)$$

Подобная методика нахождения частного решения возможна и для более общего вида правой части уравнения (2.20)

$$y''+py'+qy=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \qquad (2.25)$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены степени n и m соответственно.

Частное решение можно искать в виде (если $\alpha\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения)

$$y_r=U_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+V_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \qquad (2.26)$$

где $U_k(x)$ и $V_k(x)$ - многочлены с неопределенными коэффициентами степени к, которая определяется из равенства k=max(m,n).

А если $\alpha\pm\beta i$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение можно искать в виде

$$y_r=x(U_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+V_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x). \qquad (2.27)$$

2.3 Системы дифференциальных уравнений

Продемонстрируем знакомство с системами дифференциальных уравнений на примере нормальной системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases} \qquad (2.28)$$

Решением системы (2.28) называется совокупность функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ при подстановке которых в уравнения (2.28) каждое из уравнений обращается в тождество.

Задача Коши для системы (2.28) формулируется так: требуется найти решение системы (2.28), удовлетворяющее начальному условию:

$$y_1(x_0)=y_{10},\ y_2(x_0)=y_{20}. \qquad (2.29)$$

Общим решением системы (2.28) называется совокупность функций $y_1=y_1(x,\ C_1,\ C_2)$, $y_2=y_2(x,\ C_1,\ C_2)$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные, удовлетворяющие следующим условиям:

1) При любых фиксированных значениях произвольных постоянных эта совокупность функций является решением системы (2.28);
2) Каково бы ни было начальное условие (2.29), можно подобрать значения C_1, C_2 так, что функции y_1, y_2 будут удовлетворять этому условию.

Одним из простейших методов решения системы (2.28) является метод сведения нормальной системы двух уравнений к одному уравнению второго порядка.

Чтобы свести систему (2.28) к одному уравнению, продифференцируем первое уравнение системы по x:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} y_2'. \qquad (2.30)$$

Заменяя в (2.30) y_1', y_2' из (2.28), приходим к уравнению вида:

$$y_1'' = \varphi_2(x, y_1, y_2). \tag{2.31}$$

Выражая (если удастся) y_2 из первого уравнения (2.28), получаем:

$$y_1'' = \varphi_3(x, y_1, y_1'). \tag{2.32}$$

Находим общее решение (2.32): $y_1=y_1(x, C_1, C_2)$. Подставив полученное в первое уравнение (2.28), имеем:

$y_1=y_1(x, C_1, C_2)$,

$y_2=y_2(x, C_1, C_2)$.

Пример 2.3.1

Найти решение системы, удовлетворяющее начальному условию

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z, \end{cases} \quad \begin{cases} y(0) = 1, \\ z(0) = 1. \end{cases} \tag{2.33}$$

Решение.

Дифференцируем первое уравнение по x:

$$y'' = -3y' - z'.$$

Подставляем значения производных из (2.33):

$$y'' = -3(-3y - z) - (y - z) \rightarrow y'' = 8y + 4z. \tag{2.34}$$

Из первого уравнения (2.33):

$$z = -3y - y'. \tag{2.35}$$

Подставляя (2.35) в (2.34), получаем линейное уравнение второго порядка:

$$y'' = 8y + 4z \rightarrow y'' = 8y + 4(-3y - y') \rightarrow y'' + 4y' + 4y = 0. \tag{2.36}$$

Характеристическое уравнение (2.36):

$k^2 + 4k + 4 = 0 \quad k_{1,2} = -2.$ Поэтому

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x).$$

Подставляя в (2.35), получаем:

$$z = -3y - y' = -3\left(e^{-2x}(C_1 + C_2 x)\right) - \left(-2e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + e^{-2x} \cdot C_2\right) =$$
$$= e^{-2x}(-C_1 - C_2 - C_2 x) = -e^{-2x}(C_1 + C_2 + C_2 x).$$

Итак, общее решение (2.33) имеет вид:

$$
\begin{cases} y = e^{-2x}\left(C_1 + C_2 x\right), \\ z = -e^{-2x}\left(C_1 + C_2 + C_2 x\right). \end{cases} \tag{2.37}
$$

Подставляя в (2.37) начальные условия, получаем:

$$
\begin{cases} y = e^{-2x}\left(C_1 + C_2 x\right), \\ z = -e^{-2x}\left(C_1 + C_2 + C_2 x\right), \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = C_1, \\ 1 = -\left(C_1 + C_2\right), \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -2. \end{cases}
$$

Задача Коши для (2.33):

$$
\begin{cases} y = e^{-2x}\left(1 - 2x\right), \\ z = -e^{-2x}\left(-1 - 2x\right), \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = e^{-2x}\left(1 - 2x\right), \\ z = e^{-2x}\left(1 + 2x\right). \end{cases}
$$

Ответ. $\begin{cases} y = e^{-2x}\left(1 - 2x\right), \\ z = e^{-2x}\left(1 + 2x\right). \end{cases}$

3. Решение типового варианта

Вариант № 0

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\sqrt{4+y^2}dx - \ y+x^2y \ \ dy = 0.$$

Решение.

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\sqrt{4+y^2}dx - \ y+x^2y \ \ dy = 0 \quad \to \frac{dx}{1+x^2} - \frac{ydy}{\sqrt{4+y^2}} = 0 \to$$
$$\to \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{ydy}{\sqrt{4+y^2}} = C \quad \to arctgx - \sqrt{4+y^2} = C.$$

Ответ. $arctgx - \sqrt{4+y^2} = C.$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$xy' = \frac{3y^3+6x^2y}{2y^2+3x^2}, \quad y \ -1 \ = -1.$$

Решение.

Данное уравнение однородное так как:

$$xy' = \frac{3y^3+6x^2y}{2y^2+3x^2} \quad \to y' = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 6\left(\frac{y}{x}\right)}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3}.$$

Делая замену: $y = xt, \quad y' = t + xt',$ получаем:

$$t + xt' = \frac{3t^3+6t}{2t^2+3} \quad \to x\frac{dt}{dx} = \frac{3t^3+6t}{2t^2+3} - t \quad \to x\frac{dt}{dx} = \frac{t^3+3t}{2t^2+3} \to$$
$$: \to \frac{2t^2+3}{t^3+3t}dt = \frac{dx}{x} \quad \to \left(\frac{t^2+3+t^2}{t \ \ t^2+3}\right)dt = \ln Cx \quad \to \left(\frac{1}{t} + \frac{t}{t^2+3}\right)dt = \ln Cx \to$$
$$\to \ln t\sqrt{t^2+3} = \ln Cx \quad \to t\sqrt{t^2+3} = Cx \quad \to y\sqrt{y^2+3x^2} = Cx^3.$$

Подставляя в общий интеграл начальное условие, получаем:

$$y\sqrt{y^2+3x^2} = Cx^3 \quad \to \ -1 \ \sqrt{4} = C \ \ -1 \quad \to C = 2.$$

Интеграл задачи Коши имеет вид:

$$y\sqrt{y^2+3x^2} = 2x^3.$$

Ответ. $y\sqrt{y^2+3x^2}=2x^3.$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'-\frac{2xy}{1+x^2}=1+x^2,\quad y(0)=1.$$

Решение.

Данное уравнение линейное, поэтому по формуле (1.11):

$$y=e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\left(\int(1+x^2)\,e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}dx+C\right)=e^{\ln(1+x^2)}\left(\int(1+x^2)\,e^{-\ln(1+x^2)}dx+C\right)=$$

$$=(1+x^2)(x+C).$$

Подставляя начальное условие, получаем:

$$y=(1+x^2)(x+C)\ \to 1=C\ \to y=(1+x)(1+x^2).$$

Ответ. $y=(1+x)(1+x^2).$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(x^2-4xy-2y^2)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0.$$

Решение.

Проверим условие (1.15):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-4x-4y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-4y-4x.$$

Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и существует такая функция u(x,y), что u(x,y)=C является общим интегралом искомого уравнения. Найдем u(x,y) такое, что

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=x^2-4xy-2y^2,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=y^2-4xy-2x^2.\end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение по x, получаем:

$$u=\int(x^2-4xy-2y^2)dx=\frac{x^3}{3}-2x^2y-2xy^2+\varphi(y).$$

Дифференцируя полученное выражение по y и сравнивая со вторым выражением равенства, получаем:

$$-2x^2-4xy+\varphi'(y)=y^2-4xy-2x^2 \quad \to \varphi'(y)=y^2 \quad \to \varphi(y)=\frac{y^3}{3}+C_1.$$

Общий интеграл искомого уравнения имеет вид:

$$\frac{x^3}{3}-2x^2y-2xy^2+\frac{y^3}{3}=C.$$

Ответ. $\frac{x^3}{3}-2x^2y-2xy^2+\frac{y^3}{3}=C.$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$2xy''=y'.$$

Решение.

Понижая порядок дифференциального уравнения заменой $y'=z,$ получим:

$$2xy''=y' \quad \to 2xz'=z \quad \to 2\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x} \quad \to 2\ln z=\ln x+\ln C_1 \quad \to z^2=C_1x.$$

Делая обратную замену и извлекая корень и интегрируя, получаем:

$$y'=\pm\sqrt{C_1x} \quad \to y=\pm\frac{2\sqrt{C_1x}\cdot x}{3}+C_2.$$

Ответ. $y=\pm\frac{2\sqrt{C_1x}\cdot x}{3}+C_2.$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''=32y^3, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=4.$$

Решение.

Понижая порядок дифференциального уравнения заменой

$y'=z, \quad y''=z\frac{dz}{dy},$ получим:

$$z\frac{dz}{dy}=32y^3 \quad \to zdz=32y^3dy \quad \to \frac{z^2}{2}=8y^4+\frac{C_1}{2} \quad \to z^2=16y^4+C_1.$$

Пользуясь начальным условием, имеем:

$$z^2=16y^4+C_1 \quad \to 16=16+C_1 \quad \to C_1=0.$$

Таким образом $z=\pm 4y^2 \quad \to \dfrac{dy}{dx}=\pm 4y^2 \quad \to \dfrac{dy}{y^2}=\pm 4dx \quad \to -\dfrac{1}{y}=\pm x+C_2.$

Из начального условия: $-\dfrac{1}{y}=\pm x+C_2 \quad \to -1=C_2.$

И интеграл задачи Коши: $\qquad -\dfrac{1}{y}=\pm x-1.$

Ответ. $-\dfrac{1}{y}=\pm x-1.$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''+2y'+y=0, \quad y\ \ 0\ \ =1, \quad y'\ \ 0\ \ =1.$$

Решение.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2+2k+1=0 \quad \to k_{1,2}=-1.$$

Общее решение (см. (2.14) имеет вид:

$$y=e^{-x}\ \ C_1+C_2x\ \ .$$

Подставляя начальное условие, находим C_1:

$$y=e^{-x}\ \ C_1+C_2x \quad \to 1=C_1 \quad \to y=e^{-x}\ \ 1+C_2x\ \ .$$

Вычисляя производную и подставляя начальное условие, находим C_2:

$$y=e^{-x}\ \ 1+C_2x \quad \to y'=-e^{-x}\ \ 1+C_2x\ \ +C_2e^{-x} \quad \to 1=-1+C_2 \quad \to C_2=2.$$

Решение задачи Коши: $y=e^{-x}\ \ 1+2x\ \ .$

Ответ. $y=e^{-x}\ \ 1+2x\ \ .$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+4y=8ctg2x.$$

Решение.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2+1=0 \quad \to k_{1,2}=\pm i.$$

Общее решение однородного уравнения (см. (2.15) имеет вид:

$$y_0=\ \ C_1\cos x+C_2\sin x\ \ .$$

Частное решение неоднородного уравнения найдем по методу Лагранжа или методом вариации произвольных постоянных:

$$y = C_1\ \ x\ \cos x + C_2\ \ x\ \sin x\ . \qquad (3.1)$$

Для нахождения $C_1(x)$, $C_2(x)$ составим систему (см. (2.19)):

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = 8ctg\,2x, \end{cases} \to \begin{cases} C_1' = -C_2' tgx, \\ C_2' \left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x \right) = 8ctg\,2x, \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} C_1' = -C_2' tgx, \\ C_2' = 4\dfrac{\cos 2x}{\sin x}, \end{cases} \to \begin{cases} C_1' = -4\dfrac{\cos 2x}{\cos x}, \\ C_2' = 4\dfrac{\cos 2x}{\sin x}. \end{cases}$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1 = \int \left(-4\frac{\cos 2x}{\cos x} \right) dx = -4\int \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} dx = -4\int \left(2\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) dx =$$

$$= -8\sin x + 4\ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + A,$$

$$C_2 = \int \left(4\frac{\cos 2x}{\sin x} \right) dx = 4\int \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin x} dx = -4\int \left(2\sin x - \frac{1}{\sin x} \right) dx =$$

$$= 8\cos x + 4\ln\left| tg\frac{x}{2} \right| + B.$$

Подставляя в (3.1), получаем:

$$y = (-8\sin x + 4\ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + A)\cos x + (8\cos x + 4\ln\left| tg\frac{x}{2} \right| + B)\sin x =$$

$$= A\cos x + B\sin x + 4\left(\ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \cos x + \ln\left| tg\frac{x}{2} \right| \sin x \right).$$

Ответ. $y = A\cos x + B\sin x + 4\left(\ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \cos x + \ln\left| tg\frac{x}{2} \right| \sin x \right).$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' = \ -2x + 1\ \ e^x. \qquad (3.2)$$

Решение.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k = 0 \quad \to k_1 = -2, \quad k_2 = 0.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде (см. (2.21)): $y_r = (Ax+B)e^x$.

Подставляя в (3.2), найдем неизвестные коэффициенты:

$$2Ae^x + (Ax+B)e^x + 2(Ae^x + (Ax+B)e^x) = (-2x+1)e^x \to$$
$$2A + (Ax+B) + 2A + 2(Ax+B) = (-2x+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем:

$$\begin{cases} 3A = -2, \\ 4A+3B = 1, \end{cases} \to \begin{cases} A = -\dfrac{2}{3}, \\ B = \dfrac{11}{9}. \end{cases}$$

Общее решение (3.2):

$$y = C_1 + C_2e^{-2x} + \left(-\frac{2}{3}x + \frac{11}{9}\right)e^x.$$

Ответ. $y = C_1 + C_2e^{-2x} + \left(-\frac{2}{3}x + \frac{11}{9}\right)e^x.$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y. \end{cases} \tag{3.3}$$

Решение.

Дифференцируя первое уравнение и подставляя значения производных из (3.3), получаем уравнение второго порядка:

$$x'' = 4x' - 3y' \to x'' = 4(4x-3y) - 3(-2x-y) \quad x'' = 22x - 9y.$$

Выражая y из первого уравнения (3.3), получаем уравнение относительно x:

$$3y = 4x - x', \quad x'' = 22x - 3(3y) \to x'' = 22x - 3(4x - x') \to$$
$$\to x'' - 3x' - 10x = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$k^2 - 3k - 10 = 0 \to k_1 = -2, \quad k_2 = 5.$ Значит

$x = C_1e^{-2t} + C_2e^{5t}.$ Тогда

$$y = \frac{1}{3}(4x - x') \to y = \frac{1}{3}\left(4(C_1e^{-2t} + C_2e^{5t}) - (C_1e^{-2t} + C_2e^{5t})'\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(4(C_1e^{-2t} + C_2e^{5t}) - (-2C_1e^{-2t} + 5C_2e^{5t})\right) = \frac{1}{3}\left(6C_1e^{-2t} - C_2e^{5t}\right).$$

Общее решение системы:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{5t}, \\ y = 2C_1 e^{-2t} - \dfrac{1}{3} C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{5t}, \\ y = 2C_1 e^{-2t} - \dfrac{1}{3} C_2 e^{5t}. \end{cases}$

4. Контрольная работа № 4

Вариант № 1

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\sqrt{3+y^2}dx - \;\; y + x^2 y \;\; dy = 0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' = \frac{x^2 - y^2 + xy}{x^2 - 2xy}, \quad y \;\, 1 \;\, = 0.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y \;\, 1 \;\, = 1.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy'' + y' = x + 1.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''y^3 + 16 = 0, \quad y \;\, 1 \;\, = 2, \quad y' \;\, 1 \;\, = 2.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' = 0, \quad y \;\, 0 \;\, = 1, \quad y' \;\, 0 \;\, = 4.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1+e^{-2x}}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' = \;\; \cos x + \sin x \;\; e^x.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 7y. \end{cases}$$

Вариант № 2

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(6x+3xy^2)\,dx-(6y+2x^2y)\,dy=0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$xy'=\sqrt{2x^2+y^2}+y,\quad y(1)=0.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'+\frac{3}{x}y=\frac{2}{x^3},\quad y(1)=1.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(1+\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy=0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''tgx-y'+\frac{1}{\sin x}=0.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''+32\sin y\cos^2 y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=4.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''+2y'+y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=-1.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-9y'+18y=\frac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-2y'+5y=(5x^2-4x+2).$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=5x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-3x+9y.\end{cases}$$

Вариант № 3

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$x\sqrt{3+y^2}\,dx - y\sqrt{2+x^2}\,dy = 0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6, \quad y(-1) = 2.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = \frac{1}{e}.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy = 0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2 y'' + xy' = 1.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'' = 50\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 5.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'' + y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' - 4y = 17\sin x.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 9y. \end{cases}$$

Вариант № 4

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$ye^{2x}dx+\left(e^{2x}+5\right)dy=0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$xy'=\frac{3y^3+8x^2y}{2y^2+4x^2},\quad y(1)=\sqrt{5}.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'+\frac{x}{2(1-x^2)}y=\frac{x}{2},\quad y(0)=\frac{2}{3}.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(6xy^2+4x^3\right)dx+\left(6x^2y+3y^2\right)dy=0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''ctg2x+2y'=0.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''=18y^3,\quad y(1)=1,\quad y'(1)=3.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''-2y'=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+y=\frac{1}{\cos x}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'+4y=25\sin x+4x.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x-3y.\end{cases}$$

Вариант № 5

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$yy'\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'=\frac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}, \quad y\;\;1\;\;=0.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'+xy=-2x^3, \quad y\;\;0\;\;=3.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$3x^3+6x^2y+3xy^2\;\;dx+\;\;2x^3+2x^2y\;\;dy=0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^3y''+x^2y'=1.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''y^3+9=0, \quad y\;\;1\;\;=1, \quad y'\;\;1\;\;=3.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''-13y'+12y=0, \quad y\;\;0\;\;=3, \quad y'\;\;0\;\;=14.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-3y'=\frac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'+5y=2x^2e^x.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=8x+y.\end{cases}$$

Вариант № 6

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(6x+2xy^2)\,dx-(6y+3x^2y)\,dy=0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$xy'=3\sqrt{x^2+y^2}+y,\quad y(1)=0.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'-\frac{2y}{1+x}=(1+x)^2e^x,\quad y(0)=1.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$xy^2dx+y(x^2+y^2)\,dy=0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''tgx=2y'.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y^3y''=4(y^4-1),\quad y(0)=\sqrt{2},\quad y'(0)=\sqrt{2}.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''+y'=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+y=4ctgx.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'+13y=26x+5.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x+6y,\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=4x+2y.\end{cases}$$

Вариант № 7

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$x\sqrt{5+y^2}\,dx+y\sqrt{4+x^2}\,dy=0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$2y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+8,\quad y(1)=-3.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'+2xy=xe^{-x^2}\sin x,\quad y(0)=1.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(x-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(y+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-2y'ctgx=\sin^3 x.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''+50\sin y\cos^3 y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=5.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''-y'=0,\quad y(0)=3,\quad y'(0)=1.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-6y'+8y=\frac{4}{2+e^{-2x}}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-3y'+2y=10\sin x.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-4x+y.\end{cases}$$

Вариант № 8

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$e^x dx - y\left(4+e^x\right)dy = 0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$xy' = \frac{3y^3+10x^2y}{2y^2+5x^2}, \quad y(-1)=1.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' - \frac{2y}{1+x} = 2(1+x)^3, \quad y(0)=\frac{1}{2}.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$3x^2e^y dx + \left(x^3e^y - 1\right)dy = 0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^4y'' + x^3y' = 1.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'' = 8y^3, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=-3.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y' - 2y = 3xe^x.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Вариант № 9

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}, \quad y(1) = 0.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' - y\cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}\,dy = 0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy'' + 2y' = 0.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''y^3 + 4 = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 4y = \cos x.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y. \end{cases}$$

Вариант № 10

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(2x+2xy^2)\,dx-(2y+x^2y)\,dy=0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$xy'=3\sqrt{2x^2+y^2}+y,\quad y(2)=-1.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'-4xy=-4x^3,\quad y(0)=-\frac{1}{2}.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(3x^2+4y^2)\,dx+(8xy+e^y)\,dy=0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1+x^2)\,y''+2xy'=x^3.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''=2\sin^3 y\cos y,\quad y(1)=\frac{\pi}{2},\quad y'(1)=1.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''-6y'+9y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+9y=\frac{9}{\cos 3x}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-y=2x\cos x.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-3x+5y. \end{cases}$$

Вариант № 11

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+12,\quad y\;\;1\;\;=3.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'-\frac{y}{x}=-\frac{\ln x}{x},\quad y\;\;1\;\;=1.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}-2y\right)dy=0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^5y''+x^4y'=1.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''+2\sin y\cos^3 y=0,\quad y\;\;0\;\;=0,\quad y'\;\;0\;\;=1.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''-13y'+12y=0,\quad y\;\;0\;\;=0,\quad y'\;\;0\;\;=11.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-y=\frac{e^{-x}}{2+e^{-x}}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-3y'+2y=\;\;-4x+3\;\;e^{2x}.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-2y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=4x-y.\end{cases}$$

Вариант № 12

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$ye^{x}dx - \ e^{x} + 8 \ dy = 0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$xy' = \frac{3y^3 + 12x^2 y}{2y^2 + 6x^2}, \quad y \ \sqrt{2} \ = 2.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' - 3x^2 y = \frac{1}{2}x^2 \ 1 + x^3 \ , \quad y \ 0 \ = 0.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(y^2 + \frac{y}{\cos^2 x}\right)dx + \ 2xy + tgx \ dy = 0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy'' - y' + \frac{1}{x} = 0.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'' = 2y^3, \quad y \ -1 \ = 1, \quad y' \ -1 \ = 1.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'' + y' = 0, \quad y \ 0 \ = 1, \quad y' \ 0 \ = -1.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y = 4ctg2x.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 8y = 5\cos 2x.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y. \end{cases}$$

Вариант № 13

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'=\frac{x^2+xy-3y^2}{x^2-xy},\quad y(-1)=0.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'-y\cos x=\sin 2x,\quad y(0)=-1.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(3x^2y+2y+3)dx+(x^3+2x+3y^2)dy=0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy''+y'+x=0.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''y^3+1=0,\quad y(1)=-1,\quad y'(-1)=-1.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''-5y'+6y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-3y'+2y=\frac{1}{3+e^{-x}}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+4y'-12y=8\sin 2x.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x+6y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=4x+2y.\end{cases}$$

Вариант № 14

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$6x+3xy^2\ \ dx-\ \ y+x^2y\ \ dy=0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$xy'=2\sqrt{3x^2+y^2}+y,\quad y\ 1\ =-1.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'-\frac{y}{x}=-\frac{2}{x^2},\quad y\ 1\ =1.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}\right)dy=0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''=2(y'-1)ctgx.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$4y''y^3=y^4-1,\quad y\ 0\ =\sqrt{2},\quad y'\ 0\ =\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''+5y'+4y=0,\quad y\ 0\ =3,\quad y'\ 0\ =0.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-6y'+8y=\frac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+6y'+9y=2xe^{-3x}-9.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+5y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y.\end{cases}$$

Вариант № 15

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y\ln y + xy' = 0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5, \quad y(-1) = 6.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' - \frac{y}{x} = 2x^2, \quad y(1) = 0.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(\sin 2x - 2\cos(x+y))dx - 2\cos(x+y)dy = 0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy'' + y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 3y' = 6x + 1 - 10\cos x.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 2y. \end{cases}$$

Вариант № 16

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$1+e^{x}\quad y'=ye^{x}.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$xy'=\frac{3y^{3}+14x^{2}y}{2y^{2}+7x^{2}},\quad y\ \ -1\ \ =\sqrt{2}.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'+y\cos x=\sin x\cos x,\quad y\ \ 0\ \ =0.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(xy^{2}+\frac{x}{y^{2}}\right)dx+\left(x^{2}y-\frac{x^{2}}{y^{3}}\right)dy=0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''tgx=y'+1.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''y^{3}+64=0,\quad y\ \ 0\ \ =2\sqrt{2},\quad y'\ \ 0\ \ =2.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''-y'=0,\quad y\ \ 0\ \ =1,\quad y'\ \ 0\ \ =-1.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+16y=\frac{16}{\cos 4x}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'+4y=2xe^{x}.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+4y.\end{cases}$$

Вариант № 17

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}, \quad y(-1) = 0.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' - y\,ctgx = 2x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3}\,dy = 0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''tg5x = 5y'.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'' + 2\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' + 13y = 26x - 1.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

Вариант № 18

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$6x+3xy^2\ \ dx+\ \ 2y+2x^2y\ \ dy=0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$xy'=4\sqrt{x^2+y^2}+y,\quad y\ 1\ =-1.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'+ytgx=\cos x,\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(2x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2y''=(y')^2.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''=32\sin^3 y\cos y,\quad y\ 1\ =\frac{\pi}{2},\quad y'\ 1\ =4.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''-y=0,\quad y\ 0\ =2,\quad y'\ 0\ =0.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+\frac{y}{4}=\frac{1}{4}ctg\frac{x}{2}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-5y'+6y=xe^{2x}.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-9y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y.\end{cases}$$

Вариант № 19

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y(1+\ln y)+xy'=0.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$3y'=\frac{y^2}{x^2}+10\frac{y}{x}+10,\quad y(-1)=4.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'-\frac{y}{2+x}=x^2+2x,\quad y(-1)=\frac{3}{2}.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^3y''+x^2y'=-\sqrt{x}.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''=98y^3,\quad y(1)=1,\quad y'(1)=7.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''-y'=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-3y'+2y=\frac{1}{2+e^{-x}}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+y=4x\cos x.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-7x+y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-2x-5y.\end{cases}$$

Вариант № 20

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$3+e^x \quad yy'=e^x.$$

2) Найти решение или интеграл задачи Коши для дифференциального уравнения

$$xy'=4\sqrt{2x^2+y^2}+y, \quad y \; 1 \; =0.$$

3) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'-\frac{y}{1+x}=e^x \;\; x+1 \;, \quad y \; 0 \; =1.$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{1+xy}{x^2 y}dx+\frac{1-xy}{xy^2}dy=0.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''=(y')^2.$$

6) Найти интеграл или решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''y^3+49=0, \quad y \; 3 \; =-7, \quad y' \; 3 \; =-1.$$

7) Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''-2y'+y=0, \quad y \; 0 \; =0, \quad y' \; 0 \; =1.$$

8) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''++3y'+2y=\frac{e^{-x}}{2+e^x}.$$

9) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+4y'+4y=4\cos 2x.$$

10) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=4x+y. \end{cases}$$

Содержание