|  |
| --- |
| **Теория вероятностей математическая статистика и случайные процессы** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Контрольная работа** | [назад](Intro.htm) |

**Контрольная работа по курсу Теория вероятностей**

Контрольная работа состоит из пяти задач, текст задачи и её параметры определяются по последней цифре пароля как указано в таблице. Для проверки преподавателю высылаются сразу все задачи, выполненные в редакторе Word . Контрольная может быть выполнена в письменном виде и отправлена по почте только по согласованию с деканатом. Работа, кроме ответов к задачам, должна содержать описание решения задач и номер решаемой задачи. Порядок решения задач значения не имеет, хотя логичнее решать задачи именно в написанном порядке.

Для выполнения контрольной работы вам необходимо ознакомиться с конспектом лекций по соответствующим разделам. В конспекте, кроме теоретического материала, рассмотрены также примеры, демонстрирующие решение задач, аналогичных задачам из контрольной работы. Кроме того, примеры решения подобных задач приведены в конце файла.

**Текст 1.** Вероятность соединения при телефонном вызове равна p. Какова вероятность, что соединение произойдёт только при k - ом вызове?

**Текст 2.** Вероятность появления поломок на каждой из k соединительных линий равна p. Какова вероятность того, что хотя бы две линии исправны?

**Текст 3.** В одной урне K белых шаров и L чёрных шаров, а в другой – M белых и N чёрных. Из первой урны случайным образом вынимают P шаров и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают R шаров. Найти вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны, белые.

**Текст 4.** В типографии имеется *K* печатных машин. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна *P*. Построить ряд распределения числа работающих машин, построить функцию распределения этой случайной величины, найти МО, дисперсию, а также вероятность того, что число работающих машин будет не больше *R*.

**Текст 5.** Непрерывная случайная величина задана ее функцией распределения.

Найти параметр С, плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию, а также вероятность попадания случайной величины в интервал [a , b ] и квантиль порядка *p*.

**Текст 6.** Непрерывная случайная величина задана ее плотностью распределения

Найти параметр С, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию, вероятность попадания случайной величины в интервал [a , b ] и квантиль порядка *p*.

**Текст 7**. Продолжительность телефонного разговора распределена по показательному закону с параметром l (1/мин.). Разговор по телефону - автомату прерывается через три минуты от начала разговора. Какова доля прерванных разговоров? Каким должно быть время до прерывания разговора, чтобы доля прерванных разговоров не превышала 1%?

**Текст 8**. Суточное потребление электроэнергии исправной печью является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним 1000 кВт/ч и СКО s . Если суточное потребление превысит 1100 кВт, то по инструкции печь отключают и ремонтируют. Найти вероятность ремонта печи. Каким должно быть превышение по инструкции, чтобы вероятность ремонта печи была равна 0,02?

Ссылки на лекционный материал даны в большой степени условно, т.к. при решении любой задачи используется не только указанная формула, но и ранее полученные знания. К примеру, для построения ряда распределения надо уметь вычислять вероятности событий, а это целая глава.

Задача 1: Глава 1 §1–5.

Задача 2: Глава 1 §3.5; §7; §8.

Задача 3: Глава 1 §9; Глава 2 §1; §2.

Задача 4: Глава 2 §4.

Задача 5: Глава 2 §5.

**Примеры решения задач.**

**Пример решения задачи 1.** На предприятии три телефона. Вероятности их занятости равны соответственно 0,6; 0,4; 0,5. Какова вероятность того, что хотя бы два из них свободны?

Решение:

Введём следующие обозначения:

A1– занят первый телефон, P(A1) = 0,6;

A2– занят второй телефон, P(A2) = 0,4;

A3– занят третий телефон, P(A3) = 0,5;

P{хотя бы два свободны}=

P{свободны два телефона или свободны три телефона} =

при помощи введённых обозначений это можно записать так:

**Пример решения задачи 2.** В одной урне 3 белых шара и 2 чёрных шара, а в другой – 4 белых и 3 чёрных. Из первой урны случайным образом вынимают 3 шара и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны, белые.

Решение:

Введём следующие обозначения для событий:

H1– из первой урны переложили белые шары,

H2 – из первой урны переложили два белых и один черный шар,

H3 – из первой урны переложили один белый и два черных шара.

Т.к. других вариантов вытащить из первой урны три шара нет, эти события составляют полную группу событий, и они несовместны. Найдём вероятности этих событий по формуле гипергеометрической вероятности:

Введём событие A – после перекладывания из второй урны вытащили 4 белых шара. Вероятность этого события зависит от того, что во вторую урну переложили из первой. Найдём условные вероятности:

P(A/H1)={теперь во второй урне 10 шаров, из них 7 белых }

P(A/H2)={теперь во второй урне 10 шаров, из них 6 белых }

P(A/H1)={теперь во второй урне 10 шаров, из них 5 белых }

Теперь найдём вероятность события А по формуле полной вероятности:

P(A)=P(H1) × P(A/H1) + P(H2) × P(A/H2) + P(H3) × P(A/H3)=0,1× 1/6+0,6× 1/14+0,3× 1/42 = 0,0(6).

**Пример решения задачи 3**. Монету бросают 5 раз. Найти ряд распределения числа выпавших гербов, построить функцию распределения этой случайной величины, найти МО, дисперсию, а также вероятность того, что число выпавших гербов будет не меньше 1 и не больше 3.

Решение:

В этой задаче x – дискретная случайная величина, принимающая значения 0,1,2,3,4,5. Чтобы построить ряд распределения x , требуется найти вероятности, с которыми она принимает эти значения. В данном случае имеется последовательность испытаний по схеме Бернулли, т.к. испытания независимы, и вероятность успеха р =0,5 одинакова во всех испытаниях (успех – выпадение герба). Тогда по формуле Бернулли при n=5, p=0.5, q=1– p=0.5:

Теперь построим ряд распределения:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Значения | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| вероятность | 0,03125 | 0,15625 | 0,3125 | 0,3125 | 0,15625 | 0,03125 |

Найдём мат. ожидание по формуле:

Найдём дисперсию:

Выпишем в аналитическом виде функцию распределения:

Найдём вероятность того, что число выпавших гербов будет не меньше 1 и не больше 3:

**Примеры решения задачи 4.**

A)Непрерывная случайная величина задана ее функцией распределения.

Найти параметр с, плотность распределения случайной величины, математическое ожидание, дисперсию, а также вероятность попадания случайной величины в интервал [1,5;2] и квантиль порядка 0,9.

Решение:

Найдём сначала плотность распределения как производную от функции распределения:

. Тогда

Теперь найдём параметр с из уравнения:

Т.к. плотность на разных интервалах задана разными функциями, разбиваем область интегрирования на соответствующее количество интервалов.

Т.е. функция распределения

Найдём мат. ожидание по формуле:

Опять разбиваем область интегрирования на три интервала

Дисперсию находим по формуле

Вероятность попадания случайной величины в интервал [a,b] найдём по формуле

В данном случае

Квантиль порядка 0,9 – это решение уравнения F(x)=0,9:

Б) Непрерывная случайная величина задана ее плотностью распределения

Найти параметр с, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию, вероятность попадания случайной величины в интервал [a , b ] и квантиль порядка *p=*0,9.

Решение:

Найдём параметр с из уравнения:

Т.к. плотность на разных интервалах задана разными функциями, разбиваем область интегрирования на соответствующее количество интервалов.

Найдём функцию распределения по формуле

(т.к. переменная x стоит в пределе интегрирования, в выражении для плотности надо её заменить другой переменной, например, t). Т.к. плотность распределения задаётся разными выражениями в зависимости от интервала, функция распределения так же будет задаваться разными выражениями на этих интервалах:

если x < 0,

если 0 £ x £ 3,

если x > 3,

Т.о. можно записать:

Найдём квантиль порядка 0,9: это решение уравнения F(x)=0,9:

Вероятность попадания в интервал находим аналогично задаче А).

**Примеры решения задачи 5.**

А) Время безотказной работы прибора распределено по показательному закону с параметром l =1,2 (1/год). Согласно инструкции прибор заменяют через 2 года эксплуатации. Найти вероятность безотказной работы до замены. Определить такой срок эксплуатации до замены, при котором доля отказавших приборов составит 0,05%.

Решение:

– время безотказной работы прибора.

{т.к. случайная величина распределена по показательному закону, её функция распределения известна и равна } =

Для решения второй части задачи обозначим переменной t срок эксплуатации до замены.

по условию. Т.о. получаем уравнение:

Б) Валики, изготавливаемые автоматом, считаются стандартными, если отклонение диаметра валика от проектного размера не превышает 2 мм. Случайные отклонения диаметра валиков подчиняются нормальному закону со средним а =0, и s =1,6 мм. Сколько процентов стандартных валиков изготавливает автомат? Каким должно быть допустимое отклонение от стандартного размера, чтобы количество стандартных валиков было не меньше 90%?

Решение:

Пусть – отклонение диаметра от проектного размера.

Процент стандартных валиков – это, другими словами, вероятность того, что случайно выбранный валик будет стандартным. Т.к. отклонение в данной задаче может быть как в большую, так и в меньшую сторону, надо найти

т.к. это нормальное распределение, то функцию распределения можно вычислить либо через функцию Ф0(х), либо через Ф(х), в зависимости от того, таблица какой из функций имеется в наличии:

Fx (x)=0,5+ Ф0((х –a)/s )= Ф((х –a)/s ). Тогда искомая вероятность

= Ф0((2– 0)/1,6) – Ф0((–2– 0)/1,6)= Ф0(2/1,6) – Ф0(–2/1,6)=

{т.к. функция нечётная}

= Ф0(2/1,6) + Ф0(2/1,6)= 2× Ф0(2/1,6)= 2× Ф0(2/1,6)= 2× Ф0(1,25)=2× 0,39435=0,7887.

Т.е. процент стандартных валиков равен приблизительно 79%.

Для решения второй части задачи обозначим переменной t допустимое отклонение от стандартного размера. Получим неравенство:

по условию задачи. Тогда . Теперь в таблице функции Ф0 находим значение, наиболее близкое к 0,45 и определяем аргумент, при котором функция принимает это значение. В данном случае аргумент равен 1,645, т.е.

t/1,6 =1,645,

t =1,645× 1,6=2,635

[назад](Intro.htm)