

6Ф0.5

С23

УДК 621.078(076.1)

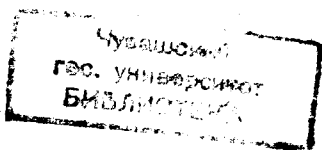
А В Т О Р Ы:

В. А. БЕСЕКЕРСКИЙ, А. Н. ГЕРАСИМОВ, С. В. ЛУЧКО,
А. В. НЕБЫЛОВ, Л. Ф. ПОРФИРЬЕВ, Е. А. ФАБРИКАНТ,
С. М. ФЕДОРОВ, В. И. ЦВЕТКОВ

Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления, под редакцией В. А. Бесекерского, издание пятое, переработанное, издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1978, 512 стр.

Сборник рассчитан на студентов, специализирующихся в области теории автоматического управления, а также на студентов других специальностей, изучающих теорию автоматического регулирования и управления. По сравнению с предыдущими изданиями в сборнике предусмотрено широкое использование вычислительной техники при анализе и синтезе автоматических систем. Сборник содержит 491 задачу и ориентируется на ряд используемых в вузах книг. В качестве основной принята книга В. А. Бесекерского и Е. П. Попова «Теория систем автоматического регулирования», издания второе и третье («Наука», 1972 и 1975). Построение сборника, содержание, терминология и методика изложения в основном соответствует этой книге.

Табл. 16, илл. 369, библи. 83.



С 30501—005
053(02)-78 138-77

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1978

Предисловие	7
Раздел I	
ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ	
Глава 1. Дифференциальные уравнения и передаточные функции звеньев автоматических систем	9
§ 1.1. Дифференциальные уравнения и передаточные функции звеньев	9
§ 1.2. Типовые динамические звенья	20
§ 1.3. Дифференциальные уравнения и передаточные функции автоматических систем	24
§ 1.4. Структурные схемы и их преобразование	32
Глава 2. Построение частотных характеристик	37
§ 2.1. Характеристики динамических звеньев	37
§ 2.2. Частотные характеристики систем регулирования	51
§ 2.3. Логарифмические частотные характеристики систем регулирования	61
§ 2.4. Определение передаточных функций по частотным характеристикам	69
§ 2.5. Использование цифровых вычислительных машин	71
Глава 3. Устойчивость линейных систем	86
§ 3.1. Алгебраические критерии устойчивости	86
§ 3.2. Критерий устойчивости Михайлова	92
§ 3.3. Критерий устойчивости Найквиста	96
§ 3.4. Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы	103
§ 3.5. Построение областей устойчивости	107
Глава 4. Построение переходных процессов	114
§ 4.1. Классический метод решения дифференциальных уравнений	114
§ 4.2. Применение изображений Лапласа и Карсона — Хевисайда	122
§ 4.3. Приближенные методы	136
А. Использование сопрягающих частот л. а. х.	136
Б. Использование нормированных кривых для минимально-фазовых систем с типовыми л. а. х.	138
§ 4.4. Определение передаточной функции по виду переходного процесса	142
§ 4.5. Расчет переходных процессов на ЦВМ по заданному дифференциальному уравнению системы	144
§ 4.6. Расчет переходных процессов на ЦВМ по заданной структурной схеме системы	154
Глава 5. Оценка качества регулирования	162
§ 5.1. Определение точности при наличии задающего воздействия	162
§ 5.2. Определение точности при наличии возмущающего воздействия	173
§ 5.3. Корневые методы оценки динамических свойств	175
§ 5.4. Оценка по кривой переходного процесса	178

§ 5.5. Интегральные оценки	181
§ 5.6. Частотные оценки динамических свойств	184
Глава 6. Синтез линейных систем	188
§ 6.1. Выбор параметров САР по требуемой точности	188
§ 6.2. Алгебраические методы выбора параметров САР	198
§ 6.3. Частотные методы выбора параметров САР. Расчет последовательных корректирующих устройств	203
§ 6.4. Расчет дополнительных обратных связей и прямых параллельных корректирующих связей	218
§ 6.5. Расчет систем комбинированного управления	229
§ 6.6. Расчет корректирующих устройств при помощи ЭВМ	234
Глава 7. Случайные процессы в линейных системах	238
§ 7.1. Вычисление корреляционных функций и спектральных плотностей	238
§ 7.2. Прохождение случайного стационарного сигнала через линейную систему	247
§ 7.3. Оптимальные системы	254
Глава 8. Системы с переменными параметрами	260
§ 8.1. Построение переходных процессов	260
§ 8.2. Оценка устойчивости и качества регулирования	264
§ 8.3. Использование ЦВМ	268
Глава 9. Системы с запаздыванием и с распределенными параметрами	274
§ 9.1. Системы с временным запаздыванием	274
§ 9.2. Системы с распределенными параметрами	279
Глава 10. Импульсные системы	284
§ 10.1. Дискретные функции и уравнения импульсных систем	284
§ 10.2. Устойчивость и качество импульсных систем	294
Раздел II	
НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ	
Глава 11. Составление уравнений нелинейных систем	299
§ 11.1. Уравнения нелинейных следящих систем	299
§ 11.2. Уравнения нелинейных систем стабилизации	306
Глава 12. Точные методы исследования устойчивости и автоколебаний	312
§ 12.1. Метод фазовых траекторий	312
§ 12.2. Метод А. М. Ляпунова—А. И. Лурье	325
§ 12.3. Частотный метод В. М. Попова	329
Глава 13. Приближенные методы исследования устойчивости и автоколебаний	336
§ 13.1. Алгебраические способы определения устойчивости и автоколебаний	336
§ 13.2. Частотный метод определения автоколебаний	343
Глава 14. Оценка качества нелинейных систем	351
§ 14.1. Исследование колебательных переходных процессов аналитическими методами	351
§ 14.2. Исследование колебательных переходных процессов частотными методами	359

Глава 15. Анализ нелинейных систем с использованием ЦВМ	363
§ 15.1. Построение переходных процессов	363
§ 15.2. Исследование вынужденных колебаний	370
§ 15.3. Определение статистических характеристик случайного процесса на выходе нелинейной системы	374
Глава 16. Прохождение случайных процессов через нелинейные системы	381
§ 16.1. Определение функций и моментов распределения случайного процесса на выходе нелинейной системы	381
§ 16.2. Расчет нелинейных систем с помощью статистической линейаризации	386

Раздел III

ОПТИМАЛЬНЫЕ, ЦИФРОВЫЕ, САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Глава 17. Синтез оптимальных систем управления	394
§ 17.1. Синтез оптимальных систем с использованием принципа максимума	394
§ 17.2. Синтез оптимальных систем методом динамического программирования и классического вариационного исчисления	399
Глава 18. Системы с цифровыми вычислительными машинами (ЦВМ)	404
§ 18.1. Передаточные функции систем с ЦВМ при учете квантования по времени	404
§ 18.2. Устойчивость и оценка качества	409
§ 18.3. Синтез систем с ЦВМ	412
Глава 19. Экстремальные и самонастраивающиеся системы	421
§ 19.1. Составление структурных схем экстремальных и самонастраивающихся систем и исследование их устойчивости	421
§ 19.2. Качество систем экстремального управления	428
Глава 20. Составление схем для моделирования автоматических систем на аналоговых вычислительных машинах	436
§ 20.1. Составление схем для моделирования элементов автоматических систем на аналоговых вычислительных машинах	436
§ 20.2. Составление схем для моделирования дифференциальных уравнений и автоматических систем на аналоговых вычислительных машинах	447
Приложения	455

1. Изображения по Лапласу и Карсону — Хевисайду функций времени (455). 2. z-преобразования функций времени (457). 3. Нормированная логарифмическая частотная фазовая характеристика аperiodического звена первого порядка (458). 4. Нормированные логарифмические амплитудная и фазовая характеристики колебательного звена (458). 5. Отклонение асимптотической л. а. х. колебательного звена от точной (459). 6. Критерий устойчивости Гурвица (460). 7. Критерий устойчивости Рауса (461). 8. Зависимость требуемого запаса по фазе от модуля в децибелах (461). 9. Правило Мэсона для отскакивания передаточной функции по графу или структурной схеме (463). 10. Эквивалентные начальные условия в системе регулирования после воздействия на нее единичной ступенчатой функции (463). 11. Решения однородных дифференциальных уравнений первого, второго и третьего порядков (464). 12. Номограмма для построения вещественной частотной характеристики замкнутой системы по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы (вещест-

венная круговая диаграмма) (465). 13. Кривые для определения времени переходного процесса и перерегулирования по коэффициенту наклона трапецидальной вещественной частотной характеристики (466). 14. Кривые для определения времени переходного процесса и перерегулирования для вещественной частотной характеристики, имеющей максимум (466). 15. Номограмма для построения вещественной частотной характеристики по заданному запасу показателям (467). 16. Типовые л. а. х., соответствующие заданному запасу устойчивости (468). 17. Нормированные стандартные передаточные функции разомкнутой системы (471). 18. Нормированные кривые переходных процессов для типовых л. а. х. (472). 19. Корректирующие звенья постоянного тока (474). 20. Представление дифференциального уравнения в форме Коши (общий случай) (476). 21. Представление дифференциального уравнения, не содержащего в правой части операторов дифференцирования, в форме Коши (477). 22. Преобразование передаточных функций элементов структурных схем, в дифференциальные уравнения в форме Коши (477). 23. Приведение дифференциальных уравнений к канонической форме (478). 24. Достаточные условия устойчивости нелинейных систем второго, третьего и четвертого порядков (480). 25. Переход от л. а. х. вида $20 \lg |1 + W(j\omega)|$ к л. а. х. вида $20 \lg |W(j\omega)|$ (481). 26. Типовые л. а. х. систем с ЦВМ при учете квантования во времени (482). 27. Типовые последовательные дискретные корректирующие звенья (484). 28. Коэффициенты гармонической линеаризации основных нелинейных характеристик (486). 29. Коэффициенты статистической линеаризации некоторых типовых нелинейностей (489). 30. Нормированный интеграл плотности вероятности нормального закона распределения (493). 31. Нормированная плотность вероятности нормального закона распределения (494). 32. Нахождение квадратичной интегральной оценки (494). 33. Формулы для интегрирования спектральной плотности (495). 34. Моделирование элементов структурных схем автоматических систем на операционных усилителях (496). 35. Моделирование нелинейных статических характеристик на операционных усилителях (499). 36. Типовые АЛГОЛ-программы вычисления точек амплитудно-фазовых характеристик (502). 37. Типовая АЛГОЛ-программа расчета на ЦВМ переходного процесса в системе автоматического регулирования (504).

Литература 507

Предисловие

Настоящий сборник рассчитан на студентов, специализирующихся в области автоматического регулирования и управления, но может быть использован и студентами других специальностей при изучении ими теории автоматического регулирования.

Круг вопросов, охватываемых сборником, включает в себя темы, входящие, как правило, в программы по теории автоматического регулирования и управления многих вузов.

Задачник ориентируется на ряд используемых в вузах книг, список которых приведен в конце сборника. В качестве основной принята книга В. А. Бесекерского и Е. П. Попова «Теория систем автоматического регулирования», вышедшая третьим изданием в 1975 г. Построение сборника, содержание, терминология и методика изложения в основном соответствуют этой книге.

Аналогично указанной книге в сборнике применяется одинаковый символ для обозначения оператора дифференцирования, используемого при операторной форме записи дифференциальных уравнений, в которые входят функции времени (оригиналы), и комплексной переменной в преобразованиях Лапласа и Карсона — Хевисайда. При этом предполагается, что читатель самостоятельно может разобраться в значении этого символа в зависимости от того, используются ли в уравнениях функции времени или их изображения, и знает правила перехода от оригиналов к изображениям с учетом начальных условий.

По сравнению с предыдущими изданиями сборник подвергся существенной переработке с целью значительного расширения рассмотрения машинных методов анализа и синтеза автоматических систем. В качестве основных в сборнике приняты алгоритмические языки АЛГОЛ и ФОРТРАН.

В. А. Бесекерским подготовлены главы 5, 7 и 10, а также §§ 8.1 и 8.2, А. Н. Герасимовым — главы 3 и 9, С. В. Лучко — главы 11, 12, 13 и 14, А. В. Небыловым — глава 15, а также §§ 4.5, 4.6 и 8.3, Л. Ф. Порфирьевым — главы 16, 17, 19, Е. А. Фабрикантом — глава 2, а также §§ 4.1 — 4.4, С. М. Федоровым — главы 6 и 18, В. И. Цветковым — главы 1 и 20.

Авторы будут благодарны за все замечания по содержанию и методическому построению сборника задач.

Авторы

Раздел I

Линейные системы автоматического регулирования

Глава I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЗВЕНЬЕВ И АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1.1. Дифференциальные уравнения и передаточные функции звеньев

1. Составить обобщенное дифференциальное уравнение движения двигателя постоянного тока, управляемого по цепям якоря и обмотки возбуждения (рис. 1). За входные величины принять напряжения цепей якоря u_a и обмотки возбуждения u_b и момент нагрузки на валу двигателя $M_n = M_n(t)$, за выходную — угловую скорость якоря двигателя Ω . Насыщением магнитных цепей и реакцией якоря пренебречь. Двигатель работает в системе стабилизации частоты вращения.

Решение. Составим уравнения равновесия напряжений цепи возбуждения

$$u_b = R_b i_b + L_b \frac{di_b}{dt} \quad (1)$$

и цепи якоря

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e, \quad (2)$$

а также уравнение равновесия моментов

$$J \frac{d\Omega}{dt} = M - M_n. \quad (3)$$

Индексами «в» и «я» отмечены параметры (индуктивность L , активное сопротивление R) и переменные (напряжение u , ток i) цепей возбуждения и якоря. Электромагнитный момент двигателя M и э. д. с. якоря e

$$M = d_m i_b i_a, \quad e = d_E i_b \Omega, \quad (4)$$

где d_E , d_m — постоянные коэффициенты; M_n , J — момент нагрузки и момент инерции, приведенные к валу двигателя.

Уравнения (2) и (3) — нелинейные, так как в них входят нелинейные слагаемые (4). Линеаризуем выражения для M и e разло-

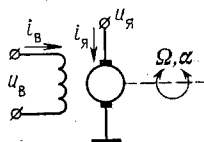


Рис. 1. Принципиальная схема двигателя постоянного тока с независимым возбуждением.

жением их в ряд Тэйлора и учетом лишь линейных составляющих ряда. В результате получим соотношения для малых приращений

$$\Delta M = d_M i_B^0 \Delta i_a + d_M i_a^0 \Delta i_B, \quad \Delta e = d_E i_B^0 \Delta \Omega + d_E \Omega^0 \Delta i_B. \quad (5)$$

Здесь и далее верхним индексом 0 обозначаются установившиеся значения переменных, относительно которых изменяются их приращения. После подстановки (5) в (2) и (3) получим уравнения в малых приращениях (знак приращений Δ отбросим)

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + d_E i_B^0 \Omega + d_E \Omega^0 i_B, \quad (6)$$

$$J \frac{d\Omega}{dt} = d_M i_B^0 i_a + d_M i_a^0 i_B - M_n. \quad (7)$$

Найденный из выражения (7) ток i_a подставим в уравнение (6) и после преобразования получим

$$i_B = \frac{T_2 p^2 + T_3 p + k_2}{T_1 p + 1} \Omega + \frac{T_4 p + k_3}{T_1 p + 1} M_n - \frac{1}{k_1 (T_1 p + 1)} u_a, \quad (8)$$

$$T_1 = \frac{L_a i_a^0}{i_B^0 k_1}, \quad T_2 = \frac{L_a J}{d_M i_B^0 k_1}, \quad T_3 = \frac{R_a J}{d_M i_B^0 k_1}, \quad T_4 = \frac{L_a}{d_M i_B^0 k_1},$$

$$k_1 = \frac{R_a i_a^0 - d_E \Omega^0 i_B^0}{i_B^0}, \quad k_2 = \frac{d_E i_B^0}{k_1}, \quad k_3 = \frac{R_a}{d_M i_B^0 k_1}, \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Определим коэффициенты d_M и d_E . В режиме короткого замыкания ($\Omega = 0$) при $u_a = u_a^0$ и $u_B = u_B^0$ $M = M_n^0$, $i_a = i_{як}^0$, где M_n^0 — пусковой момент, $i_{як}^0$ — ток короткого замыкания цепи якоря. Тогда из (2) получим

$$u_a^0 = R_a i_{як}^0, \quad i_{як}^0 = \frac{u_a^0}{R_a}.$$

С другой стороны, из (4)

$$M_n^0 = d_M i_B^0 i_{як}^0 = d_M i_B^0 \frac{u_a^0}{R_a}, \quad d_M = \frac{M_n^0 R_a}{i_B^0 u_a^0}.$$

В режиме холостого хода ($M_n \approx 0$, $i_a \approx 0$) $\Omega = \Omega_{xx}^0$, где Ω_{xx}^0 — угловая скорость холостого хода при $u_B = u_B^0$ и $u_a = u_a^0$. Тогда из уравнения (2) имеем

$$u_a^0 = e = d_E i_B^0 \Omega_{xx}^0, \quad d_E = \frac{u_a^0}{i_B^0 \Omega_{xx}^0}.$$

Подставив (8) в (1) и сделав преобразования, окончательно получим

$$[T_B T_A T_M p^3 + (T_B + T_A) T_M p^2 + (T_B + T_M) p + 1] \Omega(t) = \\ = k_A (1 + \tau_{EP}) u_A(t) + k_B (1 + \tau_P) u_B(t) - k_M [(1 + \tau_{EP})(1 + \tau_{AP})] M_H(t), \quad (9)$$

$$T_B = \tau_B = \frac{L_B}{R_B}, \quad T_A = \tau_A = \frac{L_A}{R_A}, \quad \tau = \frac{L_A i_A^0}{R_A i_B^0 - e^0},$$

$$T_M = \frac{J R_A}{d_M d_E (i_B^0)^2} = J \frac{\Omega_{XX}^0}{M_{II}^0}, \quad k_A = \frac{1}{d_E i_B^0} = \frac{\Omega_{XX}^0}{u_A^0},$$

$$k_B = \frac{R_A i_A^0 - e^0}{d_E (i_B^0)^2 R_B} = \frac{\Omega_{XX}^0 R_A i_A^0 - e^0}{u_A^0 u_B^0}, \quad k_M = \frac{R_A}{d_M d_E (i_B^0)^2} = \frac{\Omega_{XX}^0}{M_{II}^0},$$

$$e^0 = d_E \Omega^0 i_B^0 = u_A^0 \frac{\Omega^0}{\Omega_{XX}^0}.$$

2. Найти передаточную функцию двойного Т-образного фильтра (рис. 2, а) с учетом сопротивления нагрузки R_H , приняв за входную величину напряжение u_1 , а за выходную величину u_2 .

Решение. Обозначим: характерные точки а, б; потенциалы этих точек относительно общего провода u_a , u_b ; направления токов $i_1, \dots, i_6, i_H$, и составим уравнения

$$i_1 = \frac{1}{R_1} (u_1 - u_a),$$

$$i_2 = C_1 p (u_1 - u_b),$$

$$i_3 = \frac{1}{R_2} (u_a - u_2),$$

$$i_4 = C_2 p (u_b - u_2), \quad i_5 = i_1 - i_3,$$

$$u_a = \frac{1}{C_3 p} i_5, \quad i_6 = i_2 - i_4,$$

$$u_b = R_3 i_6,$$

$$i_H = i_3 + i_1, \quad u_2 = R_H i_H.$$

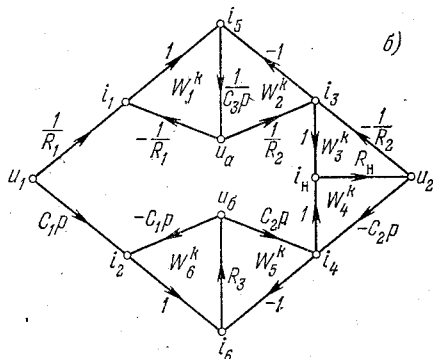
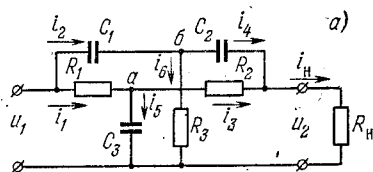


Рис. 2. Схема двойного Т-образного фильтра (а) и ее граф (б).

По полученным уравнениям составим граф (рис. 2, б), в котором содержится шесть контуров с передачами (передаточными функциями)

$$W_1^K(p) = -\frac{1}{R_1 C_3 p}, \quad W_2^K(p) = -\frac{1}{R_2 C_3 p}, \quad W_3^K(p) = -\frac{R_H}{R_2},$$

$$W_4^K(p) = -R_H C_2 p, \quad W_5^K(p) = -R_3 C_2 p, \quad W_6^K(p) = -R_3 C_1 p.$$

Для вывода передаточной функции удобнее воспользоваться не упрощением или преобразованием графа, а непосредственно

правилом Мэзона, согласно которому передаточная функция (см. приложение 9)

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{W_1(p) \Delta_1(p) + W_2(p) \Delta_2(p)}{\Delta(p)}, \quad (1)$$

$$W_1(p) = R_{II} R_3 C_1 C_2 p^2, \quad W_2 = \frac{R_{II}}{R_1 R_2 C_3 p}, \quad (2)$$

$$\Delta_1(p) = 1 - (W_1^K + W_2^K), \quad \Delta_2(p) = 1 - (W_5^K + W_6^K), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta(p) = 1 - \sum_{i=1}^6 W_i^K(p) + \sum W_{II2}^K - \sum W_{II3}^K = \\ = 1 - (W_1^K + W_2^K + W_3^K + W_4^K + W_5^K + W_6^K) + \\ + (W_1^K W_3^K + W_1^K W_4^K + W_1^K W_5^K + W_1^K W_6^K + W_2^K W_4^K + \\ + W_2^K W_5^K + W_2^K W_6^K + W_3^K W_5^K + W_3^K W_6^K + W_4^K W_6^K) - \\ - (W_1^K W_3^K W_5^K + W_1^K W_3^K W_6^K + W_1^K W_4^K W_6^K + W_2^K W_4^K W_6^K). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив выражения (2) — (4) в (1), получим

$$W(p) = \frac{b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}, \quad (5)$$

где $b_0 = a_0 = R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 C_3$, $b_1 = R_3 (R_1 + R_2) C_1 C_2$, $b_2 = R_3 (C_1 + C_2)$, $b_3 = 1$; $a_1 = R_1 R_3 C_3 (C_1 + C_2) + R_3 (R_1 + R_2) C_1 C_2 + R_1 R_2 C_2 C_3 +$
 $+ \frac{R_1}{R_{II}} R_2 R_3 C_3 (C_1 + C_2)$, $a_2 = (R_1 + R_2) C_2 + R_3 (C_1 + C_2) + R_1 C_3 +$
 $+ \frac{R_3}{R_{II}} (R_1 + R_2) (C_1 + C_2) + \frac{R_1}{R_{II}} R_2 C_3$, $a_3 = \frac{R_1 + R_2}{R_{II}} + 1$.

3. Найти передаточную функцию электрической цепи (рис. 3, а) по огибающей модулированного сигнала с несущей частотой $\omega_c = 2\pi f_c$, где f_c — частота сети.

Решение. Передаточная функция электрической цепи

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Tp}{T_0^2 p^2 + Tp + 1}, \quad T = RC, \quad T_0^2 = LC. \quad (1)$$

Амплитудная частотная характеристика (а. ч. х.) имеет вид

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{T\omega}{\sqrt{(1 - T_0^2 \omega^2)^2 + T^2 \omega^2}}. \quad (2)$$

Анализ зависимости (2) показывает, что график а. ч. х. электрической цепи рис. 3, а имеет вид, изображенный на рис. 3, б, причем при резонансной частоте $\omega = \omega_0 = \frac{1}{T_0}$, а. ч. х. принимает максимальное значение $A(\omega_0) = 1$, а при $0 \leq \omega < \omega_0$ и $\omega_0 < \omega \leq \infty$ $A(\omega) < 1$.

Амплитудная частотная характеристика на рис. 3, б напоминает а. ч. х. апериодического звена первого порядка с коэффициентом передачи $k=1$ и $\omega_0=0$. Найдем условие, при котором а. ч. х. с достаточным приближением является симметричной относительно резонансной частоты ω_0 , т. е. может рассматриваться как а. ч. х. апериодического звена первого порядка относительно резонансной частоты ω_0 . Для этого найдем частоты ω_1 и ω_2 из условия идентичности подавления боковых частот апериодическим звеном первого порядка и электрической цепью (см. рис. 3, б):

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Подставив (2) в (3), получим уравнение

$$\frac{T\omega}{\sqrt{(1-T_0^2\omega^2)^2 + T^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4)$$

решив которое, найдем выражения для боковых частот

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{-T + \sqrt{T^2 + 4T_0^2}}{2T_0^2}, \\ \omega_2 &= \frac{T + \sqrt{T^2 + 4T_0^2}}{2T_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Чтобы а. ч. х., изображенная на рис. 3, б, была симметричной относительно резонансной частоты $\omega_0 = T_0^{-1}$, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \sqrt{\frac{1}{T_0^2} + \frac{T^2}{4T_0^4}} \approx \omega_0. \quad (6)$$

Условие (6) выполняется при

$$\frac{T^2}{4T_0^4} < \frac{1}{T_0^2}, \text{ т. е. } T < 2T_0, \text{ или } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7)$$

Следовательно, электрическую цепь (рис. 3, а) можно представить в виде апериодического звена первого порядка по огибающей модулированного сигнала, если выполняется условие (7) и если несущая частота или частота сети $\omega_c = \omega_0$.

Для определения эквивалентной постоянной времени апериодического звена первого порядка по огибающей необходимо найти полосу пропускания рассматриваемой электрической цепи

$$\Delta\omega_n = \omega_2 - \omega_1 = \frac{T}{T_0^2} = \frac{R}{L}. \quad (8)$$

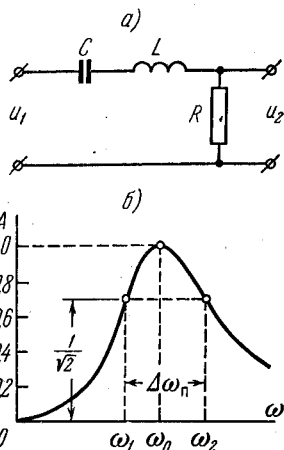


Рис. 3. Схема и график к задаче 3.

Эквивалентная постоянная времени

$$T_э = \frac{2}{\Delta\omega_н} = 2 \frac{L}{R}. \quad (9)$$

Тогда при выполнении условия (7) и при подборе параметров L , C так, чтобы $\omega_0 = \omega_c$, можно записать выражение для передаточной функции электрической цепи на рис. 3, а по огибающей модулированного сигнала в виде

$$W(p) = \frac{1}{T_э p + 1}. \quad (10)$$

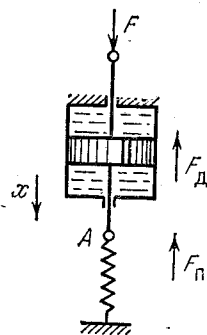


Рис. 4. Динамическое звено к задачам 5 и 6.

4. Найти передаточную функцию электрической цепи (рис. 3, а) по огибающей модулированного сигнала при $R = 1000$ Ом, $C = 0,2$ мкФ, $L = 0,8$ Г и несущей частоте входного сигнала $f_c = 400$ Гц.

Решение. Воспользуемся формулами предыдущей задачи.

$$\begin{aligned} \text{Постоянные} \quad \text{времени} \quad T_0 &= \sqrt{LC} = \\ &= \sqrt{0,8 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ с}, \quad T = RC = \\ &= 1000 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ с}. \end{aligned}$$

Условие (7) выполняется. Резонансная частота $\omega_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0,4 \cdot 10^{-3}} = 2500 \text{ с}^{-1}$. Частота входного сигнала $\omega_c = 2\pi f_c = 6,28 \cdot 400 = 2512 \text{ с}^{-1}$, т. е. условие $\omega_0 = \omega_c$ практически выполняется. Условие (7) можно уточнить по формуле (6):

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \sqrt{\frac{1}{T_0^2} + \frac{T^2}{4T_0^4}} = \sqrt{\frac{1}{0,16 \cdot 10^{-6}} + \frac{0,04 \cdot 10^{-6}}{4(0,16 \cdot 10^{-6})^2}} = 2575 \text{ с}^{-1},$$

откуда следует, что а. ч. х. симметрична относительно резонансной частоты, так как $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_0$.

Эквивалентная постоянная времени $T_э = 2 \frac{L}{R} = 2 \frac{0,8}{1000} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. Передаточная функция по огибающей модулированного сигнала

$$W(p) = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-3} p + 1}.$$

5. Найти передаточную функцию пружины и демпфера (рис. 4), если пренебречь влиянием массы подвижных частей и принять за входную величину силу F , а за выходную — перемещение точки A (поршня) x .

Решение. Составляем уравнение равновесия сил $F = F_d + F_n = c_1 \dot{x} + c_2 x$, где c_1 — коэффициент демпфирования, а c_2 — коэффициент упругости пружины. Тогда имеем $(T_1 p + 1)x = kF$, где

$T_1 = \frac{c_1}{c_2}$, $k = c_2^{-1}$, откуда передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T_1 p + 1}.$$

6. Найти передаточную функцию по условиям предыдущей задачи, если учесть приведенную к точке А (см. рис. 4) массу подвижных частей.

Ответ. Искомая передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T_2 p^2 + T_1 p + 1}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{m}{c_2}},$$

m — масса подвижных частей.

7. Получить из обобщенного дифференциального уравнения движения двигателя постоянного тока (9) задачи 1 основные частные уравнения для случаев: 1) управления двигателем по цепи обмотки возбуждения, когда $u_n = U_c = \text{const}$, где U_c — напряжение сети; 2) то же, но при $L_n = 0$; 3) управления двигателем по цепи якоря, когда $u_n = U_c = \text{const}$; 4) то же, но при $L_n = 0$.

Решение. 1) В этом случае приращение $\Delta u_n = u_n = 0$ и обобщенное уравнение движения принимает вид

$$[T_n T_m p^3 + (T_n + T_m) T_m p^2 + (T_n + T_m) p + 1] \Omega(t) = k_n (1 + \tau p) u_n(t) - k_m [(1 + \tau_n p)(1 + \tau_p p)] M_n(t). \quad (1)$$

2) Если $L_n = 0$, то $T_n = \tau_n = 0$, $\tau = 0$ и уравнение (1) упрощается

$$(T_m p + 1) \Omega(t) = k_n u_n(t) - k_m (1 + \tau_p p) M_n(t). \quad (2)$$

Коэффициенты уравнений (1) и (2) определены в задаче 1. Механические характеристики при этом имеют вид, показанный на рис. 5, а.

3) В этом случае приращение $\Delta u_n = u_n = 0$, $T_n = \tau_n = 0$, и обобщенное уравнение движения принимает вид

$$(T_n T_m p^2 + T_m p + 1) \Omega(t) = k_n u_n(t) - k_m (1 + \tau_p p) M_n(t). \quad (3)$$

4) Если $L_n = 0$, то $T_n = \tau_n = 0$ и уравнение (3) упрощается:

$$(T_m p + 1) \Omega(t) = k_n u_n(t) - k_m M_n(t). \quad (4)$$

Коэффициенты уравнений (3) и (4) принимают вид

$$T_m = \frac{J R_n}{c_E c_m} = J \frac{\Omega_{xx}^0}{M_n^0} = J \gamma, \quad k_n = \frac{1}{c_E} = \frac{\Omega_{xx}^0}{u_n^0}, \quad k_m = \frac{R_n}{c_E c_m} = \frac{\Omega_{xx}^0}{M_n^0} = \gamma,$$

$$c_E = d_E i_B^0 = \frac{u_n^0}{\Omega_{xx}^0}, \quad c_m = d_m i_B^0 = \frac{M_n^0 R_n}{u_n^0}, \quad \gamma = \left| \frac{d\Omega}{dM} \right|.$$

К

Коэффициенты $T_{я}$, $\tau_{я}$ определены в задаче 1. Механические характеристики при этом имеют вид, показанный на рис. 5, б; видно, что коэффициент наклона механических характеристик $\gamma = \text{const}$ и $u_{я} = \text{var}$.

8. Найти дифференциальное уравнение движения и передаточную функцию двигателя с независимым возбуждением, управляемого по цепи якоря (см. задачи 1, 7), относительно угла поворота вала α при $M_{н} = 0$.

Ответ.

$$(T_{м}T_{я}p^2 + T_{м}p + 1) p \alpha(t) = k_{я} u_{я}(t),$$

$$W_{\alpha}(p) = \frac{A(p)}{U_{я}(p)} =$$

$$= \frac{k_{я}}{(T_{м}T_{я}p^2 + T_{м}p + 1)p}.$$

9. Найти передаточные функции двигателя постоянного тока с независимым возбуждением, управляемого по цепи якоря, если пренебречь электромагнитными процессами цепи якоря (см. задачи 1, 7).

Ответ.

$$W_{\Omega}(p) = \frac{\Omega(p)}{U_{я}(p)} = \frac{k_{я}}{T_{м}p + 1},$$

$$W_{\alpha}(p) = \frac{A(p)}{U_{я}p} = \frac{k_{я}}{p(T_{м}p + 1)}.$$

10. Найти передаточные функции двухфазного асинхронного двигателя (рис. 6, а) при моменте нагрузки $M_{н} = 0$. Механические характеристики имеют вид рис. 6, б, а электромагнитными переходными процессами в статоре и роторе можно пренебречь.

Решение. Аналогично предыдущей задаче передаточные функции асинхронного двигателя по угловой скорости

$$W_{\Omega}(p) = \frac{k}{T_{м}p + 1}$$

и по углу

$$W_{\alpha}(p) = \frac{k}{p(T_{м}p + 1)}.$$

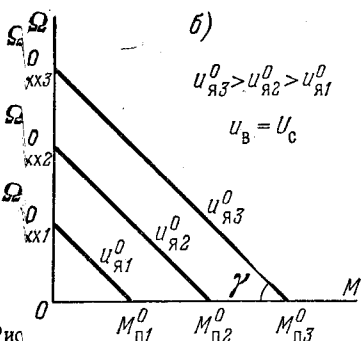
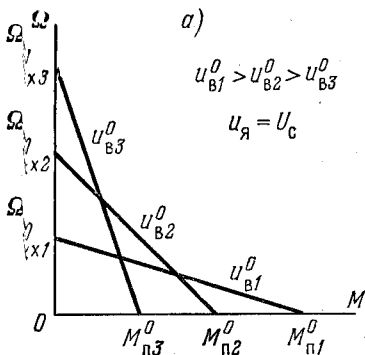


Рис. 5. Механические характеристики двигателя постоянного тока, управляемого по цепи возбуждения (а) и по цепи якоря (б).

Электромеханическая постоянная времени T_m пропорциональна коэффициенту наклона механической характеристики γ (см. задачу 7):

$$T_m = J\gamma_0 = J \frac{\Omega_{xx}^0}{M_n^0},$$

где J — приведенный к валу двигателя момент инерции вращающихся частей; Ω_{xx}^0 , M_n^0 , γ_0 — соответственно угловая скорость

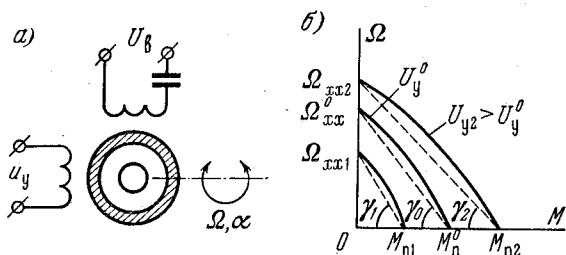


Рис. 6. Схема и механические характеристики к задаче 10.

холостого хода, пусковой момент и коэффициент наклона аппроксимированной прямой линией механической характеристики, соответствующей наиболее часто принимаемым значениям управляющего напряжения $u_y = U_y^0$ в автоматической системе (см. рис. 6, б), $k = \Omega_{xx}^0 / U_y^0$ — коэффициент передачи двигателя.

11. Найти передаточные функции двигателя постоянного тока с независимым возбуждением управляемого по цепи якоря, если за выходную величину принять угловую скорость вала Ω , за входную — момент нагрузки $M_n(t)$, 1) с учетом и 2) без учета индуктивности цепи якоря L_a (см. задачи 1, 7).

Ответ. 1) $L_a \neq 0$,

$$W_\Omega(p) = \frac{\Omega(p)}{M_n(p)} = - \frac{k_m(1 + \tau_a p)}{T_a T_m p^2 + T_m p + 1};$$

$$2) L_a = 0, W_\Omega(p) = - \frac{k_m}{T_m p + 1}.$$

12. Найти дифференциальное уравнение движения поршня относительно корпуса (перемещение x_1) под действием силы F (рис. 7) без учета сил трения цилиндра о корпус и массы подвижных частей.

Решение. Уравнения равновесия сил, приложенных к поршню:

$$F_d = c_1 \dot{x}_3 = c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F, \quad (1)$$

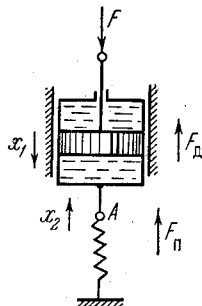
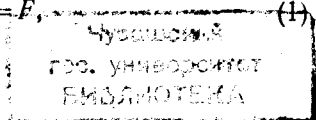


Рис. 7. Динамическое звено к задаче 12.



и к цилиндру:

$$F_{\pi} = c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_{\pi} = c_2 x_2, \quad (2)$$

где $x_3 = x_1 - x_2$ — перемещение поршня относительно цилиндра, x_2 — перемещение точки A относительно корпуса. Найдя x_2 из уравнения (2) и подставив в (1), получим

$$p x_1(t) = k(1 + \tau p) F(t),$$

где $k = c_1^{-1}$, $\tau = c_1 c_2^{-1}$ (см. задачу 5).

13. Найти дифференциальное уравнение движения по условиям предыдущей задачи, учитывая массу подвижных частей.

Ответ.

$$(T_1 T_2^2 p^3 + T_3^2 p^2 + T_1 p + 1) p x_1 = k(\tau_2^2 p^2 + \tau p + 1) F(t),$$

где $T_1 = m_1 c_1^{-1}$, $T_2 = \tau_2 = \sqrt{m_2 c_2^{-1}}$, $T_3 = \sqrt{(m_1 + m_2) c_2^{-1}}$, m_1 — масса поршня с рычагом, m_2 — приведенная к точке A масса пружины с цилиндром (см. задачи 5, 6).

14. Для компенсации индуктивного сопротивления обмотки управления двухфазного асинхронного двигателя в ее цепь вклю-

чают конденсатор емкостью C (рис. 8, а). Требуется найти передаточную функцию двигателя с учетом динамических свойств образовавшегося контура LCR в цепи обмотки управления.

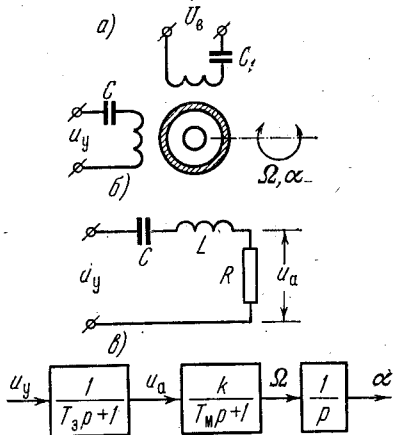
Решение. Динамические свойства, выражающиеся инерционностью электромеханических процессов двигателя, полностью определяются передаточными функциями $W_{\Omega}(p)$ и $W_{\alpha}(p)$ (см. задачу 10).

Для определения передаточной функции контура LCR обмотки управления составим эквивалентную схему цепи обмотки управления рис. 8, б, где L — индуктивность, $R = P_y / I_y^2$ —

Рис. 8. Электрические и структурная схемы к задаче 14.

приведенное активное сопротивление обмотки управления, I_y — номинальный ток, P_y — номинальная активная мощность обмотки управления, C — емкость конденсатора, включаемого в цепь управления. Влиянием внутреннего сопротивления источника, питающего обмотку управления, пренебрегаем.

Контур LCR подробно рассмотрен в задаче 3. Его передаточная функция по огибающей модулированного сигнала с несущей



частотой, равной частоте сети f_c или круговой частоте сети $\omega_c = 2\pi f_c$,

$$W(p) = \frac{1}{T_0 p + 1}. \quad (1)$$

Однако эквивалентная постоянная времени T_0 цепи управления двухфазного асинхронного двигателя должна быть определена с учетом фазового сдвига ψ , вносимого этим контуром на частотах, отличных от несущей. Электромагнитный момент, развиваемый двигателем

$$M = M^0 \cos \psi, \quad \psi = 90 - \arctg \frac{T\omega}{1 - T_0^2 \omega^2} = \arctg \frac{1 - T_0^2 \omega^2}{T\omega},$$

откуда

$$\cos \psi = \frac{T\omega}{\sqrt{T^2 \omega^2 + (1 - T_0^2 \omega^2)^2}}, \quad (2)$$

где $M^0 = \text{const}$ — электромагнитный момент двигателя при $u_y = u_y^0 = \text{const}$ и $\omega = \omega_0 = 1/T_0$, $T = RC$, $T_0^2 = LC$ (см. задачу 3). С учетом фазового угла ψ выражение эквивалентной амплитудной частотной характеристики цепи управления двигателя, или контура RLC ,

$$A_s(\omega) = A(\omega) \cos \psi = \frac{T^2 \omega^2}{T^2 \omega^2 + (1 - T_0^2 \omega^2)^2}, \quad (3)$$

и выражение (4) задачи 3 примет вид

$$\frac{T^2 \omega^2}{T^2 \omega^2 + (1 - T_0^2 \omega^2)^2} = \frac{1}{V^2}. \quad (4)$$

В результате решения уравнения (4) получим выражения для боковых частот

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{-\sqrt{V^2 - 1} T + \sqrt{(V^2 - 1) T^2 + 4 T_0^2}}{2 T_0^2}, \\ \omega_2 &= \frac{\sqrt{V^2 - 1} T + \sqrt{(V^2 - 1) T^2 - 4 T_0^2}}{2 T_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Чтобы эквивалентная а. ч. х. была симметричной относительно резонансной частоты $\omega_0 = 1/T_0$, необходимо выполнение условия

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \sqrt{\frac{1}{T_0^2} + \frac{V^2 - 1}{4} \frac{T^2}{T_0^4}} \approx \omega_0. \quad (6)$$

Условие (6) выполняется при

$$\frac{(V^2 - 1) T^2}{4 T_0^4} < \frac{1}{T_0^2}, \quad \text{т. е. при } T < \frac{2 T_0}{\sqrt{V^2 - 1}},$$

или

$$R < \frac{2 \sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{V^2 - 1}} \approx 3,1 \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7)$$

Полоса пропускания эквивалентного контура

$$\Delta\omega_{\Pi} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\sqrt{V^2 - 1} T}{T_0^2} = \sqrt{V^2 - 1} \frac{R}{L} \approx 0,64 \frac{R}{L}. \quad (8)$$

Из сравнения полученных выражений с аналогичными выражениями задачи 3 видно, что при учете влияния фазового сдвига, вносимого цепью управления, на работу двигателя полоса пропускания частот контура RLC сужается, а условие (7) ослабляется.

Эквивалентная постоянная времени

$$T_3 = \frac{2}{\Delta\omega_{\Pi}} = \frac{2}{0,64} \frac{L}{R} \approx 3,1 \frac{L}{R}. \quad (9)$$

Следовательно, передаточная функция (1) справедлива при выполнении условия (7) и $1/\sqrt{LC} \approx 2\pi f_c$. При выполнении обоих условий передаточные функции двухфазного асинхронного двигателя

$$W_{\Omega}(p) = \frac{\Omega(p)}{U_y(p)} = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_m p + 1)},$$

$$W_{\alpha}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_y(p)} = \frac{k}{p(T_3 p + 1)(T_m p + 1)}.$$

Структурная схема двигателя принимает вид, изображенный на рис. 8, в.

После незначительных преобразований можно получить новые выражения для определения эквивалентной постоянной времени

$$T_3 = 3,1 \frac{L}{R} = \frac{3,1}{\omega_c} \frac{x_L}{R} = \frac{3,1}{\omega_c} \operatorname{tg} \varphi = \frac{3,1}{\omega_c} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi},$$

где $\omega_c \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $x_L = \omega_c L$ — индуктивное сопротивление обмотки управления, $\cos \varphi$ — коэффициент мощности обмотки управления при работе без конденсатора (в номинальном режиме).

15. Индуктивность обмотки управления двухфазного асинхронного двигателя $L = 0,05$ Г, а приведенное активное сопротивление $R = 150$ Ом. Какой должна быть емкость конденсатора, включаемого в цепь обмотки управления, если частота сети $f_c = 400$ Гц? Можно ли пользоваться передаточной функцией (1) из предыдущей задачи?

Ответ. 1) $C = 3,2$ мкФ.

2) Можно, так как $R = 150$ Ом $< 3,1 \sqrt{\frac{L}{C}} = 388$ Ом.

§ 1.2. Типовые динамические звенья

16. Какое динамическое звено имеет функцию веса $w(t) = 50(e^{-5t} - e^{-10t}) \cdot 1(t)$? Найти параметры этого звена и записать выражение передаточной функции.

Решение. *Способ 1.* Приведенная функция веса состоит из двух экспонент. Следовательно, это аperiodическое звено второго порядка с весовой функцией вида

$$w(t) = \frac{k}{T_3 - T_4} \left(e^{-\frac{t}{T_3}} - e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t),$$

откуда находим $T_3 = 0,2$ с, $T_4 = 0,1$ с и $k = (0,2 - 0,1) 50 = 5$,

$$W(p) = \frac{5}{(0,2p + 1)(0,1p + 1)}.$$

Способ 2.

$$W(p) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-pt} dt = \frac{5}{(1 + 0,2p)(1 + 0,1p)},$$

откуда $T_3 = 0,2$ с, $T_4 = 0,1$ с, $k = 5$.

17. Найти переходную функцию неустойчивого звена с передаточной функцией $W(p) = \frac{5}{0,1p - 1}$.

Ответ. $h(t) = 5(-1 + e^{10t}) \cdot 1(t)$.

18. Найти параметры передаточной функции колебательного звена, если его переходная функция имеет вид, изображенный на рис. 9.

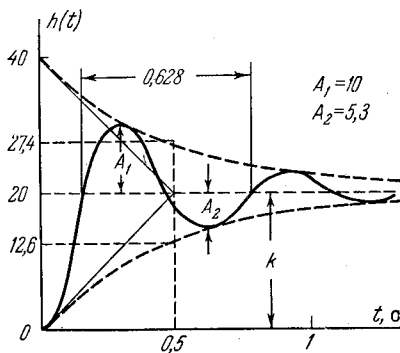


Рис. 9. Переходная функция к задаче 18.

Решение. *Способ 1.* Переходная характеристика колебательного звена записывается в виде

$$h(t) = k \left[1 - e^{-\gamma t} \left(\cos \lambda t + \frac{\gamma}{\lambda} \sin \lambda t \right) \right] \cdot 1(t).$$

Затухание колебаний происходит по экспоненте с постоянной времени $T_\gamma = \frac{1}{\gamma} = 0,5$ с, откуда $\gamma = 2$ с⁻¹. Период колебаний $T_\lambda = \frac{2\pi}{\lambda} = 0,628$ с, откуда $\lambda = 10$ с⁻¹.

Составляем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{\xi}{T} = 2, \\ \lambda &= \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = 10, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

решив которую, находим $T = 0,1$ с, $\xi = 0,2$. Из графика рис. 9 определяем $k = 20$.

Способ 2. Определив амплитуды A_1 и A_2 (см. рис. 9), можно найти коэффициент затухания переходного процесса γ по формуле

$$\gamma = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{A_1}{A_2} = \frac{10}{\pi} \ln \frac{10}{5,3} \approx 2.$$

Подставляя значения частоты затухающих колебаний λ и коэффициента γ в систему уравнений (1), находим постоянную времени T и параметр затухания ξ .

Передающая функция

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} = \frac{20}{0,01 p^2 + 0,04 p + 1}.$$

19. Устройство работает на переменном токе. Каким типовым звеном определяются его динамические свойства по огибающей,

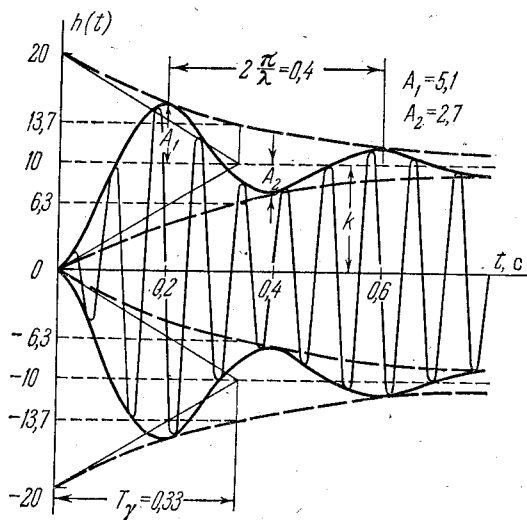


Рис. 10. Переходная функция звена, работающего на переменном токе, к задаче 19.

если переходная характеристика имеет вид, изображенный на рис. 10? Колебания с частотой сети на графике показаны без

соблюдения масштаба времени. Определить параметры передаточной функции звена.

Ответ. Колебательное звено с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{10}{0,0042p^2 + 0,028p + 1}.$$

20. Найти условие, при выполнении которого двойной Т-образный фильтр относится к неминимально-фазовым звеньям (см. задачу 2) и определить, влияет ли на это условие величина сопротивления нагрузки.

Решение. Для нахождения этого условия воспользуемся критерием устойчивости Гурвица, согласно которому при $b_1 b_2 < b_0 b_3$ два корня полинома числителя передаточной функции (5) задачи 2 окажутся в правой полуплоскости. Подставив параметры фильтра в это неравенство, найдем искомое условие

$$\frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} < \frac{C_3}{C_1 + C_2},$$

откуда видно, что величина сопротивления нагрузки R_n на это условие не влияет.

21. Апероодическое звено второго порядка имеет передаточную функцию $W(p) = k/[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)]$. Найти тождественную исходной передаточную функцию, чтобы апероодическое звено второго порядка можно было представить в виде параллельного соединения апероодических звеньев первого порядка.

Решение. Из равенства

$$\frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} = \frac{k_1}{T_1 p + 1} + \frac{k_2}{T_2 p + 1}$$

методом неопределенных коэффициентов находятся уравнения: $k = k_1 + k_2$, $k_1 T_2 + k_2 T_1 = 0$, из которых определяются k_1 , k_2 и

$$W(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1} + \frac{k_2}{T_2 p + 1}, \quad k_1 = -\frac{k T_1}{T_2 - T_1}, \quad k_2 = \frac{k T_2}{T_2 - T_1}.$$

22. По переходной функции, изображенной на рис. 11, определить тип и передаточную функцию звена. Переходная функция представляет собой сумму линейного и экспоненциального членов.

Ответ. Это — интегрирующее звено с замедлением. Его переходная функция

$$h(t) = k[t - T(1 - e^{t/T})] \cdot 1(t).$$

Уравнение асимптоты переходной функции $h_a(t) = k(t - T)$ позволяет определить параметры передаточной функции

$$k = \frac{9,6 - 4,8}{1,2 - 0,8} = 12 \text{ с}^{-1}, \quad T = 0,4 \text{ с}, \quad W(p) = \frac{12}{p(0,4p + 1)}.$$

23. Функция веса аperiodического звена первого порядка изображена на рис. 12. Определить параметры передаточной функции.
Ответ. Коэффициент передачи $k=2$ и постоянная времени $T=0,2$ с.

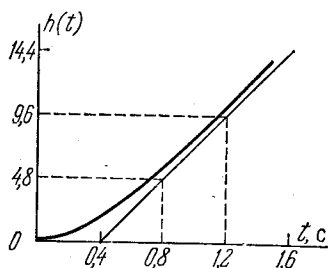


Рис. 11. Переходная функция к задаче 22.

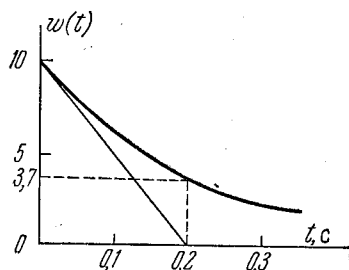


Рис. 12. Весовая функция к задаче 23.

24. Как изменятся постоянные времени, коэффициент передачи, время и форма переходного процесса аperiodического второго порядка или колебательного звена при охвате его жесткой отрицательной обратной связью с коэффициентом передачи k_0 (рис. 13)?

Ответ. Время переходного процесса уменьшится, так как уменьшатся обе постоянные времени T_2 и T_1 ; форма переходного процесса изменится (например, вместо аperiodической может стать колебательной), так как постоянная времени T_1 уменьшится в большей степени (в $1+k_1k_0$ раз), чем T_2 (в $\sqrt{1+k_1k_0}$ раз). Коэффициент передачи уменьшится в $1+k_1k_0$ раз.

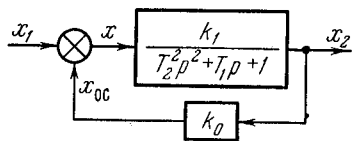


Рис. 13. Структурная схема к задаче 24.

25. Как изменятся постоянная времени T_1 и коэффициент передачи k_1 аperiodического звена первого порядка, если его охватить идеальной гибкой отрицательной обратной связью с передаточной функцией цепи обратной связи $W_{oc}(p) = k_0 p$?
Ответ. Постоянная времени возрастает ($T = T_1 + k_1 k_0$), а коэффициент передачи останется тем же ($k = k_1$).

§ 1.3. Дифференциальные уравнения и передаточные функции автоматических систем

26. Составить структурную схему и граф следящей системы (рис. 14, а) и найти передаточные функции: разомкнутой системы $W(p)$, разомкнутой системы по возмущению $W_m(p)$, замкнутой системы $\Phi(p)$, замкнутой системы по возмущению $\Phi_m(p)$, замкнутой системы относительно ошибки по задающему $\Phi_\Phi(p)$

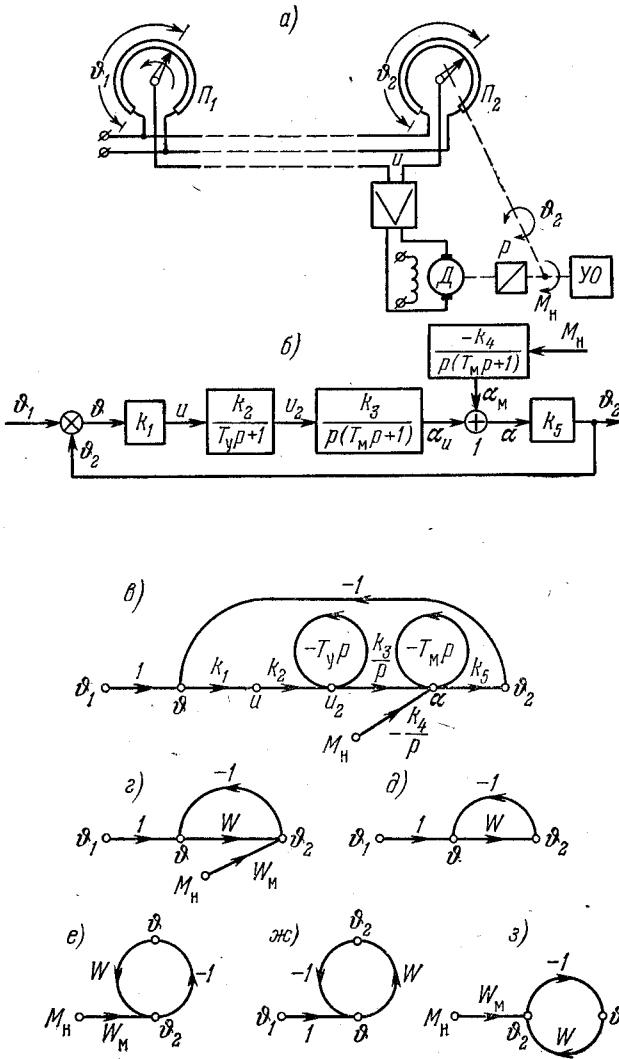


Рис. 14 Принципиальная (а), структурная (б) схемы и графы (в—з) следящей системы.

и возмущающему $\Phi_{\text{зм}}(p)$ воздействию. Звенья следящей системы описываются следующими уравнениями:

- 1) $\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$ — элемента сравнения;
- 2) $u = k_1 \vartheta$ — потенциометрического датчика;
- 3) $(T_y p + 1) u_2 = k_2 u$ или $u_2 = k_2 u - T_y p u_2$ — усилителя, где T_y — постоянная времени;
- 4) $(T_m p + 1) p \alpha = k_3 u_2 - k_4 M_n$ или $\alpha = \frac{k_3}{p} u_2 - \frac{k_4}{p} M_n - T_m p \alpha$ — двигателя, где T_m — электромеханическая постоянная времени;
- 5) $\vartheta_2 = k_5 \alpha$ — редуктора.

Символы k_1 , k_2 , k_3 , k_4 и k_5 — коэффициенты передачи.

Решение. Структурная схема и исходный граф следящей системы представлены на рис. 14, б, в. Из исходного графа находим передаточные функции разомкнутой системы: основную (как передача пути от ϑ_1 до ϑ_2)

$$W(p) = \frac{\Theta_2(p)}{\Theta_1(p)} = 1 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \frac{1}{1 - (-T_y p)} \cdot \frac{k_3}{p} \cdot \frac{1}{1 - (-T_m p)} \cdot k_5 = \\ = \frac{K}{p(1 + T_y p)(1 + T_m p)},$$

где $K = k_1 k_2 k_3 k_5$, и по возмущению (как передача пути от M_n до ϑ_2)

$$W_m(p) = \frac{\Theta_2(p)}{M_n(p)} = - \frac{k_4}{p} \cdot \frac{1}{1 - (-T_m p)} \cdot k_5 = - \frac{k_4 k_5}{p(1 + T_m p)}.$$

На основании полученных выражений W и W_m исходный граф принимает вид, изображенный на рис. 14, г, последовательным преобразованием которого найдем все передаточные функции замкнутой системы. Главный оператор следящей системы $\Phi(p) = \Theta_2(p)/\Theta_1(p)$ при $M_n = 0$ определяется из графа рис. 14, д

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{K}{p(T_y p + 1)(T_m p + 1) + K}.$$

Передаточная функция следящей системы по возмущению $\Phi_m(p) = \Theta_2(p)/M_n(p)$ при $\vartheta_1 = 0$ определяется из графа рис. 14, е

$$\Phi_m(p) = \frac{W_m(p)}{1 + W(p)} = - \frac{k_4 k_5 (1 + T_y p)}{p(T_y p + 1)(T_m p + 1) + K}.$$

Передаточная функция по ошибке $\Phi_\vartheta(p) = \Theta(p)/\Theta_1(p)$ при $M_n = 0$ найдется из графа рис. 14, ж

$$\Phi_\vartheta(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{p(T_y p + 1)(T_m p + 1)}{p(T_y p + 1)(T_m p + 1) + K}.$$

Передаточная функция по ошибке $\Phi_{\text{зм}}(p) = \Theta(p)/M_n(p)$ при $\vartheta_1 = 0$ найдется из графа рис. 14, з

$$\Phi_{\text{зм}}(p) = - \frac{W_m(p)}{1 + W(p)} = - \frac{k_4 k_5 (1 + T_y p)}{p(T_y p + 1)(T_m p + 1) + K}.$$

Все полученные передаточные функции следящей системы могут быть найдены и из структурной схемы следящей системы (рис. 14, б).

27. Составить структурную схему и граф и найти передаточные функции следящей системы (рис. 14, а), если непосредственно с валом двигателя соединить тахогенератор, а его напряжение подать на вход усилителя в противофазе с выходным напряжением потенциометрического датчика угла рассогласования. Дифференциальное уравнение тахогенератора $u_{тг} = k_6 p \alpha$, усилителя $(T_y p + 1) u_2 = k_2 (u - u_{тг})$ или $u_2 = k_2 u - k_2 u_{тг} - T_y p u_2$. Уравнения остальных звеньев следящей системы приведены в условии предыдущей задачи.

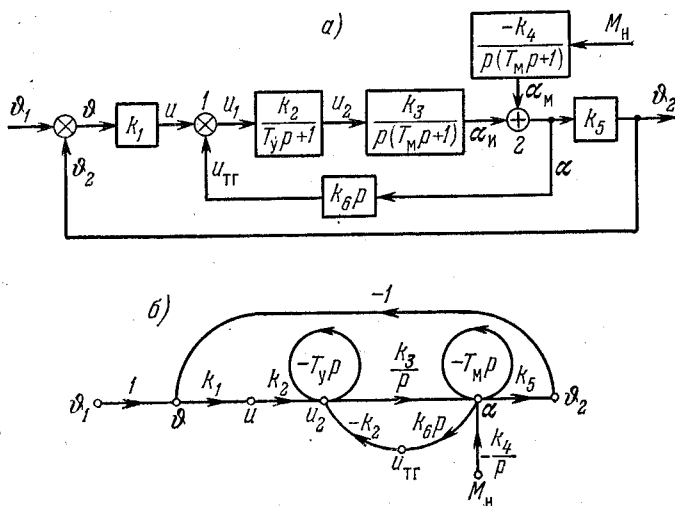


Рис. 15. Структурная схема (а) и граф (б) следящей системы.

Решение. Приведем три способа решения задачи. Структурная схема и граф следящей системы изображены на рис. 15.

С применением графов решим задачу двумя способами.

Способ 1. Для преобразования графа применим правило Мэзона (см. приложение 9). Найдем передаточные функции разомкнутых цепей (W) от ϑ до ϑ_2 и (W_m) от M_h до ϑ_2 :

$$W(p) = \frac{W_1(p) \Delta_1(p)}{\Delta(p)}, \quad (1)$$

$$W_1(p) = k_1 k_2 \frac{k_3}{p} k_5, \quad \Delta_1 = 1,$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (-T_y p - T_m p - k_2 k_3 k_6) + T_y T_m p^2 = \\ &= (T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6; \end{aligned}$$

передаточная функция W_m определяется также по формуле (1), но

для нее $W_1(p) = -\frac{k_4}{p} k_5$, $\Delta_1 = 1 + T_y p$, а Δ — то же. После подстановки получим

$$W(p) = \frac{K}{p [(T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6]},$$

$$W_m(p) = -\frac{k_4 k_5 (1 + T_y p)}{p [(T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6]},$$

где $K = k_1 k_2 k_3 k_5$. С учетом передаточных функций $W(p)$ и $W_m(p)$ граф рис. 15, б примет вид, изображенный на рис. 14, з. Воспользуемся формулами предыдущей задачи к графу рис. 14, з:

$$\Phi(p) = \frac{K}{p [(T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6] + K}, \quad (2)$$

$$\Phi_\theta(p) = \frac{p [(T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6]}{p [(T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6] + K}, \quad (3)$$

$$\Phi_m(p) = -\frac{k_4 k_5 (1 + T_y p)}{p [(T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6] + K}, \quad (4)$$

$$\Phi_{\theta m}(p) = -\Phi_m(p).$$

Способ 2. Применим правило Мэзона к графу рис. 15, б для непосредственного нахождения передаточных функций следящей системы, т. е. без получения передаточных функций разомкнутой системы W и W_m и без преобразования графа. Так как от всех входов (источков θ_1 и M_n) к выходу (стоку θ_2) графа (рис. 15, б) один прямой путь, то для получения всех передаточных функций $\Phi(p)$, $\Phi_\theta(p)$ и $\Phi_m(p)$ справедлива формула Мэзона (1). Однако для главного оператора $\Phi(p)$ (путь от θ_1 до θ_2)

$$W_1 = k_1 k_2 \frac{k_3}{p} k_5, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta = (T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6 + K/p;$$

для передаточной функции по ошибке $\Phi_\theta(p)$ (путь от θ_1 до θ)

$$W_1 = 1, \quad \Delta_1 = (T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6, \quad \Delta — \text{то же};$$

для передаточной функции по возмущению $\Phi_m(p)$ (путь от M_n до θ_2)

$$W_1 = -k_4 k_5 / p, \quad \Delta_1 = 1 + T_y p, \quad \Delta — \text{то же}.$$

Подставив выражения W_1 , Δ_1 , Δ в формулу (1), получим соотношения (2)—(4) для передаточных функций $\Phi(p)$, $\Phi_\theta(p)$, $\Phi_m(p)$.

Способ 3. Воспользуемся правилом Мэзона для получения передаточных функций следящей системы из структурной схемы (рис. 15, а). Для нее также справедлива формула (1), причем для главного оператора $\Phi(p)$

$$W_1 = K/p (T_y p + 1)(T_m p + 1), \quad \Delta_1 = 1,$$

$$\Delta = [(T_y p + 1)(T_m p + 1)p + k_2 k_3 k_6 p + K]/p (T_y p + 1)(T_m p + 1);$$

для передаточной функции по возмущению $\Phi_m(p)$

$$W_1(p) = -k_4 k_5 / (T_m p + 1) p, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta - \text{то же};$$

для передаточной функции по ошибке $\Phi_\theta(p)$

$$W_1 = 1,$$

$$\Delta_1 = [(T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_2 k_3 k_6] / (T_y p + 1)(T_m p + 1), \quad \Delta - \text{то же}.$$

Подстановка выражений W_1 , Δ_1 , Δ в формулу (1) дает искомые соотношения (2) — (4).

28. Найти дифференциальные уравнения движения следящей системы (см. рис. 14) относительно ошибки (θ) а) по задающему воздействию (θ_1) и б) по возмущению (M_n). Дифференциальные уравнения отдельных звеньев приведены в условии задачи 26.

Ответ.

$$\text{а) } [p(T_y p + 1)(T_m p + 1) + K] \theta(t) = p(T_y p + 1)(T_m p + 1) \theta_1(t),$$

или

$$(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) \theta(t) = (b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p) \theta_1(t),$$

$$a_0 = b_0 = T_y T_m, \quad a_1 = b_1 = T_y + T_m, \quad a_2 = b_2 = 1, \quad a_3 = K, \quad p = \frac{d}{dt};$$

$$\text{б) } [p(T_y p + 1)(T_m p + 1) + K] \theta(t) = k_4 k_5 (T_y p + 1) M_n(t)$$

или

$$(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) \theta(t) = (d_0 p + d_1) M_n(t),$$

$$d_0 = k_4 k_5 T_y, \quad d_1 = k_4 k_5, \quad p = \frac{d}{dt}.$$

29. На рис. 16, а изображена принципиальная схема дистанционной следящей системы с синусно-косинусными вращающимися трансформаторами (СКВТ), на которой обозначены: θ_1 , θ_2 — углы поворота командной и исполнительной осей, $\theta = \theta_1 - \theta_2$ — ошибка, РМ — рабочий механизм (объект), Р — редуктор, Д — двигатель, ТГ — тахогенератор. Параметры элементов следующие: k_1 — коэффициент передачи чувствительного элемента (СКВТ) в линейной части характеристики, k_2 и k_3 — коэффициенты усиления усилителей по напряжению, k_4 — коэффициент передачи исполнительного двигателя, $k_5 = n^{-1}$ — коэффициент передачи редуктора, n — передаточное отношение, k_6 — коэффициент передачи тахогенератора, k_7 — коэффициент наклона механической характеристики двигателя, T_1 и T_2 — постоянные времени усилителя и двигателя, $T = RC$ — постоянная времени дифференцирующей цепи.

Требуется составить структурную схему и определить передаточную функцию разомкнутой системы, передаточные функции замкнутой системы: а) относительно управляемой величины по задающему воздействию, б) относительно ошибки по задающему воздействию, в) относительно ошибки по возмущающему воздействию и добротность следящей системы по моменту нагрузки M_n .

Ответ. Структурная схема изображена на рис. 16, б. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(1+Tp)}{p[(1+T_1p)(1+T_2p)(1+Tp) + k_3k_4k_6Tp]},$$

где добротность по скорости (отношение постоянной скорости

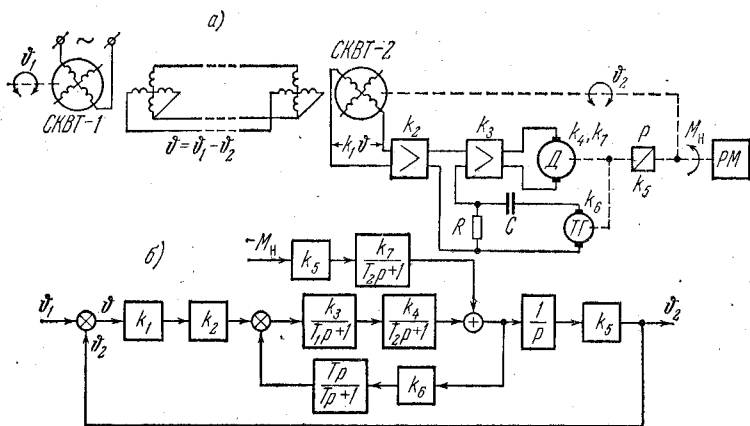


Рис. 16. Следящая система.

слежения к установившейся ошибке)

$$K = k_1k_2k_3k_4k_5.$$

Передаточная функция замкнутой системы относительно управляемой величины по задающему воздействию

$$\Phi(p) = \frac{K(1+Tp)}{p[(1+T_1p)(1+T_2p)(1+Tp) + k_3k_4k_6Tp] + K(1+Tp)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы относительно ошибки по задающему воздействию

$$\Phi_\Phi(p) = \frac{p[(1+T_1p)(1+T_2p)(1+Tp) + k_3k_4k_6Tp]}{p[(1+T_1p)(1+T_2p)(1+Tp) + k_3k_4k_6Tp] + K(1+Tp)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы относительно ошибки по возмущающему воздействию (моменту нагрузки M_n)

$$\Phi_m(p) = \frac{k_7k_5^2(1+T_1p)(1+Tp)}{p[(1+T_1p)(1+T_2p)(1+Tp) + k_3k_4k_6Tp] + K(1+Tp)}.$$

Добротность по моменту (отношение момента нагрузки M_n на исполнительной оси системы к рассогласованию в установившемся

режиме

$$K_m = \frac{K}{k_7 k_6^2} = \frac{K n^2}{k_7} = \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 n}{k_7}.$$

30. Для предыдущей задачи определить численные значения коэффициентов, входящих в передаточную функцию разомкнутой системы, при следующих исходных данных: крутизна чувствительного элемента $k_1 = 1$ В/град = 57,3 В/рад, коэффициенты усиления усилителя $k_2 = 2,5$ и $k_3 = 80$, номинальное значение напряжения двигателя $U_n = 110$ В, частота вращения холостого хода $n_{xx} = 9000$ об/мин и пусковой момент $M_n = 55$ гс·см = 0,54 Н·см, момент инерции двигателя с объектом $J = 9,81$ г·см² = 0,01 гс·см·с², передаточное отношение редуктора $n = 1000$, коэффициент передачи тахогенератора $k_6 = 0,001$ В·мин/об = $9,6 \cdot 10^{-3}$ В·с·рад⁻¹, постоянная времени усилителя $T_1 = 0,01$ с, постоянная времени дифференцирующей цепи $T = 0,14$ с.

Решение. Коэффициент передачи двигателя

$$k_4 = \frac{\Omega_{xx}}{U_n} = \frac{\pi n_{xx}}{30 U_n} = \frac{3,14 \cdot 9000}{30 \cdot 110} = 8,6 \text{ рад} \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Коэффициент наклона механической характеристики

$$k_7 = \frac{\Omega_{xx}}{M_n} = \frac{\pi n_{xx}}{30 M_n} = \frac{3,14 \cdot 9000}{30 \cdot 55} = 17,2 \text{ рад} \cdot \text{гс}^{-1} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Постоянная времени двигателя

$$T_2 = J \frac{\Omega_{xx}}{M_n} = J k_7 = 0,01 \cdot 17,2 = 0,172 \text{ с}.$$

Добротность системы по скорости

$$K = k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 = \frac{57,3 \cdot 2,5 \cdot 80 \cdot 2,6}{1000} \approx 100 \text{ с}^{-1}.$$

Передачная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{100(1 + 0,14p)}{p(1 + 1,18p + 0,027p^2 + 0,00024p^3)}.$$

Раскладывая знаменатель последнего выражения на множители, передаточную функцию разомкнутой системы можно представить в следующем виде:

$$W(p) = \frac{K(1 + Tp)}{p(1 + T_3p)(1 + 2\xi T_4p + T_4^2p^2)},$$

где $T_3 = 1,16$ с, $T_4 = 0,0145$ с и $\xi = 0,8$.

Добротность по моменту

$$K_m = \frac{K n^2}{k_7} = \frac{100 \cdot 1000^2}{17,2} = 5,8 \cdot 10^6 \frac{\text{гс} \cdot \text{см}}{\text{рад}} = 16,7 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{угл. мин.}}.$$

§ 1.4. Структурные схемы и их преобразование

31. Преобразовать динамическое звено, описываемое дифференциальным уравнением

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) x_2 = k x_1, \quad (1)$$

во встречно-параллельное (с обратной связью) соединение консервативного и идеального дифференцирующего звеньев.

Решение. Преобразуем дифференциальное уравнение (1) к виду

$$x_2 = \frac{k}{T_2^2 p^2 + 1} x_1 - \frac{T_1 p}{T_2^2 p^2 + 1} x_2. \quad (2)$$

По уравнению (2) составим структурную схему (рис. 17, а), которая переносом сумматора, или элемента сравнения, и объединением двух последовательно соединенных звеньев преобразуется в искомую схему на рис. 17, б.

Рис. 17. Структурная схема к задаче 31.

32. Найти передаточную функцию замкнутой системы $\Phi(p)$ автоматической системы, структурная схема которой изображена на рис. 18, а.

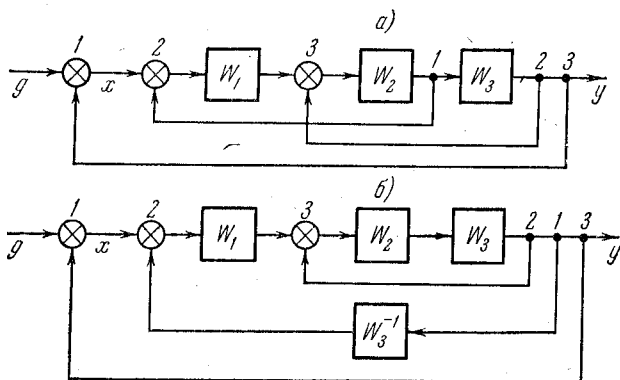


Рис. 18. Структурные схемы к задаче 32.

Решение. Освободимся от перекрестных связей в структурной схеме на рис. 18, а, для чего перенесем узел 1 через звено W_3 по направлению действия сигнала (рис. 18, б). По полученной

структурной схеме находим искомую передаточную функцию

$$\Phi(p) = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_1 W_2 W_3}.$$

33. Найти дифференциальное уравнение автоматической системы, структурная схема которой изображена на рис. 18, а, относительно управляемой величины $y(t)$ по задающему воздействию $g(t)$, если

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}, \quad W_2(p) = \frac{k_2}{p}, \quad W_3(p) = k_3.$$

Решение. Воспользовавшись решением предыдущей задачи, найдем

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{G(p)} = \frac{b_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2},$$

где $Y(p)$, $G(p)$ — изображения управляемой величины и задающего

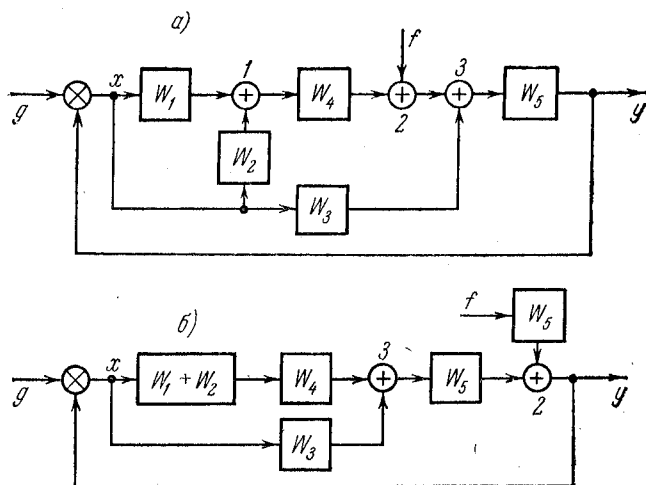


Рис. 19. Структурные схемы к задаче 34.

воздействия, $p = s + j\omega$ — комплексная переменная, $b_0 = k_1 k_3$, $a_0 = = T_1 k_2^{-1}$, $a_1 = k_2^{-1} + k_3 T_1$, $a_2 = k_1 + k_3 + k_1 k_3$. Тогда искомое дифференциальное уравнение

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y(t) = b_0 g(t),$$

где $p = \frac{d}{dt}$ — символ дифференцирования.

34. Найти дифференциальное уравнение автоматической системы, структурная схема которой изображена на рис. 19, а, относительно

управляемой величины $y(t)$ по возмущению $f(t)$, если

$$W_1(p) = k_1, \quad W_2(p) = \tau p, \quad W_3(p) = k_3, \\ W_4(p) = \frac{k_4}{T_1 p + 1}, \quad W_5(p) = \frac{k_5}{T_2^2 p^2 + T_3 p + 1}.$$

Решение. Вначале получим передаточную функцию автоматической системы по возмущению $\Phi_f(p)$, для чего преобразуем структурную схему рис. 19, а. Перенесем сумматор 2 через звено W_5 и заменим W_1, W_2 одним звеном (рис. 19, б). Найдем передаточную функцию разомкнутой системы по задающему воздействию

$$W(p) = \frac{Y(p)}{G(p)} = [(W_1 + W_2) W_4 + W_3] W_5$$

и по возмущению

$$W_f(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = W_5(p).$$

Тогда

$$\Phi_f(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{W_f(p)}{1 + W(p)} = \frac{d_0 p + d_1}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3},$$

где $Y(p), F(p)$ — изображения управляемой величины $y(t)$ и возмущения $f(t)$, $p = c + j\omega$ — комплексная переменная, $d_0 = k_5 T_1$, $d_1 = k_5$, $a_0 = T_1 T_2^2$, $a_1 = T_2^2 + T_1 T_3$, $a_2 = T_1 + T_3 + k_4 k_5 \tau + k_3 k_5 T_1$, $a_3 = 1 + k_3 k_5 + k_1 k_4 k_5$.

Отсюда искомое дифференциальное уравнение имеет вид

$$(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) y(t) = (d_0 p + d_1) f(t), \quad p = \frac{d}{dt}.$$

35. Найти следующие передаточные функции автоматической системы, структурная схема которой изображена на рис. 20, а: разомкнутой системы по задающему воздействию $W(p)$ и по возмущению $W_f(p)$, основную $\Phi(p)$, по возмущению $\Phi_f(p)$ и относительно ошибки по задающему воздействию $\Phi_x(p)$.

Решение. Преобразуем структурную схему рис. 20, а (см. рис. 20, б, в и г). По структурной схеме рис. 20, г найдем

$$W(p) = W_1 W_2 + (1 + W_1 W_2 W_3) W_4 + W_5, \quad W_f(p) = W_3 W_4,$$

$$\Phi(p) = \frac{W_1 W_2 + (1 + W_1 W_2 W_3) W_4 + W_5}{1 + W_1 W_2 + (1 + W_1 W_2 W_3) W_4 + W_5},$$

$$\Phi_f(p) = \frac{W_3 W_4}{1 + W_1 W_2 + (1 + W_1 W_2 W_3) W_4 + W_5},$$

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1 + W_1 W_2 + (1 + W_1 W_2 W_3) W_4 + W_5}.$$

36. Найти дифференциальные уравнения автоматической системы, структурная схема которой изображена на рис. 20, а, относительно управляемой величины $y(t)$ по задающему воздействию $g(t)$ и по

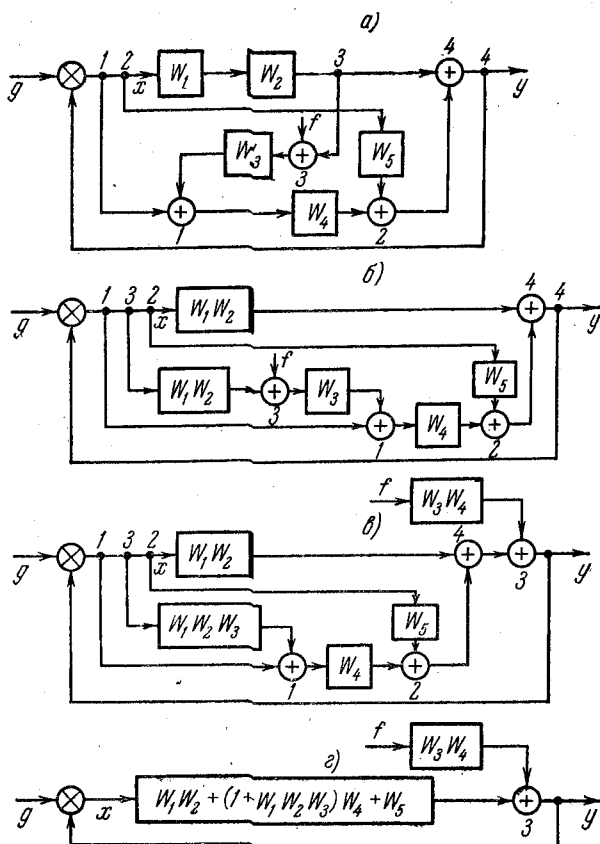


Рис. 20. Структурные схемы к задаче 35.

возмущению $f(t)$, а также относительно ошибки $x(t)$ по задающему воздействию $g(t)$ и по возмущению $f(t)$, если $W_1(p) = k_1$, $W_2(p) = \frac{k_2}{T_1 p + 1}$, $W_3(p) = k_3$, $W_4(p) = \frac{k_4}{p}$, $W_5(p) = \frac{k_5}{p(T_2 p + 1)}$.

Ответ.

$$D(p)y(t) = (b_0 p^2 + b_1 p + b_2)g(t),$$

$$D(p)y(t) = (d_0 p^2 + d_1 p + d_2)f(t),$$

$$D(p)x(t) = (c_0 p^3 + c_1 p^2 + c_2 p)g(t),$$

$$D(p)x(t) = -(d_0 p^2 + d_1 p + d_2)f(t),$$

где характеристический полином системы

$$D(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3;$$

$$a_0 = c_0, \quad a_1 = b_0 + c_1, \quad a_2 = b_1 + c_2, \quad a_3 = b_2;$$

$$b_0 = k_1 k_2 k_4^{-1} T_2 + T_1 T_2,$$

$$b_1 = k_1 k_2 k_4^{-1} + T_1 + T_2 + k_1 k_2 k_3 T_2 + k_5 k_4^{-1} T_1,$$

$$b_2 = 1 + k_1 k_2 k_3 + k_5 k_4^{-1};$$

$$c_0 = k_4^{-1} T_1 T_2, \quad c_1 = k_4^{-1} (T_1 + T_2), \quad c_2 = k_4^{-1};$$

$$d_0 = k_3 T_1 T_2, \quad d_1 = k_3 (T_1 + T_2), \quad d_2 = k_3; \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Глава 2

ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

§ 2.1. Характеристики динамических звеньев

37. Построить амплитудно-фазовую характеристику звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{p}.$$

Ответ. Амплитудно-фазовая характеристика совпадает с отрицательной частью мнимой оси (рис. 21, а).

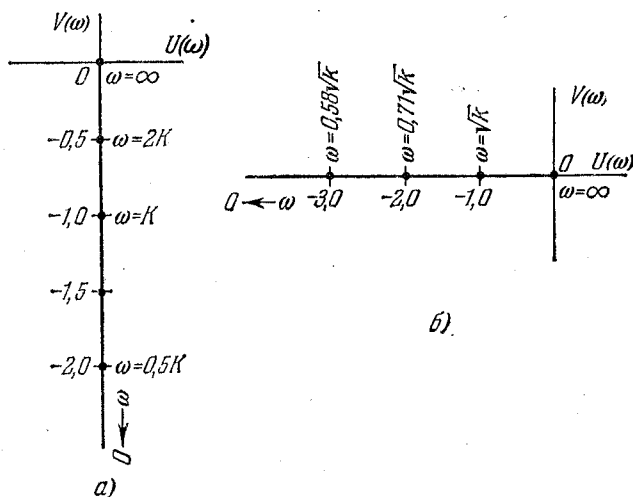


Рис. 21. А. ф. х. идеального интегрирующего звена (а) и звена с двукратным интегрированием (б).

38. Построить амплитудно-фазовую характеристику звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{p^2}.$$

Ответ. Амплитудно-фазовая характеристика совпадает с отрицательной частью действительной оси (рис. 21, б).

39. Построить амплитудно-фазовую характеристику цепи RC , представленной на рис. 22, а; $R = 1$ кОм, $C = 10$ мкФ.

Решение. Частотная передаточная функция цепи равна

$$W(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}, \quad (1)$$

где

$$T = RC = 10^3 \cdot 10^{-5} = 10^{-2} \text{ с.}$$

Преобразуем выражение (1) таким образом, чтобы оно представляло собой комплексное число в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= U(\omega) + jV(\omega) = \frac{\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2} + j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \\ &= \frac{10^{-4} \omega^2}{1 + 10^{-4} \omega^2} + j \frac{10^{-2} \omega}{1 + 10^{-4} \omega^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Задаваясь отдельными значениями ω , можно по формуле (2) вычислить ряд пар значений $U(\omega)$ и $V(\omega)$ и построить по ним амплитудно-фазовую характеристику цепи.

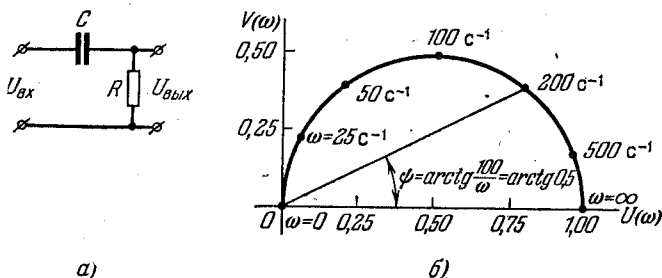


Рис. 22. Дифференцирующее звено и его а. ф. х., случай 1.

Однако анализ выражения (2) показывает, что эта характеристика определяется уравнением

$$V^2 + (U - 0.5)^2 = 0.5^2$$

и для положительных частот является полуокружностью, расположенной в верхней полуплоскости с центром в точке $(0.5; j0)$ и радиусом 0.5 (рис. 22, б).

Из выражения (2) видно, что при $\omega = 0$ $W(j\omega) = 0 + j0$, а при $\omega = \infty$ $W(j\omega) = 1 + j0$. Точки, соответствующие этим, а также некоторым промежуточным частотам, указаны на рис. 22, б; значения частоты на этом и всех последующих рисунках даны в рад/с. Частоты, соответствующие промежуточным точкам кривой, могут быть найдены следующим образом.

Аргумент комплексного числа (2) равен

$$\psi = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{1}{\omega T} = \arctg \frac{100}{\omega}, \quad (3)$$

поэтому луч, проведенный из начала координат под углом ψ к оси абсцисс, пересекает амплитудно-фазовую характеристику в точке, в которой величина ω определяется через ψ согласно (3). Один такой луч показан на рисунке.

40. Найти уравнение кривой, представляющей собой амплитудно-фазовую характеристику дифференцирующего звена, изображенного на рис. 23, а. Построить амплитудно-фазовую характеристику звена для случая $R_1 = 40$ кОм, $R_2 = 10$ кОм, $C = 2,5$ мкФ.

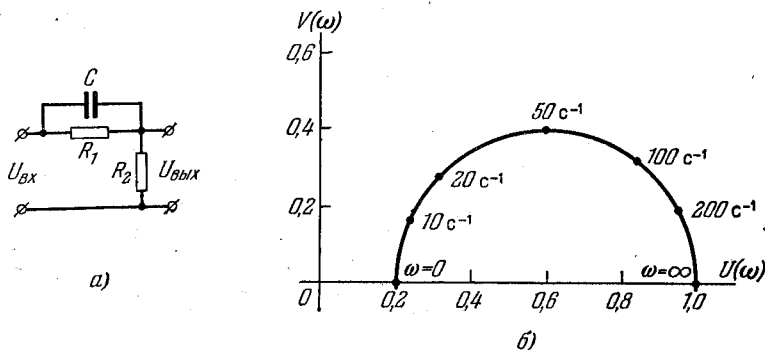


Рис. 23. Дифференцирующее звено и его а. ф. х., случай 2.

Ответ. Уравнение кривой имеет вид

$$V^2 + \left(U - \frac{1+\rho}{2} \right)^2 = \left(\frac{1-\rho}{2} \right)^2, \quad (1)$$

где

$$\rho = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Согласно (1) амплитудно-фазовая характеристика является для положительных частот полуокружностью, расположенной в верхней полуплоскости, с центром в точке $\left(\frac{\rho+1}{2}, j0 \right)$ и радиусом $\frac{1-\rho}{2}$. Эта характеристика построена для указанных данных на рис. 23, б.

41. Построить амплитудно-фазовую характеристику апериодического звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{1+Tp}; \quad k=8, \quad T=80 \text{ мс.}$$

Ответ. См. рис. 24, кривая А (а. ф. х. представляет собой полуокружность).

42. Построить амплитудно-фазовую характеристику аperiodического звена второго порядка с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{(1 + T_p)(1 + T_{mp})},$$

если $k = 8$, $T = 80$ мс, $T_m = 12$ мс. Сопоставить эту а. ф. х. с полученной в задаче 41, где $T_m = 0$.

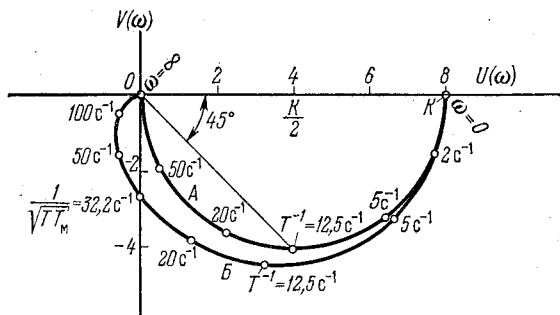


Рис. 24. А. ф. х., аperiodического звена при отсутствии (А) и при наличии (Б) малой постоянной времени.

Ответ. См. рис. 24, кривая Б. Различие амплитудно-фазовых характеристик двух взятых звеньев наиболее заметно в области высоких частот.

43. Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{kp}{1 + Tp}.$$

Построить его а. ф. х. в универсальной форме, пригодной для любого сочетания значений k и T .

Решение. Запишем частотную передаточную функцию звена в виде

$$W(j\omega) = k \frac{j\omega T}{1 + j\omega T} = k \frac{jq}{1 + jq}.$$

Здесь $q = \omega T$ — относительная частота. Последнему выражению соответствует универсальная а. ф. х. на рис. 25. Переход к а. ф. х., соответствующей определенным значениям k и T , осуществляется сле-

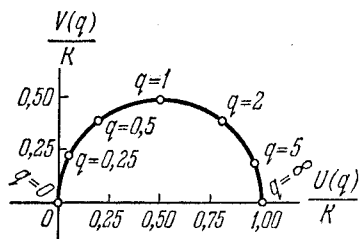


Рис. 25. Универсальная а. ф. х. дифференцирующего звена.

дующим образом. Числа, отложенные на рис. 25 по осям координат, следует умножить на заданное k , а величины q — разделить на заданное T .

44. Построить амплитудно-фазовую характеристику колебательного звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{1 + 2\xi Tp + T^2 p^2}$$

при $k=1$, $\xi=0,15$, $T=0,02$ с.

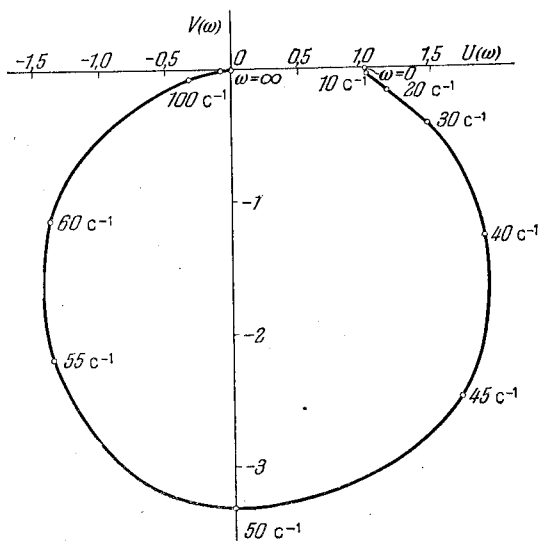


Рис. 26. А. ф. х. колебательного звена к задаче 44.

Ответ. См. рис. 26.

45. Построить амплитудно-фазовую характеристику звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{p(1 + Tp)},$$

$k=10$ с⁻¹, $T=0,25$ с.

Ответ. См. рис. 27; штриховой линией показана асимптота, к которой стремится а. ф. х. при $\omega \rightarrow 0$.

46. Дан исполнительный электродвигатель $D_{\text{в}}$ постоянного тока, рис. 28, а, приводящий в движение объект регулирования OP через редуктор с передаточным числом n . В качестве входной величины этой схемы рассматриваем напряжение управления двигателя U_y в качестве выходной — угол поворота α исполнительной оси. Тогда передаточная функция схемы может быть записана в виде: $W(p) = k/p(1 + T_m p)$; $T_m = J\Omega_x/M_{\text{п}}$ — электромеханическая постоянная времени электродвигателя совместно с объектом регулирования, J — суммарный момент инерции схемы, приведенный

к валу электродвигателя, Ω_x и M_n — скорость холостого хода и пусковой момент последнего, k — отношение скорости исполнительской оси к напряжению управления в установившемся режиме. Момент инерции редуктора не принимается во внимание.

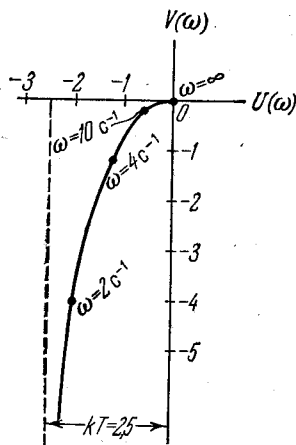


Рис. 27. А. ф. х. интегрирующего звена с замедлением к задаче 45.

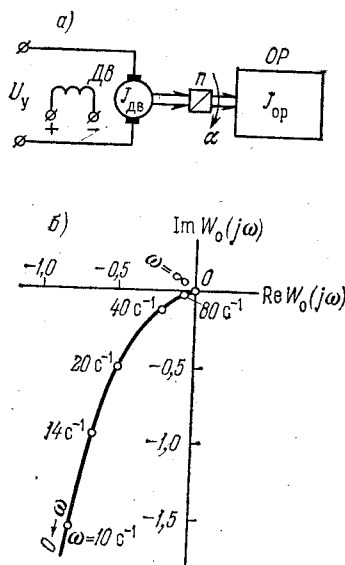


Рис. 28. Исполнительный электродвигатель с объектом регулирования (а) и их а. ф. х. (б).

Представить передаточную функцию схемы в безразмерном виде и построить для этого вида ее а. ф. х. Дано: $k=0,01 \text{ (В} \cdot \text{с)}^{-1}$; $\Omega_x=200 \text{ с}^{-1}$; $M_n=0,981 \text{ Н} \cdot \text{см}=100 \text{ гс} \cdot \text{см}$; моменты инерции ротора двигателя $J_{дв}=11 \text{ г} \cdot \text{см}^2=0,0111 \text{ гс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$ и объекта регулирования $J_{оп}=1,96 \cdot 10^7 \text{ г} \cdot \text{см}^2=2 \cdot 10^4 \text{ гс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$; $n=1200$.

Решение. Выберем некоторый нормирующий коэффициент k_0 , имеющий произвольное значение и удовлетворяющий единственному условию: его размерность совпадает с размерностью k . Запишем:

$$\frac{W(p)}{k_0} = \frac{k/k_0}{p(1+T_{мп})} = W_0(p). \quad (1)$$

Здесь передаточная функция $W_0(p)$ безразмерна, именно для нее и построим а. ф. х. При практическом использовании а. ф. х., не рассматриваемом в данной задаче, коэффициент k_0 может быть отнесен к остальной части системы регулирования, содержащей

рассматриваемый двигатель и объект регулирования. Найдем коэффициенты, входящие в (1):

$$J = J_{\text{дв}} + J_{\text{оп}}/n^2 = 0,0111 + \frac{1}{1200^2} \cdot 2 \cdot 10^4 = \\ = 24,5 \text{ г} \cdot \text{см}^2 = 0,0250 \text{ гс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2;$$

$$T_{\text{м}} = J\Omega_{\text{х}}/M_{\text{п}} = 0,05 \text{ с.}$$

Пусть $k_0 = 0,01 \text{ (В} \cdot \text{с)}^{-1}$, тогда

$$W_0(p) = \frac{1}{p(1+0,05p)}. \quad (2)$$

Этой передаточной функции соответствует а. ф. х. на рис. 28, б.

В принципе можно построить а. ф. х. и в размерном виде, не используя k_0 .

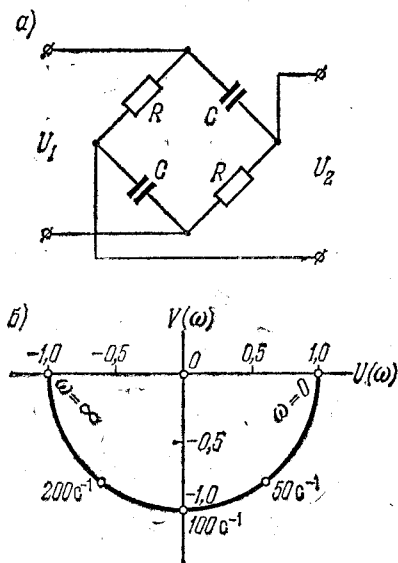


Рис. 29. Неминимально-фазовая электрическая цепь (а) и ее а. ф. х. (б).

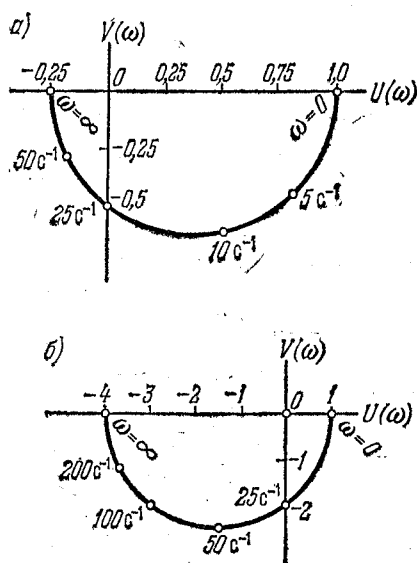


Рис. 30. Амплитудно-фазовые характеристики к задаче 48.

47. Передаточная функция электрической цепи, представленной на рис. 29, а, имеет вид

$$W(p) = \frac{U_1}{U_2} = \frac{1 - Tp}{1 + Tp}, \quad T = RC; \quad R = 10^4 \text{ Ом}, \quad C = 1 \text{ мкФ.}$$

Построить а. ф. х. звена.

Ответ. См. рис. 29, б.

48. Построить а. ф. х. динамического звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1 - T_1 p}{1 + T_2 p}$$

для а) $T_1 = 20$ мс, $T_2 = 80$ мс и б) $T_1 = 80$ мс, $T_2 = 20$ мс.

Ответ. См. рис. 30.

49. Передаточная функция динамического звена равна

$$W(p) = \frac{k}{-1 + Tp};$$

$$k = 100, \quad T = 0,05 \text{ с.}$$

Построить а. ф. х.

Ответ. См. рис. 31.

50. Построить логарифмические амплитудную $L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|$ и фазовую $\psi(\omega)$ характеристики аperiodического звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{1 + Tp} \quad (1)$$

Рис. 31. А. ф. х. неустойчивого аperiodического звена к задаче 49,

для двух случаев: а) в виде, пригодном для любых k и T ; б) для $k = 100$, $T = 50$ мс.

Решение. Логарифмическая амплитудная характеристика соответствующая выражению (1), равна

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}. \quad (2)$$

Асимптотическая логарифмическая амплитудная характеристика, соответствующая (2), построена на рис. 32, а; по оси абсцисс отложена величина ωT в логарифмическом масштабе, по оси ординат — $L(\omega)$ в децибелах.

Асимптотическая л. а. х. имеет, согласно (2), излом в точке, где $\omega T = 1$. Слева от излома она горизонтальна и расположена на высоте $20 \lg k$, справа от излома она имеет наклон 20 дБ/дек. Точка пересечения характеристики с осью частот, т. е. частота ω_c среза, определяется из условия

$$L(\omega_c) \approx 20 \lg \frac{k}{\omega_c T} = 0 \quad \text{или} \quad \omega_c = \frac{k}{T}.$$

Наибольшее отклонение асимптотической характеристики от точной имеет место при $\omega T = 1$ и составляет, как можно найти из выражения (2), 3 дБ. При $\omega T = 0,5$ и $\omega T = 2$ отклонение асимптотической характеристики от точной равно примерно 1 дБ, а за пределами участка $\omega T = 1 \pm 1$ октава это отклонение ничтожно мало.

Фазовая характеристика звена определяется, согласно (1), выражением

$$\psi(\omega) = \arg W(j\omega) = -\arctg \omega T. \quad (3)$$

В области низких частот $\psi(\omega) \rightarrow 0$, в области высоких частот $\psi(\omega) \rightarrow -90^\circ$; при $\omega T = 1$ $\psi(\omega) = -45^\circ$. Из выражения (3)

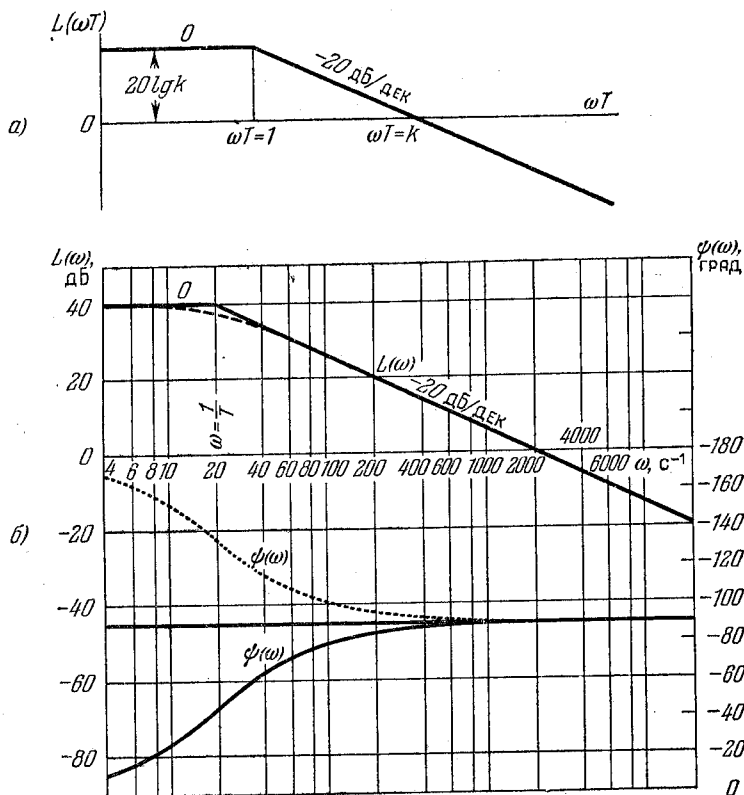


Рис. 32. Логарифмические характеристики устойчивого и неустойчивого аperiodических звеньев к задачам 50 и 51.

следует также, что фазовая характеристика симметрична относительно точки $\omega T = 1$, $\psi = -45^\circ$.

Фазовая характеристика аperiodического звена с передаточной функцией (1) построена, согласно (2), в виде $\psi(\omega T)$ в приложении 3.

При построении использована следующая таблица:

ωT	0	0,05	0,1	0,2	0,5
$\Psi(\omega T)$, град	0	— 2°50'	— 5°40'	— 11°20'	— 26°30'

ωT	1	2	5	10	20	∞
$\Psi(\omega T)$, град	—45	— 63°30'	— 78°40'	— 84°20'	— 87°10'	— 90°

Логарифмические амплитудная и фазовая характеристики звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{100}{1 + 0,05p} \quad (4)$$

построены на рис. 32, б, штриховой линией показана точная амплитудная характеристика в части, где она не совпадает с асимптотической, построенной согласно формуле (2). По оси абсцисс отложена частота ω в логарифмическом масштабе, по оси ординат — децибелы и градусы.

51. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики неустойчивого аperiodического звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{100}{-1 + 0,05p}.$$

Ответ. Амплитудная характеристика $L(\omega)$ та же, что и для устойчивого звена с передаточной функцией (4) в предыдущей задаче (см. рис. 32, б). Фазовая характеристика $\psi(\omega)$ дана на рис. 32, б пунктирной кривой.

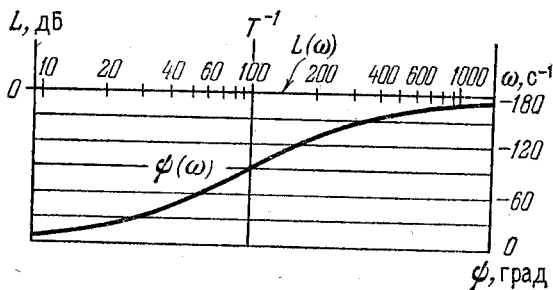


Рис. 33. Л. а. х. $L(\omega)$ и л. ф. х. $\psi(\omega)$ цепи, представленной на рис. 29, а.

52. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики звена, указанного в задаче 47.

Ответ. См. рис. 33.

53. Передаточная функция динамического звена равна

$$W(p) = \frac{k}{p(1+Tp)}.$$

Построить логарифмические амплитудную $L(\omega)$ и фазовую $\psi(\omega)$ характеристики звена при $k=400 \text{ с}^{-1}$ для трех случаев: 1) $T=25 \text{ мс}$, 2) $T=5 \text{ мс}$, 3) $T=2,5 \text{ мс}$.

Указание. При построении фазовой характеристики целесообразно использовать приложение 3.

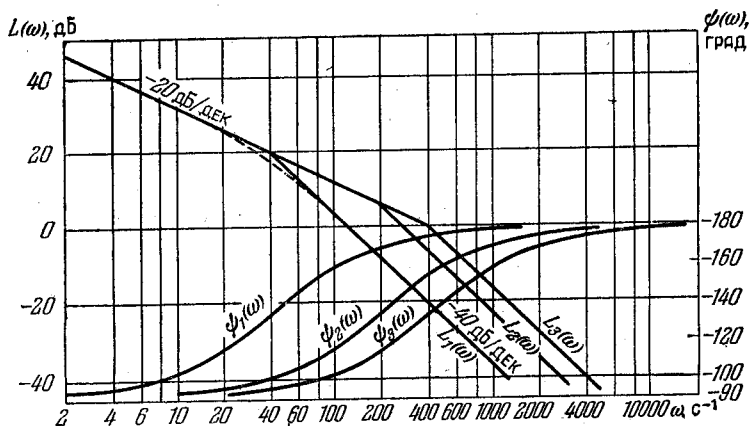


Рис. 34. Логарифмические характеристики интегрирующего звена с замедлением.

Ответ. См. рис. 34; индекс при $L(\omega)$ и $\psi(\omega)$ означает номер случая. Для первого случая ($T=25 \text{ мс}$) штриховой линией показана точная амплитудная характеристика.

54. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики устройства, состоящего из асинхронного двухфазного электродвигателя Дв (рис. 35, а) и приводимого им в движение через редуктор с передаточным числом n объекта регулирования ОР.

В качестве входной величины взять напряжение управления U_y электродвигателя, а выходную величину рассмотреть для двух случаев: 1) скорость Ω вала двигателя; 2) угол поворота α вала двигателя.

Передаточную функцию устройства приближенно рассматривать соответственно в виде $W_\Omega(p) = k/(1+T_{\text{м}}p)$, $W_\alpha(p) = k/p(1+T_{\text{м}}p)$. Принять приближенно, что электрохимическая постоянная времени электродвигателя совместно с объектом регулирования равна $T_{\text{м}} = J\Omega_{\text{х}}/M_{\text{п}}$, где J — суммарный момент инерции устройства, при-

веденный к валу электродвигателя, Ω_x и M_n — скорость холостого хода и пусковой момент последнего, момент инерции редуктора не принимать во внимание.

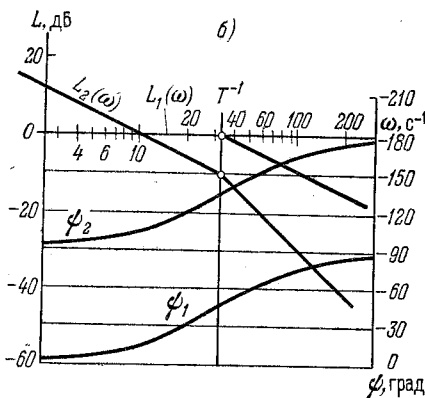
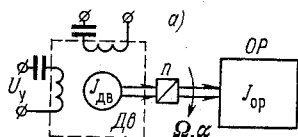


Рис. 35. Асинхронный двухфазный электродвигатель с объектом регулирования (а) и логарифмические характеристики этого устройства (б).

для $W_a(p)/10k_0$ при $k_0 = 44 \cdot 10^{-4} (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$; $\Psi_\Omega(\omega)$ и $\Psi_\alpha(\omega)$ — логарифмические фазовые характеристики.

55. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K}{(1+Tp)^2}, \quad K=300, \quad T=0,025 \text{ с.}$$

Ответ. См. рис. 36. Из рисунка видно, что при вычерчивании логарифмических характеристик не обязательно строить логарифмическую сетку частот, достаточно лишь сделать соответствующие отметки на оси частот.

Для нанесения этих отметок обычно используется шкала логарифмической линейки; удобный масштаб имеет шкала кубов малой логарифмической линейки.

56. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики колебательного звена с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{k}{1+2\zeta Tp + T^2 p^2}. \quad (1)$$

Данные двигателя (серии АД-50В [13]): $\Omega_x = 523 \text{ с}^{-1}$, $M_n = 2,06 \text{ Н} \cdot \text{см} = 210 \text{ гс} \cdot \text{см}$, момент инерции ротора $J_{дв} = 5,9 \text{ г} \cdot \text{см}^2 = 0,006 \text{ гс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$; $k = 44 \cdot 10^{-3} (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$; момент инерции объекта регулирования $J_{оп} = 1,48 \cdot 10^6 \text{ г} \cdot \text{см}^2 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ гс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$, $n = 500$.

При решении задачи необходимо учесть, что л. а. х. не может быть построена для размерной передаточной функции, поэтому последнюю необходимо привести к безразмерному виду.

Указание. Приведение размерной передаточной функции к безразмерному виду рекомендуется по образцу данного в решении задачи 46.

Ответ. См. рис. 35, б, где л. а. х. $L_\Omega(\omega)$ дана для $W_\Omega(p)/k_0$, а л.а.х. $L_\alpha(\omega)$ —

Рассмотреть случаи:

- 1) характеристики $L(\omega T)$ и $\psi(\omega T)$ при $k=1$ и $\xi=0,05; 0,10; \dots; 0,8; 1,0$;
- 2) характеристики $L(\omega)$ и $\psi(\omega)$ при $k=30$, $\xi=0,2$, $T=50$ мс.

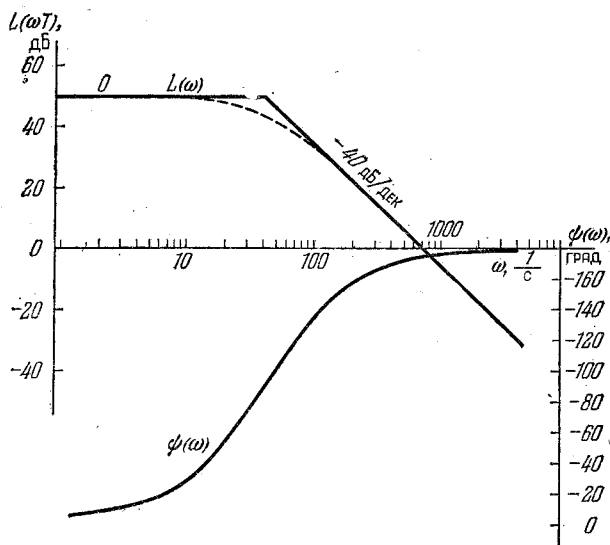


Рис. 36. Логарифмические характеристики к задаче 55.

Решение. 1) Частотная передаточная функция, соответствующая (1) при $k=1$, равна

$$W(j\omega) = \frac{1}{(1 - T^2\omega^2) + j2\xi T\omega}. \quad (2)$$

Из (2) находим логарифмическую амплитудную характеристику

$$L(\omega T) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{[1 - (T\omega)^2]^2 + 4\xi^2 (T\omega)^2}} \quad (3)$$

и логарифмическую фазовую характеристику

$$\psi(\omega T) = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi\omega T}{1 - (\omega T)^2}. \quad (4)$$

По формулам (3) и (4) строим амплитудную и фазовую характеристики, задаваясь различными значениями ξ от 0,05 до 1,0. Эти характеристики приведены в приложении 4.

Амплитудная характеристика (3) имеет две асимптоты:

$$L'(\omega T) = 20 \lg 1 = 0 \quad \text{при } \omega T \leq 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{и} \\ L''(\omega T) = -20 \lg (\omega T)^2 \quad \text{при } \omega T \geq 1. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Асимптотическая амплитудная характеристика, определяемая выражениями (5), построена на рис. 37, а.

Для колебательного звена асимптотическая амплитудная характеристика может очень отличаться от точной, что следует из сравнения рис. 37, а с рисунком, приведенным в приложении 5. Поэтому для колебательного звена обычно строится точная амплитудная

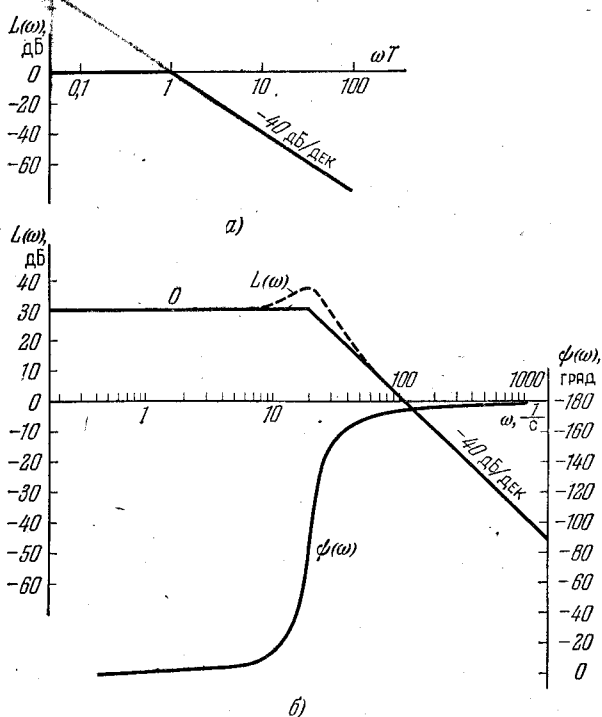


Рис. 37. Логарифмические характеристики колебательного звена к задаче 56.

характеристика. Это построение удобно проводить, суммируя ординаты асимптотической характеристики с ординатами кривой отклонения $\Delta L(\omega)$ асимптотической характеристики от точной; такая кривая дана в приложении 5.

2) Характеристики $L(\omega)$ и $\phi(\omega)$ для звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{30}{1 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,05p + 0,0025p^2} = \frac{30}{1 + 0,02p + 0,0025p^2}, \quad (6)$$

построенные с использованием приложений 4 и 5, приведены на рис. 37, б.

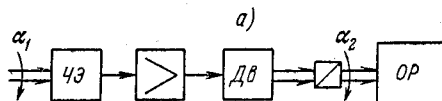
57. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики неустойчивого колебательного звена с передаточной

функцией

$$W(p) = \frac{k}{1 - 2\xi T p + T^2 p^2}$$

при $k = 30$, $T = 50$ мс, $\xi = 0,2$.

Ответ. Амплитудная характеристика совпадает с $L(\omega)$ устойчивого колебательного звена в предыдущей задаче, имеющего передаточную функцию (6) (см. рис. 37, б). Фазовая характеристика отличается от $\psi(\omega)$ для звена с передаточной функцией (6) только знаком.



§ 2.2. Частотные характеристики систем регулирования

58. Построить амплитудную и фазовую частотные характеристики системы, блок-схема которой дана на рис. 38, а, где ЧЭ — чувствительный элемент, Дв — двигатель, ОР — объект регулирования. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$$

$K = 400$ с⁻¹, $T_1 = 80$ мс, $T_2 = 12$ мс.

Ответ. См. рис. 38, б.

59. Рассчитать точки а. ф. х. разомкнутой системы, заданной в задаче 58.

Ответ. А. ф. х. может быть построена по указанным в таблице значениям модуля $A(\omega)$ и аргумента $\psi(\omega)$ частотной передаточной функции $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\psi\omega}$.

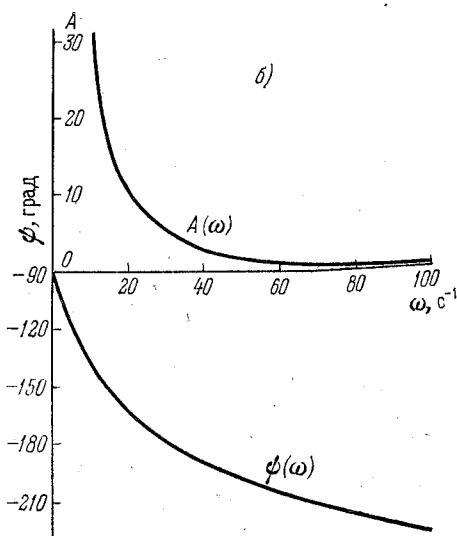


Рис. 38. Блок-схема к задачам 58—60 (а) и частотные характеристики к задаче 58 (б).

$\omega, \text{с}^{-1}$	0	2	5	10	20	50	100	300	∞
$A(\omega)$	∞	196	74	31	10,3	1,66	0,319	0,015	0
$\psi(\omega), \text{град}$	-90	-100	-115	-135	-162	-197	-223	-252	-270

60. Система автоматического регулирования имеет блок-схему, показанную на рис. 38, а. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}.$$

Найти такую форму построения а. ф. х. системы, которая позволила бы охватить случаи различных сочетаний параметров K , T_1 и T_2 .

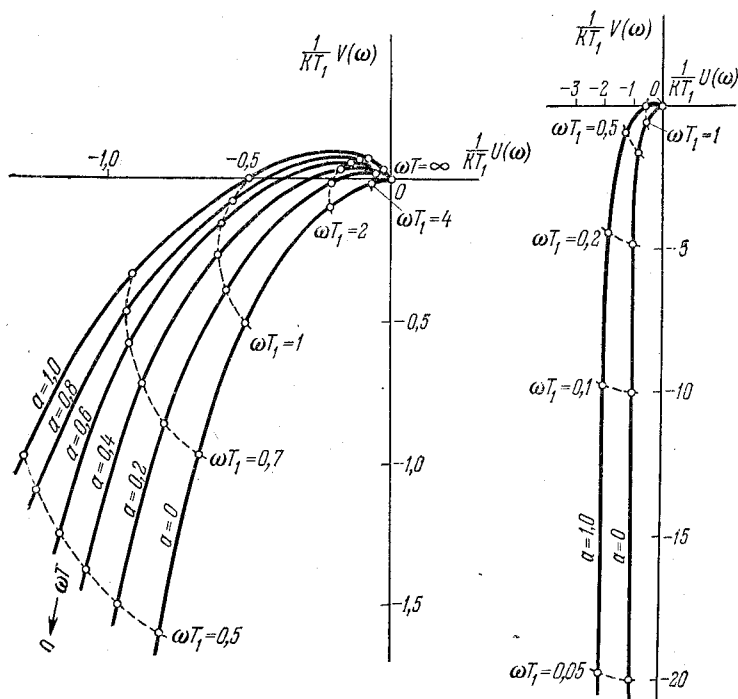


Рис. 39. Универсальные а. ф. х. к задаче 60.

Решение. Необходимые для построений соотношения можно записать в виде

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{K}{j\omega T_1(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} = KT_1 W_0(j\omega T_1) = \\ &= KT_1 U_0(\omega T_1) + jKT_1 V_0(\omega T_1), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |W(j\omega)| = \frac{KT_1}{\omega T_1 \sqrt{[1+(\omega T_1)^2][1+(\omega T_2)^2]}} = \\ &= KT_1 A_0(\omega T_1), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\psi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2. \quad (3)$$

Соответствующие характеристики даны на рис. 39 для $a=0$; 0,2; ...; 1,0; для других значений a они получаются интерполированием. Переход к характеристикам, соответствующим определенным значениям K и T_1 осуществляется по образцу задачи 43.

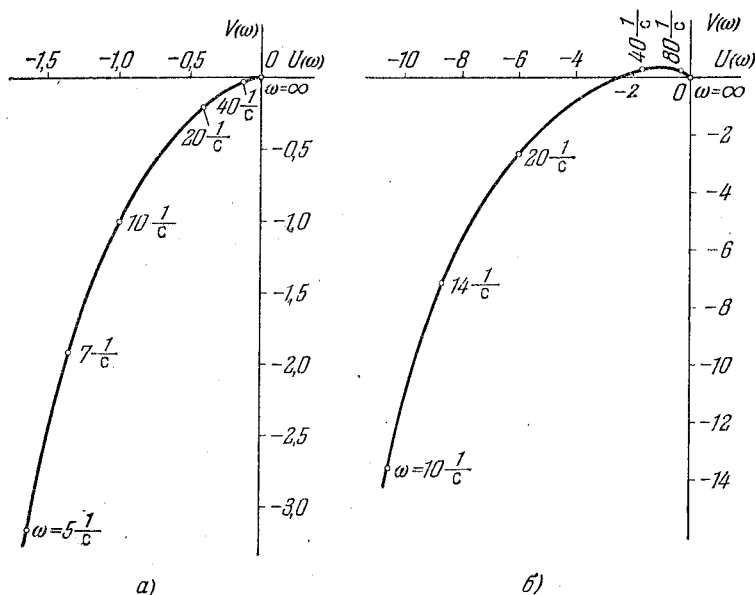


Рис. 40. А. ф. х. к задаче 61, случаи а) и б).

61. Построить амплитудно-фазовые характеристики двух систем, имеющих в разомкнутом состоянии передаточные функции:

$$а) W_1(p) = \frac{20}{p(1+0,1p)},$$

$$б) W_2(p) = \frac{200}{p(1+0,05p)(1+0,02p)}.$$

У к а з а н и е. Возможно использование готовых кривых из предыдущей задачи.

О т в е т. См. рис. 40, а, б.

62. Построить амплитудно-фазовую характеристику системы, блок-схема которой дана на рис. 41, а; ЧЭ — чувствительный элемент, Дв — двигатель, Р — редуктор. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_3p)} = \frac{500(1+0,03p)}{p(1+0,1p)(1+0,006p)}.$$

О т в е т. См. рис. 41, б.

63. Найти уравнение кривой, представляющей собой амплитудно-фазовую характеристику системы, имеющей следующую передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{K(1+Tp)}{p^2}.$$

Построить амплитудно-фазовую характеристику для случая $K=100 \text{ с}^{-2}$ и $T=0,2 \text{ с}$.

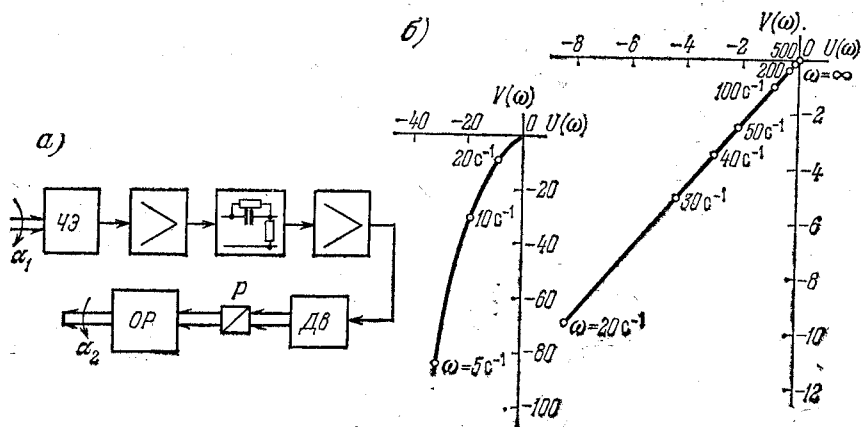


Рис. 41. Блок-схема (а) и а. ф. х. (б) к задаче 62.

Решение. Частотная передаточная функция равна

$$W(j\omega) = \frac{K(1+jT\omega)}{-\omega^2} = U(\omega) + jV(\omega),$$

где

$$U(\omega) = -\frac{K}{\omega^2}, \quad V(\omega) = -\frac{KT}{\omega}. \quad (1)$$

Из (1) находим

$$U = -\frac{1}{KT^2} V^2. \quad (2)$$

Согласно (1) и (2) амплитудно-фазовая характеристика представляет собой для положительных частот ветвь параболы, лежащую в третьем квадранте комплексной плоскости.

Точка амплитудно-фазовой характеристики, соответствующая какому-либо значению частоты ω , легко определяется как точка пересечения параболы с лучом, проведенным из начала координат и составляющим с осью вещественных чисел угол

$$\Psi = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\pi + \arctg \omega T.$$

Амплитудно-фазовая характеристика для заданных параметров построена на рис. 42.

64. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{K(1+0,15p)}{p^2(1+0,05p)^2}.$$

Построить ее амплитудно-фазовую характеристику при 1) $K = 50 \text{ с}^{-2}$ и 2) $K = 200 \text{ с}^{-2}$.

Ответ. См. рис. 43 (шкалы I и II — для соответствующих случаев).

65. Построить амплитудно-фазовую характеристику системы с передаточной функцией в разомкнутом состоянии

$$W(p) = \frac{K(1+0,2p)^2}{p^3(1+0,04p)}$$

при а) $K = 200 \text{ с}^{-3}$ и б) $K = 100 \text{ с}^{-3}$.

Ответ. См. рис. 44 (шкалы А и Б — для соответствующих случаев).

66. На рис. 45, а приведена цепь тахометрической обратной связи с пассивными корректирующими контурами (ТГ — тахогенератор).

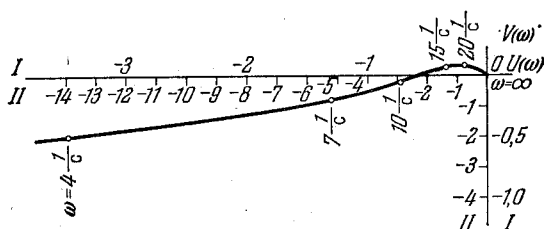


Рис. 43. Амплитудно-фазовые характеристики к задаче 64.

Построить амплитудно-фазовую характеристику этой цепи, если ее передаточная функция равна

$$W(p) = \frac{Kp^2}{(1+T_1p)^2(1+T_2p)},$$

$K = 4 \text{ В} \cdot \text{с}^2/\text{град}$, $T_1 = 0,5 \text{ с}$, $T_2 = 0,1 \text{ с}$.

Ответ. См. рис. 45, б.

67. Построить амплитудно-фазовую характеристику цепи с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K}{p(-1+Tp)}, \quad K=100 \text{ с}^{-1}, \quad T=0,1 \text{ с.}$$

Ответ. См. рис. 46.

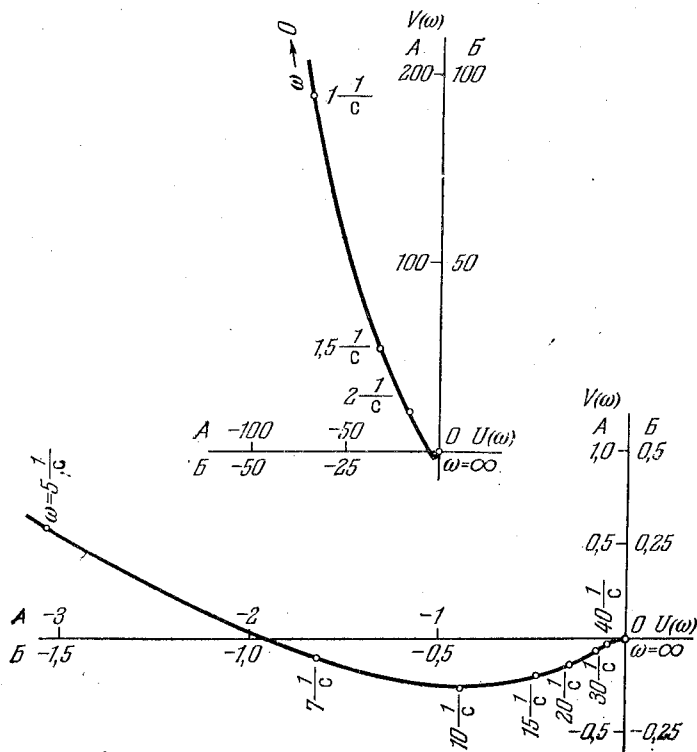


Рис. 44. Амплитудно-фазовые характеристики к задаче 65.

68. Построить амплитудно-фазовые характеристики для случаев систем с передаточными функциями:

а) $W(p) = \frac{K}{(-1+2T_1p+T_1^2p^2)(1+T_2p)}$;

б) $W(p) = \frac{K(1+T_3p)}{(-1+2T_1p+T_1^2p^2)(1+T_2p)(1+T_4p)}$

при $K=10$, $T_1=0,1$ с, $T_2=0,05$ с, $T_3=0,03$ с, $T_4=0,006$ с.

Ответ. См. рис. 47.

69. Построить а. ф. х. системы, имеющей в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$\dot{W}(p) = \frac{K(1 - T_1 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T^2 p^2)};$$

$K = 25 \text{ с}^{-1}$, $T_1 = 20 \text{ мс}$, $T = 10 \text{ мс}$.

Ответ. См. рис. 48. Штриховой линией показана асимптота, с которой сливаются ветви а. ф. х. при $\omega \rightarrow T^{-1} = 100 \text{ с}^{-1}$, когда $|W(j\omega)| \rightarrow \infty$.

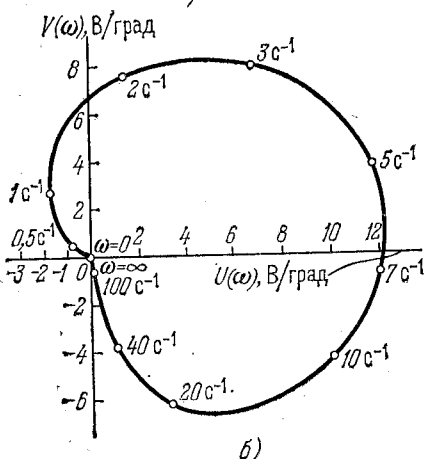
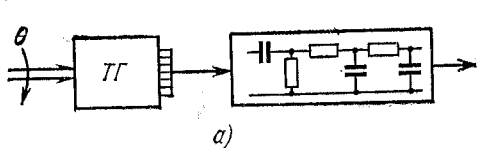


Рис. 45. Схема (а) и а. ф. х. (б) цепи тахометрической обратной связи к задаче 66.

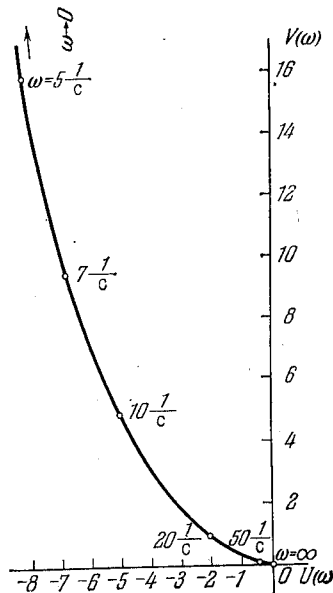


Рис. 46. А. ф. х. системы с неустойчивым звеном к задаче 67.

70. В системе регулирования напряжения генератора постоянного тока (рис. 49, а) $W_p(p) = k_p / (1 + T_p p)$ и $W_r(p) = k_r / (1 + T_r p)$ — передаточные функции регулятора и генератора; $T_p = 0,05 \text{ с}$, $T_r = 0,10 \text{ с}$, $k_p k_r = 32$, R_a и R_n — сопротивления якоря генератора и нагрузки; U_s — напряжение, подбираемое из условия получения требуемой величины напряжения U_r на выходе генератора. Структурные схемы системы могут быть представлены, например, в виде рис. 49, б и в; E — э. д. с. генератора, $\rho = R_a / R_n = 0,1$.

Построить амплитудно-фазовые характеристики системы, разомкнутой: 1) в цепи обратной связи по напряжению генератора (рис. 49, б); 2) в цепи обратной связи по току (рис. 49, в).

Указание. Соответствующие две передаточные функции разомкнутой системы равны

$$W_U(p) = \frac{1}{1+p} W_p(p) W_r(p) \quad \text{и} \quad W_I(p) = \frac{p}{1+W_p(p) W_r(p)}.$$

Ответ. См. рис. 49, з.

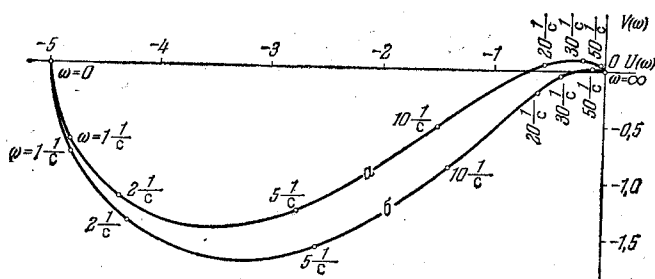


Рис. 47. Амплитудно-фазовые характеристики к задаче 68.

71. На рис. 50, а дана электрокинематическая схема одноосного силового гироскопического стабилизатора. П — стабилизируемая платформа, Г — установленный на ней двухстепенный гироскоп, ДУП — датчик его угла прецессии, У — усилитель, Дв — стабилизирующий двигатель, Р — редуктор, Н — кинетический момент гироскопа, α — абсолютный угол поворота платформы (ошибка стабилизации), β — угол прецессии, β' — угол поворота ротора датчика угла прецессии. При используемом в теории гиростабилизаторов условном размыкании системы на входе этого датчика получим $\beta' \neq \beta$. Передаточная функция гиростабилизатора, разомкнутого в этой точке, может быть при

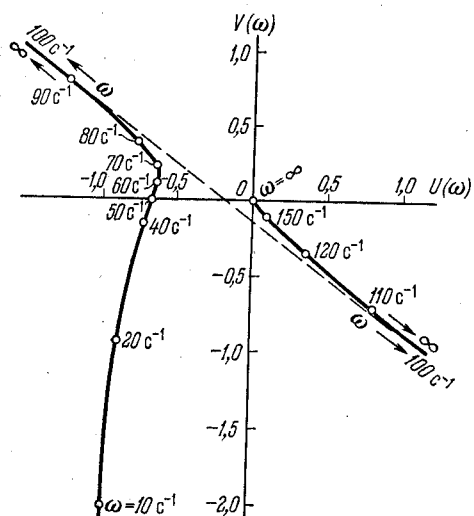


Рис. 48. А. ф. х. системы с консервативным звеном к задаче 69.

безынерционном усилителе записана в виде [13]

$$W(p) = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{K}{p(1 + 2\xi Tp + T^2 p^2)}. \quad (1)$$

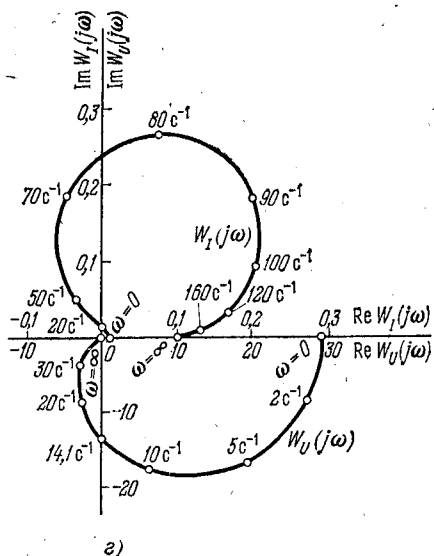
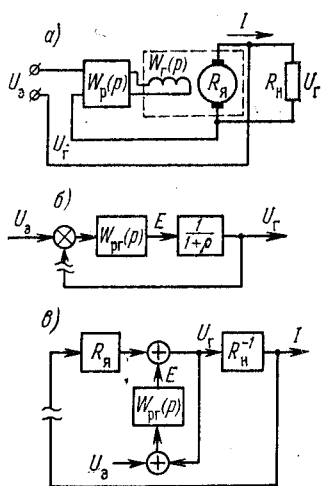


Рис. 49. Система регулирования напряжения (а), ее структурные схемы (б) и (в) и амплитудно-фазовые характеристики (з) к задаче 70.

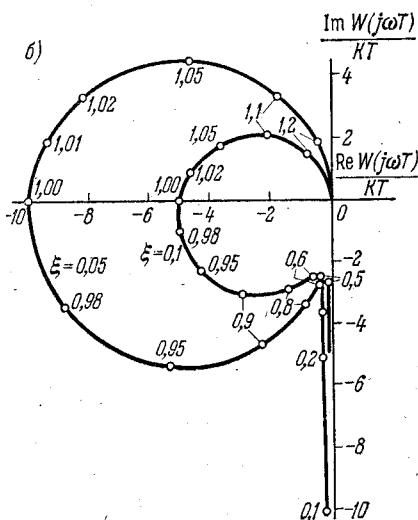
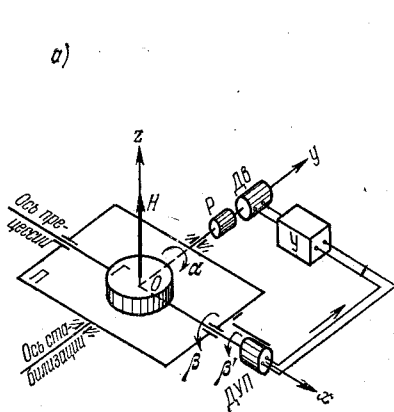


Рис. 50. Схема и а. ф. х. системы гироскопической стабилизации к задаче 71.

Построить а. ф. х. этой системы при $\xi = 0,05$ и $\xi = 0,10$ в форме, пригодной для любых значений добротности по скорости K и частоты нутационных колебаний T^{-1} .

Решение. Введем относительную частоту $q = \omega T$; тогда из (1) получим

$$W(jq) = KT W_0(jq), \quad (2)$$

где

$$W_0(jq) = \frac{1}{jq [1 + j2\xi q + (jq)^2]}. \quad (3)$$

По (3) построены а. ф. х. на рис. 50, б. Переход к а. ф. х., соответствующим (1), осуществляется умножением шкал по осям рис. 50, б на величину KT и делением q на T .

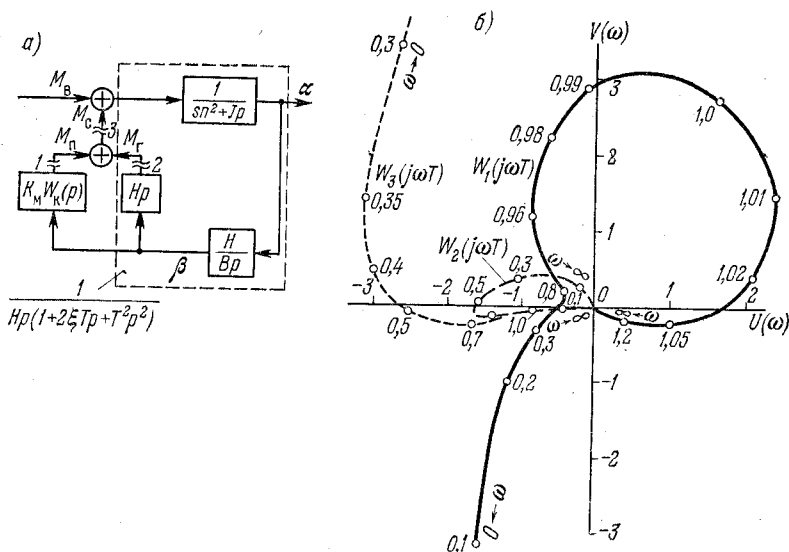


Рис. 51. Структурная схема и амплитудно-фазовые характеристики системы гироскопической стабилизации к задаче 72.

72. Структурная схема одноосного силового гироскопического стабилизатора, электрокинематическая схема которого представлена на рис. 50, а, дана в виде рис. 51, а. J — момент инерции стабилизируемой платформы, n — передаточное число редуктора между осью стабилизации и стабилизирующим двигателем, s — отношение пускового момента к скорости холостого хода двигателя, B — момент инерции гироскопа относительно оси прецессии, $K_m = K \cdot H$ — добротность по моменту, $W_k(p) = W_y(p)/W_y(0)$ — передаточная функция корректирующей цепи, где $W_y(p)$ — передаточная функция усилителя, M_b — возмущающий момент, M_n — пусковой момент двигателя, M_r — момент гироскопической реакции.

При размыкании структурной схемы стабилизатора в одной из трех точек 1, 2 и 3 (рис. 51, а) получим три различные передаточные функции разомкнутой системы — по пусковому моменту M_n двигателя, по моменту M_r гироскопической реакции, по сумме $M_c = M_n + M_r$ этих двух моментов. Соответствующие частотные передаточные функции при $W_k = (1 - T_1 p)/(1 + T_2 p)$, $T_1/T = \tau_1$, $T_2/T = \tau_2$ и $\omega T = q$ равны

$$W_1(q) = \frac{KT W_k(q)}{q(1 + 2\xi q + q^2)} = \frac{KT(1 - \tau_1 q)}{q(1 + 2\xi q + q^2)(1 + \tau_2 q)}, \quad (1)$$

$$W_2(q) = \frac{q}{KT W_k + q^2(2\xi + q)} = \frac{q(1 + \tau_2 q)}{KT(1 - \tau_1 q) + q^2(2\xi + q)(1 + \tau_2 q)}, \quad (2)$$

$$W_3(q) = \frac{KT W_k(q) + q(1 + 2\xi q)}{q^3} = \frac{KT(1 - \tau_1 q) + q(1 + 2\xi q)(1 + \tau_2 q)}{q^3(1 + \tau_2 q)}. \quad (3)$$

Здесь $T^{-1} = H/\sqrt{JB}$ — частота нутационных колебаний стабилизатора, $\xi = sn^2 B/2H^2 T$.

Построить амплитудно-фазовые характеристики разомкнутого стабилизатора, соответствующие выражениям (1), (2) и (3) при $KT = 0,37$, $\xi = 0,02$, $\tau_1 = 1$ и $\tau_2 = 4$.

Ответ. См. рис. 51, б.

§ 2.3. Логарифмические частотные характеристики систем регулирования

73. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{40}{1 + 0,12p + 0,002p^2}. \quad (1)$$

Решение. Для построения логарифмических характеристик следует разложить знаменатель (1) на два сомножителя.

Для этого определяем корни знаменателя, которые оказываются равными -10 с^{-1} и -50 с^{-1} , и представляем (1) в виде

$$W(p) = \frac{40}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} = \frac{40}{(1 + 0,1p)(1 + 0,02p)}. \quad (2)$$

Отсюда находим логарифмическую амплитудную характеристику системы

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg \left| \frac{40}{(1 + j0,1\omega)(1 + j0,02\omega)} \right| = \\ &= 20 \lg \frac{40}{\sqrt{[1 + (0,1\omega)^2][1 + (0,02\omega)^2]}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из выражений (2) или (3) следует, что асимптотическая л. а. х. имеет два излома; в точках $\omega_1 = 1/T_1 = 10 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_2 = 1/T_2 = 50 \text{ с}^{-1}$ и состоит из трех участков: горизонтального, проведенного на

высоте $20 \lg 40 = 32$ дБ; участка с наклоном -20 дБ/дек; участка с наклоном -40 дБ/дек. Эта асимптотическая характеристика представлена на рис. 52.

Так как отношение $T/T_2 = 5$, т. е. превышает две октавы, то из решения задачи 50 следует, что отклонение асимптотической

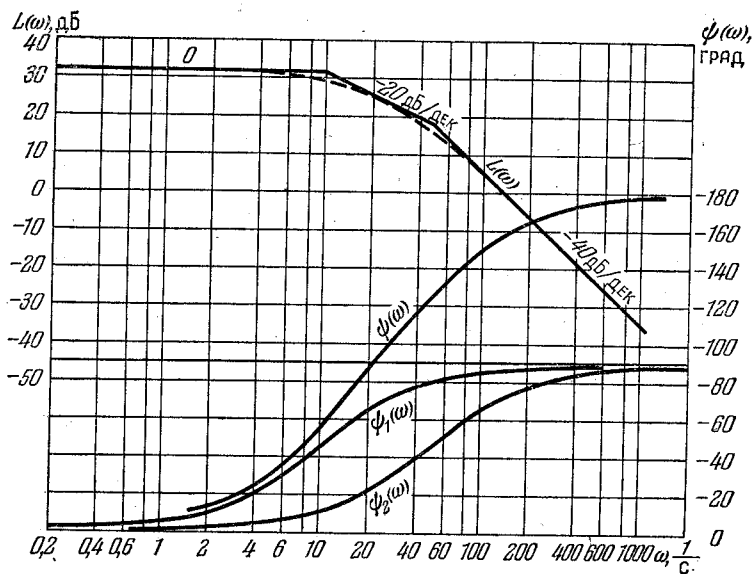


Рис. 52. Логарифмические характеристики к задаче 73.

амплитудной характеристики от точной в районе каждого излома имеет такой же вид, как и для аperiodического звена и не превышает 3 дБ.

Фазовая характеристика имеет вид

$$\psi(\omega) = -\arctg 0,1\omega - \arctg 0,02\omega. \quad (4)$$

Последнее выражение позволяет построить $\psi(\omega)$ по точкам. Однако проще построить $\psi(\omega)$ как сумму ординат фазовых характеристик $\psi_1(\omega)$ и $\psi_2(\omega)$ двух аperiodических звеньев с постоянными времени $T_1 = 1$ с и $T_2 = 0,2$ с, так как каждая из этих характеристик легко строится при помощи графиков приложения 3.

Фазовая характеристика $\psi(\omega)$ системы дана на рис. 52.

74. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{12,5}{p(1 + 0,004p + 0,0004p^2)}.$$

Указание. Передаточную функцию следует привести к виду, удобному для построения логарифмических характеристик, т. е. найти, соответствует ли полином второй степени в знаменателе двум апериодическим звеньям или он соответствует колебательному звену, и определить необходимые параметры этих звеньев.

Ответ. См. рис. 53.

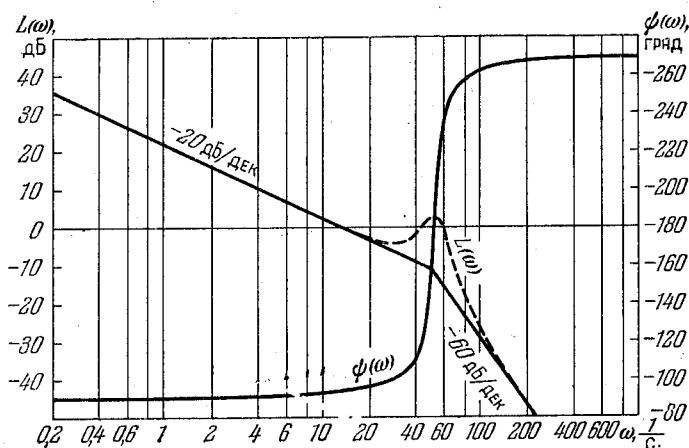


Рис. 53. Логарифмические характеристики к задаче 74.

75. Система автоматического регулирования, блок-схема которой построена по образцу, представленному на рис. 41, а, имеет в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{K(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_3p)(1+T_4p)} = \\
 &= \frac{K(1+0,017p)}{p(1+0,05p)(1+0,0025p)(1+0,001p)}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Построить логарифмические асимптотическую амплитудную и фазовую характеристики системы для двух значений коэффициента усиления: $K=500 \text{ с}^{-1}$ и $K=2000 \text{ с}^{-1}$.

Решение. Частотная передаточная функция, соответствующая (1), имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{K(1+j0,017\omega)}{j\omega(1+j0,05\omega)(1+j0,0025\omega)(1+j0,001\omega)}. \quad (2)$$

Из выражения (2) или из выражения (1) видно, что асимптотическая амплитудная характеристика имеет вид ломаной прямой с участками, имеющими отрицательный наклон 20—40—20—40—60 дБ/дек, и с изломами в точках $\omega_1=1/T_1=20 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2=1/T_2=50 \text{ с}^{-1}$, $\omega_3=1/T_3=400 \text{ с}^{-1}$, $\omega_4=1/T_4=1000 \text{ с}^{-1}$, первый участок

характеристики является частью прямой с наклоном -20 дБ/дек, пересекающей ось частот в точке $\omega = K$.

Асимптотические амплитудные характеристики $L_1(\omega)$ для случая $K = 500 \text{ с}^{-1}$ и $L_2(\omega)$ для случая $K = 2000 \text{ с}^{-1}$ изображены на рис. 54.

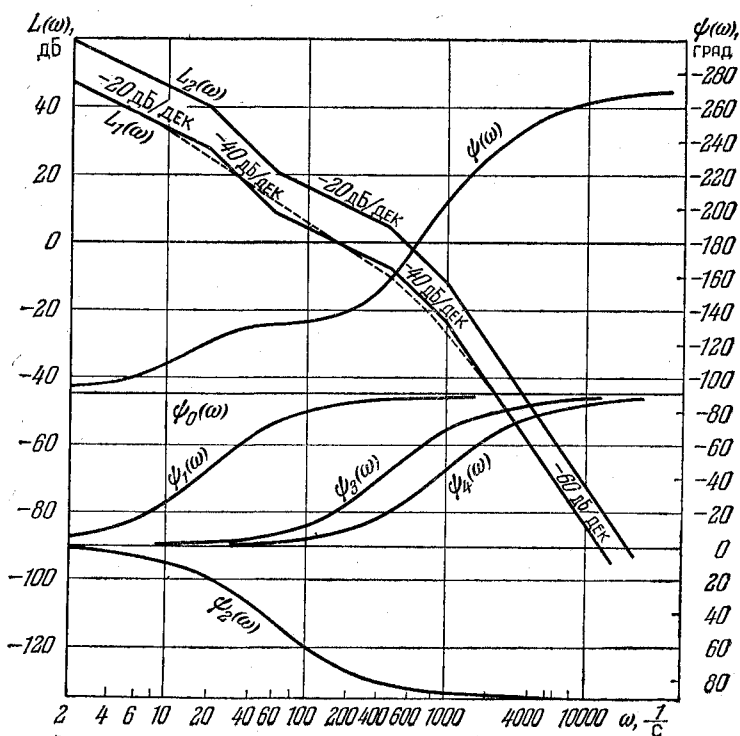


Рис. 54. Логарифмические характеристики к задаче 75.

Фазовая характеристика для обоих случаев совпадает и, согласно (1) или (2), может быть найдена как сумма ординат фазовой характеристики $\phi_0(\omega)$ идеального интегрирующего звена, фазовых характеристик $\phi_1(\omega)$, $\phi_3(\omega)$ и $\phi_4(\omega)$ аperiodических звеньев с постоянными времени T_1 , T_3 и T_4 и $\phi_2(\omega)$ — дифференцирующего звена с постоянной времени T_2 .

Указанные фазовые характеристики звеньев и результирующая фазовая характеристика $\phi(\omega)$ всей системы построены на рис. 54.

76. Построить логарифмическую асимптотическую амплитудную характеристику $L(\omega)$ и логарифмическую фазовую характеристику

$\psi(\omega)$ системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K(1+T_1p)}{p^2(1+T_2p)(1+T_3p)}$$

при $K = 75 \text{ с}^{-2}$, $T_1 = 200 \text{ мс}$, $T_2 = 25 \text{ мс}$, $T_3 = 6 \text{ мс}$.

Ответ. См. рис. 55.

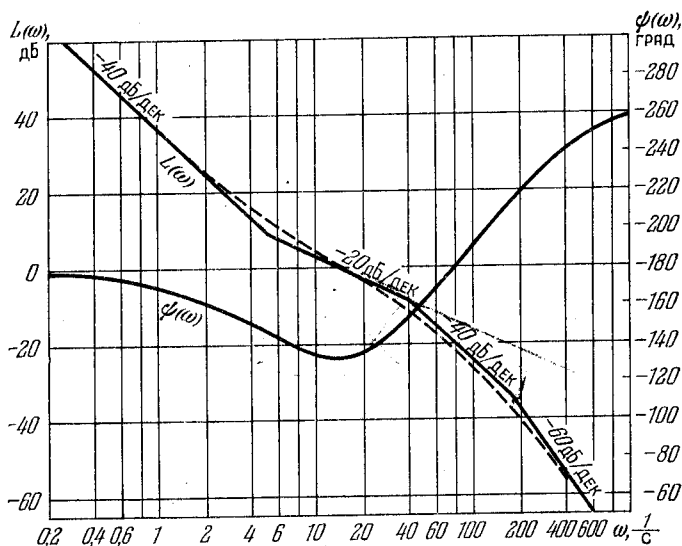


Рис. 55. Логарифмические характеристики к задаче 76.

77. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K(1+T_1p)^2}{p^3(1+T_2p)(1+T_3p)} = \frac{K(1+0,25p)^2}{p^3(1+0,03p)(1+0,008p)}$$

для трех случаев: 1) $K = 250 \text{ с}^{-3}$; 2) $K = 75 \text{ с}^{-3}$; 3) $K = 1000 \text{ с}^{-3}$.

Ответ. На рис. 56 показаны асимптотические амплитудные характеристики $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$ и $L_3(\omega)$, причем индекс соответствует номеру случая; для случая 1) штриховой линией показана точная амплитудная характеристика. Фазовая характеристика $\psi(\omega)$ для всех случаев одна и та же.

78. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики системы со следующей передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{20}{p(1+0,104p+0,0008p^2+0,0004p^3)}.$$

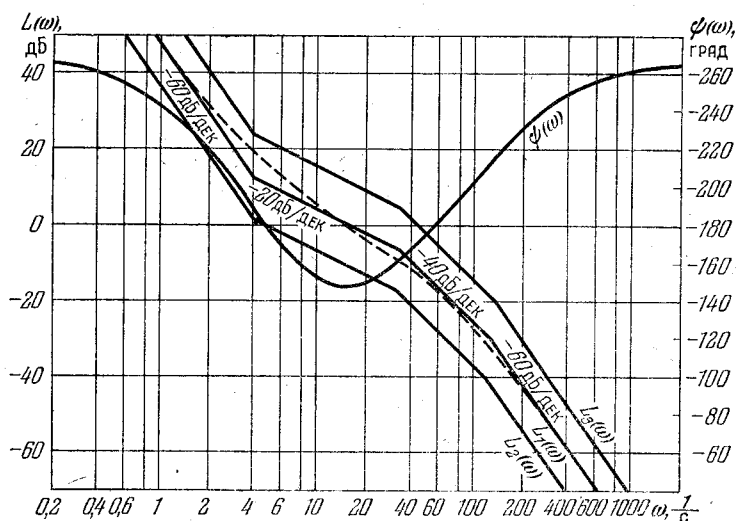


Рис. 56. Логарифмические характеристики к задаче 77.

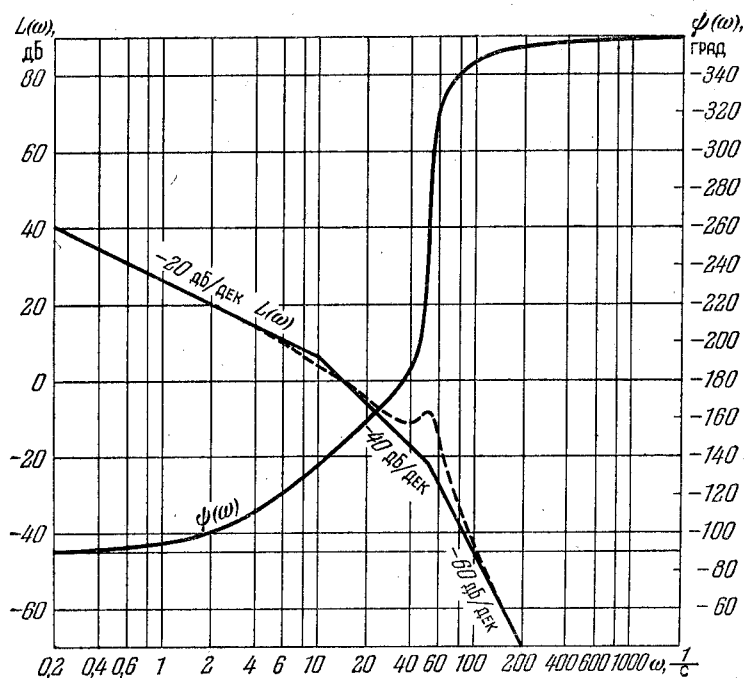


Рис. 57. Логарифмические характеристики к задаче 78.

У к а з а н и е. Знаменатель передаточной функции следует разложить на множители, чтобы привести $W(p)$ к виду, удобному для построения логарифмических характеристик.

Ответ. Амплитудная $L(\omega)$ и фазовая $\phi(\omega)$ характеристики построены на рис. 57.

79. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{Kp}{(1+T_1p)(1+2\xi T_2p+T_2^2p^2)}$$

при $K=0,0645$ с, $T_1=30$ мс, $T_2=7$ мс, $\xi=0,2$.

Ответ. См. рис. 58.

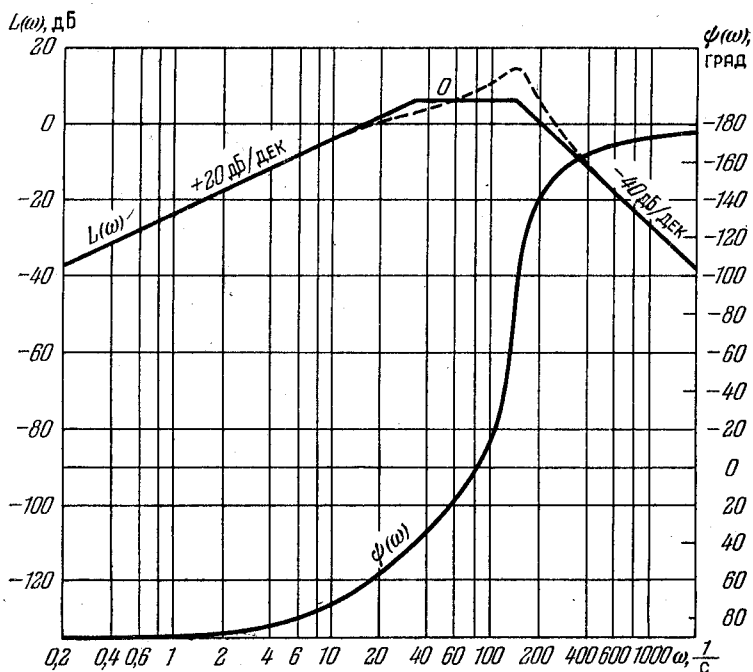


Рис. 58. Логарифмические характеристики к задаче 79.

80. Построить логарифмические амплитудно-фазовые характеристики системы с передаточной функцией

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{K(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_3p)(1+T_4p)} = \\ &= \frac{K(1+0,017p)}{p(1+0,05p)(1+0,0025p)(1+0,001p)} \end{aligned}$$

для двух случаев: 1) $K=K_1=500$ с⁻¹; 2) $K=K_2=2000$ с⁻¹.

Решение. Для построения логарифмической амплитудно-фазовой характеристики $20 \lg |W(j\omega)| = f[\psi(j\omega)]$ предварительно строятся логарифмические амплитудная и фазовая характеристики системы. Используя эти характеристики $L_1(\omega)$ и $\psi(\omega)$, изображенные на рис. 54 (см. задачу 75), строим по точкам логарифмическую

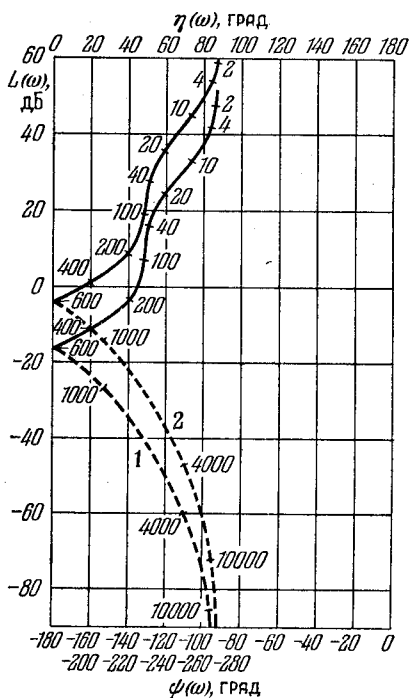


Рис. 59. Логарифмические амплитудно-фазовые характеристики к задаче 80.

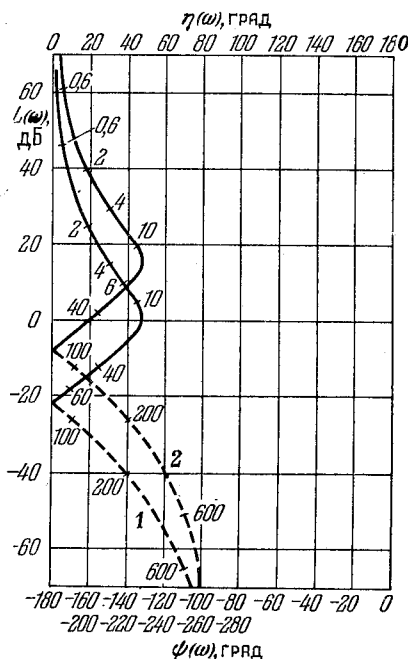


Рис. 60. Логарифмические амплитудно-фазовые характеристики к задаче 81.

амплитудно-фазовую характеристику для случая $K = K_1 = 500 \text{ с}^{-1}$. Эта характеристика представлена на рис. 59 (кривая 1). Числа возле отметок на кривой указывают соответствующие значения частоты ω в с^{-1} .

Высокочастотная часть кривой, для которой $\psi(\omega) < -180^\circ$, заменена ее зеркальным отображением в оси ординат. Для этой части кривой, показанной на рисунке штриховой линией, на оси абсцисс предусмотрена дополнительная шкала углов от -180 до -280° . На рисунке имеется также шкала запаса по фазе, равного $\eta(\omega) = \psi(\omega) + 180^\circ$.

Для случая $K = K_0 = 2000 \text{ с}^{-1}$ аналогичная кривая может быть построена переносом всех точек кривой 1 на 12 дБ вверх ($20 \lg K_2/K_1 = 12 \text{ дБ}$); см. рис. 59, кривая 2.

81. Построить логарифмические амплитудно-фазовые характеристики системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K(1+T_1p)}{p^2(1+T_2p)(1+T_3p)} = \frac{K(1+0,2p)}{p^2(1+0,025p)(1+0,006p)}$$

для двух случаев: 1) $K = 75 \text{ с}^{-2}$; 2) $K = 400 \text{ с}^{-2}$.

Указание. Возможно использование решения задачи 76.

Ответ. См. рис. 60, где кривая 1 относится к первому случаю, а кривая 2 — ко второму.

§ 2.4. Определение передаточных функций по частотным характеристикам

82. Найти передаточную функцию звена, а. ф. х. которого дана на рис. 61.

Ответ. $W(p) = \frac{k}{1+2\xi Tp + T^2 p^2}$, где $k = 10$, $T = 0,01 \text{ с}$, $\xi = 0,05$.

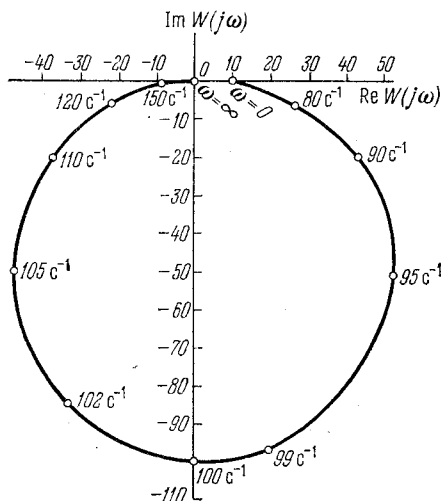


Рис. 61. А. ф. х. к задаче 82.

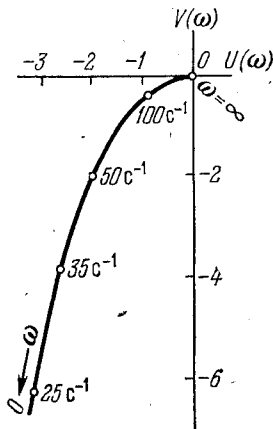


Рис. 62. А. ф. х. к задаче 83.

83. Найти передаточную функцию системы, а. ф. х. которой дана на рис. 62.

Ответ.

$$W(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}, \quad K = 200 \text{ с}^{-1}, \quad T = 0,02 \text{ с}.$$

84. Структурная схема системы дана на рис. 63, а. Экспериментально получены амплитудная $A(f)$ и фазовая $\psi(f)$ частотные

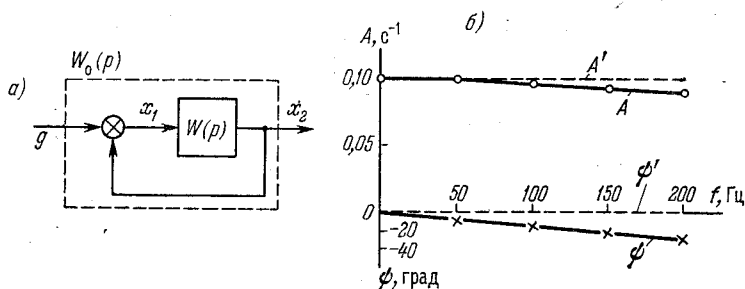


Рис. 63. Структурная схема (а) и частотные характеристики (б) к задаче 84.

характеристики (рис. 63, б), соответствующие передаточной функции $pW(p) = Y(p)/X_1(p)$, где $Y(p) = pX_2(p)$ — изображение скорости изменения координаты X_2 . Считая, что для частот $f < 200$ Гц можно экспериментальные характеристики заменить прямыми $A' = \text{const}$ и $\psi' = \text{const}$, найти передаточную функцию замкнутой системы $W_0(p) = X_2(p)/G(p)$.

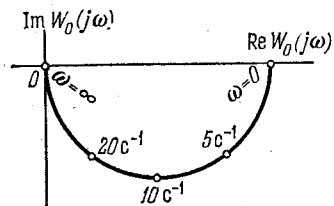


Рис. 64. А. ф. х. к задаче 85.

Отвѣт. Здесь представлено сглаживающее устройство с передаточной функцией $W_0(p) = (1 + Tp)^{-1}$, $T = 10$ с.

85. Система с передаточной функцией $W_0(p)$ (рис. 63, а) имеет а. ф. х., представленную на рис. 64. Найти $W(p)$.

Отвѣт. $W(p) = K/p$, $K = 10$ с⁻¹.

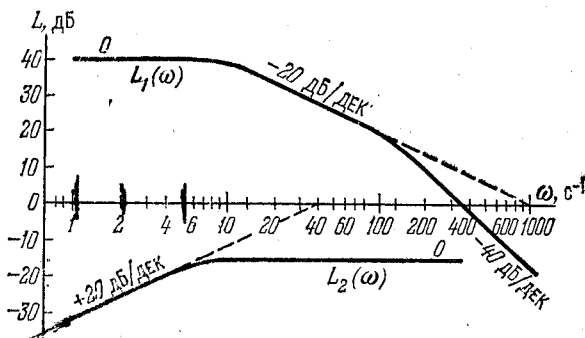


Рис. 65. Логарифмические характеристики к задаче 86.

86. Найти передаточные функции минимально-фазовых звеньев, логарифмические амплитудные характеристики которых даны на рис. 65.

Указание. Целесообразно от л. а. х. на рис. 65, полученных экспериментально, перейти к асимптотическим.

Ответ.

$$W_1(p) = \frac{k}{(1+T_1p)(1+T_2p)}, \quad k=100, \quad T_1=100 \text{ мс}, \quad T_2=8 \text{ мс};$$

$$W_2(p) = \frac{kp}{1+Tp}, \quad k=0,025 \text{ с}, \quad T=0,15 \text{ с}.$$

§ 2.5. Использование цифровых вычислительных машин

87. Составить программу для выполнения на ЦВМ МИР-2 расчета точек а. ф. х. системы, указанной в задаче 58.

Ответ. В качестве основы для расчетов примем соотношение

$$W(j\omega) = \frac{G_1 + jH_1}{G_2 + jH_2} = X + jY, \quad (1)$$

$$X = (G_1G_2 + H_1H_2)/Z, \quad Y = (H_1G_2 - G_1H_2)/Z, \quad Z = G_2^2 + H_2^2. \quad (2)$$

Обозначим частоту Q ; число знаков после запятой выберем в расчетах равным 5.

Теперь программа может быть составлена в следующем виде:

"ВЫПОЛНИТЬ" "РАЗРЯДНОСТЬ" 5; "ВЫВОД" "ЗАГОЛОВOK" "ТАБЛ" 1, ЧАСТОТА [Q], АБСЦИССА [X], ОРДИНАТА [Y]; "ДЛЯ" Q=25 "ШАГ" 25 "ДО" 200 "ВЫПОЛНИТЬ" (Z=G2↑2+H2↑2; X=(G1×G2+H1×H2)/Z; Y=(G2×H1-G1×H2)/Z; "ВЫВОД" "ТАБЛ" 1, Q, X, Y) "ГДЕ" G1=400; G2=-.092×Q↑2; H2=(1-.96₁₀-3×Q↑2)×Q "КОНЕЦ".

Примечания.

1) Результаты расчетов по приведенной программе выдаются машиной в следующем виде:

"ТАБЛИЦА" 1

ЧАСТОТА [Q]	АБСЦИССА [X]	ОРДИНАТА [Y]
25	-675229 ₁₀ -5	-117431 ₁₀ -5
50	-159169 ₁₀ -5	484429 ₁₀ -5
75	-549500 ₁₀ -6	350405 ₁₀ -6
100	-232030 ₁₀ -6	216897 ₁₀ -6
125	-112109 ₁₀ -6	136481 ₁₀ -6
150	-598568 ₁₀ -7	893515 ₁₀ -7
175	-345290 ₁₀ -7	609083 ₁₀ -7
200	-211820 ₁₀ -7	430548 ₁₀ -7◇

2) В обозначении каждого оператора можно отбрасывать последние буквы, сохраняя лишь первые четыре из них. Для отдельных команд это число может быть меньше четырех, оно определяется

Глава 3

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 3.1. Алгебраические критерии устойчивости

99. Движение автоматической системы описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \psi - \Omega (\gamma_0 + \gamma) &= c_2 \gamma_0 + \delta_1, \\ \dot{\gamma}_0 + \dot{\gamma} + \Omega \psi &= -c_1 \gamma_0 + \delta_2, \\ \dot{\gamma} + \Omega \psi &= -k_1 (\gamma_1 - \gamma_g) + \delta_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где γ_g — задающее воздействие, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — возмущающие воздействия, γ_1, γ_0, ψ — координаты системы, $\Omega = 1,16 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $k_1 = 10 \text{ с}^{-1}$, c_1, c_2 — коэффициенты. Определить условия устойчивости системы.

Решение. Запишем систему дифференциальных уравнений (1) в символической форме:

$$\left. \begin{aligned} p\psi - \Omega (\gamma_0 + \gamma) &= c_2 \gamma_0 + \delta_1, \\ p\gamma_0 + p\gamma + \Omega \psi &= -c_1 \gamma_0 + \delta_2, \\ p\gamma + \Omega \psi &= -k_1 (\gamma - \gamma_g) + \delta_3, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где p — символ дифференцирования.

Характеристический полином автоматической системы равен определителю системы уравнений (2):

$$D(p) = \Delta(p) = \begin{vmatrix} -\Omega & -(\Omega + c_2) & p \\ p & p + c_1 & \Omega \\ p + k_1 & 0 & \Omega \end{vmatrix}.$$

Характеристическое уравнение системы:

$$\begin{aligned} p^3 + (c_1 + k_1) p^2 + (\Omega^2 + k_1 c_1) p + \Omega^2 (k_1 + c_1) + \Omega c_2 k_1 &= \\ &= a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0, \end{aligned}$$

где $a_0 = 1$, $a_1 = c_1 + k_1$, $a_2 = \Omega^2 + k_1 c_1$, $a_3 = \Omega^2 (k_1 + c_1) + \Omega c_2 k_1$.

Условие устойчивости получим, используя критерий устойчивости Гурвица (приложение 6). В данной задаче система будет

устойчивой при выполнении следующих неравенств:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (3)$$

Подставляя в неравенства (3) значения коэффициентов системы, получим условие устойчивости

$$c_2 < \frac{c_1^2 + k_1 c_1}{\Omega} = 863 c_1^2 + 8630 c_1.$$

100. Определить устойчивость автоматической системы управления, если ее движение описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \psi - \Omega(\gamma_0 + \gamma) &= c_2 \gamma_0, \\ \dot{\gamma}_0 + \dot{\gamma} + \Omega \psi &= -c_1 \gamma_0, \\ \dot{\gamma} + \Omega \psi &= -k_1(\gamma_0 - \gamma_g) + \int k_2(\gamma_0 - \gamma_g) dt, \end{aligned} \right\}$$

где γ_g — задающее воздействие: γ, γ_0, ψ — координаты системы, $\Omega = 1,16 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $k_2 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-2}$, $k_1 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $c_1 = 10^{-1} \text{ с}^{-1}$, $c_2 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ — коэффициенты. Определить устойчивость системы.

Ответ. Система устойчива.

101. Передаточная функция одноосного гиросtabilизатора имеет вид

$$W_1(p) = \frac{k_1}{p(1 + T_r^2 p^2)},$$

где $k_1 = 25 \text{ с}^{-1}$ — коэффициент усиления разомкнутой системы, $T_r = 0,01 \text{ с}$ — постоянная времени.

Для демпфирования системы последовательно в канал управления введено звено с бесконечной полосой пропускания (рис. 71) и коэффициентом усиления $k_2 = 1$. Выбрать постоянную времени корректирующего звена T из условия устойчивости.

Решение. Передаточная функция разомкнутой системы

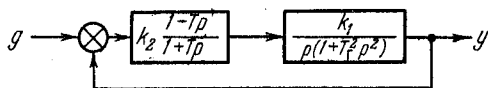


Рис. 71. Структурная схема гиросtabilизатора к задаче 101.

$$W(p) = \frac{K(1 - Tp)}{p(1 + T_r^2 p^2)(1 + Tp)},$$

где $K = k_1 k_2$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы.

Характеристический полином замкнутой системы равен сумме полиномов знаменателя и числителя передаточной функции разомкнутой системы:

$$\begin{aligned} D(p) &= p(1 + T_r^2 p^2)(1 + Tp) + K(1 - Tp) = \\ &= T_r^2 p^4 + T_r p^3 + Tp^2 + (1 - KT)p + K. \end{aligned}$$

Используя критерий устойчивости Гурвица для автоматических систем, имеющих характеристический полином четвертого порядка (приложение 6), получаем условие устойчивости гиросtabilизатора

$$K < \frac{1}{T} - \frac{T_r^2}{T^3}.$$

Гиросtabilизатор устойчив, например, при $T = 0,015$ с.

102. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)},$$

где K — добротность системы по скорости, $T_1 = 0,2$ с, $T_3 = 0,02$ с — постоянные времени объекта управления и усилителя, T_2 — постоянная времени корректирующего устройства. Определить значения постоянной времени корректирующего устройства T_2 , при которых замкнутая система устойчива при любых положительных значениях добротности системы по скорости.

Ответ. $T_2 \geq \frac{T_1 T_3}{T_1 + T_3} = 0,018$ с.

103. Структурная схема электромеханической следящей системы приведена на рис. 72. Коэффициент передачи измерительного элемента $k_{из} = 1$ В/град = 57,3 В/рад, коэффициент усиления усилителя

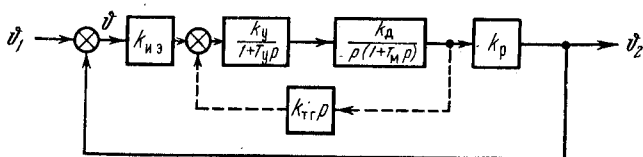


Рис. 72. Структурная схема электромеханической следящей системы.

$k_y = 1000$, коэффициент передачи двигателя $k_d = 50$ рад·В⁻¹·с⁻¹, коэффициент передачи редуктора $k_p = 10^3$, постоянная времени двигателя $T_d = 0,05$ с, постоянная времени усилителя $T_y = 0,005$ с. Определить: а) устойчивость электромеханической следящей системы при отсутствии тахометрической обратной связи; б) значения коэффициента передачи тахогенератора $k_{тр}$, при которых следящая система устойчива.

Ответ. а) Следящая система неустойчива;

$$\text{б) } k_{тр} > \left[\frac{k_{из} k_y k_d k_p}{\frac{1}{T_d} + \frac{1}{T_y}} - 1 \right] (k_y k_d)^{-1} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ В} \cdot \text{с} \cdot \text{рад}^{-1}.$$

104. Схема электромеханической следящей системы приведена на рис. 73, а. Коэффициент передачи измерительного элемента, выполненного на СКВТ, $k_{из} = 1$ В/рад, коэффициент усиления пер-

вого усилителя k_1 , коэффициент усиления второго усилителя k_2 , постоянная времени второго усилителя $T_y = 0,005$ с; коэффициент передачи двигателя $k_d = 50$ рад $\cdot$ В $^{-1} \cdot$ с $^{-1}$, постоянная времени двигателя $T_m = 0,05$ с; коэффициент передачи редуктора $k_p = 1 : 1000 = 10^{-3}$. Для демпфирования системы первый усилитель охвачен отрицательной обратной связью. Общий коэффициент усиления разомкнутой системы из условия обеспечения точности работы следящей системы должен быть не менее 300 с $^{-1}$.

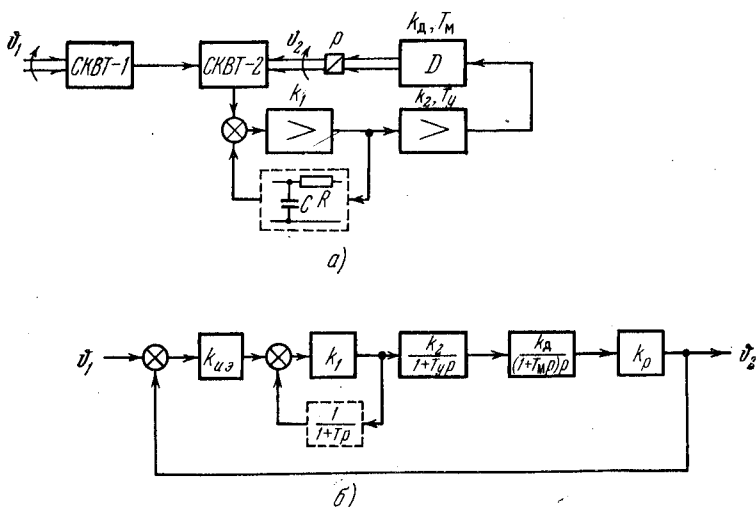


Рис. 73. Электромеханическая (а) и структурная (б) схемы к задаче 104.

Определить коэффициенты усиления усилителей и параметры корректирующего контура из условий обеспечения устойчивости системы и заданного значения общего коэффициента передачи разомкнутой системы.

Решение. Передаточная функция корректирующего контура

$$W_k(p) = \frac{k_k}{1 + T_p},$$

где $k_k = 1$, $T = RC$.

Структурная схема электромеханической следящей системы, начерченная в соответствии со схемой рис. 73, а приведена на рис. 73, б.

При отсутствии корректирующего контура передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_1(p) = \frac{K'}{p(1 + T_y p)(1 + T_d p)},$$

где $K' = k_{из} k_1 k_2 k_d k_p$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы. Условие устойчивости замкнутой системы имеет вид

$$K' < \frac{1}{T_y} + \frac{1}{T_d} = 220 \text{ с}^{-1}.$$

По условию задачи общий коэффициент усиления разомкнутой системы должен быть больше 300 с^{-1} . Для обеспечения устойчивости введем в систему корректирующее звено (штриховые контуры на рис. 73).

Передаточная функция разомкнутой системы при введении в систему корректирующего звена имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1+Tp)}{p \left(1 + \frac{T}{1+k_1} p \right) (1+T_y p) (1+T_m p)},$$

где $K = \frac{k_{из} \cdot k_1 k_2 k_d k_p}{1+k_1}$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы.

Постоянную времени корректирующего звена T выберем равной постоянной времени двигателя T_d . Это всегда можно сделать выбором параметров R и C . Положим $R = 0,1 \text{ мкФ}$. Тогда

$$C = \frac{T_d}{R} = \frac{0,05}{0,1} = 0,5 \text{ МОм}.$$

При $T = T_d$ передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{K}{p \left(1 + \frac{T_d}{1+k_1} p \right) (1+T_y p)},$$

а характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$\frac{T_d}{1+k_1} T_y p^3 + \left(\frac{T_d}{1+k_1} + T_y \right) p^2 + p + K = 0.$$

Условие устойчивости записывается в виде

$$K < \frac{1}{T_y} + \frac{k_1+1}{T_d}.$$

Из последнего неравенства получаем выражение для определения k_1

$$k_1 > \left(K - \frac{1}{T_y} \right) T_d - 1 = 4.$$

Выбираем $k_1 = 9$.

Величину коэффициента усиления k_2 выбираем из условия обеспечения заданного значения общего коэффициента усиления разомкнутой системы:

$$k_2 = \frac{K(1+k_1)}{k_{из} k_1 k_d k_p} = \frac{300(1+9)}{57,3 \cdot 9 \cdot 50 \cdot 10^{-3}} = 174.$$

105. Структурная схема системы управления статически устойчивого летательного аппарата приведена на рис. 74. Коэффициенты передачи $k_1 = 1$, $k_2 = 5$; постоянные времени $T_1 = 0,5$ с и $T_2 = 2$ с.

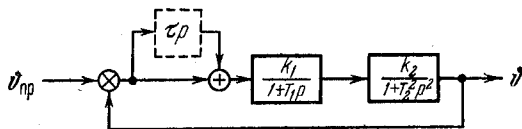


Рис. 74. Структурная схема системы управления статически устойчивого летательного аппарата по углу тангажа (к задаче 105).

Определить: а) устойчивость системы без корректирующего звена ($W_k = \tau\rho$ на рис. 74); б) величину постоянной времени корректирующего звена τ из условия устойчивости.

Ответ: а) система неустойчива; б) $\tau > T_1 = 0,5$ с.

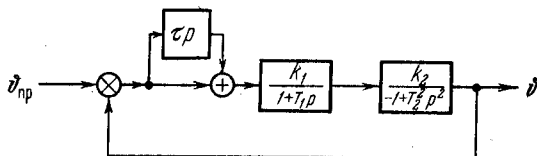


Рис. 75. Структурная схема системы управления статически неустойчивого летательного аппарата (к задаче 106).

106. На рис. 75 приведена структурная схема системы управления жесткого статически неустойчивого летательного аппарата. Постоянная времени рулевого привода $T_1 = 0,5$ с; постоянная времени объекта $T_2 = 2$ с. Определить значения постоянной времени

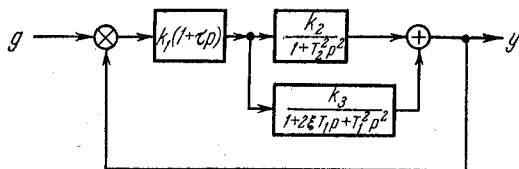


Рис. 76. Структурная схема системы к задаче 107.

корректирующего звена τ и общего коэффициента усиления разомкнутой системы $K = k_1 k_2$ из условия обеспечения устойчивости системы.

Ответ. Условия устойчивости системы имеют следующий вид:

$$\tau > T_1, \quad K > 1.$$

Система устойчива, например, при $K = 5$, $\tau = 0,7$ с.

107. Структурная схема автоматической системы приведена на рис. 76. Коэффициенты передачи звеньев $k_1 = 2 \cdot 10^3$, $k_2 = 6$, $k_3 = 0,25 \cdot 10^{-3}$; постоянные времени $\tau = 0,7 \cdot 10^{-3}$ с, $T_2 = 1,42$ с, $T_3 = 2,2 \cdot 10^{-2}$ с; коэффициент демпфирования $\xi = 0,68 \cdot 10^{-2}$. Определить устойчивость системы.

Ответ. Система устойчива.

§ 3.2. Критерий устойчивости Михайлова

108. Используя критерий устойчивости Михайлова, определить устойчивость электромеханической следящей системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии равна

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_y p)(1+T_d p)},$$

где $K = 58 \text{ с}^{-1}$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы, $T_d = 0,57$ с — постоянная времени двигателя, $T_y = 0,01$ с — постоянная времени усилителя.

Решение. Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$\begin{aligned} D(p) &= p(1+T_y p)(1+T_d p) + K = \\ &= T_y T_d p^3 + (T_y + T_d)p^2 + p + K. \end{aligned}$$

Для построения кривой Михайлова определим вещественную и мнимую части функции $D(j\omega)$:

$$X(\omega) = \operatorname{Re} D(j\omega) = K - (T_y + T_d)\omega^2 = 58 - 0,58\omega^2,$$

$$Y(\omega) = \operatorname{Im} D(j\omega) = \omega - T_y T_d \omega^3 = \omega - 5,7 \cdot 10^{-3} \omega^3.$$

Вычислим $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ для ряда значений частоты ω . Результаты вычислений сведем в таблицу:

$\omega, \text{с}^{-1}$	0	5	10	13	15	∞
$X(\omega)$	58	44	0	-40	-70	$-\infty$
$Y(\omega)$	0	4	4,5	0	-5	$-\infty$

По данным таблицы построим кривую Михайлова (рис. 77). Кривая Михайлова последовательно проходит через три квадранта. Следовательно, система устойчива.

109. Система автоматического управления имеет характеристическое уравнение пятого порядка. На рис. 78 приведена кривая Михайлова системы. Определить число корней характеристического уравнения с отрицательной вещественной частью и число корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью.

Решение. Угол поворота вектора $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ равен

$$\varphi = n \frac{\pi}{2} - l\pi, \quad (1)$$

где n — порядок характеристического уравнения, l — число корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью.

Из рис. 78 видно, что угол поворота вектора $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ равен $\varphi = \pi/2$. После подстановки

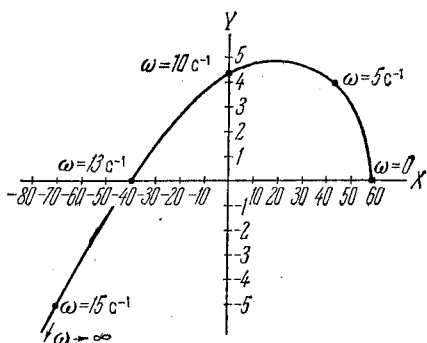


Рис. 77. Кривая Михайлова к задаче 108.

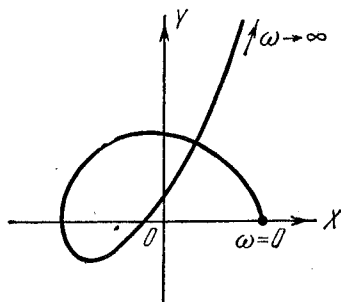


Рис. 78. Кривая Михайлова к задаче 109.

в (1) значения угла $\varphi = \pi/2$ и $n = 5$ получаем, что число корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью

$$l = \frac{5 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{\pi} = 2.$$

Кривая Михайлова через начало координат не проходит; поэтому число корней с отрицательной вещественной частью равно $n - l = 5 - 2 = 3$.

110. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)},$$

где K — общий коэффициент усиления разомкнутой системы, $T_1 = 0,5$ с, $T_2 = 0,1$ с, $T_3 = 0,02$ с — постоянные времени.

С помощью критерия устойчивости Михайлова определить критическое значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы $K_{кр}$, при котором система оказывается на границе устойчивости.

Решение. Характеристический многочлен замкнутой системы равен

$$\begin{aligned} D(p) &= p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K = \\ &= T_1 T_2 T_3 p^4 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) p^3 + \\ &\quad + (T_1 + T_2 + T_3) p^2 + p + K. \end{aligned}$$

После подстановки вместо T_1, T_2, T_3 их числовых значений получаем

$$D(p) = 10^{-3} p^4 + 62 \cdot 10^{-3} p^3 + 610 \cdot 10^{-3} p^2 + p + K.$$

$D(j\omega)$ получаем, заменяя в характеристическом полиноме p на $j\omega$,

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega),$$

где

$$X(\omega) = K - 610 \cdot 10^{-3} \omega^2 + 10^{-3} \omega^4, \quad Y(\omega) = \omega - 62 \cdot 10^{-3} \omega^3.$$

При нахождении системы на колебательной границе устойчивости кривая Михайлова проходит через начало координат при частоте $\omega \neq 0$. Поэтому при $K = K_{кр}$

$$X(\omega) = K_{кр} - 610 \cdot 10^{-3} \omega^2 + 10^{-3} \omega^4 = 0, \quad (1)$$

$$Y(0) = \omega - 62 \cdot 10^{-3} \omega^3 = 0. \quad (2)$$

Из второго уравнения находим значение квадрата частоты, при котором кривая Михайлова проходит через начало координат:

$$\omega^2 = (62 \cdot 10^{-3})^{-1} \text{ с}^{-2}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), после несложных преобразований получаем

$$K_{кр} = \frac{610 \cdot 10^{-3}}{62 \cdot 10^{-3}} - \frac{10^{-3}}{62^2 \cdot 10^{-6}} = 9,6 \text{ с}^{-1}.$$

111. Передаточная функция разомкнутой системы автоматического управления имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1 + 2\xi T_1 p + T_1^2 p^2)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)},$$

где K — общий коэффициент усиления разомкнутой системы, $T_1 = 0,05 \text{ с}$, $T_2 = 0,2 \text{ с}$, $T_3 = 0,1 \text{ с}$ — постоянные времени, $\xi = 0,5$ — коэффициент демпфирования

С помощью критерия устойчивости Михайлова определить критическое значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы $K_{кр}$, при котором замкнутая система находится на границе устойчивости.

Ответ. $K_{кр} = 0,46$.

112. Структурная схема автоматической системы приведена на рис. 79.

Общий коэффициент усиления разомкнутой системы $K = k_1 k_2 k_3 k_4 = 10$; постоянные времени $T = 0,2$ с, $T_0 = 0,8$ с. Используя критерий устойчивости Михайлова, определить величину постоянной времени корректирующего устройства $\tau = \tau_k$, при которой система находится на границе устойчивости.

Ответ. $\tau_k = 0,2$ с.

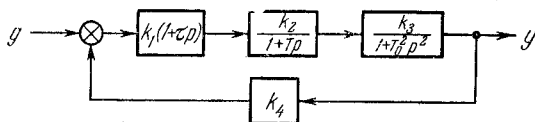


Рис. 79. Структурная схема системы к задаче 112.

113. Характеристическое уравнение автоматической системы имеет вид

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0,$$

где

$$a_0 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ с}^5, \quad a_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^4, \quad a_2 = 0,1 \text{ с}^3,$$

$$a_3 = 0,5 \text{ с}^2, \quad a_4 = 0,9 \text{ с}, \quad a_5 = 1.$$

Определить устойчивость системы.

Решение.

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega),$$

где

$$X(\omega) = a_5 - a_3 \omega^2 + a_1 \omega^4, \quad Y(\omega) = a_4 \omega - a_2 \omega^3 + a_0 \omega^5.$$

После подстановки в выражения для $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ числовых значений $a_0, \dots, a_5$ получаем

$$X(\omega) = 1 - 0,5\omega^2 + 5 \cdot 10^{-3}\omega^4,$$

$$Y(\omega) = 0,9\omega - 0,1\omega^3 + 3 \cdot 10^{-4}\omega^5.$$

Неотрицательные корни уравнения

$$Y(\omega) = 0:$$

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 3,2 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_3 = 18 \text{ с}^{-1}.$$

Положительные корни уравнения

$$X(\omega) = 0:$$

$$\omega_4 = 1,41 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_5 = 9,9 \text{ с}^{-1}.$$

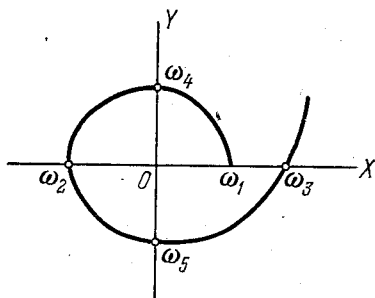


Рис. 80. Кривая Михайлова к задаче 113.

Неотрицательные корни уравнений $X(\omega) = 0$ и $Y(\omega) = 0$ пересекаются. Это говорит о том, что кривая Михайлова последовательно проходит пять квадрантов (рис. 80). Следовательно, система устойчива.

§ 3.3. Критерий устойчивости Найквиста

114. Передаточная функция электромеханической следящей системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_d p)(1+T_y p)},$$

где $K = 100 \text{ с}^{-1}$ — добротность следящей системы по скорости, $T_d = 0,1 \text{ с}$ — постоянная времени двигателя, $T_y = 0,02 \text{ с}$ — постоянная времени усилителя.

Определить устойчивость электромеханической следящей системы, используя критерий устойчивости Найквиста.

Решение. Для построения а. ф. х. разомкнутой системы определим амплитудную частотную характеристику $A(\omega)$ и фазовую частотную характеристику $\psi(\omega)$:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |W(j\omega)| = \left| \frac{K}{j\omega(1+j\omega T_d)(1+j\omega T_y)} \right| = \\ &= \frac{K}{\omega \sqrt{1+(\omega T_d)^2} \sqrt{1+(\omega T_y)^2}} = \\ &= \frac{100}{\omega \sqrt{1+(\omega \cdot 0,1)^2} \sqrt{1+(\omega \cdot 0,02)^2}}, \end{aligned}$$

$$\psi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg \frac{K}{j\omega(1+j\omega T_d)(1+j\omega T_y)} = -90^\circ + \psi_1 + \psi_2,$$

где

$$\psi_1(\omega) = -\arctg \omega T_d = -\arctg 0,1\omega,$$

$$\psi_2(\omega) = -\arctg \omega T_y = -\arctg 0,02\omega.$$

Вычислим $A(\omega)$, $\psi_1(\omega)$, $\psi_2(\omega)$, $\psi(\omega)$ для ряда значений ω . Результаты вычислений сведем в таблицу:

$\omega, \text{с}^{-1}$	0	5	10	15	25	50	100
A	∞	18	6,9	3,56	1,32	0,28	0,045
ψ_1 , град	0	-26	-45	-56	-68	-79	-84
ψ_2 , град	0	-6	-11	-17	-26	-45	-64
ψ , град	-90	-122	-144	-153	-184	-214	-238

По данным таблицы построена а. ф. х. разомкнутой системы (рис. 81).

Знаменатель передаточной функции разомкнутой системы имеет один нулевой корень. Поэтому ветвь а. ф. х., соответствующую частотам $\omega \rightarrow 0$, дополним дугой окружности бесконечно большого радиуса так, чтобы вектор $W(j\omega)$ повернулся по часовой стрелке

на угол, равный 90° (рис. 81). Из рис. 81 видно, что а. ф. х. разомкнутой системы охватывает точку $(-1, 0)$. Следовательно, замкнутая система неустойчива.

115. Используя критерий устойчивости Найквиста, определить устойчивость электромеханической следящей системы, рассмотренной в задаче 114 при следующих параметрах системы: а) $K = 50 \text{ с}^{-1}$, $T_d = 0,1 \text{ с}$, $T_y = 0,025 \text{ с}$; б) $K = 200 \text{ с}^{-1}$, $T_d = 0,02 \text{ с}$, $T_y = 0,002 \text{ с}$; в) $K = 50 \text{ с}^{-1}$, $T_d = 0,1 \text{ с}$, $T_y = 0,005 \text{ с}$.

Ответ. а) Система находится на колебательной границе устойчивости; б) система устойчива; в) система устойчива.

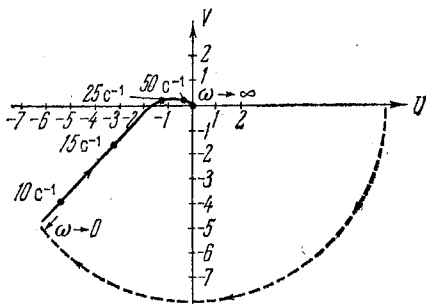


Рис. 81. А. ф. х. разомкнутой системы к задачам 114 и 116.

116. Передаточная функция электромеханической следящей системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W_d(p) = \frac{K}{p(1 + T_d p)(1 + T_y p)}.$$

На рис. 81 приведена а. ф. х. разомкнутой системы, построенная для добротности системы по скорости $K = 100 \text{ с}^{-1}$.

Определить, при каких значениях K замкнутая система устойчива.

Ответ. Замкнутая система устойчива при $K < 57 \text{ с}^{-1}$.

117. Передаточная функция автоматической системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3)},$$

где $K = 50 \text{ с}^{-1}$, $a_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ с}$, $a_2 = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ с}^2$, $a_3 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ с}^3$.

Используя критерий Найквиста, определить устойчивость замкнутой системы и значение коэффициента передачи K , при котором система находится на колебательной границе устойчивости.

Решение. Составим АЛГОЛ-программу для расчета а. ф. х. Предварительно представим частотную передаточную функцию в следующем виде:

$$W(j\omega) = \frac{K}{\omega^2(-a_1 + a_3\omega^2) + j\omega(1 - a_2\omega^2)}.$$

АЛГОЛ-программа:

```

1) BEGIN REAL A, B, C, D, K, A1, A2, A3, Q, Q1, Z; ARRAY L [1:93];
   INTEGER I;
2) K:=50; A1:=4×10-3; A2:=1.2×10-4; A3:=2×10-7;
3) I:=0; FOR Q:=25 STEP 5 IF Q<100 THEN 5 ELSE 10 UNTIL 251 DO
4) BEGIN A:=K; B:=0; Q1:=Q/2; C:=Q1×(-A1+A3×Q1); D:=Q×
   (1-A2×Q1); Z:=C/2+D/2; L[I×3+1]:=Q; L[I×3+2]:=(A×C+B×D)/
   Z; L[I×3+3]:=(B×C-A×D)/Z; I:=I+1; END; ВЫВОД (L); END

```

Пояснения к программе. Позиция 1) содержит описание

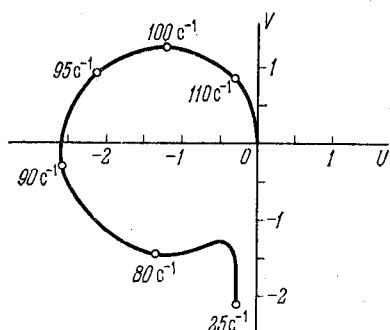


Рис. 82. А. ф. х. разомкнутой системы к задаче 117.

используемых идентификаторов. Позиция 3) содержит оператор цикла, изменяющий частоту от 25 с⁻¹ до 100 с⁻¹ с шагом 5 с⁻¹ и от 110 с⁻¹ до 250 с⁻¹ с шагом 10 с⁻¹. В ячейках $L[i \times 3 + 1]$ запоминается частота, в ячейках $L[i \times 3 + 2]$ — вычисленное значение вещественной части $W(j\omega)$, в ячейках $L[i \times 3 + 3]$ — мнимой части $W(j\omega)$. По окончании вычислений весь массив L выдается на печать.

Из а. ф. х. разомкнутой системы, приведенной на рис. 82, видно, что замкнутая система не-

устойчива. Критическое значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы $K_{кр} = 50 : 2,6 = 19,2$ с⁻¹. Замкнутая система устойчива при $K < 19,2$ с⁻¹.

118. Передаточная функция системы управления статически устойчивым объектом в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_0 p^2)},$$

где $K = 1$ — общий коэффициент усиления разомкнутой системы, $\tau = 0,1$ с — постоянная времени корректирующего устройства, $T_1 = 0,2$ с — постоянная времени исполнительного устройства, $T_0 = 0,5$ с — постоянная времени объекта.

Используя критерий устойчивости Найквиста, определить устойчивость замкнутой системы.

Решение. Амплитудная частотная характеристика разомкнутой системы

$$A(\omega) = \frac{K \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2} \cdot |1 - (\omega T_0)^2|} = \frac{\sqrt{1 + (0,1\omega)^2}}{\sqrt{1 + (0,2\omega)^2} \cdot |1 - (0,5\omega)^2|}$$

Фазовая частотная характеристика

$$\psi(\omega) = \begin{cases} \arctg \omega\tau - \arctg \omega T_1 = \arctg 0,1\omega - \arctg 0,2\omega \\ \quad \text{при } \omega < \frac{1}{T_0} = 2 \text{ с}^{-1}, \\ \arctg \omega\tau - \arctg \omega T_1 - 180^\circ = \\ \quad = \arctg 0,1\omega - \arctg 0,2\omega - 180^\circ \\ \quad \text{при } \omega > \frac{1}{T_0} = 2 \text{ с}^{-1}. \end{cases}$$

Вычислим $A(\omega)$ и $\psi(\omega)$ для ряда значений частоты ω . Результаты вычислений сведем в таблицу:

$\omega, \text{с}^{-1}$	0	1	1,5	$\omega \rightarrow 2-0$	$\omega \rightarrow 2+0$	2,4	3	5	∞
$A(\omega)$	1	1,33	2,2	∞	∞	2,1	0,7	1,15	0
$\psi(\omega), \text{град}$	0	-6	-9	-11	-191	-192	-204	-198	-180

По данным таблицы построена а. ф. х. разомкнутой системы (рис. 83).

При частоте $\omega = \frac{1}{T_0} = 2 \text{ с}^{-1}$ а. ф. х. имеет разрыв. Ветви а. ф. х., соответствующие частотам $\omega \rightarrow \frac{1}{T_0} - 0$ и $\omega \rightarrow \frac{1}{T_0} + 0$, дополним полуокружностью бесконечно большого радиуса. Полуокружность проводим по часовой стрелке от ветви а. ф. х., соответствующей $\omega \rightarrow \frac{1}{T_0} - 0$, к ветви, соответствующей $\omega \rightarrow \frac{1}{T_0} + 0$ (рис. 83).

Из рис. 83 видно, что а. ф. х. разомкнутой системы охватывает точку $(-1, 0)$. Следовательно, замкнутая система неустойчива.

Определить устойчивость этой системы можно и более простым способом.

Из выражения для фазовой характеристики следует, что при $\tau > T_1$ для всех частот $\psi(\omega) > -180^\circ$. Поэтому а. ф. х. при $\tau > T_1$ не заходит в третий квадрант и система устойчива при любых значениях $K > 0$ и T_0 . При $\tau < T_1$ $\psi(\omega) < -180^\circ$ для всех частот

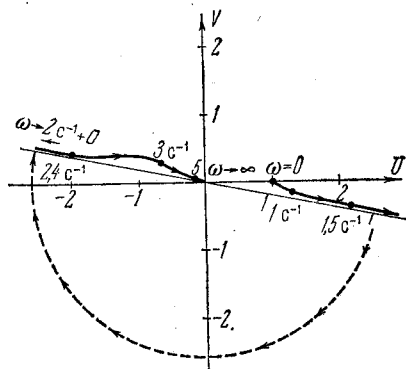


Рис. 83. А. ф. х. разомкнутой системы к задаче 118.

$\omega > \frac{1}{T_0}$. Поэтому часть а. ф. х., соответствующих частотам $\omega > \frac{1}{T_0}$, лежит в третьем квадранте, причем ветвь а. ф. х., соответствующая $\omega \rightarrow \frac{1}{T} + 0$, уходит в бесконечность. Поэтому при $\tau < T_1$ система неустойчива при любых K и T_0 . В данной задаче $\tau < T_1$. Поэтому система неустойчива.

119. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{K}{(1 + Tp)^n},$$

где $K > 0$, $T > 0$, $n > 2$. Определить условие устойчивости замкнутой системы.

Рис. 84. А. ф. х. к задаче 119.

Решение. Вид а. ф. х. разомкнутой системы показан на рис. 84.

Фазовая частотная характеристика системы

$$\psi(\omega) = -n \operatorname{arctg} \omega T.$$

Определим значение частоты $\omega = \omega_{-\pi}$, при котором

$$\psi(\omega) = -n \operatorname{arctg} \omega T = -\pi. \quad (1)$$

Из (1) находим, что

$$\omega_{-\pi} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{T}.$$

Для устойчивости данной системы необходимо и достаточно, чтобы

$$|W(j\omega)|_{\omega=\omega_{-\pi}} = \frac{K}{(V1 + (\omega T)^2)^n} \Big|_{\omega=\omega_{-\pi}} < 1. \quad (2)$$

Из (2) находим условие устойчивости

$$K < \left(V1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \right)^n = \frac{1}{\cos^n \frac{\pi}{n}}.$$

Следует отметить, что устойчивость этой системы не зависит от величины постоянной времени T .

120. Определить устойчивость системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + Tp)^n},$$

где $K > 0$, $T > 0$.

Ответ. При $n=1$ система устойчива при любых значениях $K > 0$ и $T > 0$. При $n \geq 2$ система устойчива при

$$K < \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}} \right)^n}{T}.$$

121. Используя критерий устойчивости Найквиста, определить устойчивость системы автоматической стабилизации летательного аппарата, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{p(-1 + Tp)},$$

где $K = 4 \text{ с}^{-1}$, $T = 1 \text{ с}$, $\tau = 0,5 \text{ с}$.

Решение. Амплитудная частотная характеристика разомкнутой системы имеет вид

$$A(\omega) = \frac{K \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}{\omega \sqrt{1 + (\omega T)^2}} = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{1 + (0,5\omega)^2}{1 + \omega^2}}.$$

Фазовая частотная характеристика

$$\begin{aligned} \psi(\omega) &= \operatorname{arctg} \omega\tau - 90^\circ - (180^\circ - \operatorname{arctg} \omega T) = \\ &= -270^\circ + \operatorname{arctg} 0,5\omega + \operatorname{arctg} 1\omega. \end{aligned}$$

На рис. 85 приведена а. ф. х. разомкнутой системы.

Знаменатель передаточной функции разомкнутой системы имеет один нулевой корень. Поэтому ветвь а. ф. х., соответствующую частотам $\omega \rightarrow 0$, дополним дугой окружности бесконечно большого радиуса (рис. 85). Многочлен знаменателя передаточной функции разомкнутой системы содержит один положительный корень. Угол поворота вектора, начало которого находится в точке $(-1, 0)$, а конец на а. ф. х., при изменении частоты ω от $+0$ до ∞ равен 180° . Следовательно, замкнутая система устойчива.

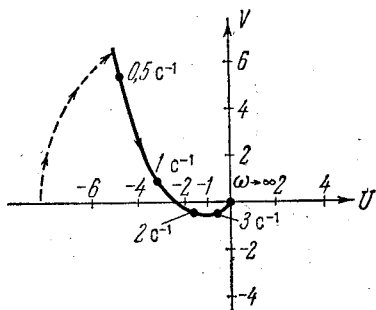


Рис. 85. А. ф. х. к задаче 121

122. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)(1 + T_5 p^2)},$$

где $K = 1$, $T_1 = 0,05 \text{ с}$, $T_2 = 0,02 \text{ с}$, $T_3 = 0,01 \text{ с}$, $T_4 = 0,005 \text{ с}$, $T_5 = 0,5 \text{ с}$.

Используя критерий Найквиста, определить устойчивость замкнутой системы для постоянных времени $\tau = 0$ и $\tau = 0,4 \text{ с}$,

Решение. Представим частотную передаточную функцию в следующем виде:

$$W(j\omega) = \frac{K + jK\omega\tau}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)(1 + j\omega T_4)(1 - \omega^2 T_5^2)}.$$

Для расчета а. ф. х. с помощью ЦВМ составим АЛГОЛ-программу.

АЛГОЛ-программа:

- ```

1) BEGIN REAL K, T, T1, T2, T3, T4, T5, Q, A, B, C, D, X, Y, Z; ARRAY
 X2 [1:4], Y2 [1:4], L [1:3]; INTEGER I;
2) PROCEDURE F (X1, Y1, X2, Y2); VALUE X1, Y1, X2, Y2; REAL X1, Y1,
 X2, Y2; BEGIN X:=X1×X2-Y1×Y2; Y:=X1×Y2+Y1×X2; END;
3) K:=1; T1:=.05; T2:=.02; T3:=.01; T4:=.005; T5:=.5;
4) FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 4 DO X2 [I]:=1;
5) FOR T:=0, .4DO
6) FOR Q:=.2 STEP IF Q<5 THEN .5 ELSE 1 UNTIL 10 DO
7) BEGIN A:=K; B:=K×T×Q; Y2 [1]:=Q×T1; Y2 [2]:=Q×T2; Y2 [3]:=
 Q×T3; Y2 [4]:=Q×T4;
8) X:=1; Y:=0; FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 4 DO F (X, Y, X2 [I], Y2 [I]);
9) C:=X×(1-Q×Q×T5×T5); D:=Y×(1-Q×Q×T5×T5); Z:=C×C+D×D;
 L [1]:=Q; L [2]:=(A×C+B×D)/Z; L [3]:=(B×C-A×D)/Z; ВЫВОД (L);
END END

```

Пояснения к программе. Позиция 1) содержит описание используемых идентификаторов. Процедура  $F$  позиции 2) предназначена для вычисления произведения комплексных чисел  $x_1 + jy_1$

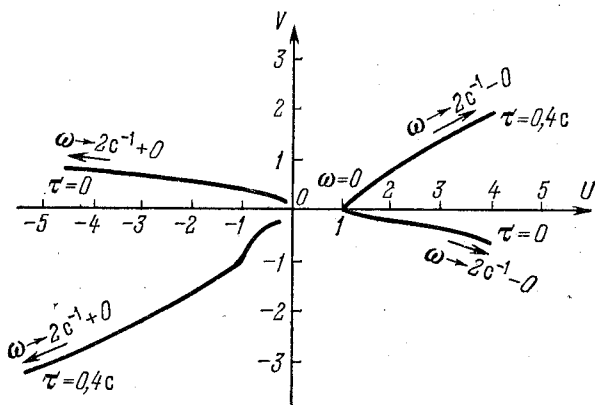


Рис. 86. А. ф. х. к задаче 122.

и  $x_2 + jy_2$ . Позиция 8) служит для вычисления произведения  $(1 + j\omega T_1) \dots (1 + j\omega T_4)$ .

Вещественная  $L[2]$  и мнимая  $L[3]$  части частотной передаточной функции определяются в позиции 9).

А. ф. х. системы приведена на рис. 86. Из нее видно, что при  $\tau=0$  замкнутая система неустойчива, а при  $\tau=0,4$  с — устойчива.

123. Составить АЛГОЛ-программу для построения амплитудно-фазовой характеристики. Построить ее и по ней определить устойчивость замкнутой системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1+\tau p)(1+b_1p+b_2p^2)}{(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)(1+T_4p)(1+a_1p+a_2p^2)},$$

где  $K=5$ ,  $T_1=0,05$  с,  $T_2=0,02$  с,  $T_3=0,01$  с,  $T_4=0,005$  с,  $\tau=0,07$  с,  $b_1=0,02$  с,  $b_2=10^{-4}$  с<sup>2</sup>,  $a_1=10^{-3}$  с,  $a_2=0,25$  с<sup>2</sup>.

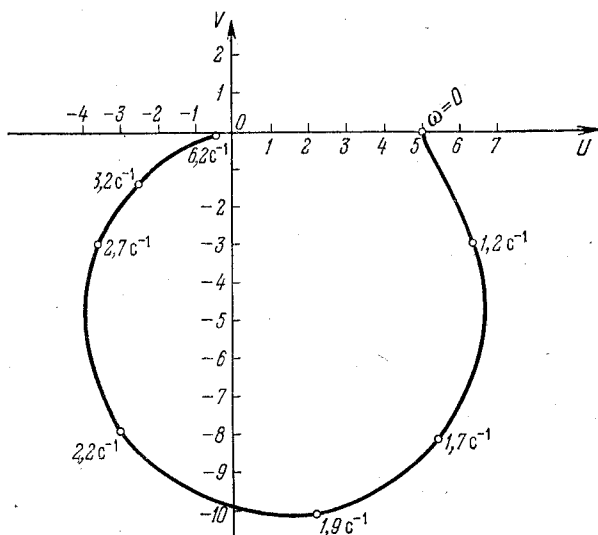


Рис. 87. А. ф. х. к задаче 123.

Ответ. А. ф. х. разомкнутой системы приведена на рис. 87. Замкнутая система устойчива.

### § 3.4. Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы

124. Передаточная функция электромеханической следящей системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_d p)(1+T_y p)},$$

где  $K=75$  с<sup>-1</sup>,  $T_d=0,02$  с,  $T_y=0,005$  с.

Определить устойчивость замкнутой системы по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы.

Решение. Устойчивость системы будем определять по асимптотической л. а. х. и л. ф. х. Частоты излома асимптотической л. а. х. равны

$$\omega_1 = \frac{1}{T_d} = \frac{1}{0,02} = 50 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{T_y} = \frac{1}{0,005} = 200 \text{ с}^{-1}.$$

Низкочастотная асимптота л. а. х. пересекает ось частот при частоте

$$\omega = K = 75 \text{ с}^{-1}.$$

По этим данным строим асимптотическую л. а. х. (рис. 88). Фазовая частотная характеристика

$$\psi(\omega) = \psi_1(\omega) + \psi_2(\omega) + \psi_3(\omega),$$

где  $\psi_1(\omega) = -90^\circ$ ,  $\psi_2(\omega) = -\arctg \omega T_d = -\arctg 0,02\omega$ ,  $\psi_3(\omega) = -\arctg T_y \omega = -\arctg 0,005\omega$ .

Графики функций  $\psi_2(\omega)$  и  $\psi_3(\omega)$  строим с помощью шаблона.

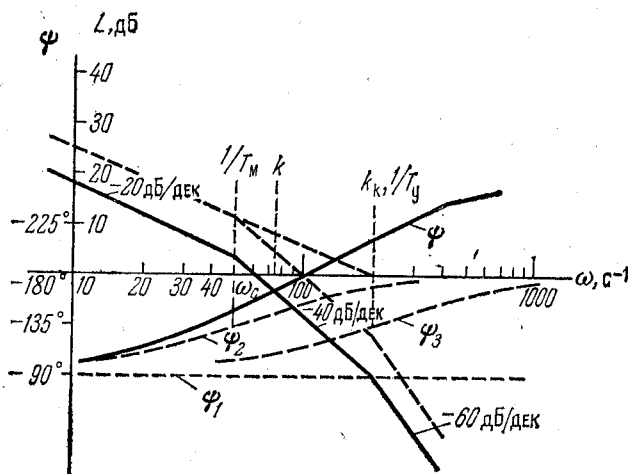


Рис. 88. Асимптотическая л. а. х. и л. ф. х. к задачам 124 и 127.

Л. ф. х. получаем графическим сложением функций  $\psi_1(\omega)$ ,  $\psi_2(\omega)$ ,  $\psi_3(\omega)$  (рис. 88). Л. ф. х. пересекает линию  $\psi = -180^\circ$  при отрицательных значениях асимптотической л. а. х. Следовательно, замкнутая система устойчива. В данной задаче л. ф. х. является монотонной функцией от частоты  $\omega$ ; поэтому задачу можно решить без построения л. ф. х.

После построения асимптотической л. а. х. определяем частоту среза разомкнутой системы  $\omega = \omega_c = 60 \text{ с}^{-1}$  (см. рис. 88).

Значение фазы при частоте среза

$$\psi(\omega_c) = -90^\circ - \arctg(0,02 \cdot 60) - \arctg(0,005 \cdot 60) = -157^\circ > -180^\circ.$$

Следовательно, замкнутая система устойчива.

125. Определить устойчивость системы, рассмотренной в задаче 124 при  $T_y = 0,005$  с,  $T_d = 0,02$  с,  $K = 300$  с<sup>-1</sup>.

Ответ. Система неустойчива.

126. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{p(1 + T_m p)(1 + T_y p)},$$

где  $K = 300$  с<sup>-1</sup>,  $T_m = 0,02$  с,  $T_y = 0,005$  с,  $\tau = 0,0045$  с. Определить устойчивость системы.

Ответ. Система устойчива.

127. Для электромеханической следящей системы, рассмотренной в задаче 124, определить значение добротности системы, при которой система находится на колебательной границе устойчивости.

Решение. Логарифмическая фазовая характеристика определяется выражением

$$\psi(\omega) = \psi_1(\omega) + \psi_2(\omega) + \psi_3(\omega),$$

где  $\psi_1(\omega) = -90^\circ$ ,  $\psi_2(\omega) = -\arctg \omega T_d$ ,  $\psi_3 = -\arctg \omega T_y$ .

Графики функций  $\psi_2(\omega)$  и  $\psi_3(\omega)$  строим с помощью шаблона. Л. ф. х. получаем графическим сложением характеристик  $\psi_1(\omega)$ ,  $\psi_2(\omega)$  и  $\psi_3(\omega)$  (см. рис. 88).

Система находится на колебательной границе устойчивости, если л. а. х. пересекает ось частот при частоте пересечения л. ф. х. линии  $\psi = -180^\circ$ ,  $\omega = 100$  с<sup>-1</sup>.

Асимптотическая л. а. х. системы в диапазоне частот  $0 \div \frac{1}{T_m}$  имеет наклон  $-20$  дБ/дек, в диапазоне частот  $\frac{1}{T_d} \div \frac{1}{T_y}$  — наклон  $-40$  дБ/дек, в диапазоне частот  $\frac{1}{T_y} \div \infty$  — наклон  $-60$  дБ/дек.

Зная наклоны асимптотической л. а. х., легко начертить асимптотическую л. а. х., пересекающую ось частот на частоте пересечения л. ф. х. линии  $\psi = -180^\circ$  (см. рис. 88). Добротность системы по скорости  $K = K_{кр}$  определяем по точке пересечения низкочастотной асимптоты л. а. х. с осью частот  $K_{кр} = 200$  с<sup>-1</sup>.

Точное значение  $K_{кр} = 250$  с<sup>-1</sup>. Ошибка в определении  $K_{кр}$  объясняется отличием асимптотической л. а. х. от действительной.

128. Передаточная функция одноосного гиросtabilизатора при коэффициенте демпфирования  $\xi = 0$  в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_r^2 p^2)},$$

где  $K = 40$  с<sup>-1</sup>,  $T_r = 6,5 \cdot 10^{-3}$  с.

Для демпфирования системы последовательно в цепь управления введено корректирующее звено с передаточной функцией

$$W_k(p) = \frac{1 - T_p p}{1 + T_p p}.$$

Определить величину постоянной времени  $T$ , при которой гиросtabilизатор будет устойчив.

Решение. На рис. 89 приведены асимптотическая л. а. х. и л. ф. х. нескорректированной системы (сплошная линия). Для

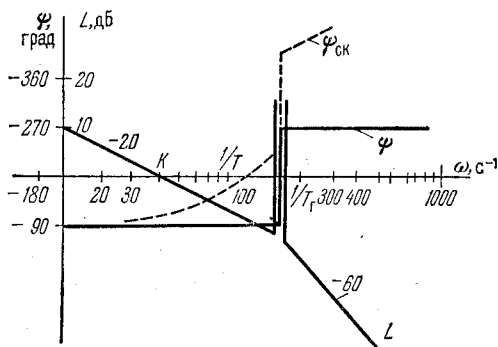


Рис. 89. Асимптотическая л. а. х. и л. ф. х. к задаче 128.

устойчивости системы необходимо, чтобы л. ф. х. пересекала линию  $\psi = -180^\circ$  в диапазоне частот  $K \div \frac{1}{T_r}$ . Поэтому постоянную времени корректирующего звена необходимо выбирать из условия

$$K < \frac{1}{T} < \frac{1}{T_r}.$$

Система устойчива, например, при  $T = 0,01$  с.

**129.** Определить устойчивость одноосного гиросtabilизатора, передаточная функция которого в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + 2\xi T_r p + T_r^2 p^2)},$$

где  $K = 40$  с<sup>-1</sup>,  $T_r = 6,5 \cdot 10^{-3}$  с,  $\xi = 0,2$ .

Ответ. Гиросtabilизатор устойчив.

**130.** Определить устойчивость системы, передаточная функция которой имеет вид

$$W(p) = \frac{k_1 + k_2 p}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(-1 + T_0^2 p^2)},$$

если  $k_1 = 10$ ,  $k_2 = 20$  с,  $T_1 = 0,5$  с,  $T_2 = 0,1$  с,  $T_0 = 2$  с.

*Ответ.* Асимптотическая л. а. х. и л. ф. х. разомкнутой системы приведены на рис. 90. Замкнутая система устойчива.

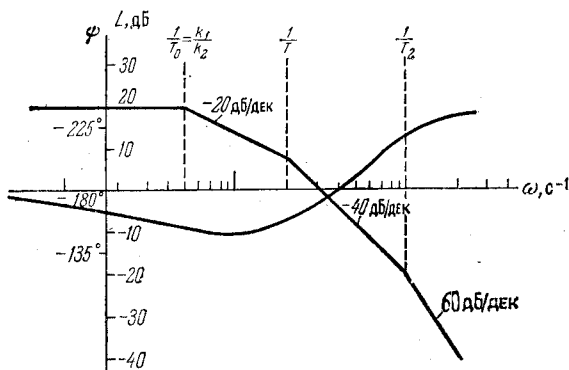


Рис. 90. Асимптотическая л. а. х. и л. ф. х. к задаче 130.

131. Решить предыдущую задачу при  $k_1=10$ ,  $k_2=50$  с,  $T_1=0,5$  с,  $T_2=0,1$  с,  $T_0=2$  с.

*Ответ.* Замкнутая система неустойчива.

### § 3.5. Построение областей устойчивости

132. Передаточная функция статической системы автоматического управления в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)},$$

где  $T_2=0,2$  с,  $T_3=0,05$  с. Используя критерии Гурвица и Михайлова, составить программы для ЦВМ и построить область устойчивости в плоскости параметров  $K$ ,  $T_1$ .

*Решение.* Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$D(p) = a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3, \quad \text{где} \quad a_0 = T_2T_3T_1, \\ a_1 = T_2T_3 + (T_2 + T_3)T_1, \quad a_2 = T_2 + T_3 + T_1, \quad a_3 = 1 + K.$$

Уравнение аperiодической границы устойчивости найдем, приравняв нулю свободный член характеристического полинома  $K = -1$ , колебательной — приравняв нулю предпоследний определитель матрицы Гурвица:  $a_1a_2 - a_0a_3 = 0$ . Из последнего уравнения получим уравнение колебательной границы устойчивости  $K = \frac{a_1a_2}{a_0} - 1$ .

АЛГОЛ-программа для построения колебательной границы устойчивости при использовании критерия Гурвица имеет следующий вид:

```

1) BEGIN REAL A0, A1, A2, T1, T2, T3; INTEGER I; ARRAY C [1:200];
2) T2:=.2; T3:=.05; I:=0;
3) FOR T1:=.01 STEP .01 UNTIL 1.005 DO
4) BEGIN A0:=T2×T3×T1; A1:=T2×T3+(T2+T3)×T1; A2:=T2+T3+
 T1; C[I×2+1]:=T1; C[I×2+2]:=A1×A2/A0-1; I:=I+1; END;
 ВЫВОД (C) END

```

Пояснения к программе. Позиция 1) содержит описание используемых идентификаторов. Массив  $C$  необходим для запоминания результатов вычислений в его ячейках и последующем выводе их на печать. Это позволяет экономить машинное время и более полно использовать ленту печати (экономить бумагу). В элементах массива  $C[i \times 2 + 1]$  запоминаются значения  $T_1$ , в элементах  $C[i \times 2 + 2] - K$ . Переменная  $I$  выполняет роль счетчика. Начальное значение  $I=0$  задается вне оператора цикла. Область устойчивости приведена на рис. 91.

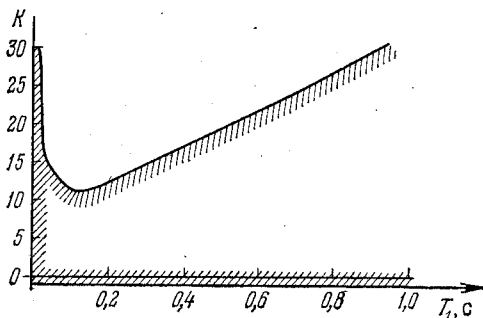


Рис. 91. Область устойчивости к задаче 132.

ФОРТРАН-программа имеет следующий вид:

```

DIMENSION C (200)
T2=.2
T3=.05
T1=.01
DO 12 I=1,100
A0=T2*T3*T1
A1=T2*T3+(T2+T3)*T1
A2=T2+T3+T1
C(I*2-1)=T1
C(I*2)=A1*A2/A0-1
12 T1=T1+.01
WRITE (6,13) C
13 FORMAT (E15.8)
STOP
END

```

Для использования критерия Михайлова напишем выражения для вещественной и мнимой частей характеристического комплекса

$$X(\omega) = 1 + K - (T_2 T_3 + (T_2 + T_3) \cdot T_1) \omega^2, \\ Y(\omega) = (T_1 + T_2 + T_3) \omega - T_2 T_3 T_1 \omega^3.$$

Приравняв  $X(\omega)$  и  $Y(\omega)$  нулю, получим выражения для  $T_1$  и  $K$ , при которых система находится на колебательной границе устойчивости

$$T_1 = (T_2 + T_3) : (T_2 T_3 \omega^2 - 1), \\ K = T_2 T_3 \omega^2 - 1 + (T_2 + T_3) T_1 \omega^2.$$

АЛГОЛ-программа:

```
1) BEGIN REAL T2, T3, Y; INTEGER I; ARRAY C[1:129];
2) T2 := .2; T3 := .05; I := 0; FOR Y := 8 STEP 1 UNTIL 50.5 DO
3) BEGIN C[I*3+1] := Y; C[I*3+2] := (T2+T3) / (T2*T3*Y*Y-1);
 C[I*3+3] := T2*T3*Y*Y-1 + (T2+T3)*Y*Y*C[I*3+2]; I := I+1;
END; ВЫВОД (C) END
```

Пояснения к программе. Позиция 1 содержит описание используемых идентификаторов. Позиция 2 — оператор цикла по частоте  $Y = \omega$ . В ячейках массива  $C[i \times 3 + 1]$  запоминается частота  $Y$ , в ячейках  $C[i \times 3 + 2]$  —  $T_1$ , в ячейках  $C[i \times 3 + 3]$  —  $K$ .

ФОРТРАН-программа имеет следующий вид:

```
DIMENSION C (129)
Y=8
T2=.2
T3=.05
DO 12 I=1,43
C(I*3-2)=Y
C(I*3-1)=(T2+T3) / (T2 * T3 * Y * Y - 1)
C(I*3)=T2 * T3 * Y * Y - 1 + (T2+T3) * Y * Y * C(I*3-1)
12 Y=Y+1
WRITE (6,13) C
13 FORMAT (E15.8)
STOP
END
```

133. Передаточная функция системы автоматической стабилизации статически устойчивого летательного аппарата в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{k_1 + k_2 p}{(1 + T_0^2 p^2)(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

Постоянные времени привода  $T_1 = 0,5$  с,  $T_2 = 0,1$  с.

Используя критерий Гурвица, составить АЛГОЛ-программу и построить область устойчивости на плоскости  $k_1, k_2$  при постоянных времени объекта  $T_0 = 1,5$  с,  $T_0 = 2$  с и  $T_0 = 2,5$  с.

Решение. Характеристический полином замкнутой системы

$$D(p) = a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4, \text{ где } a_0 = T_1 T_2 T_0^2,$$

$$a_1 = (T_1 + T_2) T_0^2, \quad a_2 = T_0^2 + T_1 T_2, \quad a_3 = k_2 + T_1 + T_2, \quad a_4 = 1 + k_1.$$

Уравнение апериодической границы устойчивости найдем, приравняв нулю свободный член  $k_1 = -1$ , колебательной — приравняв

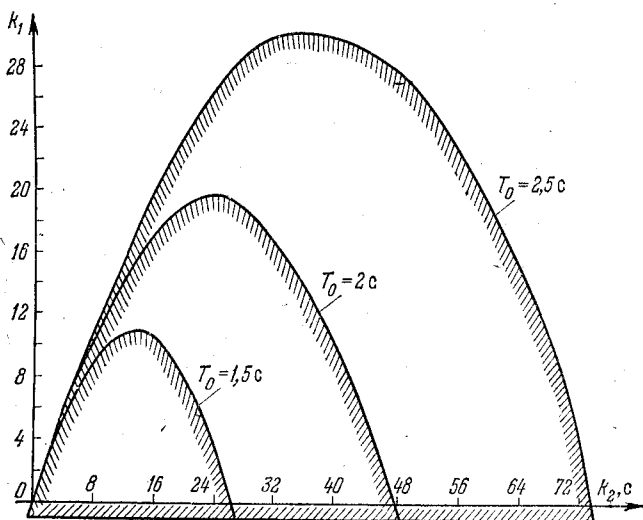


Рис. 92. Область устойчивости к задаче 133.

нулю предпоследний определитель матрицы Гурвица:  $a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 = 0$ . После несложных преобразований получим следующее выражение для построения колебательной границы устойчивости:

$$k_1 = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) : a_1^2 - 1.$$

АЛГОЛ-программа:

```

1) BEGIN REAL K2, T0, T1, T2, A0, A1, A2, A3; ARRAY C[1 : 82]; INTEGER I;
2) T1 := .5; T2 := .1;
3) FOR T0 := 1.5, 2, 2.5 DO
4) BEGIN A0 := T1 × T2 × T0 × T0; A1 := (T1 + T2) × T0 × T0; A2 := T0 × T0 +
 T1 × T2; I := 0;
5) FOR K2 := 0 STEP 2 UNTIL 81 DO
6) BEGIN A3 := K2 + T1 + T2; C[I × 2 + 1] := K2; C[I × 2 + 2] := A3 × (A1 ×
 A2 - A0 × A3) / A1 ↑ 2 - 1; I := I + 1; END; ВЫВОД (C); END END

```

Пояснения к программе. Позиция 1 содержит описание используемых идентификаторов. Позиции 3 и 5 содержат операторы циклов по  $T_0$  и  $k_2$ . Назначение переменной  $i$  и массива  $C$  такое же, как и в задаче 132.

Область устойчивости приведена на рис. 92.

134. Составить процедуру для расчета устойчивости автоматических систем по критерию Рауса.

Решение. Для составления процедуры воспользуемся критерием устойчивости Рауса, описанным в приложении 7.

АЛГОЛ-программа:

```

1) PROCEDURE R (A, N, M1, M2); VALUE N; INTEGER N; ARRAY A;
 LABEL M1, M2;
2) BEGIN INTEGER L; L := N ÷ 2 + 1;
3) BEGIN ARRAY C[1:N+1, 1:L]; INTEGER K, I, J, T;
4) FOR K=1 STEP 1 UNTIL L-1 DO BEGIN C[1, K] := A[2×K-2];
 C[2, K] := A[2×K-1] END; C[1, L] := A[2×L-2]; C[2, L] := IF
 N/2 - N ÷ 2 = 0 THEN 0 ELSE A[N];
5) FOR I:=3 STEP 1 UNTIL N+1 DO C[I, L] := 0; FOR I:=3 STEP 1
 UNTIL N+1 DO FOR J:=1 STEP 1 UNTIL L-1 DO BEGIN C[I, J] :=
 C[I-1, 1]×C[I-2, J+1] - C[I-2, 1]×C[I-1, J+1]; END;
6) T:=0; FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N+1 DO IF C[I, 1] ≤ 0 THEN T :=
 T+1; IF T=0 THEN GO TO M1 ELSE GO TO M2 END; END R;

```

В отличие от процедуры Рауса, имеющейся в библиотеке стандартных программ  $\alpha$ -транслятора (СП 0106), данная процедура допускает наличие корней характеристического полинома на мнимой оси плоскости корней.

Пояснения к программе. Описательная часть процедуры Рауса разрешена в позиции 1. Формальными параметрами являются:  $A$  — массив, элементы которого равны коэффициентам характеристического полинома ( $A[0]=a_0, \dots, A[n]=a_n$ )  $n$  — порядок характеристического полинома;  $M1, M2$  — метки. Если условия устойчивости выполняются, то производится переход на метку  $M1$ , если не выполняется — на метку  $M2$ . Метки  $M1$  и  $M2$  предназначены для использования вне процедуры Рауса.

Позиция 4 предназначена для заполнения первых двух строк таблицы Рауса (см. приложение 7). Динамический массив  $C$  (позиция 3) требует вычисления граничных пар до входа в блок. С этой целью до входа в блок вычисляется  $L$  (позиция 2). Переменная  $n$  является параметром процедуры и задается при обращении к ней. В позиции 4 заполняются первые две строки таблицы Рауса, в позиции 5 — последующие. В позиции 6 производится проверка знака первого столбца и выход на метки  $M1$  и  $M2$ .

135. Решить задачу 133, используя процедуру Рауса задачи 134.

Решение. АЛГОЛ-программа для решения задачи имеет следующий вид:

```

1) BEGIN REAL K1, K2, T0, T1, T2; ARRAY A[0:4], C[1:3]; INTEGER M;
2) Позиции 1—6 АЛГОЛ-программы задачи 134.
3) T1 := .5; T2 := .1;
4) FOR TO := 1.5, 2, 2.5 DO
5) BEGIN A[0] := T1 × T2 × T0 × T0; A[1] := (T1 + T2) × T0 × T0; A[2] := T0 ×
 T0 + T1 × T2;
6) FOR K2 := 0 STEP 2 UNTIL 81 DO
7) FOR K1 := 0 STEP 2 UNTIL 33 DO
8) BEGIN A[3] := K2 + T1 + T2; A[4] := 1 + K1;
9) R(A, 4, M1, M2);
10) M1 : M := 0; GO TO M3; M2 : M := 1;
11) M3 : C[1] = K1; C[2] := K2; C[3] := M;
12) ВЫВОД (C) END END END

```

Пояснения к программе. Позиция 1) содержит описание используемых идентификаторов. Позиции 5), 6) и 7) — операторы циклов по  $T_0$ ,  $k_2$  и  $k_1$ . Для экономии машинного времени вычисление коэффициентов  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$  вынесено за операторы циклов по  $k_1$  и  $k_2$ , так как  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$  не содержат  $k_1$  и  $k_2$ . Обращение к процедуре Рауса содержится в позиции 9). Предполагается, что процедура Рауса включена в библиотеку стандартных программ. Если система устойчива, то переменной  $M$  присваивается значение нуль, если неустойчива или на границе устойчивости, — то единица.

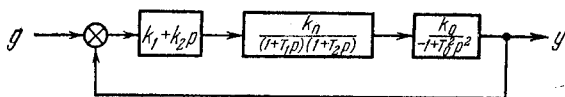


Рис. 93. Структурная схема системы стабилизации статически неустойчивого летательного аппарата.

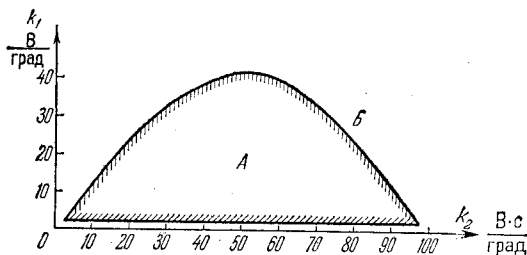


Рис. 94. Область устойчивости к задаче 136.

136. Построить область устойчивости системы управления статически неустойчивого летательного аппарата на плоскости  $k_1$ ,  $k_2$ , структурная схема которой приведена на рис. 93. Постоянные времени привода исполнительного устройства  $T_1 = 0,5$  с,  $T_2 = 0,1$  с.

Постоянная времени объекта  $T_0 = 2$  с. Коэффициенты передачи привода исполнительного устройства и объекта  $k_{\pi} = 0,5$  град  $\cdot$  В $^{-1}$ ,  $k_0 = 1$ .

*Ответ.* Область устойчивости приведена на рис. 94.

137. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + 2\xi T p + T^2 p^2)},$$

где  $T_1 = 0, 2$  с,  $T = 1$  с — постоянные времени исполнительного устройства и объекта,  $K$  — общий коэффициент усиления разомкнутой системы,  $\xi$  — коэффициент демпфирования.

Построить область устойчивости замкнутой системы в плоскости параметров  $K, \xi$ .

*Ответ.* Область устойчивости системы приведена на рис. 95.

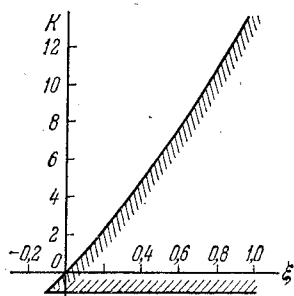


Рис. 95. Область устойчивости к задаче 137.

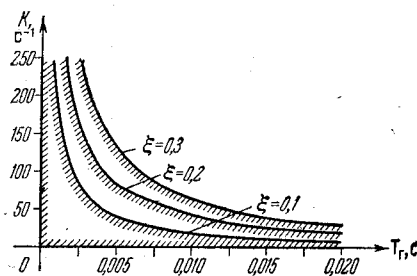


Рис. 96. Область устойчивости к задаче 138.

138. Передаточная функция одноосного гиросtabilизатора в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + 2\xi T_r p + T_r^2 p^2)},$$

где  $K$  — общий коэффициент усиления разомкнутой системы,  $\xi$  — коэффициент демпфирования,  $T_r$  — постоянная времени.

Построить области устойчивости одноосного гиросtabilизатора на плоскости параметров  $K, T_r$  для значений коэффициента демпфирования  $\xi = 0,1, \xi = 0,2, \xi = 0,3$ .

*Ответ.* Области устойчивости системы приведены на рис. 96.

## Глава 4

### ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

#### § 4.1. Классический метод решения дифференциальных уравнений

139. Найти выходную величину  $y(t)$  системы, описываемой уравнением

$$T \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = g(t)$$

для двух случаев.

1) На вход системы подается задающее воздействие, изменяющееся по гармоническому закону

$$g(t) = G_m \sin \Omega t;$$

начальное условие  $y(0) = y_0$ .

2) При установившемся режиме, соответствующем задающему воздействию  $g(t) = G_m \sin \Omega t$ , происходит скачкообразный сдвиг фазы задающего воздействия на  $+90^\circ$ ; сдвиг происходит в момент, когда  $\Omega t = 2\pi n$ , где  $n$  — целое число.

Ответ.

$$1) y(t) = Y_m \sin(\Omega t - \psi) + (y_0 + Y_m \sin \psi) e^{-t/T}, \quad Y_m = \frac{G_m}{\sqrt{1 + (\Omega T)^2}},$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \Omega T.$$

$$2) y(t) = Y_m \cos(\Omega t - \psi) - Y_m (\sin \psi + \cos \psi) e^{-t/T}.$$

140. Дана следящая система, представленная на рис. 97. На вход усилителя 1 подается разность между задающим воздействием  $g$  и выходной величиной  $y$ . Кроме того, на усилитель подается первая производная  $g'$  задающего воздействия; 2 — двигатель, редуктор и исполнительный механизм.

Система описывается уравнением

$$(Tp^2 + p + K)y(t) = (K\tau p + K)g(t). \quad (1)$$

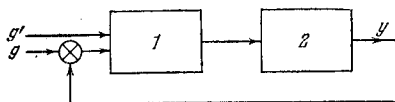


Рис. 97. Блок-схема следящей системы к задаче 140.

Постоянная времени  $T = 5$  мс, коэффициент усиления по задающему воздействию  $K = 40$  с<sup>-1</sup>, коэффициент усиления по производной задающего воздействия  $K\tau = 0,8$ . Найти закон изменения выход-

ной величины  $y$  при обработке системой рассогласования  $y_0$  при отсутствии задающего воздействия и нулевой начальной скорости.

Решение. Дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$(Tp^2 + p + K)y(t) = 0$$

или  $(0,005p^2 + p + 40)y(t) = 0. \quad (2)$

Характеристическое уравнение

$$0,005p^2 + p + 40 = 0 \quad (3)$$

имеет два вещественных корня:  $p_1 = -55,3 \text{ с}^{-1}$ ,  $p_2 = -144,7 \text{ с}^{-1}$ .

Для случая вещественных корней решение уравнения (2) имеет вид

$$y(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad (4)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — абсолютные значения корней характеристического уравнения. Начальные условия: при  $t=0$

$$y = y_0, \quad y' = y'_0 = 0. \quad (5)$$

Из (4) и (5) получаем

$$A_1 + A_2 = y_0, \quad -\alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 = 0. \quad (6)$$

Из (6) находим

$$A_1 = \frac{\alpha_2 y_0}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad A_2 = \frac{\alpha_1 y_0}{\alpha_1 - \alpha_2}. \quad (7)$$

Решение задачи имеет вид, согласно (4) и (7),

$$y(t) = \frac{y_0}{\alpha_2 - \alpha_1} (\alpha_2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}) 1(t),$$

или

$$y(t) = y_0 (1,619e^{-55,3t} - 0,619e^{-144,7t}) 1(t). \quad (8)$$

По уравнению (8) на рис. 98 построена кривая 1.

Выражение (8) можно также получить непосредственно по данным задачи, если воспользоваться приложением 11, где приведены решения однородных уравнений первой, второй и третьей степеней как при вещественных, так и при комплексных корнях.

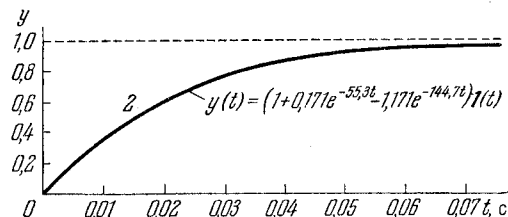
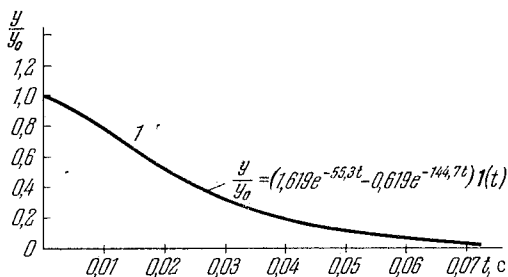


Рис. 98. Переходные процессы к задачам 140 (кривая 1) и 141 (кривая 2).

141. Для системы предыдущей задачи найти закон изменения выходной величины  $y$  при задающем воздействии в виде единичной ступенчатой функции  $1(t)$  и нулевых начальных условиях  $y_0 = y'_0 = 0$ .

Решение. Согласно уравнению (1) предыдущей задачи дифференциальное уравнение системы может быть записано в виде

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y(t) = (b_0 p + b_1) g(t), \quad (1)$$

где  $a_0 = T = 0,005$  с,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = K = 40$  с<sup>-1</sup>,  $b_0 = K\tau = 0,8$ ,  $b_1 = K = 40$  с<sup>-1</sup>.

Прежде всего найдем начальные условия, имеющие место непосредственно после воздействия на систему единичной ступенчатой функции.

Для этого удобно воспользоваться приложением 10. В соответствии с указанным приложением найдем из (1)  $n=2$ ,  $m=1$  и получим

$$y_{+0} = y_0 = 0, \\ y'_{+0} = y'_0 + \frac{b_0}{a_0} 1(t) = 0 + \frac{0,8}{0,005} 1(t) = 160 \cdot 1(t) \text{ с}^{-1}. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) удобно свести к решению однородного уравнения с теми же коэффициентами, перейдя к новой переменной

$$z(t) = y(t) - y_{уст}, \quad (3)$$

где

$$y_{уст} = \frac{b_m}{a_n} 1(t) = \frac{b_1}{a_2} 1(t) = 1(t) \quad (4)$$

— частное решение уравнения (1), т. е. установившееся значение выходной величины  $y$ . Таким образом, вместо (1) получаем уравнение

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) z(t) = 0 \quad (5)$$

при начальных условиях

$$z_{+0} = y_{+0} - y_{уст}, \quad z'_{+0} = y'_{+0}. \quad (6)$$

Эти соотношения получены из уравнения (3).

Решение (5) имеет вид

$$z(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad (7)$$

где, согласно задаче 140,  $\alpha_1 = 55,3$  с<sup>-1</sup>,  $\alpha_2 = 144,7$  с<sup>-1</sup>. Для определения постоянных интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  получаем из (7), согласно (2), (4) и (6), уравнения

$$A_1 + A_2 = z_{+0} = y_{+0} - y_{уст}$$

или

$$A_1 + A_2 = -1(t) \quad (8)$$

и

$$-\alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 = z'_{+0} = y'_{+0}$$

или

$$-\alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 = 160 \cdot 1(t). \quad (9)$$

Из (8), (9) получаем

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{-\alpha_2 + 160}{\alpha_2 - \alpha_1} 1(t) = 0,171 \cdot 1(t), \\ A_2 &= \frac{-\alpha_1 + 160}{\alpha_1 - \alpha_2} 1(t) = -1,171 \cdot 1(t). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Заметим, что решение уравнения (5) можно получить, используя приложение 11.

Из (7) получим, согласно (3), (4) и (10),  $y(t) = z(t) + y_{уст} = (0,171e^{-55,3t} - 1,171e^{-144,7t}) 1(t) + 1(t)$ . Таким образом, при воздействии на систему единичной ступенчатой функции  $1(t)$  выходная величина изменяется по закону

$$y(t) = [1 + 0,171e^{-55,3t} - 1,171e^{-144,7t}] 1(t). \quad (11)$$

По уравнению (11) на рис. 98 построена кривая 2.

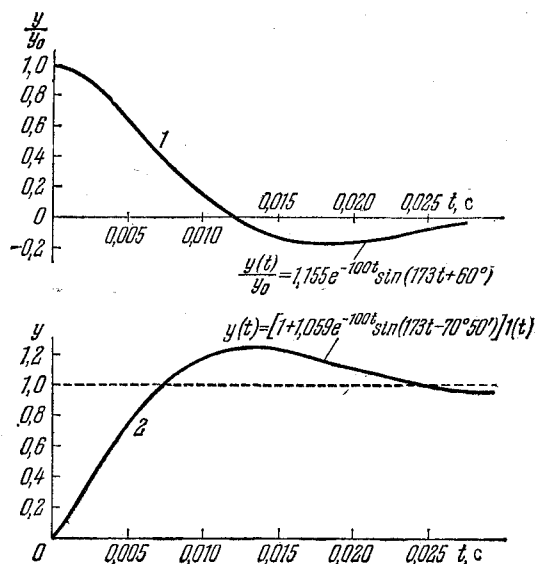


Рис. 99. Переходные процессы к задачам 142 (кривая 1) и 143 (кривая 2).

142. Решить задачу 140 при следующих данных:

$$T = 0,005 \text{ с}, \quad K = 200 \text{ с}^{-1}, \quad K\tau = 0,8.$$

Ответ. При согласовании системы ее закон движения

$$y(t) = 1,155y_0e^{-100t} \sin(173t + 60^\circ)$$

(кривая 1 на рис. 99).

143. Решить задачу 141 при следующих данных:

$$T = 0,005 \text{ с}, \quad K = 200 \text{ с}^{-1}, \quad K\tau = 0,8.$$

*Ответ.* При воздействии на систему единичной ступенчатой функции

$$y(t) = [1 + 1,059e^{-100t} \sin(173t - 70^\circ 50')] \mathbf{1}(t).$$

(кривая 2 на рис. 99).

144. Найти функцию веса  $w(t)$  системы, представленной в задаче 140.

Указание. Возможно использование переходной функции этой системы, полученной в задаче 141.

$$\text{Ответ. } w(t) = (169,2e^{-144,7t} - 9,45e^{-55,3t}) \mathbf{1}(t).$$

145. Найти функцию веса  $w(t)$  системы, представленной в задаче 140, при следующих данных:

$$T = 0,005 \text{ с}, \quad K = 200 \text{ с}^{-1}, \quad K\tau = 0,8.$$

Указание. Возможно использование переходной функции этой системы, полученной в задаче 143.

$$\text{Ответ. } w(t) = 212e^{-100t} \cos(173t - 40^\circ 50') \mathbf{1}(t).$$

146. Найти переходную функцию  $h(t)$  системы, описываемой уравнением

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y(t) = b_0 g(t).$$

Все коэффициенты уравнения положительны:  $b_0 = a_2$ ,  $a_1^2 > 4a_0 a_2$ .

*Ответ.*  $h(t) = \left(1 - \frac{\alpha_2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_2 - \alpha_1}\right) \mathbf{1}(t)$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — абсолютные значения корней характеристического уравнения системы.

147. Найти функцию веса  $w(t)$  системы, данной в предыдущей задаче.

$$\text{Ответ. } w(t) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}) \mathbf{1}(t).$$

148. Дана статическая система автоматического регулирования, описываемая уравнением

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y(t) = b_0 g(t),$$

где  $a_0 = 0,002 \text{ с}^2$ ,  $a_1 = 0,12 \text{ с}$ ,  $a_2 = 5$ ,  $b_0 = 4$ . Найти реакцию системы на ступенчатое воздействие  $g(t) = g_0 \cdot \mathbf{1}(t)$ .

$$\text{Ответ. } y(t) = g_0 (0,8 - e^{-30t} \sin(40t + 53^\circ 10')) \mathbf{1}(t).$$

149. Система автоматического регулирования описывается уравнением

$$(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) y(t) = (b_0 p + b_1) g(t), \quad (1)$$

где  $a_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^2$ ,  $a_1 = 0,105 \text{ с}$ ,  $a_2 = 2,16$ ,  $a_3 = b_1 = 65,3 \text{ с}^{-1}$ ,  $b_0 = 1,16$ .

Найти переходный процесс при включении системы после ее предварительного рассогласования на величину  $x_0$ .

Решение. Характеристическое уравнение, соответствующее (1), имеет при заданных коэффициентах вид

$$0,0005p^3 + 0,105p^2 + 2,16p + 65,3 = 0. \quad (2)$$

Корни уравнения (2) могут быть найдены каким-либо из известных методов. Эти корни равны

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\alpha = -180 \text{ с}^{-1}, \\ p_{2,3} &= -\gamma \pm j\lambda = -10 \pm j25 \text{ с}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Выходная величина системы, характеристическое уравнение которой имеет один вещественный и пару комплексных корней, имеет вид

$$y(t) = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \delta). \quad (4)$$

Начальные условия:

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0. \quad (5)$$

Из (4) находим

$$\left. \begin{aligned} y'(t) &= -\alpha Ae^{-\alpha t} + Be^{-\gamma t} [\lambda \cos(\lambda t + \delta) - \gamma \sin(\lambda t + \delta)], \\ y''(t) &= \alpha^2 Ae^{-\alpha t} + Be^{-\gamma t} [(\gamma^2 - \lambda^2) \sin(\lambda t + \delta) - \\ &\quad - 2\gamma\lambda \cos(\lambda t + \delta)]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из выражений (4)—(6) получаем систему уравнений для определения постоянных интегрирования  $A$ ,  $B$ ,  $\delta$ :

$$\left. \begin{aligned} A + B \sin \delta &= y_0, \\ -\alpha A + B\lambda \cos \delta - \gamma B \sin \delta &= 0, \\ \alpha^2 A + B(\gamma^2 - \lambda^2) \sin \delta - 2\gamma\lambda \cos \delta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

После подстановки  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$ , согласно (3), найдем

$$A = 0,0246y_0, \quad B = 1,13y_0, \quad \delta = 59^\circ 50'. \quad (8)$$

Подстановка (8) в (4) дает решение задачи:

$$y(t) = y_0 [0,0246e^{-180t} + 1,13e^{-10t} \sin(25t + 59^\circ 50')].$$

Этот результат можно получить непосредственно из (3) и (5), если воспользоваться приложением 11.

150. Найти переходный процесс в системе, данной в предыдущей задаче, при задающем воздействии в виде единичной ступенчатой функции  $y(t) = 1(t)$  и нулевых начальных условиях  $y_0 = y'_0 = y''_0 = 0$ .

**Указание.** Начальные условия, имеющие место непосредственно после приложения ступенчатого воздействия, могут быть определены при помощи приложения 10.

*Ответ.*

$$y(t) = [1 + 0,0541e^{-180t} - 1,0541e^{-10t} \sin(25t + 88^\circ 15')] 1(t).$$

**151.** Найти переходный процесс в системе, данной в предыдущей задаче, при линейном задающем воздействии

$$g(t) = at 1(t).$$

**Указание.** Частное решение дифференциального уравнения системы, т. е. вынужденную составляющую переходного процесса, следует искать в виде  $y_b = b + ct$ .

*Ответ.*

$$y(t) = a[t - 0,000302e^{-180t} - 0,0392e^{-10t} \sin(25t - 23^\circ 30') - 0,01532] 1(t).$$

**152.** Система автоматического регулирования описывается уравнением

$$(a_0 p + a_1) y(t) = b_0 p g(t). \quad (1)$$

Найти переходный процесс в системе при помощи интеграла Дюамеля для двух видов задающего воздействия:

$$1) \quad g(t) = at 1(t), \quad (2)$$

$$2) \quad g(t) = b(e^{-qt} - e^{-rt}) 1(t), \quad (3)$$

при нулевых начальных условиях.

Решение для случая 1)  $g(t) = at 1(t)$ .

Интеграл Дюамеля может быть записан в виде

$$y(t) = g(0) h(t) + \int_0^t g'(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (4)$$

где  $h(t)$  — переходная функция системы. Для определения  $h(t)$  найдем реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие, т. е. решим уравнение

$$(a_0 p + a_1) y(t) = b_0 p 1(t) \quad (5)$$

при нулевых начальных условиях. В соответствии с уравнением (5) найдем

$$y_{уст} = 0. \quad (6)$$

Используя приложение 10, найдем также

$$y_{+0} = y_{-0} + \frac{b_0}{a_0} 1(t) = \frac{b_0}{a_0} 1(t). \quad (7)$$

С учетом (6) и (7) решение уравнения (5) имеет вид

$$y(t) = Ae^{-\frac{t}{T}} + y_{уст} = Ae^{-\frac{t}{T}} = 1(t) \frac{b_0}{a_0} e^{-\frac{t}{T}}, \quad (8)$$

где  $T = a_0/a_1$ . Таким образом, переходная функция системы равна

$$h(t) = \frac{b_0}{a_0} e^{-\frac{t}{T}} 1(t). \quad (9)$$

Для линейного задающего воздействия (2) имеем

$$g'(t) = a. \quad (10)$$

Подставим (9) и (10) в (4):

$$y(t) = \int_a^t a \frac{b_0}{a_0} e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau. \quad (11)$$

Интегрируя уравнение (11), находим ответ для случая 1) задачи:

$$y(t) = a \frac{b_0}{a_1} (1 - e^{-\frac{t}{T}}) 1(t).$$

Ответ для случая 2) аperiodического задающего воздействия (3):

$$y(t) = b \frac{b_0}{a_0} \frac{(r - qrT) e^{-rt} - (q - qrT) e^{-qt} + (q - r) e^{-\frac{t}{T}}}{T \left( \frac{1}{T} - q \right) \left( \frac{1}{T} - r \right)}.$$

153. Найти переходный процесс в системе, описываемой уравнением

$$(a_0 p + a_1) y(t) = b_0 g(t),$$

при затухающем колебательном задающем воздействии

$$g(t) = ce^{-rt} \sin \Omega t$$

и нулевых начальных условиях.

Указание. Предлагается применить интеграл Дюамеля.

Ответ.

$$y(t) = c \frac{b_0}{a_1} \frac{\left( \frac{1}{T} - r \right) e^{-rt} \sin \Omega t - \Omega e^{-rt} \cos \Omega t + \Omega e^{-\frac{t}{T}}}{T \left[ \left( \frac{1}{T} - r \right)^2 + \Omega^2 \right]} 1(t),$$

где  $T = \frac{a_0}{a_1}$ .

### § 4.2. Применение изображений Лапласа и Карсона — Хевисайда

154. Передаточная функция разомкнутой системы автоматического регулирования равна

$$W(p) = \frac{K}{p(1+Tp)} = \frac{20}{p(1+0,1p)}. \quad (1)$$

Найти переходную  $h(t)$  и весовую  $\omega(t)$  функции замкнутой системы.

Решение. Передаточная функция замкнутой системы с учетом (1) равна

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{K}{Tp^2+p+K} = \frac{20}{0,1p^2+p+20}. \quad (2)$$

Переходная функция  $h(t)$  представляет собой реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие  $1(t)$ .

Изображение  $Y(p)$  выходной величины  $y(t)$  замкнутой системы при задающем воздействии  $g(t)$ , изображение которого равно  $G(p)$ , представляет собой при нулевых начальных условиях произведение

$$Y(p) = \Phi(p) G(p).$$

Изображение единичной ступенчатой функции по Карсону — Хевисайду равно 1, а по Лапласу  $\frac{1}{p}$ . Поэтому переходная функция  $h(t)$  системы может быть получена как результат обратного преобразования по Карсону — Хевисайду передаточной функции замкнутой системы, т. е. выражения (2), либо как результат обратного преобразования по Лапласу произведения

$$\frac{1}{p} \Phi(p) = \frac{20}{p(0,1p^2+p+20)}. \quad (3)$$

Для перехода от изображения (2) или (3) к искомому оригиналу  $h(t)$  необходимо знаменатель изображения разложить на множители. Для этого приравняем знаменатель (2) нулю:

$$Tp^2 + p + K = 0 \quad \text{или} \quad 0,1p^2 + p + 20 = 0; \quad (4)$$

найдем корни уравнения (4):

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\gamma + j\lambda = -5 + j13,2 \text{ с}^{-1}, \\ p_2 &= -\gamma - j\lambda = -5 - j13,2 \text{ с}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Далее можно записать знаменатель выражения (2) в виде

$$\begin{aligned} 0,1p^2 + p + 20 &= 0,1(p - p_1)(p - p_2) = \\ &= 0,1[p - (-\gamma + j\lambda)][p - (-\gamma - j\lambda)] = \\ &= 0,1[(p + \gamma)^2 + \lambda^2] = 0,1[(p + 5)^2 + 13,2^2]. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь вместо (3) получим

$$\frac{1}{p} \Phi(p) = \frac{20}{0,1p[(p+5)^2 + 13,2^2]} = \frac{200}{p[(p+5)^2 + 13,2^2]}. \quad (7)$$

Из таблиц изображений функций по Лапласу (см. приложение 1) подбираем формулу, соответствующую выражению (7):

$$\frac{1}{p[(p+\gamma)^2 + \lambda^2]} = \frac{1}{\gamma^2 + \lambda^2} + \frac{1}{\lambda \sqrt{\gamma^2 + \lambda^2}} e^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \psi), \quad (8)$$

$$\psi = \arctg \frac{\lambda}{\gamma}.$$

При подборе формул следует иметь в виду, что в имеющихся справочниках эти формулы располагаются в порядке возрастания степени полинома от  $p$  в знаменателе изображения.

Для случая вещественных и для случая комплексных корней всегда предусматриваются отдельные формулы. Так, если бы корни знаменателя изображения (2) оказались вещественными, следовало бы вместо формулы (8) взять табличную формулу

$$\frac{1}{p(p+\alpha)(p+\beta)} = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta} \left( \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} - \frac{1}{\beta} e^{-\beta t} \right),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — абсолютные значения корней.

Сопоставляя (7) и (8), получаем оригинал выражения (7), т. е. переходную функцию системы

$$h(t) = \Phi(p) = \left[ \frac{200}{5^2 + 13,2^2} - \frac{200}{13,2 \sqrt{5^2 + 13,2^2}} e^{-5t} \sin(13,2t + 69^\circ 15') \right] 1(t),$$

или

$$h(t) = [1 - 1,068e^{-5t} \sin(13,2t + 69^\circ 15')] 1(t). \quad (9)$$

**Замечание.** Следует обратить внимание на вычисление угла  $\psi$  по формуле (8), так как знаки в формулах для  $\psi$ , типичных для подобных выражений, записываются своеобразно. Знак числителя в выражении для тангенса  $\psi$  является знаком синуса  $\psi$ , а знак знаменателя является знаком косинуса  $\psi$ . Таким образом, формула для  $\psi$  содержит указание на квадрант, в котором находится этот угол. Это позволяет освободиться от двойственности в ответе для  $\psi$ , обусловленной совпадением тангенсов двух углов, отличающихся на  $\pi$ .

В рассматриваемом примере, где  $\operatorname{tg} \psi = -\frac{13,2}{5} = -2,64$ , из двух возможных значений  $\psi$ , равных  $-69^\circ 15'$  и  $+110^\circ 45'$ , следует взять второе число, так как выражение  $\psi = \arctg \frac{\lambda}{-\gamma} = \arctg \frac{13,2}{-5}$

указывает, что угол находится во втором квадранте. В результате из формулы (8) следует

$$\sin(\lambda t - \psi) = \sin(13,2t - 110^\circ 45') = -\sin(13,2t + 69^\circ 15'),$$

что и учтено при записи выражения (9).

Функция веса  $w(t)$  системы может быть найдена как производная переходной функции (9) по времени. Функция веса может быть найдена и непосредственно по передаточной функции (2), как ее обратное преобразование по Лапласу:

$$w(t) = L^{-1}[\Phi(p)] = L^{-1}\left[\frac{20}{0,1p^2 + p + 20}\right] = L^{-1}\left[\frac{200}{(p+5)^2 + 13,2^2}\right], \quad (10)$$

либо как обратное преобразование по Карсону — Хевисайду произведения

$$p\Phi(p) = \frac{20p}{0,1p^2 + p + 20} = \frac{200p}{(p+5)^2 + 13,2^2}. \quad (11)$$

Подбираем из таблиц изображений функций по Лапласу формулу, соответствующую (10):

$$\frac{1}{(p+\gamma)^2 + \lambda^2} = \frac{1}{\lambda} e^{-\gamma t} \sin \lambda t. \quad (12)$$

Согласно (7), (10) и (12) получаем функцию веса системы

$$w(t) = 15,15e^{-5t} \sin 13,2t \quad (13)$$

155. Для замкнутой системы автоматического регулирования, данной в предыдущей задаче, найти закон изменения выходной величины  $y(t)$  при отсутствии задающего воздействия, начальном рассогласовании  $y(0) = y_0$  и нулевой начальной скорости.

Решение. Согласно уравнению (2) предыдущей задачи дифференциальное уравнение замкнутой системы имеет вид

$$(Tp^2 + p + K)y(t) = Kg(t), \quad (1)$$

где  $g(t)$  — задающее воздействие. Для получения из (1) изображения выходной величины  $y(t)$  необходимо использовать операторные выражения для производных с учетом начальных условий. Запишем эти выражения по Лапласу, полагая, что  $Y(p)$  есть изображение функции  $y(t)$

$$\left. \begin{aligned} py(t) = y'(t) &= pY(p) - y(0), \\ p^2y(t) = y''(t) &= p^2Y(p) - py(0) - y'(0). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь  $y(0)$  и  $y'(0)$  — начальные значения выходной величины и ее производной. Из (1) и (2), учитывая, что  $g(t) = 0$ , получаем

$$Tp^2Y(p) - Tpy(0) - Ty'(0) + pY(p) - y(0) + KY(p) = 0,$$

или

$$Y(p) = \frac{(Tp+1)y(0) + Ty'(0)}{Tp^2 + p + K}. \quad (3)$$

Подставляя значения начальных условий  $y(0) = y_0$  и  $y'(0) = 0$  и коэффициентов уравнения  $T = 0,1$  с и  $K = 20$  с<sup>-1</sup>, получим

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{(0,1p+1)y_0}{0,1p^2+p+20} = \frac{(0,1p+1)y_0}{0,1[(p+5)^2+13,2^2]} = \\ &= \frac{(p+10)y_0}{(p+5)^2+13,2^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подходящая табличная формула (по Лапласу)

$$\begin{aligned} \frac{(p+\delta)}{(p+\gamma)^2+\lambda^2} &= \frac{1}{\lambda} \sqrt{(\delta-\gamma)^2+\lambda^2} e^{-\gamma t} (\lambda t + \psi), \\ \psi &= \arctg \frac{\lambda}{\delta-\gamma}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из изображения (4) на основании формулы (5) получим

$$y(t) = y_0 \frac{\sqrt{(10-5)^2+13,2^2}}{13,2} e^{-5t} \sin(13,2t + 69^\circ 15'),$$

или

$$y(t) = y_0 1,068 e^{-5t} \sin(13,2t + 69^\circ 15').$$

**З а м е ч а н и я.** Применение табличных формул типа формулы (5) не является единственным способом перехода от изображения функции к ее оригиналу. Возможно, например, использование теоремы разложения.

До перехода к оригиналу  $y(t)$  можно произвести проверку правильности изображения  $Y(p)$  по некоторым признакам. Возможно, в частности, проверка изображения по его размерности. Изображение по Карсону — Хевисайду какой-либо функции, например,  $y(t)$ ,

$$Y(p) = p \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt, \quad (6)$$

имеет ту же размерность, что и оригинал  $y(t)$ . Это видно, например, из того, что изображение ступенчатой функции по Карсону — Хевисайду равно самой функции, т. е.  $Al(t) \equiv A$  при  $t \geq 0$ . Из выражения (6) следует, что аргумент  $p$  изображения имеет размерность *время*<sup>-1</sup>. Размерность изображения функции по Лапласу

$$Y(p) = L[y(t)] = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt \quad (7)$$

равна размерности оригинала, умноженной на время, т. е. отличается от размерности изображения (6) по Карсону — Хевисайду множителем *время*.

Применим эти сведения о размерностях к проверке изображения по Лапласу (3) координаты  $y$  исследуемой системы. Правая часть выражения (3) должна иметь размерность произведения *координата · время*. Учитывая, что размерность  $p$  — это *время*<sup>-1</sup>, находим, что все слагаемые числителя выражения (3) имеют размерность координаты, а знаменателя — *время*<sup>-1</sup>. Следовательно, проверка по размерности дает положительный результат.

Перейдем к другим видам проверки изображения.

Непосредственно по выражению (3) можно найти начальное значение оригинала

$$y(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pY(p). \quad (8)$$

Применяя (8) к (3), получаем  $y(0) = \frac{T}{T} y(0)$ .

По выражению (3) можно найти также предел оригинала  $y(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , если этот предел существует, по формуле

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p). \quad (9)$$

Признаком наличия указанного предела оригинала является расположение всех полюсов изображения  $Y(p)$  только в левой полуплоскости комплексного переменного  $p$ , т. е. вещественные части всех корней знаменателя функции  $Y(p)$  должны быть отрицательными. Для выражения (3) это условие выполняется. Применяя (9) к (3), находим  $y(\infty) = \frac{0}{K} = 0$ , что заведомо правильно, так как из физических соображений следует, что в рассматриваемой задаче установившаяся ошибка равна нулю.

*Указанные виды проверки полученного изображения дают лишь необходимые условия правильности результата; однако практически эти условия часто являются и достаточными.*

**156.** Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{K}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)} = \frac{3}{(1+0,2p)(1+0,01p)}.$$

Найти переходную функцию замкнутой системы.

*Ответ.*

$$h(t) = (0,750 + 0,341e^{-80t} - 1,091e^{-25t}) \mathbf{1}(t).$$

**157.** Для системы предыдущей задачи найти закон движения при отсутствии задающего воздействия при начальных условиях  $y(0) = y_0$  и  $y'(0) = y'_0$ .

Указание. Решение является суммой двух слагаемых, одно из которых пропорционально  $y_0$ , а другое —  $y'_0$ ; эти слагаемые удобно найти отдельно и результаты сложить.

Ответ.

$$y(t) = y_0 [1,455e^{-25t} - 0,455e^{-80t}] + 0,0182y'_0 [e^{-25t} - e^{-80t}].$$

158. Для замкнутой следящей системы с передаточной функцией (см. задачу 154)

$$\Phi(p) = \frac{20}{0,1p^2 + p + 20}$$

найти закон движения при задающем воздействии в виде ступенчатой функции  $g_0 \mathbf{1}(t)$  и при начальных условиях  $y(0) = y_0$  и  $y'(0) = 0$ .

Ответ.

$$y(t) = g_0 [1 - 1,068e^{-5t} \sin(13,2t + 69^\circ 15')] + \\ + y_0 1,068e^{-5t} \sin(13,2t + 69^\circ 15').$$

159. Для следящей системы, которая в разомкнутом состоянии имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{K}{p(1+Tp)} = \frac{24}{p(1+0,0067p)},$$

найти выходную величину  $y(t)$  при задающем воздействии в виде ступенчатой функции  $g(t) = g_0 \mathbf{1}(t)$  и при начальных условиях  $y(0) = y_0$  и  $y'(0) = y'_0$ .

Ответ.

$$y(t) = g_0 [1 - 1,333e^{-30t} + 0,333e^{-120t}] + \\ + y_0 [1,333e^{-30t} - 0,333e^{-120t}] + 0,0111y'_0 [e^{-30t} - e^{-120t}].$$

160. Найти закон изменения выходной величины  $y(t)$  замкнутой следящей системы при ступенчатом задающем воздействии  $\mathbf{1}(t)$  и нулевых начальных условиях. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_3p)} = \frac{500(1+0,03p)}{p(1+0,1p)(1+0,006p)}. \quad (1)$$

Решение. Находим передаточную функцию замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{K(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_3p) + K(1+T_2p)} = \\ = \frac{15p+500}{0,0006p^3 + 0,106p^2 + 16p + 500}. \quad (2)$$

Изображение по Карсону — Хевисайду искомой реакции системы на ступенчатое воздействие имеет вид

$$X(p) = \Phi(p). \quad (3)$$

Далее, независимо от предполагаемого способа перехода от (3) к оригиналу, необходимо найти корни знаменателя изображения (2), т. е. корни уравнения

$$0,0006p^3 + 0,106p^2 + 16p + 500 = 0. \quad (4)$$

В результате расчета, который здесь не приводится, получаем следующие корни уравнения (4):

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -39,2 \text{ с}^{-1}, \\ p_2 &= (-68,8 + j128,5) \text{ с}^{-1}, \\ p_3 &= (-68,8 - j128,5) \text{ с}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если теперь знаменатель изображения (2) представить, с учетом (5), в виде произведения

$$\begin{aligned} 0,0006p^3 + 0,106p^2 + 16p + 500 &= \\ &= 0,0006(p + 39,2)[(p + 68,8)^2 + 128,5^2], \end{aligned}$$

то перейти к оригиналу можно при помощи таблиц изображений.

Здесь используем другой способ перехода к оригиналу — при помощи теоремы разложения. Пусть искомая функция  $y(t)$  имеет следующее изображение по Карсону — Хевисайду:

$$Y(p) = \frac{B(p)}{D(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}, \quad (6)$$

причем  $m \leq n$  и уравнение  $D(p) = 0$  не имеет нулевых и кратных корней. Тогда, согласно теореме разложения, оригинал  $y(t)$  может быть найден по формуле

$$y(t) = \frac{B(0)}{D(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{p_k D'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (7)$$

где  $p_1, \dots, p_k, \dots, p_n$  — корни уравнения, а  $D'(p) = \frac{d}{dp} D(p)$ . В соответствии с (2) и (3) запишем

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{15p + 500}{0,0006p^3 + 0,106p^2 + 16p + 500} = \\ &= \frac{25\,000(p + 33,3)}{p^3 + 176,6p^2 + 26\,700p + 833\,000}. \end{aligned} \quad (8)$$

Сопоставляя (8) и (6), находим

$$\left. \begin{aligned} B(p) &= 25\,000(p + 33,3), & B(0) &= 833\,000, \\ D(p) &= p^3 + 176,6p^2 + 26\,700p + 833\,000, \\ D(0) &= 833\,000, & D'(p) &= 3p^2 + 353p + 26\,700. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Согласно теореме разложения (7) получим

$$y(t) = 1 + \sum_{k=1}^3 \frac{25\,000(p_k + 33,3)}{p_k(3p_k^2 + 353p_k + 26\,700)} e^{p_k t}. \quad (10)$$

Вычислим отдельно слагаемые, находящиеся в (10), под знаком суммы. При  $p_1 = -39,2 \text{ с}^{-1}$  получим

$$\frac{B(p_1)}{p_1 D'(p_1)} e^{p_1 t} = \frac{-147\,500}{-39,2 \cdot 17\,430} e^{-39,2t} = 0,216 e^{-39,2t}. \quad (11)$$

При  $p_2 = (-68,8 + j128,5) \text{ с}^{-1} = 146 e^{j118^\circ 10'} \text{ с}^{-1}$  получим

$$\begin{aligned} \frac{B(p_2)}{p_2 D'(p_2)} e^{p_2 t} &= \frac{2,5 \cdot 10^4 \cdot 133,5 e^{j105^\circ 25'}}{146 e^{j118^\circ 10'} \cdot 3,4 \cdot 10^4 e^{-j166^\circ 53'}} e^{(-68,8 + j128,5)t} = \\ &= 0,672 e^{j(154^\circ 8')} e^{-68,8t} e^{j128,5t} = \\ &= 0,672 e^{j(128,5t + 154^\circ 8')} e^{-68,8t}. \end{aligned} \quad (12)$$

При  $p_3 = (-68,8 - j128,5) \text{ с}^{-1} = 146 e^{j118^\circ 10'} \text{ с}^{-1}$  получим

$$\frac{B(p_3)}{p_3 D'(p_3)} e^{p_3 t} = 0,672 e^{-j(128,5t + 154^\circ 8')} e^{-68,8t}. \quad (13)$$

Выражение (13) записано без расчета, непосредственно по виду выражения (12), так как корни  $p_2$  и  $p_3$  сопряженные, а коэффициенты в выражении (10) чисто вещественные. При этих условиях комплексные выражения (12) и (13) заведомо являются сопряженными.

Если бы все корни уравнения (4) были вещественными, то выражения (11)–(13) не содержали бы комплексных чисел и расчет можно было бы закончить подстановкой этих выражений в формулу (10).

В данном случае выражения (12) и (13) являются комплексными, поэтому их следует преобразовать. Применяя к сумме сопряженных выражений (12) и (13) формулу Эйлера

$$\frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} = \cos \alpha,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{B(p_2)}{p_2 D'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{B(p_3)}{p_3 D'(p_3)} e^{p_3 t} &= \\ &= 0,672 e^{-68,8t} [e^{j(128,5t + 154^\circ 8')} + e^{-j(128,5t + 154^\circ 8')}] = \\ &= 1,345 e^{-68,8t} \cos(128,5t + 154^\circ 8') = \\ &= -1,345 e^{-68,8t} \cos(128,5t - 25^\circ 52'). \end{aligned} \quad (14)$$

Подстановка функций (11) и (14) в формулу (10) дает реакцию системы на ступенчатое воздействие  $1(t)$ :

$$y(t) = [1 + 0,216 e^{-39,2t} - 1,345 e^{-68,8t} \cos(128,5t - 25^\circ 52')] 1(t).$$

Отдельные слагаемые этого уравнения и кривая  $y(t)$  построены на рис. 100.

161. Для замкнутой следящей системы, приведенной в предыдущей задаче, найти в общем виде изображение  $Y(p)$  по Лапласу

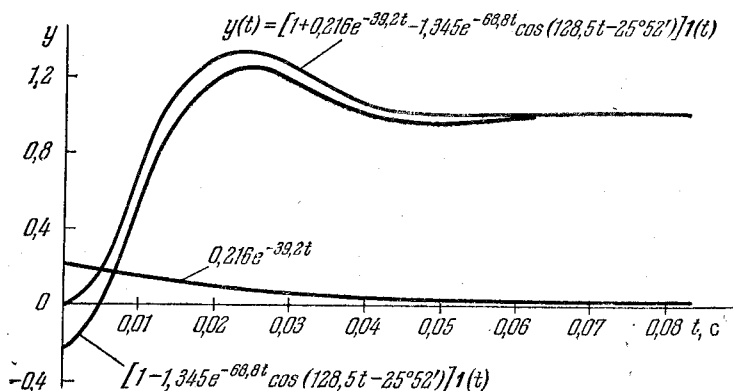


Рис. 100. Реакция на ступенчатое воздействие к задаче 160.

и Карсону — Хевисайду выходной величины  $y(t)$  через изображение  $G(p)$  задающего воздействия при ненулевых начальных условиях  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y'_0$  и  $y''(0) = y''_0$ .

Ответ. Изображение по Лапласу:

$$Y(p) = L[y(t)] = \\ = [(15p + 500)G(p) + (6 \cdot 10^{-4}p^2 + 0,106p + 16)y_0 + \\ + (6 \cdot 10^{-4}p + 0,106)y'_0 + 6 \cdot 10^{-4}y''_0] \times \\ \times [6 \cdot 10^{-4}p^3 + 0,106p^2 + 16p + 500]^{-1}.$$

Изображение по Карсону — Хевисайду:

$$Y(p) = [(15p + 500)G(p) + p(6 \cdot 10^{-4}p^2 + 0,106p^2 + 16)y_0 + \\ + p(6 \cdot 10^{-4}p + 0,106)y'_0 + 6 \cdot 10^{-4}py''_0] \times \\ \times [6 \cdot 10^{-4}p^3 + 0,106p^2 + 16p + 500]^{-1}.$$

162. Найти закон движения системы, приведенной в задачах 160 и 161, при отсутствии задающего воздействия и начальных условиях  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = 0$  и  $y''(0) = 0$ .

Ответ.

$$y(t) = y_0 [1,221e^{-39,2t} + 0,335e^{-68,8t} \sin(128,5t - 41^\circ 45')].$$

163. Следящая система, приведенная в задаче 160, имеет в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)} = \frac{500(1 + 0,03p)}{p(1 + 0,1p)(1 + 0,006p)}.$$

Найти выходную величину  $y(t)$  замкнутой следящей системы при задающем воздействии в виде импульсной функции  $A\delta(t)$  при нулевых начальных условиях;  $\delta(t)$  — единичная импульсная функция. Найти функцию веса  $w(t)$  системы.

*Ответ.*

$$y(t) = A [-8,46e^{-39,2t} + 196,4e^{-68,8t} \sin(128,5t + 2^\circ 30')];$$

$$w(t) = \frac{1}{A} y(t).$$

**164.** Для замкнутой следящей системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии равна

$$W(p) = \frac{K}{p(1+Tp)} = \frac{24}{p(1+0,0067p)},$$

найти выходную величину  $y(t)$  при линейном задающем воздействии  $g(t) = at1(t)$  и нулевых начальных условиях.

*Решение.* Передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{3600}{p^2 + 150p + 3600}. \quad (1)$$

Изображение задающего воздействия по Лапласу

$$G(p) = \frac{a}{p^2}. \quad (2)$$

Согласно (1) и (2) изображение выходной величины по Лапласу равно

$$Y(p) = \Phi(p) G(p) = \frac{3600a}{p^2(p^2 + 150p + 3600)}. \quad (3)$$

Для отыскания оригинала выражения (3) можно использовать теорему свертывания, согласно которой

$$y(t) = \int_0^t x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau, \quad (4)$$

если

$$Y(p) = X_1(p) X_2(p) \quad (5)$$

и

$$x_1(t) \rightleftharpoons X_1(p), \quad (6)$$

$$x_2(t) \rightleftharpoons X_2(p). \quad (7)$$

В соответствии с (5) изображение (3) следует разбить на два сомножителя с таким расчетом, чтобы произведение их оригиналов легко интегрировалось. Выберем эти сомножители следующим

образом:

$$Y(p) = \frac{3600}{p(p^2 + 150p + 3600)} \cdot \frac{a}{p},$$

т. е.

$$X_1(p) = \frac{3600}{p(p^2 + 150p + 3600)} = \frac{3600}{p(p + 30)(p + 120)}, \quad (8)$$

$$X_2 p = \frac{a}{p}. \quad (9)$$

Знаменатель выражения (8) разложен на множители обычным путем. Для выражений (8) и (9) подбираем подходящие формулы из таблицы изображений по Лапласу

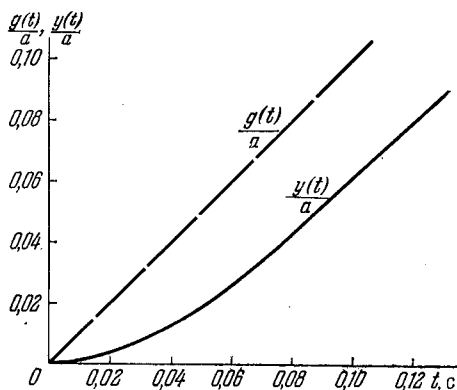


Рис. 101. Реакция на линейное воздействие к задаче 164.

$$\frac{1}{p(p + \alpha)(p + \beta)} = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} - \frac{1}{\beta}e^{-\beta t}}{\alpha - \beta}, \quad (10)$$

$$\frac{1}{p} = 1(t). \quad (11)$$

Теперь из (6) — (11) найдем

$$x_1(t) = (1 - 1,333e^{-30t} + 0,333e^{-120t}) 1(t), \quad (12)$$

$$x_2(t) = a 1(t). \quad (13)$$

Подставим оригиналы (12) и (13) в формулу (4) теоремы свертывания:

$$y(t) = \int_0^t [1 - 1,333e^{-30\tau} + 0,333e^{-120\tau}] [a 1(t - \tau)] d\tau. \quad (14)$$

Интегрируем (14):

$$y(t) = a[\tau + 0,0445e^{-30\tau} - 0,00277e^{-120\tau}]_0^t.$$

Отсюда искомое решение задачи:

$$y(t) = a(t + 0,0445e^{-30t} - 0,00277e^{-120t} - 0,0417) 1(t).$$

Задающее воздействие  $g(t)$  и выходная величина  $y(t)$  построены на рис. 101.

165. Передаточная функция разомкнутой следящей системы равна

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + Tp)}, \quad \text{где } K = 24 \text{ с}^{-1}, \quad T = 0,0067 \text{ с},$$

Найти ошибку  $x(t) = g(t) - y(t)$  замкнутой следящей системы при нулевых начальных условиях при ступенчатом воздействии  $g(t) = g_0 1(t)$ .

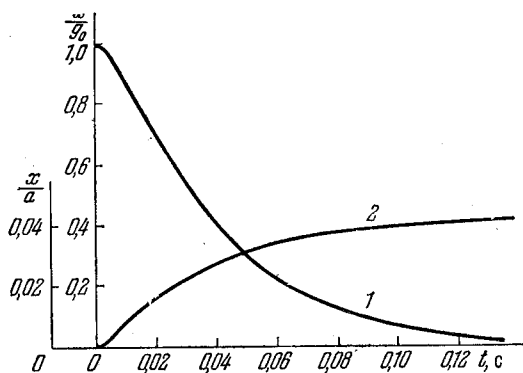


Рис. 102. Ошибка системы с астатизмом первого порядка при ступенчатом (1) и линейном (2) воздействиях. Правая шкала оси ординат относится к кривой 1, левая — к кривой 2.

**У к а з а н и е.** Передаточная функция следящей системы относительно ошибки равна

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1 + W(p)}.$$

*Ответ.*  $x(t) = g_0 (1,333e^{-30t} - 0,333e^{-120t}) 1(t)$  (рис. 102, кривая 1).

166. Решить предыдущую задачу при задающем воздействии, нарастающем по линейному закону  $g(t) = at 1(t)$ .

*Ответ.*  $x(t) = a (0,0417 - 0,0445e^{-30t} - 0,00277e^{-120t}) 1(t)$  (рис. 102, кривая 2).

167. Следящая система, схема которой дана на рис. 103, имеет в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) =$$

$$= \frac{k_1}{1 + Tp} \frac{k_2}{p}.$$

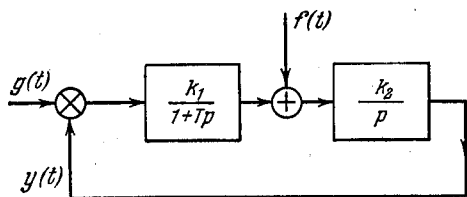


Рис. 103. Структурная схема к задачам 167 и 168.

Система состоит из двух звеньев, между которыми прикладывается возмущение  $f(t)$ . Найти выходную величину  $y(t)$  для ступенчатого возмущения  $f(t) = f_0 1(t)$  при отсутствии задающего воздействия  $g(t)$  и нулевых начальных условиях;  $K = k_1 k_2 = 24 \text{ с}^{-1}$ ,  $T = 6,7 \text{ мс}$ ,  $k_2 = 0,01 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$ . Последний коэффициент записан в предположении, что координаты  $y(t)$  и  $g(t)$  безразмерные, а входные вели-

чины второго звена, в том числе возмущение  $f(t)$ , имеют размерность напряжения.

*Ответ.*

$$y(t) = 10^{-4} f_0 [4,17 - 4,45e^{-30t} + 0,278e^{-120t}] 1(t).$$

168. Следящая система состоит из двух звеньев, показанных на рис. 103,

$$W(p) = \frac{k_1 k_2}{p(1+Tp)} = \frac{100}{p(1+0,025p)}.$$

На вход второго звена действует возмущение в виде импульсной функции  $f(t) = A\delta(t)$ ; задающее воздействие  $g(t)$  отсутствует, начальные условия нулевые. Найти выходную величину  $y(t)$  замкнутой следящей системы.

*Ответ.*

$$y(t) = k_2 A 1,053e^{-20t} \sin(60t - 71^\circ 34') 1(t).$$

169. Передаточная функция разомкнутой следящей системы равна

$$W(p) = \frac{K(1+Tp)}{p^2},$$

где  $K = 400 \text{ с}^{-2}$ ,  $T = 0,01 \text{ с}$ . Найти выходную величину  $y(t)$  замкнутой системы при ступенчатом задающем воздействии  $g(t) = g_0 1(t)$  и нулевых начальных условиях.

*Ответ.*

$$y(t) = g_0 [1 + 1,053e^{-20t} \sin(60t - 71^\circ 34')] 1(t).$$

170. Даны две следящие системы, имеющие в разомкнутом состоянии передаточные функции:

$$1) W_1(p) = \frac{K_1}{p(1+T_1p)},$$

$$2) W_2(p) = \frac{K_2(1+T_2p)}{p^2},$$

где  $K_1 = 100 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_1 = 25 \text{ мс}$ ,  $K_2 = 4000 \text{ с}^{-2}$ ,  $T_2 = 10 \text{ мс}$ . Найти выходные величины  $y(t)$  и ошибки  $x(t) = g(t) - y(t)$  замкнутых следящих систем при линейном управляющем воздействии,  $g(t) = at 1(t)$ , и нулевых начальных условиях. Построить на одном графике кривые ошибок для этих систем.

*Ответ.*

$$y_1(t) = a[t - 0,01 - 0,0167e^{-20t} \sin(60t - 36^\circ 50')] 1(t),$$

$$x_1(t) = a[0,01 + 0,0167e^{-20t} \sin(60t - 36^\circ 50')] 1(t),$$

$$y_2(t) = a[t - 0,0167e^{-20t} \sin 60t] 1(t),$$

$$x_2(t) = a 0,0167e^{-20t} \sin 60t 1(t).$$

Кривые  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  построены на рис. 104.

171. Замкнутая система автоматического регулирования описывается уравнением

$$(0,1479p^4 + 3,7p^3 + 15,61p^2 + 17,9p + 20)y(t) = (17,9p + 20)g(t).$$

Найти выходную величину  $y(t)$  при ступенчатом задающем

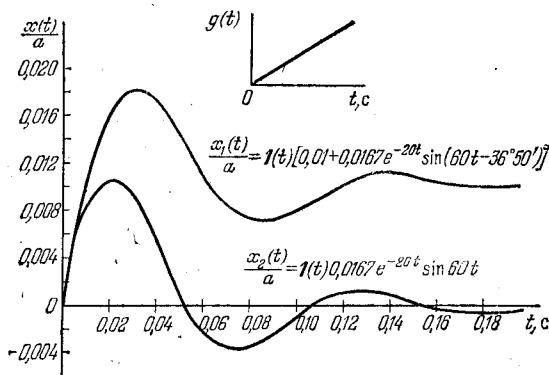


Рис. 104. Ошибки систем с астатизмом первого порядка  $x_1(t)$  и второго порядка  $x_2(t)$  при воздействии  $g(t) = at \cdot 1(t)$ .

воздействию  $g(t) = g_0 1(t)$  и нулевых начальных условиях.

Ответ.

$$y(t) = g_0 [1 + 1,456e^{-0,5t} \sin(1,2t - 72^\circ) + 0,398e^{-4t} - 0,019e^{-20t}] 1(t).$$

172. Найти выходную величину  $y(t)$  системы, данной в предыдущей задаче, при отсутствии задающего воздействия и начальных условиях  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y'_0$ ,  $y''(0) = y''_0$  и  $y'''(0) = y'''_0$ .

Ответ.

$$y(t) = y_0 [1,202e^{-0,5t} (1,2t - 45^\circ) + 0,155e^{-4t} - 0,005e^{-20t}] + \\ + y'_0 [1,112e^{-0,5t} \sin(1,2t - 4^\circ 50') + 0,099e^{-4t} - 0,005e^{-20t}] + \\ + y''_0 [0,283e^{-0,5t} \sin(1,2t - 19^\circ 30') + 0,096e^{-4t} - 0,002e^{-20t}] + \\ + y'''_0 [0,288e^{-0,5t} \sin(1,2t - 22^\circ 15') + 0,114e^{-4t} - 0,004e^{-20t}].$$

173. Силовой гироскопический стабилизатор имеет электрокинематическую схему, представленную на рис. 50, а и структурную схему — на рис. 51, а;  $J = 7,12 \cdot 10^5 \text{ г} \cdot \text{см}^2 = 726 \text{ гс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$ ,  $B = 7120 \text{ г} \cdot \text{см}^2 = 7,26 \text{ гс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$ ;  $H = 71,2 \cdot 10^5 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^{-1} = 7260 \text{ гс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}$ ;  $sn^2 = 78,5 \cdot 10^5 \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1} = 8000 \text{ гс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}$ ;  $K_M = 2500 \text{ Н} \cdot \text{см} = 25 \cdot 10^4 \text{ гс} \cdot \text{см}$ ;  $W_K(p) = (1 - T_1 p)/(1 + T_2 p)$ ,  $T_1 = 0,01 \text{ с}$ ,  $T_2 = 0,04 \text{ с}$ .

Построить кривые изменения пускового момента  $M_n$  и момента гироскопической реакции  $M_r$  при возмущающем моменте  $M_b = M_b^0 \cdot 1(t)$  и нулевых начальных условиях.

Указание. Возможно использование передаточных функций задачи 51.

Ответ.

$$M_n = M_B^0 \frac{K(1 - T_1 p)}{K + (1 - K T_1) p + (T_2 + 2\xi T) p^2 + (T^2 + 2\xi T T_2) p^3 + T^2 T_2 p^4},$$

$$M_r = M_B^0 \frac{p + T_2 p^2}{K + (1 - K T_1) p + (T_2 + 2\xi T) p^2 + (T^2 + 2\xi T T_2) p^3 + T^2 T_2 p^4},$$

где  $T = \sqrt{JB}/H$ ,  $2\xi = sn^2 \sqrt{B}/H \sqrt{J}$ . Кривые  $M_n(t)/M_B^0$  и  $M_r(t)/M_B^0$  построены на рис. 105.

174. Найти переходную  $h(t)$  и весовую  $w(t)$  функции системы, передаточная функция которой равна

$$\Phi(p) = \frac{K}{(p + \alpha)^n},$$

где  $n$  — целое положительное число.

Указание. Следует воспользоваться теоремой свертывания.

Ответ.

$$h(t) = K \left[ \frac{1}{\alpha^n} - e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\alpha^{n-k} k!} \right],$$

$$w(t) = \frac{K}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\alpha t}.$$

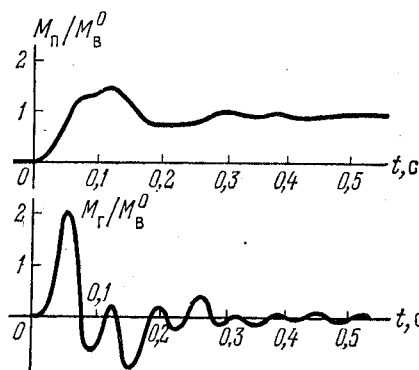


Рис. 105. Пусковой момент двигателя и момент гироскопической реакции в гиросtabilизаторе при ступенчатом возмущающем моменте.

### § 4.3. Приближенные методы

А. Использование сопрягающих частот л. а. х. [66].

175. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)}, \quad (1)$$

где  $K = 500 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_1 = 0,1 \text{ с}$ ,  $T_2 = 0,025 \text{ с}$ ,  $T_3 = 0,0025 \text{ с}$ . По-

строить приближенную кривую ошибки  $x(t) = g(t) - y(t)$  системы при единичном ступенчатом воздействии  $g(t) = 1(t)$  и нулевых начальных условиях. Построение произвести по сопрягающим частотам логарифмической амплитудной частотной характеристики.

Решение. Л. а. х. системы построена на рис. 106, а. Эта л. а. х. удовлетворяет условию, состоящему в том, что протяженность ее участка, пересекающего ось частот с наклоном  $-20 \text{ дБ/дек}$ , должна составлять не менее одной декады; поэтому построение искомой кривой по сопрягающим частотам л. а. х.

является возможным. Определяем частоту среза л. а. х. непосредственно по л. а. х. или по формуле  $\omega_c = KT_2/T_1$ , следующей из рисунка;  $\omega_c = 125 \text{ с}^{-1}$ .

В соответствии с методом использования сопрягающих частот л. а. х. отбрасываем в л. а. х. всю ее часть, лежащую правее

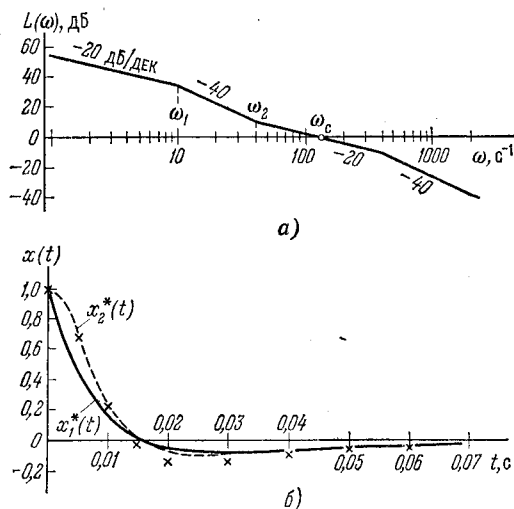


Рис. 106 Л. а. х. и переходный процесс к задаче 175.

частоты среза, и заменяем ее горизонтальным участком, совпадающим с осью частот. Этой новой преобразованной л. а. х. соответствует передаточная функция

$$W^*(p) = \frac{K(1+T_2p)\left(1+\frac{1}{\omega_c}p\right)}{p(1+T_1p)}, \quad (2)$$

или

$$\begin{aligned} W^*(p) &= \frac{KT_2 \frac{1}{\omega_c} \left(\frac{1}{T_2} + p\right) (\omega_c + p)}{T_1 p \left(\frac{1}{T_1} + p\right)} = \\ &= \frac{(p + \omega_2)(p + \omega_c)}{p(p + \omega_1)} = \frac{(p + 40)(p + 125)}{p(p + 10)}, \end{aligned} \quad (2')$$

где  $\omega_1 = 1/T_1$ ,  $\omega_2 = 1/T_2$ . Формулам (2) и (2') соответствует преобразованная передаточная функция системы относительно ошибки

$$\Phi^*(p) = \frac{1}{W^*(p)} = \frac{p(p + 10)}{(p + 40)(p + 125)}. \quad (3)$$

Учитывая изображение Лапласа  $G(p) = 1/p$  для воздействия  $g(t) = 1(t)$ , находим изображение Лапласа для первого приближения  $x_1^*(t)$  функции  $x(t)$

$$X(p) = \Phi^*(p) G(p) = \frac{p+10}{(p+40)(p+125)}. \quad (4)$$

Из таблиц изображений по Лапласу находим подходящую формулу:

$$\frac{p+\delta}{(p+\alpha)(p+\beta)} = \frac{(\delta-\alpha)e^{-\alpha t} - (\delta-\beta)e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}. \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) дают ответ для первого приближения ошибки системы:

$$x_1^*(t) = 1,353e^{-12t} - 0,353e^{-40t}. \quad (6)$$

Эта функция построена сплошной линией на рис. 106, б.

Для получения второго приближения  $x_2^*(t)$  искомого решения следует ординаты кривой  $x_1^*(t)$  умножить на поправочный коэффициент  $\rho$  в диапазоне  $T_3 < t < T_2$ , т. е.  $0,0025 \text{ с} < t < 0,025 \text{ с}$ . Этот коэффициент определяется из формулы

$$\rho = \left| \frac{W^*(p)}{1+W(p)} \right|_{p=j\omega_c}$$

или, согласно (1) и (2),

$$\begin{aligned} \rho &= \left| \frac{\frac{(p+40)(p+125)}{p(p+10)}}{1 + \frac{500(1+0,025p)}{p(1+0,1p)(1+0,0025p)}} \right|_{p=j125} = \\ &= \left| \frac{(j125+40)(j125+125)(j125+400)}{50\,000(j125+40)+j125(j125+10)(j125+400)} \right| = 1,485. \end{aligned}$$

Второе приближение решения построено на рис. 106, б штриховой линией. На этом же рисунке крестиками отмечены точки, относящиеся к точному решению.

**Б. Использование нормированных кривых для минимально-фазовых систем с типовыми л. а. х. [8].**

**176.** Передаточная функция разомкнутой следящей системы равна

$$W(p) = \frac{K(1+T_2p)}{p^2(1+T_3p)(1+T_4p)} = \frac{100(1+0,160p)}{p^2(1+0,024p)(1+0,004p)}.$$

Построить график выходной величины  $y(t)$  при ступенчатом задающем воздействии  $g(t) = g_0 1(t)$ ,  $g_0 = 10$  град и нулевых начальных условиях.

**Решение.** Строим логарифмическую амплитудную характеристику заданной системы (рис. 107, а). Согласно приложению 17

находим, что эта л. а. х. является типовой симметричной, тип 2-1-2-3. Базовая частота  $\omega_0 = \sqrt{K} = \sqrt{100} = 10 \text{ с}^{-1}$ .

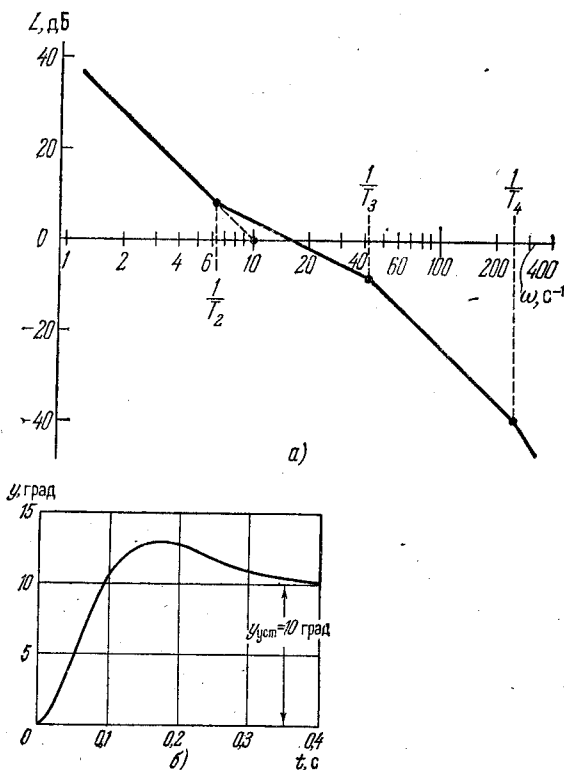


Рис. 107. Л. а. х. и переходный процесс к задаче 176.

По приведенной в приложении 16 формуле находим показатель колебательности системы

$$M = \frac{m+1}{m-1} = \frac{5,7+1}{5,7-1} \approx 1,4,$$

где

$$m = \frac{T_2}{\sum_{i=3}^n T_i} = \frac{T_2}{T_2 + T_4} = \frac{0,16}{0,024 + 0,004} \approx 5,7.$$

При  $M \approx 1,4$  искомая кривая  $y(t)$  переходного процесса должна быть построена как промежуточная между нормированными кривыми, приведенными для  $M=1,3$  и  $M=1,5$  в приложении 18, рис. 358. При переходе от нормированной кривой  $y(\omega_0 t)/g_0$  пере-

ходного процесса к  $y(t)$  следует абсциссы нормированной кривой разделить на  $\omega_0 = 10 \text{ с}^{-1}$ , а ординаты умножить на  $g_0 = 10$  град.

В результате получаем кривую  $y(t)$ , построенную на рис. 107, б.

177. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{250(1 + 0,024p)}{(1 + 0,2p)^2(1 + 0,0024p)(1 + 0,0016p)}.$$

Построить кривую  $y(t)$  переходного процесса в замкнутой системе при задающем воздействии  $g(t) = 1(t)$  и нулевых начальных условиях.

*Ответ.* Кривая  $y(t)$  переходного процесса может быть получена приближенно из нормированной кривой переходного процесса для симметричной л. а. х. при  $M = 1,4$ ; базовая частота  $\omega_0 = 79 \text{ с}^{-1}$ .

178. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{400(1 + 0,04p)}{p(1 + 0,1p)(1 + 0,003p)(1 + 0,0008p)^2}.$$

Построить кривую переходного процесса  $y(t)$  в замкнутой системе при ступенчатом задающем воздействии  $g(t) = g_0 1(t)$ ,  $g = 0,5$  и нулевых начальных условиях.

*Ответ.* Кривая  $y(t)$  может быть приближенно построена по нормированной кривой  $y(\omega_0 t)/g_0$  для  $M = 1,3$ ; базовая частота  $\omega_0 = 63,2 \text{ с}^{-1}$ .

179. К следящей системе, имеющей в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p^2(1 + T_3 p)},$$

$K = 400 \text{ с}^{-2}$ ,  $T_2 = 0,078 \text{ с}$ ,  $T_3 = 0,020 \text{ с}$ , прикладывается при нулевых начальных условиях задающее воздействие  $g(t) = at 1(t)$ ,  $a = 20$  град/с. Построить график ошибки воспроизведения этого задающего воздействия.

*Решение.* Строим л. а. х. системы (см.  $L_1(\omega)$  на рис. 108, а). Л. а. х. относится к типу 2—1—2... (см. последнюю строку табл. 1 приложения 17). Базовая частота л. а. х.  $\omega_0 = \sqrt{K} = \sqrt{400} = 20 \text{ с}^{-1}$ . Показатель колебательности

$$M = \frac{m+1}{m-1} = \frac{4,9}{2,9} = 1,7,$$

где

$$m = \frac{T_2}{\sum_{i=3}^n T_i} = \frac{T_2}{T_3} = 3,9.$$

Искомая кривая ошибки системы определяется нормированной кривой ошибки воспроизведения линейного задающего воздействия, приложение 18, рис. 360 (часть Б, случай 1).

Искомая кривая ошибки  $x(t)$  (рис. 108, б) получается из нормированной кривой для  $M=1,7$  делением абсцисс последней на величину  $\omega_0=20 \text{ с}^{-1}$  и умножением ординат на отношение  $a/\omega_0 = 10/20 = 0,5$  град. Ошибка стремится к нулю, поскольку система обладает астатизмом второго порядка.

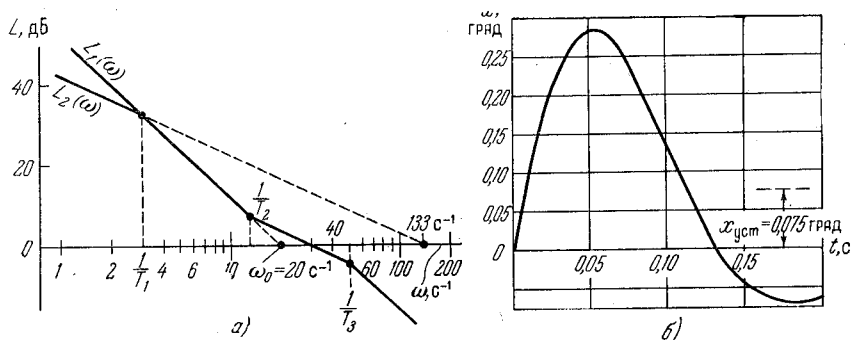


Рис. 108. Логарифмические амплитудные характеристики и ошибка воспроизведения линейного воздействия к задачам 179 и 180.

180. К следящей системе, имеющей в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)},$$

где  $K=133 \text{ с}^{-1}$ ,  $T=0,333 \text{ с}$ ,  $T_2=0,078 \text{ с}$ ,  $T_3=0,20 \text{ с}$ , прикладывается при нулевых начальных условиях задающее воздействие  $g(t)=a \cdot t \cdot 1(t)$ ,  $a=20 \text{ град/с}$ . Построить график ошибки воспроизведения этого воздействия.

Ответ. Приближенное решение имеет вид графика на рис. 108, б, полученного из нормированной кривой приложения 18, соответствующей л. а. х. системы  $L_2(\omega)$ , изображенной на рис. 108, а. Установившаяся ошибка равна

$$x_{\text{уст}} = \frac{a}{K} = \frac{10}{133} = 0,075 \text{ град} = 4,5 \text{ угл. мин.}$$

181. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{500(1 + 0,03p)}{p(1 + 0,1p)(1 + 0,006p)}.$$

1. Использовать нормированные кривые переходных процессов для построения графика выходной величины  $y(t)$  замкнутой системы при единичном ступенчатом задающем воздействии и нулевых начальных условиях.

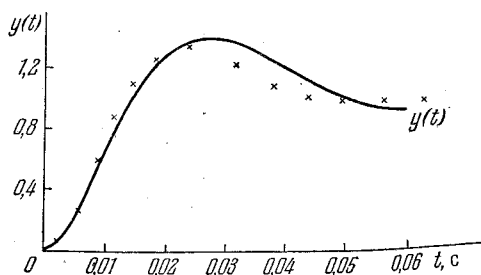


Рис. 109. Переходный процесс к задаче 181; сплошная линия получена по нормированным кривым  $y/g_0(\omega_0 t)$ , крестики — точное решение.

2. Решить эту же задачу точно (классическим или операторным методом).

Построить оба решения на одном графике.

Указание. Во второй части задачи можно воспользоваться решением задачи 160.

Ответ. На рис. 109 построена кривая  $y(t)$ , найденная приближенно по

нормированным кривым переходных процессов, при  $\omega_0 = 70,7 \text{ с}^{-1}$  и  $M = 1,5$ . Точки, относящиеся к точному решению, отмечены крестиками.

#### § 4.4. Определение передаточной функции по виду переходного процесса

182. При входном воздействии системы  $x_1(t) = A \cdot 1(t)$  и нулевых начальных условиях получена осциллограмма выходной величины  $x_2(t)$ , приведенная на рис. 110. Размерности  $x_1$  и  $x_2$  одинаковы, и масштабы их записи на осциллограмме равны. Определить передаточную функцию системы  $W(p) = X_2(p)/X_1(p)$ , допуская, что ее дифференциальное уравнение имеет первый порядок.

Ответ.  $W(p) = \frac{K}{1+Tp}$ ,  $K = 4$ ;  $T = 0,08 \text{ с}$ .

183. При входном воздействии системы  $x_1(t) = X_0 e^{-t/T_0} \cdot 1(t)$  и нулевых начальных условиях получена выходная величина  $x_2(t)$  (рис. 111). Размерности  $x_1$  и  $x_2$  одинаковы, и масштабы записи их на осциллограмме равны. Задано, что  $T_0 \ll t_{\text{уст}}$ , где  $t_{\text{уст}}$  — время переходного процесса. Найти передаточную функцию системы  $W(p) = X_2(p)/X_1(p)$ .

Указание. В связи с малостью  $T_0$  принять, что реакция системы на указанное воздействие  $x_1(t)$  практически не отличается от реакции на воздействие  $B\delta(t)$ , где  $B = \int_0^{\infty} x_1(t) dt$ , а  $\delta(t)$  — единичная импульсная функция («дельта-функция»).

Ответ.  $W(p) = \frac{K}{1+Tp}$ ,  $K = 12$ ,  $T = 0,05 \text{ с}$ .

184. Напряжение управления двигателем  $Dв$  (рис. 112, а) имеет вид линейной функции  $u_1 = at \cdot 1(t)$  (рис. 112, б);  $u_2$  — напряжение

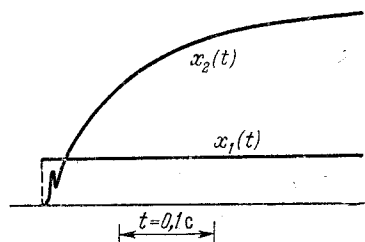


Рис. 110. Осциллограмма к задаче 182.

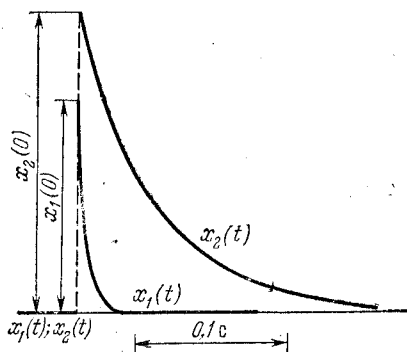


Рис. 111. Осциллограмма к задаче 183.

тахогенератора  $ТГ$ , ротор которого вращается со скоростью вала двигателя. Крутизна выходной характеристики тахогенератора  $30 \text{ В} \cdot \text{мин}/\text{об}$ . Масштабы записи напряжений на рис. 112, б равны.

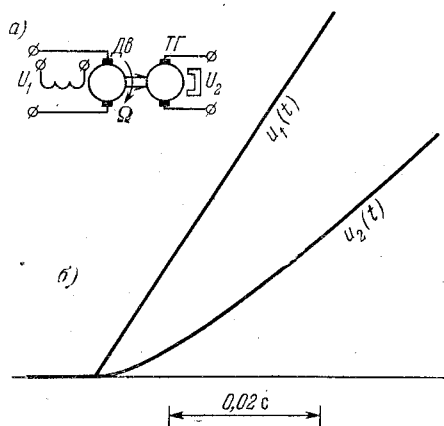


Рис. 112. Двигатель с тахогенератором (а) и осциллограмма (б) к задаче 184.

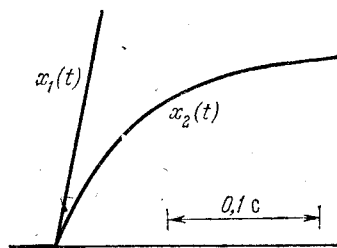


Рис. 113. Осциллограмма к задаче 185

Найти передаточную функцию двигателя  $W(p) = \Omega(p)/U_1(p)$ , где  $\Omega$  — его скорость вращения.

Ответ.  $W(p) = \frac{K}{1+Tp}$ ,  $K = 1 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{В}^{-1}$ ,  $T = 0,01 \text{ с}$ .

185. Осциллограмма входной  $x_1$  и выходной  $x_2$  величин системы дана на рис. 113; размерности обеих величин одинаковы,

и масштабы их записи на осциллограмме равны. Найти передаточную функцию системы.

Ответ.  $W(p) = \frac{Kp}{1+Tp}$ ,  $K=0,025$  с,  $T=0,05$  с.

186. Осциллограмма входного и выходного напряжений схемы из трех операционных усилителей (рис. 114, а) дана на рис. 114, б;

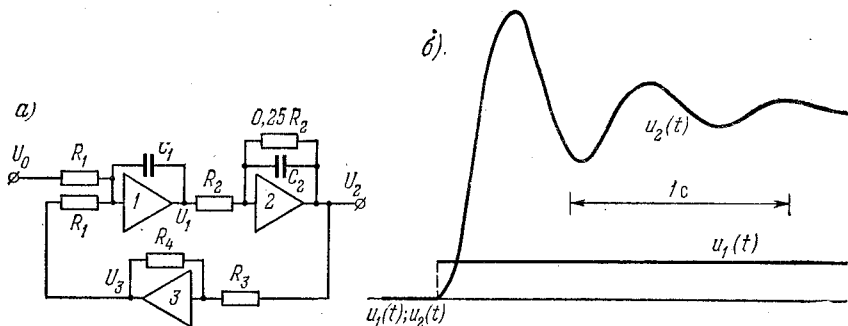


Рис. 114. Модель колебательного звена на операционных усилителях (а) и его реакция на ступенчатое воздействие (б).

масштабы записи равны. Найти передаточные функции усилителей

$$W_1(p) = U_1(p)/U_0(p), \quad W_2(p) = U_2(p)/U_1(p),$$

$$W_3(p) = U_3(p)/U_2(p).$$

Ответ.  $W_1(p) = \frac{K_1}{p}$ ,  $K_1 = 20$  с<sup>-1</sup>;  $W_2(p) = \frac{K_2}{1+Tp}$ ,  $K_2 = 0,25$ ,  $T = 0,25$  с;  $W_3(p) = K_3 = 5$ .

#### § 4.5. Расчет переходных процессов на ЦВМ по заданному дифференциальному уравнению системы

187. Система автоматического регулирования описывается уравнением

$$(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) y(t) = b_2 g(t), \quad (1)$$

где  $a_0 = 0,0268$  с<sup>3</sup>,  $a_1 = 0,337$  с<sup>2</sup>,  $a_2 = 2,65$  с,  $a_3 = 17,8$ ,  $b_2 = 17,8$ .

Рассчитать на ЦВМ переходный процесс в системе при ступенчатом задающем воздействии  $g(t) = 1(t)$  и нулевых начальных условиях. Результат представить в виде таблицы значений  $y(t)$  при изменении  $t$  от нуля до 1,6 с с интервалом 0,1 с. По данным таблицы построить график  $y(t)$ .

Указание. При численном интегрировании воспользоваться модифицированным методом Эйлера с шагом  $\Delta t = 0,01$  с.

# ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ

## § 5.1. Определение точности при наличии задающего воздействия

198. Передаточная функция замкнутой следящей системы имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}.$$

Каковы условия получения: 1) астатизма нулевого порядка; 2) астатизма первого порядка; 3) астатизма второго порядка?

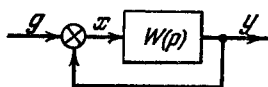


Рис. 122. Следящая система.

Ответ. 1)  $b_m \neq a_n$ ; 2)  $b_m = a_n$ ;  $b_{m-1} \neq a_{n-1}$ ; 3)  $b_m = a_n$ ,  $b_{m-1} = a_{n-1}$ ,  $b_{m-2} \neq a_{n-2}$ .

199. Передаточная функция разомкнутой следящей системы (рис. 122) имеет вид

$$W(p) = \frac{A_0 p^m + A_1 p^{m-1} + \dots + A_{m-1} p + A_m}{B_0 p^n + B_1 p^{n-1} + \dots + B_{n-1} p + B_n}.$$

Каковы условия получения: 1) астатизма нулевого порядка; 2) астатизма первого порядка; 3) астатизма второго порядка?

Ответ. 1)  $B_n \neq 0$ ; 2)  $B_n = 0$ ; 3)  $B_n = 0$  и  $B_{n-1} = 0$ .

200. Передаточная функция разомкнутой следящей системы (рис. 122) имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}.$$

Определить первые три коэффициента ошибки, а также добротность по скорости.

Решение. Находим передаточную функцию относительно ошибки:

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p) + K}.$$

Разлагаем это выражение в ряд делением числителя на знаменатель

$$\frac{p + (T_1 + T_2)p^2 + T_1 T_2 p^3}{p + \frac{1}{K}p^2 + \frac{T_1 + T_2}{K}p^3 + \frac{T_1 T_2}{K}p^4} \left| \frac{K + p + (T_1 + T_2)p^2 + T_1 T_2 p^3}{\frac{1}{K}p + \frac{1}{K}\left(T_1 + T_2 - \frac{1}{K}\right)p^2 + \dots} \right.$$

$$\left. \left( T_1 + T_2 - \frac{1}{K} \right)p^2 + \left( T_1 T_2 - \frac{T_1 + T_2}{K} \right)p^3 - \frac{T_1 T_2}{K}p^4 \right|$$

Далее можем написать тождество

$$c_0 + c_1 p + \frac{c_2}{2} p^2 + \dots = \frac{1}{K} p + \frac{1}{K} \left( T_1 + T_2 - \frac{1}{K} \right) p^2 + \dots$$

Отсюда получаем коэффициенты ошибок:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{K} [c], \quad \frac{c_2}{2} = \frac{1}{K} \left( T_1 + T_2 - \frac{1}{K} \right) [c^2].$$

Добротность по скорости:

$$K_\Omega = \frac{1}{c_1} = K [c^{-1}].$$

**201.** Для предыдущей задачи определить численные значения коэффициентов ошибок, если  $K = 100 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_1 = 0,01 \text{ с}$  и  $T_2 = 0,005 \text{ с}$ .

*Ответ.*  $c_1 = 0,01 \text{ с}$  и  $\frac{c_2}{2} = 0,00005 \text{ с}^2$ .

**202.** Определить величину установившейся ошибки для предыдущей задачи при движении следящей системы со скоростью  $\Omega = 12 \text{ град/с}$ .

*Ответ.*  $\theta_{\text{уст}} = \frac{\Omega}{K_\Omega} = c_1 \Omega = 0,01 \cdot 12 = 0^\circ,12 = 7',2$ .

**203.** Передаточная функция замкнутой системы (см. рис. 122) имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{5p + 200}{0,001p^3 + 0,502p^2 + 6p + 200}.$$

Найти установившееся значение ошибки (после затухания переходного процесса) при изменении входной величины по закону

$$g(t) = 5 + 20t + 10t^2.$$

**Решение.** Находим передаточную функцию относительно ошибки:

$$\Phi_x(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{0,001p^3 + 0,502p^2 + p}{0,001p^3 + 0,502p^2 + 6p + 200}.$$

Делением числителя на знаменатель (см. задачу 200) находим коэффициенты ошибок:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{200} \text{ с} \quad \text{и} \quad \frac{c_2}{2} = 0,00236 \text{ с}^2.$$

Далее находим производные

$$g'(t) = 20 + 20t, \quad g''(t) = 20.$$

Выражение для ошибки имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 g(t) + c_1 g'(t) + \frac{c_2}{2} g''(t) = \\ &= \frac{20 + 20t}{200} + 20 \cdot 0,00236 = 0,1472 + 0,1t. \end{aligned}$$

**204.** Передаточная функция разомкнутой системы (см. рис. 122) имеет вид

$$W(p) = \frac{50(1 + 0,15p)}{p^2(1 + 0,02p)}.$$

Определить первые три коэффициента ошибки, а также добротность по скорости и добротность по ускорению.

*Ответ.*  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 0$ ,  $\frac{c_2}{2} = 0,02 \text{ с}^2$ , добротность по скорости  $K_\Omega \rightarrow \infty$ , добротность по ускорению  $K_\epsilon = 50 \text{ с}^{-2}$ .

**205.** В статической системе регулирования (рис. 123, а) передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

Определить коэффициент передачи  $\psi(p) = m$  неединичной обратной связи, при котором система приобретает астатизм первого порядка,

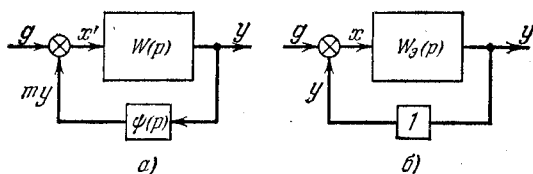


Рис. 123. Статическая система с неединичной обратной связью.

и передаточную функцию разомкнутой эквивалентной системы с единичной обратной связью (см. рис. 123, б).

*Решение.* Передаточная функция замкнутой системы равна [12]

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + mW(p)} = \frac{K}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1 + mK}. \quad (1)$$

Условие отсутствия статической ошибки  $\Phi(0) = 1$  или  $K = 1 + mK$ , откуда

$$m = \frac{K - 1}{K} = 1 - \frac{1}{K}.$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы приобретает вид

$$\Phi(p) = \frac{K}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + K}. \quad (2)$$

а эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы с единичной обратной связью равна

$$W_s(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - \Phi(p)} = \frac{K}{(T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2} = \frac{K_\Omega}{p(1 + T_s p)},$$

где добротность по скорости

$$K_\Omega = \frac{K}{T_1 + T_2}$$

и эквивалентная постоянная времени

$$T_s = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}.$$

**206.** Для предыдущей задачи определить первые два коэффициента ошибки в двух случаях:

1) общий коэффициент усиления прямой цепи стабилен ( $K = \text{const}$ );

2) общий коэффициент усиления прямой цепи нестабилен ( $K \neq \text{const}$ ).

Решение. В случае  $K = \text{const}$  имеем из (2) передаточную функцию по ошибке

$$\Phi_x(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + K}.$$

Разлагая ее в ряд делением числителя на знаменатель (см. задачу 200), находим коэффициенты ошибок:

$$c_0 = 0 \quad \text{и} \quad c_1 = \frac{T_1 + T_2}{K}.$$

В случае  $K \neq \text{const}$  примем  $K = K_0 + \Delta K$  (будем полагать, что  $\frac{\Delta K}{K_0} < 1$ , а коэффициент передачи цепи обратной связи  $m = 1 - \frac{1}{K_0}$ ). Передаточная функция замкнутой системы (1) в этом случае приобретает вид

$$\Phi(p) = \frac{K_0 + \Delta K}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + K_0 + \Delta K - \frac{\Delta K}{K_0}}.$$

Передаточная функция по ошибке

$$\Phi_x(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p - \frac{\Delta K}{K_0}}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + K_0 + \Delta K - \frac{\Delta K}{K_0}}.$$

Разлагая ее в ряд, получаем

$$c_0 = -\frac{\Delta K}{K_0 \left( K_0 + \Delta K - \frac{\Delta K}{K_0} \right)} \approx -\frac{\Delta K}{K_0^2},$$

$$c_1 = \frac{(T_1 + T_2)(K_0 + \Delta K)}{\left( K_0 + \Delta K - \frac{\Delta K}{K_0} \right)^2} \approx \frac{T_1 + T_2}{K_0}.$$

207. Определить передаточную функцию неединичной обратной связи  $\psi(p)$ , при которой в статической системе регулирования устраняются статическая и скоростная ошибки. Структурная схема системы регулирования с неединичной обратной связью приведена на рис. 123, а. Передаточная функция равна

$$W(p) = \frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)}.$$

Решение. Передаточная функция замкнутой системы с неединичной обратной связью в общем случае имеет вид

$$\frac{Y}{G} = \Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + \psi(p)W(p)} = \frac{A_m p^m + A_{m-1} p^{m-1} + \dots + A_1 p + A_0}{B_n p^n + B_{n-1} p^{n-1} + \dots + B_1 p + B_0}.$$

Статическая ошибка обращается в нуль при

$$A_0 = B_0.$$

При выполнении дополнительного условия

$$A_1 = B_1$$

в системе устраняется скоростная ошибка.

В рассматриваемой задаче ликвидация статической и скоростной ошибок может быть достигнута при введении в цепь обратной связи фильтра с передаточной функцией

$$\psi(p) = \frac{k_{oc}}{1 + \tau_2 p}.$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{Y}{G} = \Phi(p) &= \frac{W(p)}{1 + \psi(p)W(p)} = \\ &= \frac{K(1 + \tau_2 p)}{T_1 T_2 \tau_2 p^3 + (T_1 T_2 + T_1 \tau_2 + T_2 \tau_2) p^2 + (T_1 + T_2 + \tau_2) p + 1 + K k_{oc}}. \end{aligned}$$

При

$$1 + K k_{oc} = K, \quad k_{oc} = \frac{K-1}{K}$$

и

$$K \tau_2 = T_1 + T_2 + \tau_2, \quad \tau_2 = \frac{T_1 + T_2}{K-1}$$

система будет обладать астатизмом второго порядка. Статическая и скоростная ошибки обращаются при этом в нуль.

208. Для статической системы (рис. 123, а) с передаточной функцией разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$$

и передаточной функцией цепи обратной связи  $\psi(p) = m$ , выбранной так, чтобы получить астатизм первого порядка, определить два первых коэффициента ошибки, если  $T_1 = 1$  с,  $T_2 = 0,02$  с и  $K = 1000 \pm 50$ .

Решение. На основании формул, полученных в задаче 206, имеем

$$c_0 \approx -\frac{\Delta K}{K_0^2} = \mp \frac{50}{1000^2} = \mp 5 \cdot 10^{-5},$$

$$c_1 \approx \frac{T_1 + T_2}{K_0} = \frac{1 + 0,02}{1000} = 1,02 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

209. В статической системе регулирования (рис. 124) передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_0 p)(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

Определить коэффициент передачи  $n$  масштабирующего устройства в выходной или входной цепи, при котором система приобретает астатизм первого порядка относительно задающего воздействия.

Решение. Передаточная функция замкнутой системы с учетом масштабирующего устройства

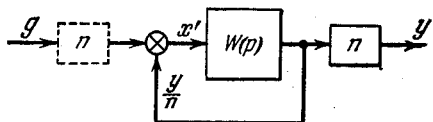


Рис. 124. Статическая система с масштабированием.

$$\Phi(p) = \frac{nK}{T_0 T_1 T_2 p^3 + (T_0 T_1 + T_0 T_2 + T_1 T_2) p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + 1 + K}.$$

Условие получения астатизма первого порядка  $nK = 1 + K$ , откуда имеем

$$n = \frac{1 + K}{K}.$$

210. Для предыдущей задачи определить передаточную функцию разомкнутой эквивалентной системы без масштабирующего устройства.

Ответ.  $W_0(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - \Phi(p)} = \frac{K_\Omega}{p(1 + ap + bp^2)}$ , где эквивалентная добротность по скорости  $K_\Omega = \frac{K}{T_0 + T_1 + T_2} [\text{с}^{-1}]$ , коэффициенты

$$a = \frac{T_0 T_1 + T_0 T_2 + T_1 T_2}{T_0 + T_1 + T_2}, \quad b = \frac{T_0 T_1 T_2}{T_0 + T_1 + T_2}.$$

211. Для системы комбинированного управления (рис. 125) определить условия получения астатизма третьего порядка и коэффициент ошибки  $c_3$ . На рис. 125 обозначено: ЧЭ — чувствительный элемент, состоящий из двух потенциометров П1 и П2 задающей и принимающей осей, Д — исполнительный двигатель, Р<sub>1</sub> и Р<sub>2</sub> — редукторы, ТГ — тахогенератор, КК — корректирующий контур,  $\theta_1$  — угол поворота задающей оси,  $\theta_2$  — угол поворота принимающей исполнительной оси,  $\theta = \theta_1 - \theta_2$  — рассогласование. Исходные данные:  $k_1 = 1 \text{ В/град} = 57,3 \text{ В/рад}$  — крутизна чувствительного элемента,

$k_2 = 25$  — коэффициент усиления по напряжению предварительного усилителя основной цепи,  $k_3 = 4$  — коэффициент усиления по напряжению оконечного усилителя,  $k_4 = 27,3 \text{ об}/(\text{В} \cdot \text{мин}) = 2,86 \text{ рад}/(\text{В} \cdot \text{с})$  —

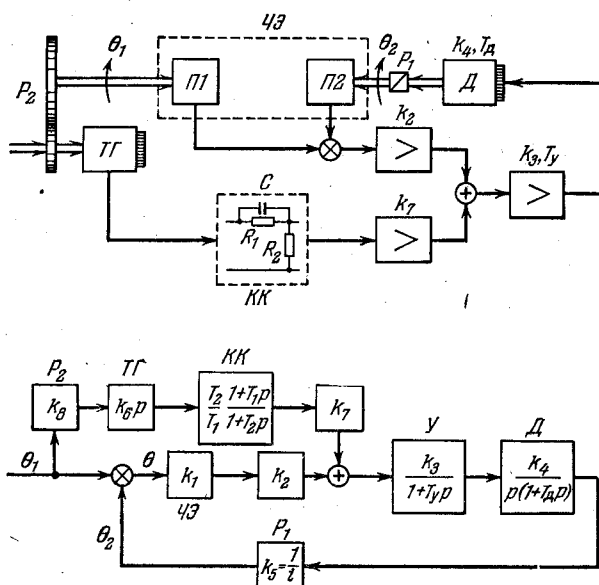


Рис. 125. Система комбинированного управления.

коэффициент передачи исполнительного двигателя,  $k_5 = \frac{1}{i_1} = \frac{1}{1000}$  — коэффициент передачи редуктора  $P_1$ ,  $k_6 = 0,055 \text{ В} \cdot \text{мин}/\text{об} =$

$= 0,525 \text{ В} \cdot \text{с}/\text{рад}$  — коэффициент передачи тахогенератора,  $k_7$  — коэффициент усиления по напряжению предварительного усилителя в цепи коррекции,  $k_8 = i_2 = 500$  — коэффициент передачи редуктора  $P_2$ ,  $T_y = 0,005 \text{ с}$  — постоянная времени усилителя,  $T_d = 0,1 \text{ с}$  — постоянная времени исполнительного двигателя,  $T_1 = R_1 C$  и  $T_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$  — постоянные времени пассивного дифференцирующего контура. Искомые параметры являются  $k_7, T_1$  и  $T_2$ .

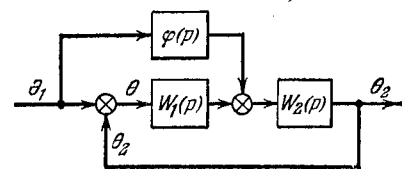


Рис. 126. Преобразованная структурная схема системы комбинированного управления.

Решение. Преобразованная структурная схема рассматриваемой системы изображена на рис. 126. Передаточные функции

частей основной цепи:

$$W_1(p) = k_1 k_2, \quad W_2(p) = \frac{k_3 k_4 k_5}{p(1+T_y p)(1+T_d p)}.$$

Передаточная функция цепи коррекции:

$$\Phi(p) = k_6 k_7 k_8 p \frac{T_2(1+T_1 p)}{T_1(1+T_2 p)}. \quad (1)$$

Передаточная функция замкнутой системы:

$$\Phi(p) = \frac{\theta_2(p)}{\theta_1(p)} = \frac{W(p) + \Phi(p) W_2(p)}{1 + W(p)}, \quad (2)$$

где передаточная функция исходной разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) = \frac{K}{p(1+T_y p)(1+T_d p)}. \quad (3)$$

Общий коэффициент усиления:

$$K = k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 = \frac{57,3 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 2,86}{1000} = 16,4 \text{ с}^{-1}.$$

Передаточная функция относительно ошибки равна

$$\Phi_\theta(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_1(p)} = 1 - \Phi(p) = \frac{1 - \Phi(p) W_2(p)}{1 + W(p)}. \quad (4)$$

Подстановка (1) и (3) дает

$$\Phi_\theta(p) = \frac{b_0 p^4 + b_1 p^3 + b_2 p^2 + b_3 p}{(1+T_2 p)[T_y T_d p^3 + (T_y + T_d)p^2 + p + K]}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= T_2 T_y T_d, \\ b_1 &= T_y T_d + T_y T_2 + T_d T_2, \\ b_2 &= T_y + T_d + T_2 - k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 T_2, \\ b_3 &= 1 - k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 \frac{T_2^2}{T_1}. \end{aligned}$$

Условия получения астатизма третьего порядка

$$b_3 = 0 \quad \text{и} \quad b_2 = 0.$$

Отсюда получаем два уравнения:

$$k_7 = \frac{T_2}{T_1 k_3 k_4 k_5 k_6 k_8}, \quad (6)$$

$$T_2 (k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 - 1) = T_y + T_d. \quad (7)$$

В два уравнения (6) и (7) входят три неизвестные:  $k_7$ ,  $T_1$  и  $T_2$ . Третье, недостающее, уравнение может быть получено на основании требований, накладываемых на величину последующих коэффициентов ошибки после  $c_0$ ,  $c_1$  и  $c_2$ , которые равны нулю, так как система имеет астатизм третьего порядка. Если никаких ограниче-

ний на последующие коэффициенты ошибки не накладывается, то расчет можно сделать на основании следующих соображений.

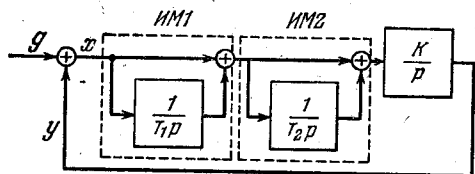


Рис. 127. Система с изодромными устройствами

Для дифференцирующих пассивных контуров отношение постоянных времени  $T_2/T_1$  обычно равно приблизительно 10. Положив в уравнении (6)  $T_1/T_2 = 10$ , получаем требуемое значение коэффициента усиления усилителя в цепи коррекции

$$k_7 = \frac{T_1/T_2}{k_3 k_4 k_5 k_6 k_8} = \frac{10 \cdot 1000}{4 \cdot 2,86 \cdot 0,525 \cdot 500} = 3,34.$$

Из (7) находим требуемое значение постоянной времени:

$$T_2 = \frac{T_y + T_d}{k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 - 1} = \frac{0,005 + 0,1}{4 \cdot 2,86 \cdot 0,5 \cdot 0,525 \cdot 3,34 - 1} = \frac{0,105}{10 - 1} = 0,0117 \text{ с.}$$

Кроме того, находим

$$T_1 = 10T_2 = 0,117 \text{ с.}$$

При выполнении условий (6) и (7) передаточная функция по ошибке (5) приобретает вид

$$\Phi_0(p) = \frac{b_0 p^4 + b_1 p^3}{(1 + T_2 p) [T_y T_d p^3 + (T_y + T_d) p^2 + p + K]}. \quad (8)$$

Делением числителя на знаменатель (8) находим коэффициент ошибки по третьей производной задающего воздействия:

$$\frac{c_3}{3!} = \frac{b_1}{K} = \frac{T_y T_d + T_y T_2 + T_d \cdot T_2}{K}. \quad (9)$$

Подстановка численных значений дает

$$\frac{c_3}{6} = \frac{0,005 \cdot 0,1 + 0,005 \cdot 0,0117 + 0,1 \cdot 0,0117}{16,4} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ с}^3.$$

Уравнение (9) является тем недостающим уравнением, которое может быть использовано для совместного решения с уравнениями (6) и (7).

212. В системе регулирования (рис. 127) для повышения порядка астатизма введены два изодромных устройства, ИМ1 и ИМ2. Определить первые пять коэффициентов ошибки.

Ответ:  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ ,  $\frac{c_3}{6} = \frac{T_1 T_2}{K}$ ,  $\frac{c_4}{24} = \frac{T_1 T_2 (T_1 + T_2)}{K}$ .

213. Передаточная функция разомкнутой следящей системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

Значения параметров  $K=20\text{ с}^{-1}$ ,  $T_1=0,02\text{ с}$  и  $T_2=0,03\text{ с}$ . На вход системы поступает гармоническое воздействие с амплитудой  $\theta_{1\text{ max}}=10^\circ$  и периодом  $T_k=7\text{ с}$ . Определить амплитуду ошибки.

Решение. 1) Для точного решения найдем передаточную функцию относительно ошибки

$$\Phi_\theta(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{p(1+T_1p)(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_2p)+K}.$$

После приведения подобных членов и подстановки значений параметров имеем

$$\Phi_\theta(p) = \frac{6 \cdot 10^{-4}p^3 + 5 \cdot 10^{-2}p^2 + p}{6 \cdot 10^{-4}p^3 + 5 \cdot 10^{-2}p^2 + p + 20}.$$

Амплитуда ошибки

$$\theta_{\text{max}} = |\Phi_\theta(j\omega)| \theta_{1\text{ max}}.$$

Находим модуль частотной передаточной функции относительно ошибки при  $\omega = \omega_k = \frac{2\pi}{T_k} = 0,9\text{ с}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} |\Phi_\theta(j\omega_k)| &= \left| \frac{6 \cdot 10^{-4}(j\omega_k)^3 + 5 \cdot 10^{-2}(j\omega_k)^2 + j\omega_k}{6 \cdot 10^{-4}(j\omega_k)^3 + 5 \cdot 10^{-2}(j\omega_k)^2 + j\omega_k + 20} \right| = \\ &= \left| \frac{-0,004 + j0,9}{20 + j0,9} \right| = \sqrt{\frac{0,004^2 + 0,9^2}{20^2 + 0,9^2}} = 0,045. \end{aligned}$$

Далее находим  $\theta_{\text{max}} = 0,045 \cdot 10 = 0,45^\circ = 27'$ .

2) Для приближенного решения находим модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы при  $\omega = \omega_k$ :

$$A(\omega_k) = |W(j\omega_k)| = \frac{20}{0,9 \sqrt{1 + 0,9^2 \cdot 0,02^2} \sqrt{1 + 0,9^2 \cdot 0,03^2}} = 22,2.$$

Амплитуда ошибки:

$$\theta_{\text{max}} = \frac{\theta_{1\text{ max}}}{A(\omega_k)} = \frac{10}{22,2} = 0,45^\circ = 27'.$$

214. Для следящей системы дана л. а. х. разомкнутой системы (рис. 128). Определить

амплитуду ошибки, если входное воздействие изменяется по закону  $\theta_1 = \theta_{1\text{ max}} \sin \omega_k t$ , где  $\theta_{1\text{ max}} = 15^\circ$ , а  $\omega_k = 0,2\text{ с}^{-1}$ .

Решение. По л. а. х., изображенной на рис. 128, определяем значение модуля в децибелах при частоте  $\omega = \omega_k = 0,2\text{ с}^{-1}$

$$\begin{aligned} L(\omega_k) &= 20 \lg A(\omega_k) = \\ &= 45 \text{ дБ}. \end{aligned}$$

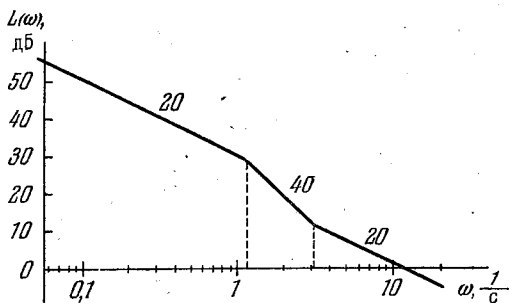


Рис. 128. Л. а. х. следящей системы.

Далее находим  $\lg A(\omega_k) = 2,25$ . По логарифму определяем

модуль:

$$A(\omega_k) = 10^{2,25} = 168.$$

Амплитуда ошибки:

$$\theta_{\max} = \frac{\theta_{1\max}}{A(\omega_k)} = \frac{15}{168} \approx 0,089^\circ = 5,3'.$$

215. Решить предыдущую задачу, если:

1)  $\theta_{1\max} = 5^\circ$ ,  $\omega_k = 0,1 \text{ с}^{-1}$ ;

2)  $\theta_{1\max} = 10^\circ$ ,  $\omega_k = 0,8 \text{ с}^{-1}$ ;

3)  $\theta_{1\max} = 30^\circ$ ,  $\omega_k = 0,4 \text{ с}^{-1}$ .

Ответ. 1)  $0, 88'$ ; 2)  $14, 2'$ ; 3)  $21, 2'$ .

216. Передаточная функция разомкнутой следящей системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_3p)},$$

где  $K = 200 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_1 = 0,5 \text{ с}$ ,  $T_2 = 0,1 \text{ с}$  и  $T_3 = 0,01 \text{ с}$ . Определить фазовую ошибку при воспроизведении гармонического входного сигнала с амплитудой  $\theta_{1\max} = 20^\circ$  и периодом  $T_k = 1 \text{ с}$ .

Решение. 1) Для точного решения находим частотную передаточную функцию замкнутой системы при  $\omega = \omega_k = \frac{2\pi}{T_k} = 6,28 \text{ с}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \Phi(j\omega_k) &= \frac{W(j\omega_k)}{1+W(j\omega_k)} = \frac{K(1+j\omega_k T_2)}{j\omega_k(1+j\omega_k T_1)(1+j\omega_k T_3) + K(1+j\omega_k T_2)} = \\ &= \frac{K(1+j\omega_k T_2)}{K - \omega_k^2(T_1 + T_3) + j[\omega_k(1 + KT_2) - \omega_k^3 T_1 T_3]}. \end{aligned}$$

Подстановка численных значений параметров дает

$$\Phi(j\omega_k) = \frac{200 + j135}{180 + j130} = 1,09 - j0,0325,$$

откуда

$$\varphi = -\arctg \frac{0,0325}{1,09} = -\arctg 0,03 \approx -1,7^\circ.$$

2) Для приближенного решения примем, что в районе частоты входного воздействия частотная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega(1+j\omega T_1)}.$$

При значении  $\omega = \omega_k$  передаточная функция относительно ошибки может быть принята равной

$$\Phi_\theta(j\omega_k) \approx \frac{1}{W(j\omega_k)} = \frac{j\omega_k(1+j\omega_k T_1)}{K},$$

откуда

$$\varphi \approx -\operatorname{Im} \frac{1}{W(j\omega_k)} = -\frac{\omega_k}{K} = -\frac{6,28}{200} = -0,0314 \text{ рад} = -1,8^\circ.$$

217. Определить фазовую ошибку для предыдущей задачи, если:

1)  $T_k = 10$  с; 2)  $T_k = 2$  с.

Ответ. 1)  $-0,18^\circ$ ; 2)  $-0,9^\circ$ .

### § 5.2. Определение точности при наличии возмущающего воздействия

218. Для следящей системы, изображенной на рис. 16 (задачи 29 и 30), определить установившееся значение моментной ошибки, если момент нагрузки на исполнительную ось составляет  $M = 20$  Н·см, а к. п. д. редуктора равен 0,8.

Решение. Добротность по моменту рассматриваемой следящей системы (см. задачу 30) составляет  $K_m = 16,7$  Н·см/угл.мин. Отсюда находим моментную ошибку:

$$\theta_m = \frac{M_n}{K_m} = \frac{M}{\eta K_m} = \frac{20}{0,8 \cdot 16,7} = 1,45'.$$

219. Решить предыдущую задачу, если задан момент нагрузки на оси двигателя  $M_{нд} = 0,05$  Н·см.

Решение. Определяем добротность по моменту, отнесенную к оси двигателя:

$$K_{мд} = \frac{K_m}{i} = \frac{16,7}{1000} = 0,0167 \frac{\text{Н} \cdot \text{см}}{\text{угл.мин}},$$

где  $i = 1000$  — передаточное отношение редуктора. Моментная ошибка:

$$\theta_m = \frac{M_{нд}}{K_{мд}} = \frac{0,05}{0,0167} = 3'.$$

220. Определить моментные ошибки для следящих систем с астатизмом первого порядка при следующих исходных данных.

1) Добротность по скорости  $K_\Omega = 200$  с<sup>-1</sup>, передаточное отношение редуктора  $i = 500$ , скорость холостого хода двигателя  $n_{xx} = 6000$  об/мин, пусковой момент  $M_n = 100$  Н·см, момент нагрузки, приведенный к оси двигателя,  $M_{нд} = 30$  Н·см.

2)  $K_\Omega = 500$  с<sup>-1</sup>,  $i = 10\,000$ ,  $n_{xx} = 7500$  об/мин,  $M_n = 300$  Н·см,  $M_{нд} = 150$  Н·см.

Ответ.

$$1) \theta_m = \frac{3440 \pi n_{xx}}{30 i K_\Omega} \frac{M_{нд}}{M_n} = \frac{3440 \cdot 3,14 \cdot 6000}{30 \cdot 500 \cdot 200} \frac{30}{100} = 6,5'.$$

$$2) \theta_m = \frac{3440 \cdot 3,14 \cdot 7500}{30 \cdot 10\,000 \cdot 500} \cdot \frac{150}{300} = 0,27'.$$

221. На рис. 129 изображена структурная схема системы регулирования. Значения параметров  $k_1 = 10$ ,  $k_2 = 2$  с<sup>-1</sup>,  $T_1 = 0,1$  с и  $T_2 = 1$  с. Возмущающее воздействие меняется по закону  $f = f_{\max} \sin \omega t$ , где  $f_{\max} = 15$  и  $\omega = 5$  с<sup>-1</sup>. Определить амплитуду ошибки  $x_{\max}$ .

Решение. Передаточная функция по возмущающему воздействию в замкнутой системе равна

$$\Phi_f(p) = \frac{W_f(p)}{1 + W(p)} = \frac{\frac{k_2}{p(1+T_2p)}}{1 + \frac{k_1 k_2}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}} = \frac{k_2(1+T_1p)}{p(1+T_1p)(1+T_2p) + k_1 k_2}.$$

Амплитуда ошибки:

$$x_{\max} = |\Phi_f(j\omega)| f_{\max} = \frac{k_2 f_{\max} \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}{\sqrt{[k_1 k_2 - \omega^2 (T_1 + T_2)]^2 + \omega_k^2 (1 - \omega_k^2 T_1 T_2)^2}}.$$

Подстановка числовых значений дает

$$x_{\max} = \frac{2 \cdot 15 \sqrt{1 + 5^2 \cdot 0,1^2}}{\sqrt{[10 \cdot 2 - 5^2 (0,1 + 1)]^2 + 5^2 (1 - 5^2 \cdot 0,11)^2}} = 2,65.$$

222. Внешняя характеристика генератора (зависимость напряжения на его зажимах от тока нагрузки) изображена на рис. 130.

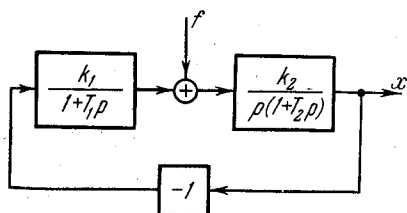


Рис. 129. Структурная схема к задаче 221.

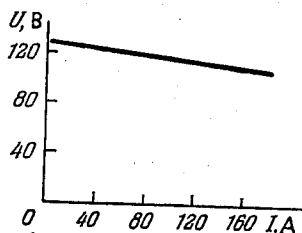


Рис. 130. Внешняя характеристика генератора.

Наклон характеристики составляет  $\beta = 0,1$  В/А. Генератор имеет статическую систему стабилизации напряжения с общим коэффициентом усиления по разомкнутой цепи  $K = 200$ . Определить установившуюся ошибку при скачке нагрузки  $\Delta I_n = 100$  А.

Решение.

$$\Delta U = \frac{\beta \Delta I_n}{1 + K} = \frac{0,1 \cdot 100}{1 + 200} \approx 0,05 \text{ В.}$$

223. В системе стабилизации температуры печи в качестве чувствительного элемента используется терморезистор. При отключенной системе регулирования внешнее возмущение вызывает отклонение температуры от заданного значения  $\Delta \tau_0 = 200$  °С. Определить установившееся отклонение температуры, если используется система регулирования с передаточной функцией разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)},$$

где  $K = 500$ .

Решение.

$$\Delta \tau = \frac{\Delta \tau_0}{1 + K} = \frac{200}{1 + 500} \approx 0,4 \text{ °С.}$$

### § 5.3. Корневые методы оценки динамических свойств

224. Даны характеристические уравнения систем регулирования:

$$1) p^3 + 14p^2 + 53p + 130 = 0,$$

$$2) p^3 + 11p^2 + 51p + 41 = 0,$$

$$3) p^3 + 2,5p^2 + 27p + 13 = 0,$$

$$4) p^4 + 7p^3 + 418p^2 + 1220p + 808 = 0,$$

$$5) p^4 + 3p^3 + 5,5p^2 + 6p + 2,5 = 0.$$

Определить корни уравнения, степень устойчивости  $h$ , колебательность  $\mu$  и затухание  $\eta$  системы.

Указание. При вычислении корней целесообразно воспользоваться методикой, изложенной в книге [53].

Ответ.

$$1) p_1 = -10 \text{ с}^{-1}, p_{2,3} = (-2 \pm j3) \text{ с}^{-1}, h = 2 \text{ с}^{-1}, \mu = \frac{3}{2} = 1,5,$$

$$\eta = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}} = 98,5\%;$$

$$2) p_1 = -1 \text{ с}^{-1}, p_{2,3} = (-5 \pm j4) \text{ с}^{-1}, h = 1 \text{ с}^{-1}, \mu = 0,8, \eta = 99,96\%;$$

$$3) p_1 = -0,5 \text{ с}^{-1}, p_{2,3} = (-1 \pm j5) \text{ с}^{-1}, h = 0,5 \text{ с}^{-1}, \mu = 5, \eta = 71,5\%;$$

$$4) p_1 = -1 \text{ с}^{-1}, p_2 = -2 \text{ с}^{-1}, p_{3,4} = (-2 \pm j20) \text{ с}^{-1}, h = 1 \text{ с}^{-1}, \mu = 10, \eta = 47\%;$$

$$5) p_1 = -1 \text{ с}^{-1}, p_2 = -1 \text{ с}^{-1}, p_{2,3} = (-0,5 \pm j1,5) \text{ с}^{-1}, h = 0,5 \text{ с}^{-1}, \mu = 3, \eta = 88\%.$$

225. Даны характеристические уравнения систем регулирования:

$$\left. \begin{aligned} 1) p^3 + 4p^2 + 41p + 64 &= 0. \\ 2) p^3 + 14p^2 + 144p + 1000 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Пользуясь диаграммой Вышнеградского, определить без отыскания корней затухание и степень устойчивости.

Решение. 1) Используем подстановку  $p = \sqrt[3]{64}q = 4q$ . Тогда уравнение (1) после деления на 64 приобретает вид

$$q^3 + q^2 + \frac{41}{16}q + 1 = 0.$$

Параметры Вышнеградского  $A = 1$  и  $B = \frac{41}{16} = 2,56$ . По диаграмме Вышнеградского с нанесенными линиями равного затухания (см. [12], стр. 221) находим  $\eta = 70\%$ . По диаграмме Вышнеградского с нанесенными линиями равной степени устойчивости (см. [12], стр. 221) находим относительную степень устойчивости  $h_0 = 0,25$ . Далее определяем абсолютное значение степени устойчивости  $h = 4h_0 = 1 \text{ с}^{-1}$ .

$$2) \eta = 75\%, h = 2 \text{ с}^{-1}.$$

226. Дана передаточная функция разомкнутой системы с астатизмом первого порядка

$$W(p) = \frac{K_{\Omega}}{p(1+Tp)}. \quad (1)$$

Определить соотношение между добротностью по скорости  $K_\Omega$  и постоянной времени  $T$ , при котором затухание за один период будет не меньше заданного значения  $\eta$ .

Решение. Находим характеристическое уравнение системы

$$1 + W(p) = 0$$

или, после подстановки (1),

$$p^2 + \frac{1}{T} p + \frac{K_\Omega}{T} = 0. \quad (2)$$

Корни этого уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2T} \pm j \sqrt{\frac{K_\Omega}{T} - \frac{1}{4T^2}} = -\alpha \pm j\beta, \quad (3)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2T} \quad \text{и} \quad \beta = \sqrt{\frac{K_\Omega}{T} - \frac{1}{4T^2}}.$$

Колебательность связана с затуханием за один период зависимостью

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-\eta}}. \quad (4)$$

Далее находим

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{4K_\Omega T - 1}. \quad (5)$$

Совместное решение (4) и (5) дает искомое условие

$$K_\Omega T \leq \frac{\pi^2}{\left(\ln \frac{1}{1-\eta}\right)^2} + 0,25. \quad (6)$$

**227.** В системе с передаточной функцией разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K_\Omega}{p(1+Tp)}$$

постоянная времени  $T=0,1$  с. Определить допустимое значение добротности по скорости, соответствующее получению затухания за один период  $\eta=90\%$ ,  $\eta=95\%$ ,  $\eta=98\%$  и  $\eta=100\%$  (см. предыдущую задачу).

Ответ.  $K_\Omega = 31,1 \text{ с}^{-1}$ ,  $K_\Omega = 13,6 \text{ с}^{-1}$ ,  $K_\Omega = 8,7 \text{ с}^{-1}$ ,  $K_\Omega = 2,5 \text{ с}^{-1}$ .

**228.** Передаточная функция разомкнутой системы с астатизмом второго порядка имеет вид

$$W(p) = \frac{K_e(1+Tp)}{p^2}. \quad (1)$$

Определить соотношение между добротностью по ускорению  $K_e$  и постоянной времени  $T$ , при котором затухание за один период будет не меньше заданного значения  $\eta$ .

Решение. Находим характеристическое уравнение замкнутой системы

$$1 + W(p) = 0$$

или

$$p^2 + K_e T p + K_e = 0. \quad (2)$$

Корни этого уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{K_e T}{2} \pm j \sqrt{K_e - \frac{K_e^2 T^2}{4}} = -\alpha \pm j\beta. \quad (3)$$

Колебательность

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{4}{T^2 K_e} - 1}. \quad (4)$$

Используя соотношение между колебательностью и затуханием

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-\eta}}, \quad (5)$$

находим окончательно

$$\frac{1}{K_e T^2} \leq \left( \ln \frac{1}{1-\eta} \right)^2 + 0,25, \quad (6)$$

или

$$K_e T^2 \geq \frac{1}{\left( \ln \frac{1}{1-\eta} \right)^2 + 0,25}. \quad (7)$$

229. В системе с передаточной функцией разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K_e (1 + T p)}{p^2}$$

добротность по ускорению  $K_e = 100 \text{ с}^{-2}$ . Определить минимальное значение постоянной времени  $T$ , соответствующее получению затухания за один период  $\eta = 90\%$ ,  $\eta = 95\%$ ,  $\eta = 98\%$  и  $\eta = 100\%$  (см. предыдущую задачу).

Ответ.  $T = 0,069 \text{ с}$ ,  $T = 0,086 \text{ с}$ ,  $T = 0,107 \text{ с}$ ,  $T = 0,20 \text{ с}$ .

230. В статической системе регулирования передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_0 p)(1 + T_1 p)}.$$

Постоянные времени равны  $T_0 = 1 \text{ с}$  и  $T_1 = 0,5 \text{ с}$ . Определить допустимое значение общего коэффициента усиления  $K$ , при котором затухание за один период будет не меньше  $\eta = 90\%$ .

Ответ.

$$K \leq \frac{(T_0 + T_1)^2}{T_0 T_1} \left[ \frac{\pi^2}{\left( \ln \frac{1}{1-\eta} \right)^2} + 0,25 \right] - 1 =$$

$$= \frac{(1 + 0,5)^2}{1 \cdot 0,5} \left[ \frac{3,14^2}{\left( \ln \frac{1}{1-0,9} \right)^2} + 0,25 \right] - 1 = 8,5.$$

#### § 5.4. Оценка по кривой переходного процесса

231. Замкнутая система регулирования описывается дифференциальным уравнением

$$(a_0 p^2 + a_1 p + 1) y = (a_1 p + 1) g. \quad (1)$$

Определить величину перерегулирования в предположении, что корни характеристического уравнения комплексные  $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ , для случая отсутствия задающего воздействия  $g=0$ . Начальные условия  $y=y_0$  и  $\dot{y}=0$  при  $t=-0$ .

Ответ. Переходный процесс определяется выражением

$$y = y_0 e^{-\alpha t} \left( \cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) = y_0 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \left( \beta t + \arctg \frac{\beta}{\alpha} \right). \quad (2)$$

При исследовании на экстремум можно получить его первое значение

$$y_m = -y_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta} \pi} = -y_0 e^{-\frac{\pi}{\mu}}. \quad (3)$$

Отсюда искомое перерегулирование:

$$\sigma = \frac{|y_m|}{y_0} = e^{-\frac{\alpha}{\beta} \pi} = \exp \left[ - \frac{\pi}{\sqrt{4 \frac{a_0}{a_1^2} - 1}} \right]. \quad (4)$$

232. Для предыдущей задачи определить условие отсутствия перерегулирования.

Ответ.  $\beta=0$ , что соответствует выполнению условия  $a_0 \leq 0,25 a_1^2$ .

233. Для задачи 231 определить соотношение коэффициентов, при котором перерегулирование будет:  $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$ ,  $\sigma=50\%$ .

Ответ.  $a_0=0,72 a_1^2$ ;  $a_0=1,22 a_1^2$ ;  $a_0=5,25 a_1^2$ .

234. Для системы регулирования, дифференциальное уравнение (1) которой приведено в задаче 231, определить перерегулирование при подаче на вход ступенчатой функции  $g_0 1(t)$ , если до приложения входного воздействия система находилась в покое.

Ответ. Переходный процесс определяется выражением

$$y = g_0 \left[ 1 - e^{-\alpha t} \left( \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right].$$

Исследование его на максимум дает

$$y_m = g_0 \left[ 1 + e^{-\frac{1}{\mu} \operatorname{arctg} \frac{2\mu}{1-\mu^2}} \right].$$

Отсюда определяется перерегулирование

$$\sigma = \frac{y_m - g_0}{g_0} = \exp \left[ -\frac{\operatorname{arctg} \frac{2\mu}{1-\mu^2}}{\mu} \right],$$

где

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{4 \frac{a_0}{a_1^2} - 1}.$$

235. Для соотношения коэффициентов  $a_0$  и  $a_1$ , соответствующих получению перерегулирования  $\sigma = 0\%$ ,  $\sigma = 10\%$ ,  $\sigma = 20\%$  и  $\sigma = 50\%$ , при согласовании из неподвижного положения (см. задачи 232 и 233) определить величину перерегулирования при подаче на вход ступенчатого воздействия  $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$  и произвести сравнение величин перерегулирования.

*Ответ.* Значения перерегулирований сведены в таблицу.

| Вид движения                                  | $a_0 = 0,25a_1^2$ | $a_0 = 0,72a_1^2$ | $a_0 = 1,22a_1^2$ | $a_0 = 5,25a_1^2$ |
|-----------------------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Согласование из неподвижного положения        | 0%                | 10%               | 20%               | 50%               |
| Отработка единичного ступенчатого воздействия | 13,5%             | 25%               | 32%               | 55%               |

236. Передаточная функция замкнутой системы регулирования имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{a_1 p + 1}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}.$$

На вход системы поступает воздействие типа единичной ступенчатой функции  $1(t)$ . Посредством построения переходного процесса определить перерегулирование и время переходного процесса при следующих значениях коэффициентов:

- 1)  $a_1 = 0,33$  с,  $a_2 = 0,01$  с<sup>2</sup>,  $a_3 = 1,58 \cdot 10^{-4}$  с<sup>3</sup>;
- 2)  $a_1 = 0,415$  с,  $a_2 = 0,04$  с<sup>2</sup>,  $a_3 = 0,002$  с<sup>3</sup>;
- 3)  $a_1 = 0,087$  с;  $a_2 = 0,0025$  с<sup>2</sup>,  $a_3 = 0,435 \cdot 10^{-4}$  с<sup>3</sup>.

*Ответ.*

- 1)  $\sigma = 13,8\%$ ,  $t_n = 0,775$  с;
- 2)  $\sigma = 26,5\%$ ,  $t_n = 1,17$  с;
- 3)  $\sigma = 37,2\%$ ,  $t_n = 0,27$  с.

237. На рис. 131 изображена вещественная частотная характеристика замкнутой системы. Определить ориентировочные значения перерегулирования и времени переходного процесса.

Решение. Интервал существенных частот для вещественной характеристики  $\omega_c = 20 \text{ с}^{-1}$ . Это дает время переходного процесса

$$\frac{\pi}{\omega_c} < t_n < \frac{4\pi}{\omega_c},$$

ли

$$0,157 \text{ с} < t_n < 0,628 \text{ с}.$$

Перерегулирование  $\sigma < 18\%$ .

Для более точного расчета необходимо обратиться к кривым, данным в приложении 13. Коэффициент наклона вещественной характеристики (см. рис. 131) составляет  $\kappa = 0,4$ . Это дает  $\sigma = 10\%$  и  $t_n = \frac{7}{20} = 0,35 \text{ с}$ .

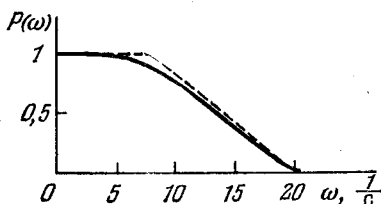


Рис. 131. Вещественная частотная характеристика.

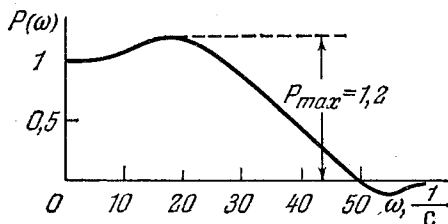


Рис. 132. Вещественная характеристика немонотонного вида.

238. Определить перерегулирование и время переходного процесса для вещественной частотной характеристики, изображенной на рис. 132.

Решение. Высокочастотную часть характеристики, соответствующую  $P(\omega) < 0$  можно отбросить, так как  $P_{\min} < 0,2$ . Тогда перерегулирование в системе равно

$$\sigma < \frac{1,18P_{\max} - P(0)}{P(0)} = \frac{1,18 \cdot 1,2 - 1}{1} = 0,41 = 41\%.$$

Время переходного процесса

$$t_n > \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{3,14}{50} = 0,0628 \text{ с}.$$

Для более точного расчета необходимо обратиться к кривым приложения 14. В результате их использования определяем

$$\sigma = 23\% \quad \text{и} \quad t_n = \frac{3\pi}{\omega_c} = \frac{3 \cdot 3,14}{50} = 0,18 \text{ с}.$$

## § 5.5. Интегральные оценки

239. Передаточная функция разомкнутой следящей системы с астатизмом первого порядка имеет вид

$$W(p) = \frac{K_{\Omega}}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}.$$

При значениях постоянных времени  $T_1=0,02$  с и  $T_2=0,04$  с определить значение добротности по скорости, соответствующее минимуму квадратичной интегральной оценки при отработке ступенчатого воздействия  $g(t)=g_0 \cdot 1(t)$ .

Решение. Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{K_{\Omega}}{K_{\Omega}+p+(T_1+T_2)p^2+T_1T_2p^3}.$$

Изображение по Лапласу выходной величины имеет вид

$$Y(p) = \frac{K_{\Omega}}{K_{\Omega}+p+(T_1+T_2)p^2+T_1T_2p^3} \frac{1}{p} = \frac{b_0}{a_0+a_1p+a_2p^2+a_3p^3} \frac{1}{p}.$$

В соответствии с приложением 32 находим значение интегральной оценки

$$I = \frac{B_0 \Delta_0}{2a_0^3 \Delta} g_0,$$

где  $B_0 = b_0^2 = K_{\Omega}^2$ ,  $a_0 = K_{\Omega}$ . Значения определителей

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_0(a_1a_2 - a_0a_3),$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & -a_3 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1^2a_2 - a_1a_0a_3 + a_0a_2^2.$$

В результате имеем

$$I = \left[ \frac{1}{2K_{\Omega}} + \frac{1}{2} \frac{(T_1+T_2)^2}{T_1+T_2-K_{\Omega}T_1T_2} \right] g_0.$$

Для получения минимального значения интегральной оценки приравняем нулю производную

$$\frac{dI}{dK_{\Omega}} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{K_{\Omega}^2} + \frac{T_1T_2(T_1+T_2)^2}{(T_1+T_2-K_{\Omega}T_1T_2)^2} \right] = 0,$$

откуда оптимальное значение добротности

$$K_{\Omega} = \frac{T_1+T_2}{T_1T_2+(T_1+T_2)\sqrt{T_1T_2}}.$$

Подстановка численных значений постоянных времени дает

$$K_{\Omega} = \frac{0,06}{8 \cdot 10^{-4} + 6 \sqrt{8 \cdot 10^{-4}}} = 24 \text{ с}^{-1}.$$

240. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_{\Omega} + K_1 p}{p(1 + Tp)}.$$

При фиксированных значениях  $T = 0,1$  с и добротности по скорости  $K_{\Omega} = 20$  с<sup>-1</sup> определить значение коэффициента  $K_1$ , определяющего уровень сигнала по первой производной, соответствующее минимуму квадратичной интегральной оценки при подаче на вход задающего воздействия в виде единичной импульсной функции  $g(t) = \delta(t)$ .

Решение. Передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{K_{\Omega} + K_1 p}{K_{\Omega} + (1 + K_1)p + Tp^2}.$$

Изображение входного воздействия  $G(p) = 1$ . Изображение выходной величины

$$Y(p) = \Phi(p) G(p) = \frac{K_{\Omega} + K_1 p}{K_{\Omega} + (1 + K_1)p + Tp^2}.$$

Значение квадратичной интегральной оценки (см. приложение 32)

$$I = \frac{B_1 \Delta_1 + B_2 \Delta_2}{2a_0^2 \Delta}.$$

Коэффициенты равны

$$B_1 = b_1^2 = K_{\Omega}^2, \quad B_2 = b_2^2 = K_1^2, \quad a_0 = K_{\Omega}, \quad a_1 = 1 + K_1, \quad a_2 = T.$$

Значения определителей

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_0 a_1 a_2 = K_{\Omega} (1 + K_1) T,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_0^2 a_2 = K_{\Omega}^2 T,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & a_1 \\ 0 & a_1 & a_0 \\ 0 & -a_0 & 0 \end{vmatrix} = a_0^3 = K_{\Omega}^3.$$

Далее находим

$$I = \frac{K_{\Omega}^2 K_{\Omega}^2 T + K_1^2 K_{\Omega}^3}{2K_{\Omega}^2 K_{\Omega} (1 + K_1) T} = \frac{K_{\Omega} T + K_1^2}{2(1 + K_1) T}.$$

Для нахождения минимума  $I$  приравняем нулю производную  $\frac{dI}{dK_1} = 0$ . В результате имеем

$$K_1^2 + 2K_1 - K_{\Omega} T = 0,$$

откуда

$$K_1 = -1 + \sqrt{1 + K_{\Omega} T}.$$

Подстановка численных значений дает

$$K_1 = -1 + \sqrt{1 + 20 \cdot 0,1} = 0,73.$$

241. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_\Omega}{p(1+Tp)}.$$

При фиксированном значении постоянной времени  $T = 0,2$  с определить оптимальное значение добротности по скорости, соответствующее минимуму интегральной оценки вида

$$I = \int_0^\infty (x^2 + \tau^2 \dot{x}^2) dx \quad (1)$$

при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия  $g(t) = 1(t)$  для значений постоянной времени экстремали  $\tau = 0$ ,  $\tau = 0,1$  с,  $\tau = 0,5$  с и  $\tau = 1$  с.

Решение. Разбиваем интеграл (1) на два интеграла

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^\infty x^2 dt + \tau^2 \int_0^\infty \dot{x}^2 dt.$$

Находим передаточную функцию замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{K_\Omega}{K_\Omega + p + Tp^2}.$$

Изображение выходной величины при  $G(p) = \frac{1}{p}$  равно

$$Y(p) = \Phi(p) G(p) = \frac{K_\Omega}{K_\Omega + p + Tp^2} \frac{1}{p}.$$

В соответствии с приложением 32 находим

$$I_1 = \frac{B_0 \Delta_0}{2a_0^2 \Delta}. \quad (2)$$

Значения коэффициентов:

$$B_0 = b_0^2 = K_\Omega^2, \quad a_0 = K_\Omega, \quad a_1 = 1 \text{ и } a_2 = T.$$

Значения определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_0 a_1 = K_\Omega, \quad \Delta_0 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 + a_0 a_2 = 1 + K_\Omega T.$$

Подставляем найденные значения в (2); получим

$$I_1 = \frac{K_\Omega^3 (1 + K_\Omega T)}{2K_\Omega^2 K_\Omega} = \frac{1 + K_\Omega T}{2K_\Omega}.$$

Для нахождения  $I_2$  определяем изображение скорости изменения выходной величины

$$pY(p) = \frac{K_\Omega}{K_\Omega + p + Tp^2}.$$

В соответствии с приложением 32 находим

$$I_2 = \tau^2 \frac{B_1 \Delta_1}{2a_0^2 \Delta_1}, \quad (3)$$

где  $B_1 = b_1^2 = K_\Omega^2$ , а определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 = K_\Omega^2.$$

Далее имеем

$$I_2 = \frac{K_\Omega \tau^2}{2}.$$

Результирующее значение интегральной оценки равно

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1 + K_\Omega T}{2K_\Omega} + \frac{K_\Omega \tau^2}{2}. \quad (4)$$

Для нахождения оптимального значения  $K_\Omega$  приравняем нулю первую производную (4):

$$\frac{dI}{dK_\Omega} = 0.$$

После дифференцирования имеем

$$-\frac{1}{K_\Omega^2} + \tau^2 = 0,$$

откуда оптимальное значение добротности по скорости  $K_\Omega = 1/\tau$ . Численные значения:  $K_\Omega \rightarrow \infty$ ,  $K_\Omega = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $K_\Omega = 2 \text{ с}^{-1}$  и  $K_\Omega = 1 \text{ с}^{-1}$ .

## § 5.6. Частотные оценки динамических свойств

**242.** На рис. 133 изображена амплитудная частотная характеристика замкнутой системы. Определить показатель колебательности.

Ответ.  $M = \frac{|\Phi(j\omega)|_{\max}}{|\Phi(0)|} = \frac{3,2}{2} = 1,6.$

**243.** На рис. 134 изображена амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой следящей системы. Она может быть построена по таблице

|                 |       |       |       |       |      |       |       |       |       |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|
| Re $W(j\omega)$ | -2    | -1,75 | -1,5  | -1,25 | -1   | -0,75 | -0,5  | -0,25 | 0     |
| Im $W(j\omega)$ | -4,95 | -1,8  | -1,75 | -1,6  | -1,4 | -1,05 | -0,85 | -0,65 | -0,55 |

Определить показатель колебательности замкнутой системы.

**Решение.** Для нахождения показателя колебательности необходимо определить параметры окружности, которой касается амплитудно-фазовая характеристика. Параметры окружности связаны с показателем колебательности  $M$  формулами

$$R = \frac{M}{M^2 - 1} \quad \text{и} \quad C = \frac{M^2}{M^2 - 1},$$

где  $R$  — радиус окружности, а  $C$  — сдвиг центра окружности влево от начала координат. В результате подбора определяем, что касающаяся окружность соответствует

$$M=2, \quad R=\frac{2}{3} \quad \text{и} \quad C=\frac{4}{3}.$$

Построение сделано штриховой линией на рис. 134.

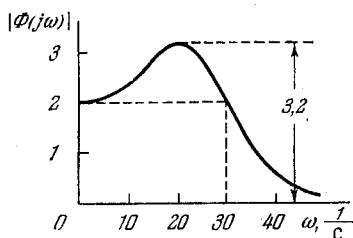


Рис. 133. А. ч. х. замкнутой системы.

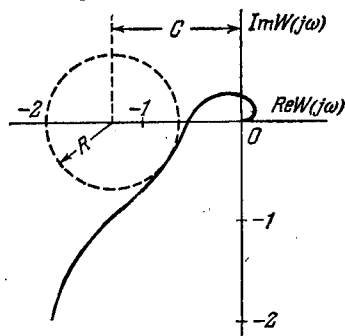


Рис. 134. А. ф. х. разомкнутой системы.

**244.** Передаточная функция разомкнутой следящей системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_{\Omega}}{p(1+Tp)}.$$

Определить соотношение между добротностью по скорости  $K_{\Omega}$  и постоянной времени, при котором система будет иметь показатель колебательности не более заданного значения  $M$ .

Решение. Передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{K_{\Omega}}{K_{\Omega} + p + Tp^2}.$$

Частотная передаточная функция замкнутой системы запишется в виде

$$\Phi(j\omega) = \frac{K_{\Omega}}{K_{\Omega} + j\omega - \omega^2 T}.$$

Ее модуль равен

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{K_{\Omega}}{\sqrt{(K_{\Omega} - \omega^2 T)^2 + \omega^2}}.$$

Исследование на максимум этого выражения дает значение показателя колебательности

$$|\Phi(j\omega)|_{\max} = \frac{2K_{\Omega}T}{\sqrt{4K_{\Omega}T - 1}} = M \quad (\text{при } K_{\Omega}T \geq 0,5).$$

Из последнего выражения находим

$$K_{\Omega} T \leq \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2}.$$

245. Решить предыдущую задачу, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_e (1 + \tau p)}{p^2},$$

где  $K_e$  — добротность по ускорению, а  $\tau$  — постоянная времени корректирующего контура.

Ответ.  $K_e \tau^2 \geq 2 \frac{M^2 - M \sqrt{M^2 - 1}}{M^2 - 1}.$

246. На рис. 135 изображены логарифмические частотные амплитудная и фазовая характеристики (л. а. х. и л. ф. х.) разомкнутой системы. Определить показатель колебательности замкнутой системы.

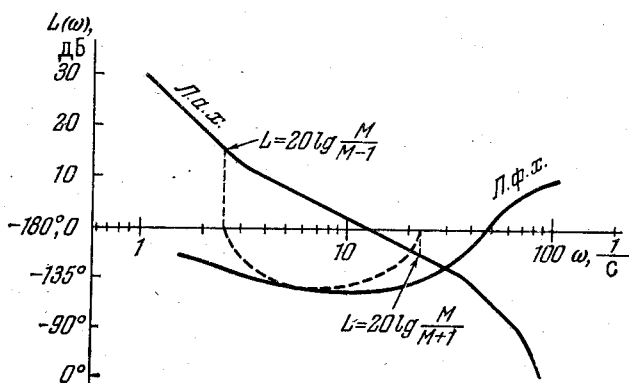


Рис. 135. Л. а. х. и л. ф. х. разомкнутой системы.

Решение. Для нахождения показателя колебательности необходимо таким образом построить запретную зону для фазовой характеристики, чтобы фазовая характеристика касалась этой зоны. Построение запретной зоны делается в соответствии с приложением 8, где приведены необходимые запасы по фазе в функции модуля в децибелах для различных значений показателя колебательности. В результате подбора определяем, что показатель колебательности  $M=1, 2$ . Построение запретной зоны показано штриховой линией на рис. 135.

247. Построить л. а. х. и л. ф. х. и определить показатель колебательности, если передаточная функция разомкнутой системы

имеет вид

$$1) \quad W(p) = \frac{100(1 + 0,173p)}{p^2(1 + 0,035p)};$$

$$2) \quad W(p) = \frac{25(1 + 0,66p)}{p^2(1 + 0,03p)};$$

$$3) \quad W(p) = \frac{400(1 + 0,1p)}{p(1 + p)(1 + 0,013p)};$$

$$4) \quad W(p) = \frac{1\,000(1 + 0,05p)}{p(1 + 0,4p)(0,013p)}.$$

Ответ. 1)  $M = 1,5$ ; 2)  $M = 1,1$ ; 3)  $M = 1,3$ ; 4)  $M = 1,7$ .

248. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_{\Omega}}{p \prod_{i=1}^n (1 + T_i p)}.$$

Определить условие, при котором показатель колебательности замкнутой системы не будет превышать единицу, если число постоянных времени является произвольным, т. е.  $n$  — произвольное целое число.

Ответ.  $K_{\Omega} \sum_{i=1}^n T_i \leq \frac{1}{2}.$

249. Для амплитудной частотной характеристики замкнутой системы (см. рис. 133) определить полосу пропускания системы.

Ответ.  $\omega_n = 30 \text{ с}^{-1}$ ,  $f_n = 4,8 \text{ Гц}$ .

250. Для л. а. х., изображенной на рис. 135, определить ориентировочное значение полосы пропускания.

Ответ. В первом приближении полосу пропускания замкнутой системы можно принять равной частоте среза л. а. х. разомкнутой системы. В результате имеем  $\omega_n \approx \omega_{cp} = 13 \text{ с}^{-1}$  или  $f_n = 2,1 \text{ Гц}$ .

## Глава 6

### СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

#### § 6.1. Выбор параметров САР по требуемой точности

251. Для системы стабилизации углового положения некоторого тела (рис. 136) выбрать такое значение коэффициента передачи по углу  $k_\psi$ , чтобы при внешнем возмущающем моменте  $M(t) = m_0$  отклонение угла  $\psi$  не превышало допустимое значение  $\psi_{\text{доп}}$ .

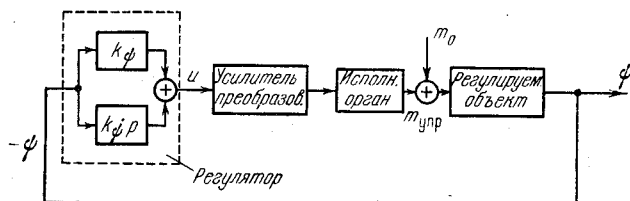


Рис. 136. Блок-схема системы стабилизации углового положения тела.

Уравнения отдельных звеньев системы имеют вид:

1. Уравнение регулируемого объекта

$$J \frac{d\dot{\psi}}{dt} = m_{\text{упр}} + m_0,$$

где  $J$  — момент инерции тела,  $\psi$  — угол поворота тела,  $\dot{\psi}$  — его угловая скорость,  $m_{\text{упр}}$  — управляющий момент со стороны исполнительного органа системы стабилизации,  $m_0$  — внешний возмущающий момент.

2. Уравнение исполнительного органа совместно с усилителем-преобразователем

$$m_{\text{упр}} = k_{\text{ио}} u,$$

где  $k_{\text{ио}}$  — коэффициент передачи исполнительного органа и усилителя-преобразователя.

3. Уравнение регулятора (принятый закон управления)

$$u = -(k_\psi \dot{\psi} + k_\phi \psi).$$

Решение. Уравнение замкнутой системы стабилизации может быть записано в виде

$$J \frac{d^2\psi}{dt^2} + k_{ио}k_{\psi} \frac{d\psi}{dt} + k_{ио}k_{\psi}\psi = m_0,$$

откуда

$$\psi_{доп} \leq \frac{m_0}{k_{ио}k_{\psi}} \quad \text{и} \quad k_{\psi} \geq \frac{m_0}{k_{ио}\psi_{доп}}.$$

252. Определить требуемое значение общего коэффициента усиления  $K$  для системы регулирования температуры (рис. 137) из условия обеспечения нужной точности регулирования в установившемся режиме.

Отклонение регулируемой величины  $\vartheta$  измеряется с помощью термометра сопротивления, включенного в мостовую схему. Напряжение  $u$  с диагонали моста поступает на балансный усилитель  $Ус$ , который управляет двигателем  $Дв$ . Через редуктор  $P$  двигатель приводит в движение регулирующий орган. Регулирующий орган воздействует на объект за счет изменения величины регулирующего воздействия  $\gamma$ .

Уравнения звеньев имеют вид:

1. Уравнение регулируемого объекта

$$(1 + T_1 p) \vartheta = -k_1 \gamma + k_0 f,$$

где  $T_1 [с]$  — постоянная времени объекта,  $k_1$  и  $k_0$  — коэффициенты передачи,  $f$  — возмущающее воздействие.

2. Уравнение чувствительного элемента — моста с термометром сопротивления

$$u = k_2 \vartheta,$$

где  $k_2 [В/град]$  — коэффициент передачи.

3. Уравнение привода вместе с усилителем

$$(1 + T_2 p) p \gamma = k_3 u,$$

где  $T_2 [с]$  — электромеханическая постоянная времени,  $k_3 [1/с]$  — коэффициент передачи.

Решение. Общий коэффициент усиления разомкнутой системы должен выбираться из условия

$$K = k_1 k_2 k_3 \geq \frac{k_0 f}{\vartheta_{доп}},$$

где  $f$  — значение скорости возмущающего воздействия;  $\vartheta_{доп}$  — допустимое значение ошибки в установившемся режиме.

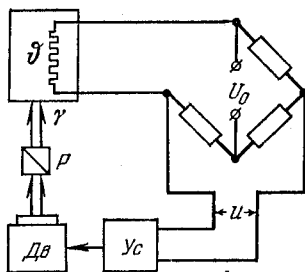


Рис. 137. Система регулирования температуры.

253. Определить требуемое значение коэффициента усиления для тахометрического привода постоянной скорости (рис. 138). Допустимая ошибка скорости вращения при моменте нагрузки по валу двигателя  $M_n = 0,2 M_{кз}$  ( $M_{кз}$  — момент короткого замыкания, развиваемый двигателем) не должна превышать 0,1% от скорости холостого хода.

Решение. Ошибка регулирования  $\Delta\Omega$  состоит из двух слагаемых

$$\Delta\Omega = \frac{1}{1+W(p)} \Omega_3 \pm \frac{W_m(p)}{1+W(p)} M_n, \quad (1)$$

где  $\Omega_3$  — заданная скорость вращения привода,  $W(p)$  — передаточная функция разомкнутой системы,  $W_m(p)$  — передаточная функция разомкнутой системы по моменту нагрузки. Первое слагаемое соответствует ошибке из-за выбранного закона регулирования, второе слагаемое определяет составляющую

ошибки, вызванную действием момента нагрузки  $M_n$ .

Если учитывать постоянную времени усилителя  $T_y$  и электро-механическую постоянную времени двигателя  $T_m$ , то

$$W(p) = \frac{K}{(1+T_m p)(1+T_y p)}$$

и

$$W_m(p) = \frac{\Omega_0/M_{кз}}{(1+T_m p)},$$

где  $\Omega_0$  — скорость холостого хода двигателя,  $K$  — общий коэффициент усиления разомкнутой системы.

Выражение для ошибки регулирования  $\Delta\Omega$  принимает вид

$$\Delta\Omega = \frac{[T_m T_y p^2 + (T_m + T_y)p + 1] \Omega_3}{T_m T_y p^2 + (T_m + T_y)p + 1 + K} \pm \frac{\frac{M_n}{M_{кз}} \Omega_0 (1 + T_y p)}{T_m T_y p^2 + (T_m + T_y)p + 1 + K}. \quad (2)$$

Обычно настройка системы осуществляется таким образом, чтобы ошибка регулирования была наименьшей. Этому условию соответствует такая настройка, при которой в статической системе устраняется статическая ошибка от закона регулирования. Для ликвидации статической ошибки коэффициент передачи главной обратной связи должен отличаться от единицы и быть равным

$$K_{ос} = \frac{K-1}{K},$$

т. е. в системе регулирования должна иметь место неединичная обратная связь.

Чтобы обеспечить требуемую точность поддержания скорости вращения при моменте нагрузки  $M_n = 0,2M_{кз}$ , коэффициент усиления разомкнутой системы  $K$  должен быть выбран из условия

$$\Delta\Omega = \frac{\frac{M_n}{M_{кз}} \Omega_0}{1+K}, \quad (4)$$

откуда

$$K = \frac{\frac{M_n}{M_{кз}} - \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}}{\frac{\Delta\Omega}{\Omega}} = \frac{0,2 - 0,001}{0,001} = 199. \quad (5)$$

**254.** Определить местоположение л. а. х. разомкнутой следящей системы из условия, чтобы ошибка слежения не превышала  $\vartheta_{\max} \leq 1,5'$  при изменении входного воздействия по гармоническому закону

$$\vartheta_1 = \vartheta_{1\max} \sin \omega_k t,$$

где  $\vartheta_{1\max} = 25^\circ$ ,  $\omega_k = 2\pi/T = 6,28$  1/с. Структурная схема следящей системы показана на рис. 139, а.

Решение. Ошибка слежения, вызванная изменением входного воздействия, равна

$$\vartheta_{\max} = \frac{1}{|1+W(j\omega)|} \vartheta_{1\max} \quad \text{при } \omega = \omega_k, \quad (1)$$

где  $W(j\omega)$  — частотная передаточная функция разомкнутой системы. Так как обычно в современных следящих системах  $|W(j\omega_k)| \gg 1$ , то можно воспользоваться приближенной зависимостью

$$\vartheta_{\max} \approx \frac{\vartheta_{1\max}}{|W(j\omega_k)|}. \quad (2)$$

Разрешая выражение (2) относительно  $|W(j\omega)|$ , получим требуемое значение модуля частотной передаточной функции

$$|W(j\omega_k)| = \frac{\vartheta_{1\max}}{\vartheta_{\max}}, \quad (3)$$

или

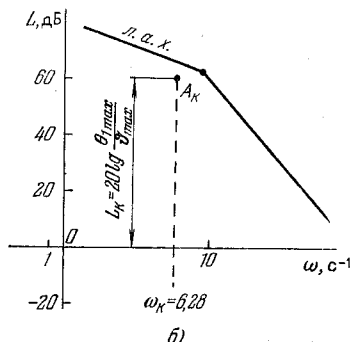
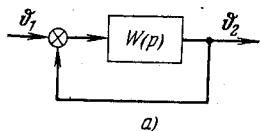
$$L_k = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{\vartheta_{1\max}}{\vartheta_{\max}}. \quad (4)$$

По формуле (4) в логарифмической системе координат (рис. 139, б) построена так называемая контрольная точка  $A_k$ :

$$\omega_k = 6,28 \text{ 1/с}, \quad 20 \lg \frac{\vartheta_{1\max}}{\vartheta_{\max}} = 20 \lg \frac{25 \cdot 60}{1,5} = 60 \text{ дБ.}$$

Требуемая точность слежения будет достигнута, если л. а. х. системы будет лежать выше точки  $A_K$ , в пределе пересекая ее (рис. 139, б).

255. Определить запретную область для л. а. х. разомкнутой следящей системы из условия, чтобы ошибка слежения не превышала  $\Phi_{\max} \leq 1,0'$  при изменении входного воздействия с максимальной скоростью  $\Omega = 40$  град/с и максимальным ускорением  $\varepsilon = 60$  град/с<sup>2</sup>.



Решение. В тех случаях, когда закон изменения входного задающего воздействия неизвестен, расчет можно вести на эквивалентное синусоидальное воздействие [12]. Параметры эквивалентного режима определяются по формулам

$$\omega_K = \frac{\varepsilon}{\Omega} = 1,5 \text{ с}^{-1},$$

$$\theta_{1\max} = \frac{\Omega}{\omega_K} = \frac{\varepsilon}{\omega_K^2} = \frac{40}{1,5} = 26^\circ 7'.$$

Рис. 139. Структурная схема следящей системы (а); построение контрольной точки  $A_K$  (б).

Здесь  $\omega_K$  — угловая частота колебаний эквивалентного синусоидального воздействия,  $\theta_{1\max}$  — амплитуда колебаний эквивалентного синусоидального воздействия.

Координаты контрольной точки  $A_K$  (см. предыдущую задачу) равны (рис. 140)

$$\omega_K = \frac{\varepsilon}{\Omega} = 1,5 \text{ с}^{-1},$$

$$L_K = 20 \lg \frac{\theta_{1\max}}{\Phi_{\max}} = 20 \lg \frac{\Omega^2}{\varepsilon \Phi_{\max}} = 20 \lg 1600 \approx 63 \text{ дБ}.$$

Для построения всей запретной области найдем геометрическое место контрольных точек, соответствующих двум случаям: 1) когда  $\Omega$  максимально, а  $\varepsilon$  убывает до нуля, 2) когда  $\varepsilon$  максимально, а  $\Omega$  убывает до нуля. В первом случае геометрическим местом точек будет являться прямая, проходящая с наклоном 20 дБ/дек через точку  $A_K$ . Во втором случае — прямая с наклоном —40 дБ/дек (см. рис. 140). Для обеспечения требуемой точности слежения л. а. х. разомкнутой следящей системы не должна заходить в запретную зону, ограниченную этими прямыми.

256. Для следящей системы, структурная схема которой показана на рис. 139, а, построить низкочастотную часть желаемой

л. а. х. и определить требуемую величину общего коэффициента усиления из условия обеспечения необходимой точности слежения. Система обладает астатизмом первого порядка. Требования, предъявляемые к точности слежения, те же, что и в задаче 255.

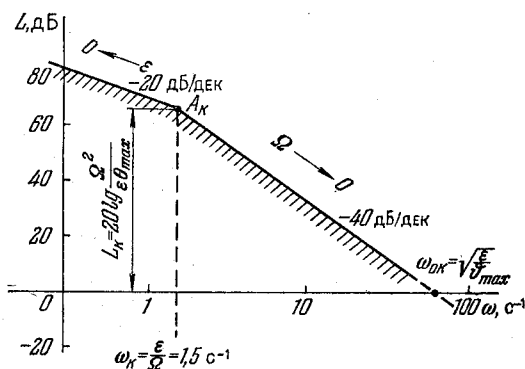


Рис. 140. Построение запретной области.

Решение. Для облегчения задачи демпфирования системы л. а. х. должна располагаться как можно левее. Предельно допустимое смещение л. а. х. влево ограничивается запретной зоной по точности. С этой точки зрения целесообразно, чтобы низкочастотная ветвь желаемой л. а. х., имеющая наклон  $-40$  дБ/дек проходила как можно ближе к линии запретной зоны (рис. 141), т. е. чтобы  $\omega_0 = \omega_{0K}$  и  $T_1 = 1/\omega_K$ .

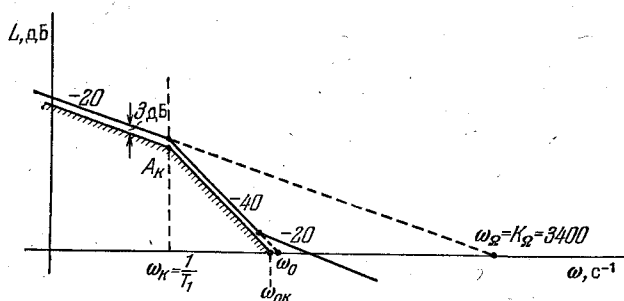


Рис. 141. Построение низкочастотной части желаемой л. а. х.

Однако первая асимптота л. а. х., имеющая наклон  $-20$  дБ/дек должна проходить выше границы запретной области  $3$  дБ (см. рис. 141). Если эту асимптоту продлить до пересечения с нулевой осью, то точка пересечения  $\omega_\Omega$  даст значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы (добротности по скорости  $K_\Omega$ ).

Согласно рис. 141 имеем

$$K_{\Omega} = \sqrt{2} \frac{\Omega}{\vartheta_{\max}} = 1,41 \frac{40 \cdot 600}{1} = 3400 \text{ с}^{-1}.$$

Базовая частота

$$\omega_0 = \sqrt{1,41 \frac{\varepsilon}{\vartheta_{\max}}} = 1,19 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\vartheta_{\max}}} = 1,19 \sqrt{60 \cdot 60} = 71,3 \text{ с}^{-1}.$$

257. Определить требуемую величину общего коэффициента усиления разомкнутой следящей системы. Следящая система обладает астатизмом второго порядка. Остальные данные те же, что в задаче 254.

*Ответ.* Общий коэффициент усиления разомкнутой системы добротность по ускорению  $K_{\varepsilon} = 3600 \text{ с}^{-2}$ .

258. Для следящей системы, обладающей астатизмом первого порядка, определить параметры низкочастотной части желаемой л. а. х. из условия обеспечения требуемой точности слежения без учета и с учетом момента нагрузки. Максимальная скорость слежения  $\Omega = 24 \text{ град/с}$ , максимальное ускорение  $\varepsilon = 20 \text{ град/с}^2$ , допустимая величина ошибки  $\vartheta_{\max} = 0^\circ, 1$ . Момент нагрузки, приведенный к валу двигателя,  $M_n = 2 \text{ гс} \cdot \text{см} = 19,6 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Жесткость механической характеристики  $\beta = \frac{\Omega_0}{M_0} = \frac{5000 \cdot 6}{57,3 \cdot 10} = 52,31/(\text{гс} \cdot \text{см} \cdot \text{с})$  (где  $\Omega_0 = 5000 \text{ об/мин}$  — скорость холостого хода,  $M_0 = 10 \text{ гс} \cdot \text{см} = 9,81 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}$  — пусковой момент двигателя). Передаточное отношение редуктора  $i = 1000$ .

Решение. 1. Момент нагрузки отсутствует (см. задачу 255). Тогда

$$T_1 = \frac{1}{\omega_k} = \frac{\Omega}{\varepsilon} = 1,2 \text{ с}, \quad (1)$$

$$K_{\Omega} = \sqrt{2} \frac{\Omega}{\vartheta_{\max}} = \frac{1,41 \cdot 24}{0,1} = 338 \text{ с}^{-1}. \quad (2)$$

2. Двигатель нагружен моментом  $M_n = 2 \text{ гс} \cdot \text{см}$ . Демпфирование системы осуществляется по первому методу [11], т. е. введением обратных связей, охватывающих двигатель, или производных от угла рассогласования. Тогда

$$T_1 = \frac{1}{\omega_k} = \frac{\Omega}{\varepsilon} = 1,2 \text{ с}, \quad (3)$$

$$K_{\Omega} = \sqrt{2} \frac{\Omega}{\vartheta_{\max}} + \frac{\beta M_n}{\vartheta_{\max} i} = 338 + \frac{104,6 \cdot 57,3}{0,1 \cdot 1000} = 338 + 60 = 398 \text{ с}^{-1}, \quad (4)$$

где  $\vartheta_{\max} i$  — ошибка, приведенная к валу двигателя.

3. Двигатель нагружен,  $M_n = 2 \text{ гс} \cdot \text{см}$ . Демпфирование системы осуществляется по второму методу [11], т. е. введением инерцион-

ности в усилительный канал. Тогда

$$T_1 \leq 0,236 \frac{V(\vartheta_{\max} + \vartheta_m)^3}{\vartheta_m V \varepsilon}, \quad (5)$$

где  $\vartheta_m = \frac{\beta M_n}{K_{\Omega} i}$  — моментная ошибка, приведенная к исполнитель-  
ной оси.

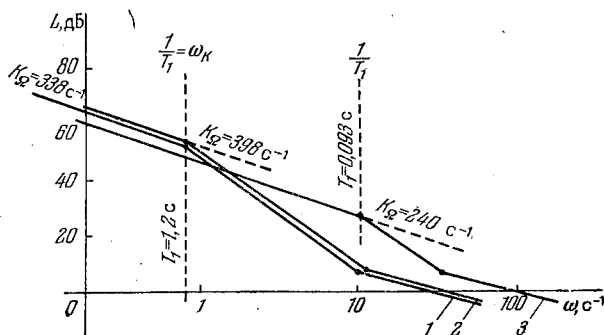


Рис. 142. Низкочастотные ветви желаемой л. а. х.: 1 — без учета момента нагрузки, 2 — с учетом момента нагрузки при первом методе демпфирования, 3 — с учетом момента нагрузки при втором методе демпфирования.

Если общий коэффициент усиления выбрать равным

$$K_{\Omega} = \frac{\Omega}{\vartheta_{\max}} = \frac{24}{0,1} = 240 \text{ с}^{-1},$$

то

$$\vartheta_m = \frac{\beta M_n}{K_{\Omega} i} = \frac{104,6 \cdot 57,3}{240 \cdot 1000} = 0,025^{\circ}$$

и

$$T_1 \leq 0,236 \frac{V(0,1 + 0,025)^3}{0,025 V 20} = 0,0935 \text{ с.}$$

Если величину общего коэффициента усиления увеличить, напри-  
мер, до

$$K_{\Omega} = 300 \text{ с}^{-1},$$

то

$$\vartheta_m = \frac{\beta M_n}{K_{\Omega} i} = \frac{104,6 \cdot 57,3}{300 \cdot 1000} = 0,02^{\circ}$$

и

$$T_1 \leq 0,236 \frac{V(0,1 + 0,02)^3}{0,02 V 20} = 0,11 \text{ с.}$$

Для иллюстрации на рис. 142 построены л. а. х., соответствую-  
щие трем рассмотренным случаям.

259. Для системы регулирования построить низкочастотную часть желаемой л. а. х., если известно, что при изменении входного задающего воздействия по закону  $\vartheta_1 = \vartheta_{1\max} \sin \omega_k t$ , где  $\vartheta_{1\max} = 30^\circ$ ,  $\omega_k = 2\pi/T_k = 12,56 \text{ с}^{-1}$ , допустимая ошибка слежения не должна превышать по фазе  $\Delta\varphi \leq 1^\circ$ , по амплитуде  $\Delta\vartheta/\vartheta_{1\max} \leq 1\%$ . Система обладает астатизмом первого порядка. В области

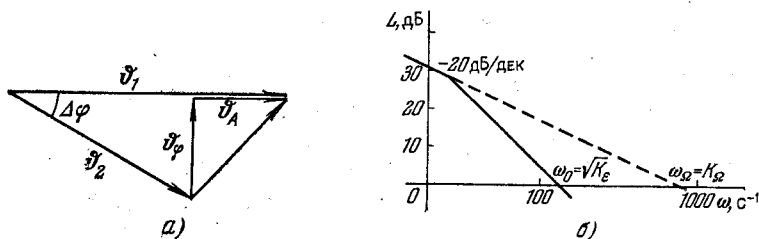


Рис. 143. Векторная диаграмма ошибок (а); низкочастотная часть желаемой л. а. х. (б).

низких частот передаточная функция разомкнутой системы аппроксимируется выражением

$$W(j\omega) = \frac{K_\Omega}{j\omega(1+j\omega T_1)}.$$

Решение. На рис. 143, а показана векторная диаграмма ошибок. Ошибка слежения

$$\vartheta = \frac{\vartheta_1}{1+W(j\omega_k)} = (P + jS)\vartheta_1 = \vartheta_A + \vartheta_\varphi,$$

где  $\vartheta_A$  — синфазная составляющая ошибки,  $\vartheta_\varphi$  — квадратурная составляющая ошибки. Фазовая ошибка

$$\Delta\varphi = \arctg \frac{|\vartheta_\varphi|}{|\vartheta_1 - \vartheta_A|},$$

относительная амплитудная ошибка

$$\frac{\Delta\vartheta}{\vartheta_{1\max}} = \frac{|\vartheta_1| - |\vartheta_2|}{\vartheta_{1\max}}.$$

Если считать, что при частоте  $\omega_k$  модуль  $|W(j\omega_k)| \gg 1$ , то фазовую ошибку можно подсчитать по приближенной формуле

$$\Delta\varphi \approx \frac{1}{\vartheta_{1\max}} \operatorname{Im} \frac{\vartheta_{1\max}}{W(j\omega_k)} = \frac{\omega_k}{K_\Omega},$$

а относительную амплитудную ошибку — по формуле

$$\frac{\Delta\vartheta}{\vartheta_{1\max}} \approx \frac{\vartheta_A}{\vartheta_{1\max}} \approx \frac{1}{\vartheta_{1\max}} \operatorname{Re} \frac{\vartheta_{1\max}}{W(j\omega_k)} = \frac{\omega_k^2 T_1}{K_\Omega} = \frac{\omega_k^2}{K_\Omega}.$$

Задание величины фазовой и относительной амплитудной ошибок определяет предельное левое положение первой и второй асимптот л. а. х.:

$$\omega_{\Omega} = K_{\Omega} = \frac{\omega_k}{\Delta\varphi} = \frac{12,56 \cdot 57,3}{1} = 720 \text{ с}^{-1}.$$

Вид низкочастотной части желаемой л. а. х. показан на рис. 143, б.

260. Для замкнутой системы комбинированного управления определить уровни компенсирующих сигналов по первой и второй производным от входного воздействия, при которых в системе, обладающей астатизмом первого порядка, устраняются скоростная ошибка и ошибка, зависящая от ускорения. Структурная схема замкнутой системы комбинированного управления приведена на рис. 144. Компенсирующие сигналы имеют вид

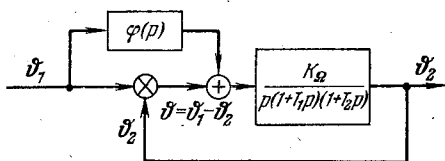


Рис. 144. Структурная схема следящей системы комбинированного управления

$$\varphi(p) \vartheta_1 = (\tau_1 p + \tau_1 \tau_2 p^2) \vartheta_1,$$

где  $\tau_1$  — отношение крутизны сигнала по первой производной от  $\vartheta_1$  к крутизне сигнала по ошибке  $\vartheta$ ,  $\tau_2$  — отношение крутизны сигнала по второй производной к крутизне сигнала по первой производной от  $\vartheta_1$ .

Решение. В системе комбинированного управления выходная величина  $\vartheta_2$  пропорциональна не только ошибке  $\vartheta$ , но и компенсирующему сигналу  $\varphi(p) \vartheta_1$ , т. е.

$$\vartheta_2 = W(p) [\vartheta + \varphi(p) \vartheta_1],$$

где  $W(p) = \frac{K_{\Omega}}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$  — передаточная функция разомкнутой системы. Ошибка в замкнутой системе равна

$$\vartheta = \frac{[1 - W(p) \varphi(p)] \vartheta_1}{1 + W(p)}.$$

Подставляя значения  $W(p)$  и  $\varphi(p)$ , получим

$$\vartheta = \frac{[T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2 - K_{\Omega} \tau_1 \tau_2) p^2 + (1 - K_{\Omega} \tau) p] \vartheta_1}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + K_{\Omega}}.$$

При выполнении условия  $\tau_1 = 1/K_{\Omega}$  в системе устраняется скоростная ошибка. При дополнительном условии

$$T_1 + T_2 = K_{\Omega} \tau_1 \tau_2 \quad \text{или} \quad \tau_2 = T_1 + T_2$$

обращается также в нуль ошибка, зависящая от ускорения.

Эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы соответствует системе, имеющей астатизм третьего порядка:

$$W_s(p) = \frac{W(p) [1 + \Phi(p)]}{1 - W(p) \Phi(p)} = \frac{K_\Omega (1 + \tau_1 p + \tau_1 \tau_2 p^2)}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2 - K_\Omega \tau_1 \tau_2) p^2 + (1 - K_\Omega \tau_1) p} = \frac{K_\Omega (1 + \tau_1 p + \tau_1 \tau_2 p^2)}{T_1 T_2 p^3}.$$

## § 6.2. Алгебраические методы выбора параметров САР

261. Система регулирования напряжения с угольным регулятором (рис. 145) описывается уравнением третьего порядка

$$[(1 + T_0 p)(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) + k_0 k_p] \Delta u = (T_1 p + 1)(1 + T_2 p) f(t),$$

где  $T_0 = 0,02$  с — постоянная времени генератора (объекта регулирования),  $k_0 = 36$  В/Ом — коэффициент передачи генератора,  $T_1$  — постоянная времени чувствительного элемента (обмотки электромагнита),  $T_2$  — постоянная времени регулятора (угольного столба),  $k_p = 0,405$  Ом/В — коэффициент передачи регулятора.

Выбрать варьируемые параметры системы регулирования  $T_1$ ,  $T_2$  так, чтобы обеспечить степень устойчивости  $h_0 \geq 0,4$  при колебательной форме переходного процесса.

Решение. Обратимся к диаграмме Вышнеградского (рис. 146). Характеристическое уравнение системы регулирования имеет вид

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= T_0 T_1 T_2, & a_1 &= T_0 T_1 + T_1 T_2 + T_0 T_2, \\ a_2 &= T_0 + T_1 + T_2, & a_3 &= 1 + k_0 k_p. \end{aligned}$$

Приведем его к нормированному виду

$$q^3 + A q^2 + B q + 1 = 0, \quad (2)$$

где

$$A = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0 a_3}} = \frac{T_0 T_1 + T_0 T_2 + T_1 T_2}{\sqrt[3]{T_0^2 T_1^2 T_2^2 (1 + k_0 k_p)}}, \quad B = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 a_3}} = \frac{T_0 + T_1 + T_2}{\sqrt[3]{T_0 T_1 T_2 (1 + k_0 k_p)^2}} \quad (3)$$

— параметры Вышнеградского.

Решить задачу можно было бы, задавшись предварительно значениями  $A$  и  $B$  (например,  $A = 4$  и  $B = 3$ ), удовлетворяющими поставленным требованиям. Однако такой путь определения  $T_1$  и  $T_2$  связан с решением системы двух кубических уравнений. Проще можно найти значения  $T_1$  и  $T_2$  методом последовательных приближений, задавая их численными значениями и наблюдая траекторию точки с координатами  $A$  и  $B$  на диаграмме Вышнеградского.

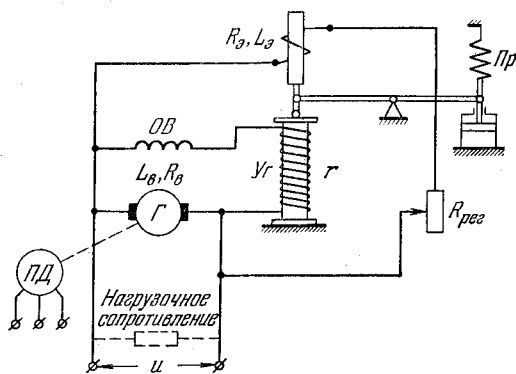


Рис. 145. Система регулирования напряжения с угольным регулятором.

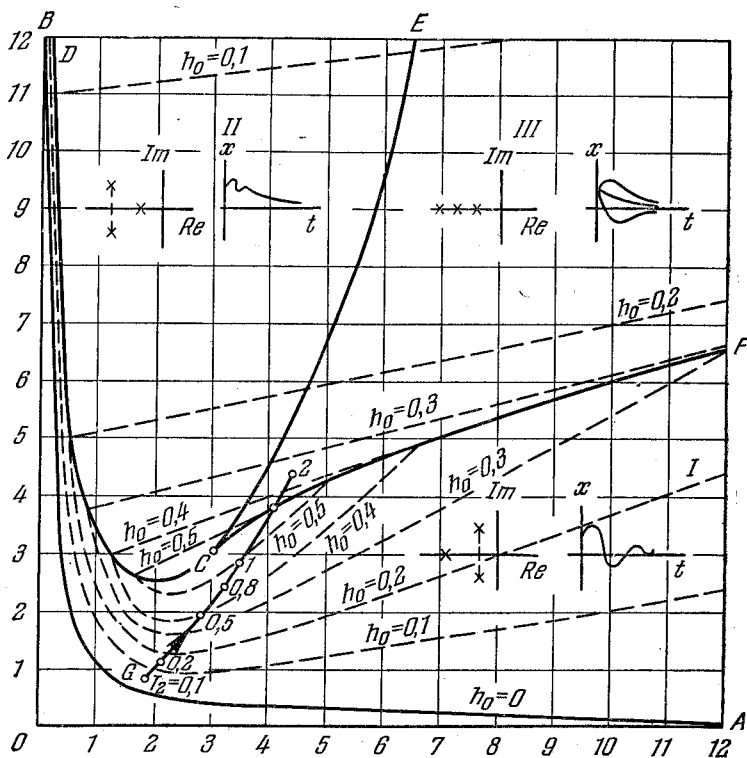


Рис. 146. Построение траектории на диаграмме Вышнеградского.

Подставляя заданные значения параметров в (3), получим расчетные формулы для вычисления  $A$  и  $B$ :

$$A = \frac{0,2(T_1 + T_2) + 10T_1T_2}{1,84\sqrt[3]{(T_1T_2)^2}}, \quad B = \frac{0,02 + T_1 + T_2}{1,7\sqrt[3]{T_1T_2}}. \quad (4)$$

Результаты вычислений  $A$  и  $B$  по формулам (4) при изменении  $T_2$  и при  $T_1 = 0,01$  с приведены ниже.

| $T_2, \text{ с}$ | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,8 | 1   | 2   |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $A$              | 1,8 | 2,1 | 2,8 | 3,3 | 3,5 | 3,8 |
| $B$              | 0,8 | 1,1 | 1,9 | 2,4 | 2,8 | 4,4 |

На диаграмме Вышнеградского (рис.146) построена траектория точки  $G(A, B)$ . Из построения следует, что для обеспечения поставленного требования  $h_0 > 0,4$  достаточно при  $T_1 = 0,01$  с выполнение условия

$$0,5 \text{ с} < T_2 < 1,8 \text{ с}. \quad (5)$$

Это условие может быть выполнено соответствующей настройкой демпфера регулятора.

Если бы траектория  $G$  не попала в желаемую область диаграммы Вышнеградского, то нам пришлось бы изменить значение  $T_1$  и аналогичным образом найти новую, смещенную траекторию, проходящую через нужный участок диаграммы. Изменения параметров  $T_1$  и  $T_2$  следует вести, согласуясь с технической возможностью обеспечения задаваемых значений.

262. Для следящей системы, схема которой приведена на рис. 147, определить требуемые значения коэффициента усиления усилителя  $k_y$  и коэффициента передачи по петле обратной связи  $k_0$  при заданных значениях общего

Рис 147. Следящая система с тахометрической обратной связью.

коэффициента усиления системы  $K_\Omega = 500 \text{ с}^{-1}$  и степени затухания переходного процесса  $\eta = 98\%$ . Передаточная функция разомкнутой системы с учетом тахометрической обратной связи имеет вид

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta} = W(p) = \frac{\frac{K}{1+k_0}}{p\left(1 + \frac{T_m}{1+k_0}p\right)} = \frac{K_\Omega}{p\left(1 + \frac{T_m}{1+k_0}p\right)},$$

где  $T_m = 0,03$  с — электромеханическая постоянная времени двигателя,  $K = k_1 k_{тр} k_y k_d$  — общий коэффициент усиления системы без учета влияния обратной связи,  $k_1 = 1$  В/рад — крутизна чувствительного элемента,  $k_d = \frac{1}{0,55}$  рад/с · В — коэффициент передачи двигателя,  $k_0 = k_y k_d k_{ос}$ ,  $k_{тр} = 3$  — коэффициент трансформации входного трансформатора,  $k_{ос}$  — коэффициент передачи цепи обратной связи.

Решение. Найдем передаточную функцию замкнутой системы относительно ошибки

$$\frac{\Phi}{\Phi_1} = \Phi_\Phi(p) = \frac{p + \frac{1}{T_m} (1 + k_0)}{p^2 + \frac{1}{T_m} (1 + k_0) p + \frac{K}{T_m}}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$p^2 + B_1 p + B_2 = 0,$$

где

$$B_1 = \frac{1}{T_m} (1 + k_0), \quad B_2 = \frac{K}{T_m}.$$

При степени затухания  $\eta = 98\%$  должно выполняться условие

$$B_2 = \left( \frac{\pi^2 + 4}{16} \right) B_1^2 \quad \text{или} \quad K = \frac{\pi^2 + 4}{16 T_m} (1 + k_0)^2,$$

откуда

$$k_y = \frac{(\pi^2 + 4)}{16 T_m k_1 k_d k_{тр}} (1 + k_0)^2.$$

Общий коэффициент усиления системы  $K_\Omega$  связан с коэффициентом усиления  $K$  соотношением

$$K_\Omega = \frac{K}{1 + k_0} = \frac{\pi^2 + 4}{16 T_m} (1 + k_0).$$

Из этого равенства следует, что

$$k_0 = \frac{16 T_m}{\pi^2 + 4} K_\Omega - 1.$$

Численные значения коэффициентов равны

$$k_0 = \frac{16 \cdot 0,03}{3,14^2 + 4} 500 - 1 = 16,3,$$

$$K = K_\Omega (1 + k_0) = 500 (1 + 16,3) = 8700 \text{ с}^{-1},$$

$$k_y = \frac{K}{k_1 k_d k_{тр}} = \frac{8700 \cdot 0,55}{1 \cdot 3} = 1617,$$

$$k_{ос} = \frac{k_0}{k_y k_d} = \frac{16,3 \cdot 0,55}{1617} = 0,0057 \text{ В} \cdot \text{с/рад}.$$

263. Пользуясь методом стандартных переходных характеристик [12] (см. приложение 17), выбрать параметры системы регулирования так, чтобы время затухания переходного процесса было  $t_n \leq 1,5$  с, а величина перерегулирования  $\sigma \leq 10\%$ . Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_e(1+T_1p)}{p^2(1+T_2p)},$$

где  $K_e$  — общий коэффициент усиления разомкнутой системы по ускорению,  $T_1$  и  $T_2$  — постоянные времени.

Решение. Соответствующая стандартная передаточная функция имеет вид (приложение 17)

$$W(p) = \frac{6,3\omega_0^2 p + \omega_0^2}{p^2 + 5,1\omega_0 p^2} = \frac{\frac{\omega_0^2}{5,1} \left(1 + \frac{6,3}{\omega_0} p\right)}{p^2 \left(1 + \frac{1}{5,1\omega_0} p\right)}.$$

Приравнявая ее заданной передаточной функции, получим условия для выбора параметров:

$$K_e = \frac{\omega_0^2}{5,1}, \quad T_1 = \frac{6,3}{\omega_0}, \quad T_2 = \frac{1}{5,1\omega_0}.$$

Для того чтобы время затухания переходного процесса не превышало заданной величины, необходимо, чтобы

$$\omega_0 = \frac{\tau}{t_n} = \frac{9}{1,5} = 6 \text{ с}^{-1},$$

где  $\tau$  — время переходного процесса. Тогда

$$K_e = \frac{36}{5,1} = 7,05 \text{ с}^{-2},$$

$$T_1 = \frac{6,3}{6} = 1,05 \text{ с},$$

$$T_2 = \frac{1}{5,1 \cdot 6} = 0,032 \text{ с}.$$

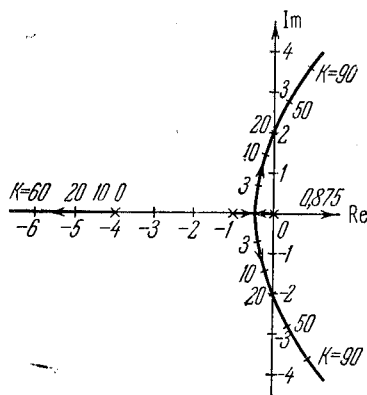


Рис. 148. Корневой годограф к задаче 265

Таким образом, передаточная функция разомкнутой системы должна иметь вид

$$W(p) = \frac{7,05(1+1,05p)}{p^2(1+0,0326p)}.$$

264. Пользуясь методом стандартных переходных характеристик (приложение 17), выбрать параметры следующей системы так, чтобы

общий коэффициент усиления разомкнутой системы по ускорению был  $K_e \geq 100 \text{ с}^{-2}$ , а величина перерегулирования  $\sigma \leq 10\%$ . Общий вид передаточной функции разомкнутой системы тот же, что в задаче 263.

Ответ.  $W(p) = \frac{100(1+0,28p)}{p^2(1+0,0087p)}.$

265. Для системы автоматического регулирования, имеющей в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{k}{p\left(p+\frac{1}{T_1}\right)\left(p+\frac{1}{T_2}\right)},$$

где  $T=1 \text{ с}$ ,  $T_2=0,25 \text{ с}$ ,  $k=\frac{K}{T_1T_2}$ , построить корневой годограф.

Ответ. Корневой годограф состоит из трех ветвей, поскольку знаменатель функции  $W(p)$  имеет третью степень. Вид годографа показан на рис. 148.

### § 6.3. Частотные методы выбора параметров САР. Расчет последовательных корректирующих устройств

266. Построить желаемую л. а. х. и произвести выбор последовательного корректирующего устройства для системы автоматического регулирования, если передаточная функция разомкнутой системы при отсутствии корректирующего устройства имеет вид

$$W(p) = \frac{K_\Omega}{p(p+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)(1+T_4p)},$$

где  $T_1=0,1 \text{ с}$ ,  $T_2=0,02 \text{ с}$ ,  $T_3=0,01 \text{ с}$ ,  $T_4=0,005 \text{ с}$ .

Система регулирования должна быть астатической системой первого порядка и удовлетворять следующим показателям качества:

а) коэффициент ошибки по скорости  $C_1 = \frac{1}{200} \text{ с}$ ; б) коэффициент ошибки по ускорению  $C_2 = 0,06 \text{ с}^2$ ; в) перерегулирование  $\sigma$  при единичном ступенчатом задающем воздействии не должно превышать 30%; г) время переходного процесса  $t_n$  при единичном ступенчатом задающем воздействии не должно быть больше чем 0,8 с при числе колебаний, не превышающем двух.

Решение. В соответствии с методом [12, 32] на рис. 149 построена исходная л. а. х.  $L$  нескорректированной системы с коэффициентом усиления  $K_\Omega$ , равным требуемому

$$K_\Omega = \frac{1}{C_1} = 200 \text{ с}^{-1}.$$

Затем по заданным показателям качества построена желаемая л. а. х.  $L_{ж}$ . Первая сопрягающая частота желаемой л. а. х., согласно пункту

б), определяется из следующего приближенного выражения:

$$\omega_1 \approx \frac{1}{C_2 K_\Omega} = \frac{1}{0,06 \cdot 200} \approx 0,08 \text{ с}^{-1}.$$

Для обеспечения условия пункта в) достаточно, чтобы желаемая л. а. х.  $L_{\text{ж}}$  имела запас устойчивости по модулю  $\pm 16$  дБ и по фазе  $45^\circ$  (рис. 150).

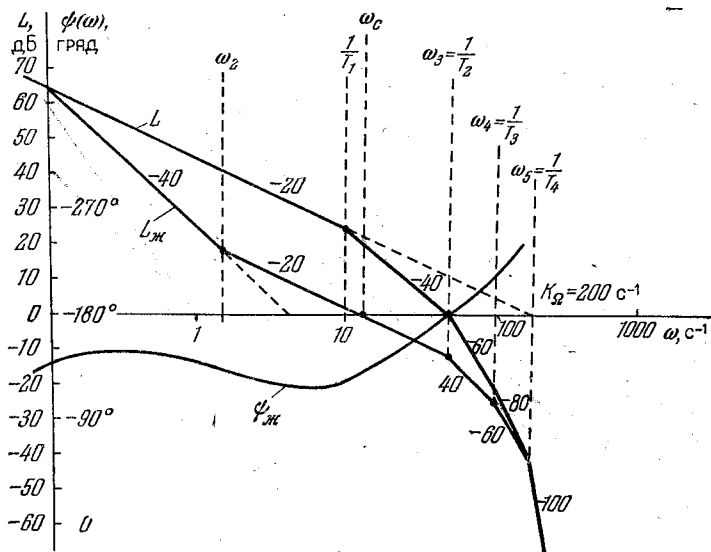


Рис. 149. Логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики к задаче 266.

Найдем теперь значение частоты среза  $\omega_c$ . Пользуясь приложением 14, получим при  $\sigma = 30\%$ , что соответствует  $P_{\text{max}} = 1,3$ ,

$$\omega_c \approx \frac{11,5}{t_{\text{II}}} \approx 14 \text{ с}^{-1}.$$

Проведем через точку  $\omega_c$  прямую с наклоном 20 дБ на декаду. Пересечение этой прямой со второй асимптотой желаемой л. а. х., имеющей наклон 40 дБ на декаду, дает вторую сопрягающую частоту,  $\omega_2 = 1,3 \text{ с}^{-1}$ . В рассматриваемом примере  $\omega_c/\omega_2 > 10$ , что вполне допустимо. Таким образом, желаемый вид  $L_{\text{ж}}$  при  $\omega < \omega_c$  найден. Перейдем к выводу формы  $L_{\text{ж}}$  при  $\omega > \omega_c$ , обращая особое внимание на то, чтобы на каждом из участков наклон желаемой л. а. х. возможно меньше отличался от наклона исходной л. а. х.

Попытаемся удовлетворить заданным условиям качества, ограничившись разностью наклонов между  $L_{\text{ж}}$  и  $L$ , не превышающей 20 дБ

на декаду. Тогда  $L_{\text{ж}}$  должна иметь, как это ясно из рис. 149, сопрягающие частоты  $\omega_3 = 50 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_4 = 100 \text{ с}^{-1}$ , соответствующие сопрягающим частотам исходной л. а. х. Начиная с частоты  $\omega_5 = 200 \text{ с}^{-1}$ , желаемая л. а. х. совпадает с исходной л. а. х. Желаемая передаточная функция имеет вид

$$W_{\text{ж}}(p) = \frac{K_{\Omega} \left(1 + \frac{p}{1,3}\right)}{p \left(1 + \frac{p}{0,08}\right) \left(1 + \frac{p}{50}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{200}\right)^2}.$$

Запас устойчивости определяется видом логарифмических характеристик в области средних частот, т. е. в интервале  $\omega_2 \leq \omega \leq \omega_3$ . Проверим, имеет ли полученная л. а. х.  $L_{\text{ж}}$  требуемый запас устойчивости по фазе при  $L_{\text{ж}} = 16 \text{ дБ}$  ( $\omega = \omega_2$ ),  $0 \text{ дБ}$  ( $\omega = \omega_c$ ) и  $14 \text{ дБ}$  ( $\omega = \omega_3$ ). Согласно рис. 149 при  $L_{\text{ж}} = 16 \text{ дБ}$   $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$  и

$$\psi(2) = -90 - \arctg \frac{2}{0,08} + \arctg \frac{2}{1,3} = -121^\circ.$$

Это соответствует запасу по фазе

$$\mu = 180^\circ + \psi = 180^\circ - 121^\circ = 59^\circ.$$

При  $L_{\text{ж}} = -14 \text{ дБ}$ ,  $\omega = 50 \text{ с}^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \psi(50) &= -90 - \arctg \frac{50}{50} - \\ &- \arctg \frac{50}{100} - 2 \arctg \frac{50}{200} = -190^\circ \end{aligned}$$

и соответственно  $\mu = 180^\circ - 190^\circ = -10^\circ$ . При  $L_{\text{ж}} = 0$ ,  $\omega = \omega_c = 14 \text{ с}^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \psi(14) &= -90^\circ - \arctg \frac{14}{0,08} + \arctg \frac{14}{1,3} - \arctg \frac{14}{50} - \\ &- \arctg \frac{14}{100} - 2 \arctg \frac{14}{200} = -108^\circ, \end{aligned}$$

и соответственно

$$\mu = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

Из трех полученных значений  $\psi(\omega)$  только второе не укладывается в требуемые пределы. Это может привести к незначительному увеличению абсолютного значения  $|P_{\min}|$  по сравнению с принятым ( $|P_{\min}| = P_{\max} - 1 = 0,3$ ), что, как известно [12, 66], не существенно. Поэтому найденная л. а. х.  $L_{\text{ж}}$  может использоваться для синтеза корректирующих средств.

Вычитая ординаты  $L$  из ординат желаемой л. а. х.  $L_{\text{ж}}$  (рис. 149), получим л. а. х. последовательного корректирующего устройства,

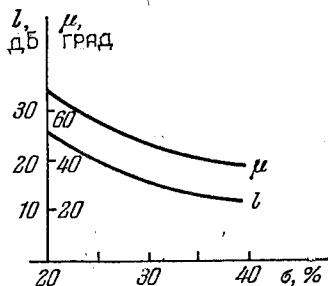
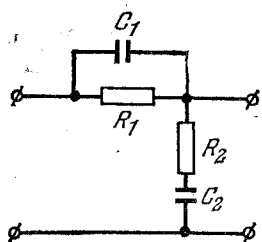


Рис. 150. Кривые для выбора запаса устойчивости по модулю и по фазе.

которая на рис. 149 не показана. В рассматриваемой задаче в качестве корректирующего устройства нужно использовать пассивное интегро-дифференцирующее звено (рис. 151), передаточная функция которого имеет вид



$$W_k(p) = \frac{\left(1 + \frac{p}{1,3}\right) \left(1 + \frac{p}{10}\right)}{\left(1 + \frac{p}{0,08}\right) \left(1 + \frac{p}{200}\right)} = \frac{(1 + 0,77p)(1 + 0,1p)}{(1 + 12,5p)(1 + 0,05p)}$$

Рис. 151. Пассивное интегро-дифференцирующее звено.

Для проверки полученных результатов построим фазовую характеристику  $\psi_{\text{ж}}(\omega)$  (рис. 149), а также, пользуясь номограммой приложения 12, определим вещественную частотную характеристику  $P(\omega)$  замкнутой системы (рис. 152, а). Применяя метод трапецидальных характеристик, построим график переходного процесса (рис. 152, б). Переходный процесс в системе удовлетворяет заданным показателям качества.

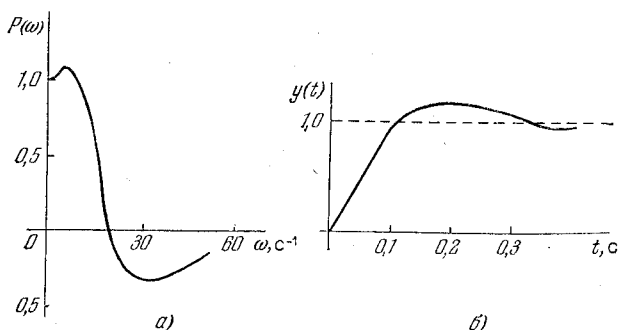


Рис. 152. Вещественная частотная характеристика замкнутой системы (а); график переходного процесса (б).

**267.** Произвести выбор последовательного корректирующего устройства для системы автоматического регулирования. Передаточная функция разомкнутой системы без коррекции имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)},$$

где  $T_1 = 0,05$  с,  $T_2 = 0,1$  с,  $T_3 = 0,2$  с. Скорректированная система должна обеспечивать следующие показатели качества переходного процесса при ступенчатом задающем воздействии: а) перерегулирование  $\sigma \leq 20\%$ ; б) время затухания переходного процесса

$t_n \leq 0,6$  с при числе колебаний  $n \leq 3$ ; в) установившаяся ошибка  $\Delta$  не должна превышать 3%.

Решение. Произведем выбор корректирующего устройства при помощи амплитудно-фазовых характеристик [4]. Для получения установившейся ошибки в 3% необходимо, чтобы коэффициент передачи системы был не ниже:

$$K = \frac{1-\Delta}{\Delta} = \frac{1-0,03}{0,03} = 32.$$

Для построения амплитудно-фазовой характеристики скорректированной системы нужно выбрать соответствующую форму вещественной частотной характеристики  $P(\omega)$ .

Исходя из заданных показателей качества, а также задавая коэффициент наклона  $\chi = 0,7$ , найдем, пользуясь номограммой (см. приложение 15), значения вещественной частотной характеристики  $P(\omega)$ , обеспечивающей нужные качественные показатели скорректированной системы. Для  $\sigma = 20\%$  и  $P_{\max} = 1,0$  находим  $P_{\min} = 0,3$ ; запас устойчивости по модулю  $\Delta R = 55\%$ , запас по фазе  $\Delta\varphi = 40^\circ$ , а также  $t_n = 3,8\pi/\omega_n$ . При заданном времени регулирования получим интервал положительности

$$\omega_n = \frac{3,8\pi}{t_n} = \frac{3,8\pi}{0,6} \approx 20 \text{ с}^{-1}.$$

На основании значения  $\omega_n$  и параметров, положенных в основу номограммы приложения 15, построена вещественная частотная характеристика  $P(\omega)$  (рис. 153, а).

$$\text{Начальная ордината } P(0) = \frac{K}{1+K} = \frac{32}{1+32} = 0,97,$$

$$\omega_a = \chi \omega_n 0,7 \cdot 20 = 14 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_b = \lambda \omega_n 0,5 \cdot 20 = 10 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_a = \chi_a \omega_b 0,5 \cdot 10 = 5 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_2 = 25 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_0 = \frac{\omega_2}{\lambda_1} = \frac{25}{0,6} = 42 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_1 = \chi_1 \omega_0 = 0,7 \cdot 42 = 29 \text{ с}^{-1}.$$

При помощи графика  $Q = f(\omega/\omega_0)$ , составленного для трапеции высотой, равной единице (рис. 153, б), построена мнимая частотная характеристика замкнутой системы (рис. 153, в).

По характеристикам  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  легко построить амплитудно-фазовую характеристику скорректированной системы [4]. Эта характеристика построена на рис. 154, а по данным табл. 1. На рис. 154, б штриховой линией изображена амплитудно-фазовая характеристика нескорректированной системы (табл. 2).

Модуль и аргумент амплитудно-фазовой характеристики корректирующего устройства получаются из характеристик нескорректированной и скорректированной систем

$$R_k(\omega) e^{i\psi_k(\omega)} = \frac{R_c(\omega)}{R(\omega)} e^{j[\psi_c(\omega) - \psi(\omega)]}.$$

Данные вычислений сведены в табл. 3.

По найденным значениям можно построить амплитудно-фазовую характеристику корректирующего устройства.

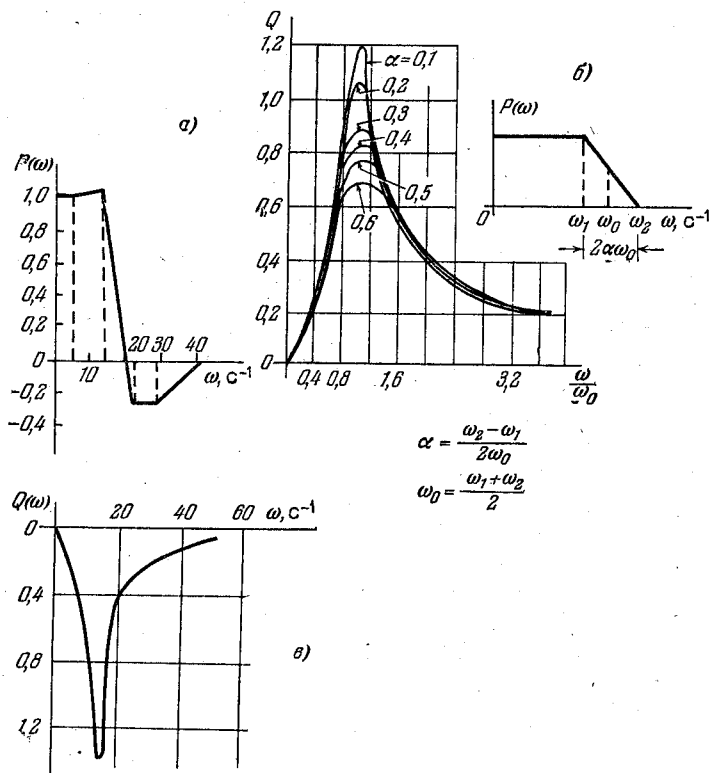


Рис. 153. Вещественная частотная характеристика (а); график  $Q = f(\omega/\omega_0)$  (б); мнимая частотная характеристика (в).

Дальнейшее решение задачи состоит в том, чтобы выбрать такой тип корректирующего контура, амплитудно-фазовая характеристика которого наиболее близко совпадает с расчетной амплитудно-фазовой характеристикой корректирующего устройства.

Предположим, что в области низких и высоких частот амплитудно-фазовые характеристики скорректированной и нескорректированной

систем должны совпадать. Тогда в качестве корректирующего контура следует выбрать пассивное интегро-дифференцирующее звено с передаточной функцией

$$W_K(p) = \frac{(1 + T_{2K}p)(1 + T_{3K}p)}{(1 + T_{1K}p)(1 + T_{4K}p)}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика этого контура представляет собой окружность с центром в точке  $O_1$  (рис. 154, в). Взяв для любых четырех точек значения модуля  $R_K$  или фазы  $\psi_K$ , найдем постоянные времени  $T_{1K} = 1,85$  с,  $T_{2K} = 0,18$  с,  $T_{3K} = 0,08$  с,  $T_{4K} = 0,02$  с.

Т а б л и ц а 1

Амплитудно-фазовая характеристика скорректированной системы

| $\omega, \text{с}^{-1}$ | 20           | 25           | 30           | 40           | 50           |
|-------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $R_c(\omega)$           | 0,37         | 0,20         | 0,17         | 0,11         | 0,06         |
| $\psi_c(\omega)$        | $-116^\circ$ | $-130^\circ$ | $-150^\circ$ | $-160^\circ$ | $-181^\circ$ |

Т а б л и ц а 2

Амплитудно-фазовая характеристика нескорректированной системы

| $\omega, \text{с}^{-1}$ | 15           | 20           | 25           | 30           | 40           | 50           |
|-------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $R(\omega)$             | 4,6          | 2,3          | 1,15         | 0,99         | 0,5          | 0,23         |
| $\psi(\omega)$          | $-164^\circ$ | $-185^\circ$ | $-200^\circ$ | $-208^\circ$ | $-220^\circ$ | $-231^\circ$ |

Т а б л и ц а 3

Амплитудно-фазовая характеристика корректирующего устройства

| $\omega, \text{с}^{-1}$ | 15         | 20         | 25         | 30         | 40         | 50         |
|-------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $R_K(\omega)$           | 0,23       | 0,16       | 0,174      | 0,17       | 0,22       | 0,26       |
| $\psi_K(\omega)$        | $33^\circ$ | $69^\circ$ | $70^\circ$ | $58^\circ$ | $60^\circ$ | $50^\circ$ |

268. Определить передаточную функцию последовательного корректирующего устройства для следящей системы, передаточная функция которой имеет вид

$$W(p) = \frac{K_g}{p^2(1 + T_1p)(1 + T_2p)(1 + T_3p)},$$

где  $T_1 = 0,04$  с,  $T_2 = 0,01$  с,  $T_3 = 0,002$  с. Следящая система должна иметь астатизм второго порядка и удовлетворять следующим показателям качества: а) общий коэффициент усиления по ускорению

$K_e \geq 100 \text{ с}^{-2}$ ; б) перерегулирование  $\sigma \leq 30\%$ ; в) время затухания переходного процесса  $t_n \leq 0,45 \text{ с}$ .

Ответ.  $W_k(p) = \frac{(1+0,25p)(1+0,04p)}{(1+0,0029p)(1+0,00066p)}$ .

График переходного процесса построен на рис. 155.

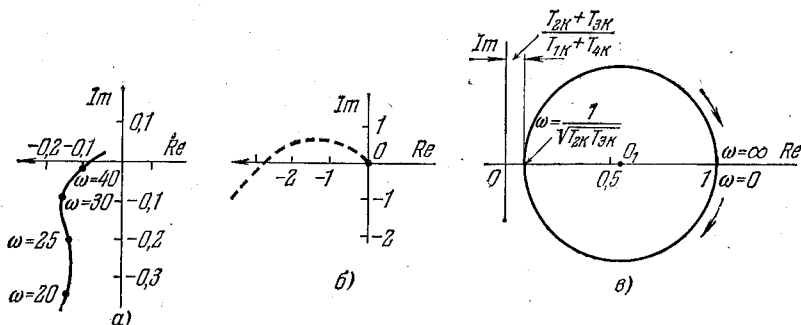


Рис. 154. Амплитудно-фазовые характеристики: а) скорректированной системы; б) нескорректированной системы; в) корректирующего устройства.

269. Произвести динамический синтез следящей системы по следующим качественным показателям: ошибка  $x_{\max} \leq 0,1$  град при максимальной скорости слежения  $\Omega_{1 \max} = 20$  град/с и максимальном ускорении  $\varepsilon_{1 \max} = 5$  град/с<sup>2</sup>; запас устойчивости оценивается по показателю колебательности  $M \leq 1,5$ . Передаточная функция исходной нескорректированной системы имеет вид

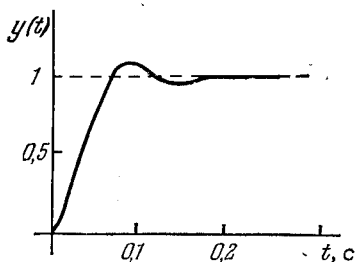


Рис. 155. График переходного процесса к задаче 268.

$$W(p) = \frac{K_\Omega}{p(1+Tp)},$$

где  $T=0,1 \text{ с}$ .

Решение. Определяем запретную область по точности (рис. 156):

$$\omega_k = \frac{\varepsilon_{1 \max}}{\Omega_{1 \max}} = \frac{5}{20} = 0,25 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_\Omega = \frac{\Omega_{1 \max}}{x_{\max}} = \frac{20}{0,1} = 200 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_{\text{ок}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{1 \max}}{x_{\max}}} = \sqrt{\frac{5}{0,1}} = 7,07 \text{ с}^{-1}.$$

Желаемую л. а. х. системы  $L_{\text{ж}}$  в области низких частот формируем из двух отрезков прямых, имеющих наклон  $-20 \text{ дБ/дек}$  и  $-40 \text{ дБ/дек}$

с точкой излома на частоте

$$\omega_k = \frac{1}{T_1} = 0,25 \text{ с}^{-1}.$$

Для обеспечения требуемой точности  $L_{\text{ж}}$  приподнимаем над запретной областью на 3 дБ, т. е. необходимое значение общего

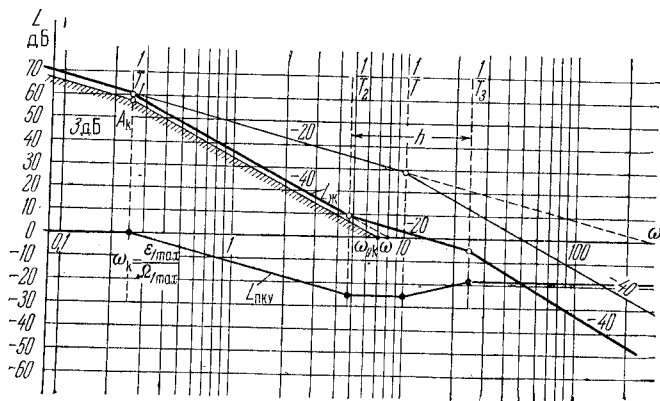


Рис. 156. Л. а. х. к задаче 269.

коэффициента усиления определяется из условия

$$K_{\Omega} = 1,41 \omega_{\Omega} = 1,41 \frac{\Omega_1 \max}{x_{\max}} = 282 \text{ с}^{-1},$$

и

$$\omega_0 = 1,19 \omega_{\text{ок}} = 1,19 \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \max}{x_{\max}}} = 8,42 \text{ с}^{-1}.$$

Определяем постоянные времени  $T_2$  и  $T_3$  (см. рис. 156):

$$T_2 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{8,42} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,206 \text{ с},$$

$$T_3 = \frac{T_2}{h} = \frac{T_2 (M-1)}{M+1} = 0,042 \text{ с}.$$

Передаточная функция скорректированной системы, т. е. соответствующая желаемой л. а. х., может быть записана в виде

$$W_{\text{ск}}(p) = \frac{K_{\Omega} (1 + T_2 p)}{p (1 + T_1 p) (1 + T_3 p)}.$$

Для коррекции системы следует использовать пассивное интегро-дифференцирующее звено с передаточной функцией

$$W_{\text{пкз}}(p) = \frac{(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)}.$$

Схема этого звена и его частотные характеристики показаны на рис. 157.

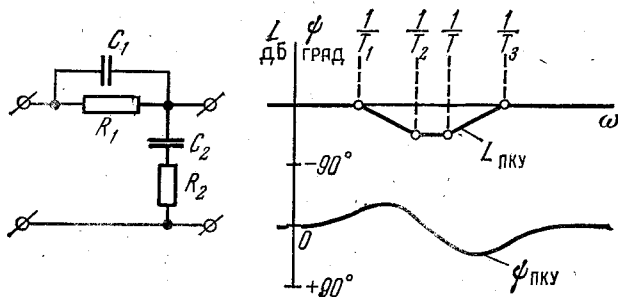


Рис. 157. Интегро-дифференцирующее звено и его частотные характеристики.

270. Определить последовательное корректирующее устройство и рассчитать необходимый коэффициент усиления усилителя  $k_2$  для следящей системы, структурная схема которой изображена на рис. 158. На схеме обозначено:

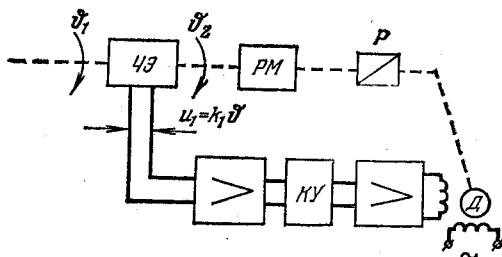


Рис. 158. Схема следящей системы.

$Д$  — двигатель,  $КУ$  — корректирующее устройство,  $Р$  — редуктор,  $ЧЭ$  — чувствительный элемент, определяющий рассогласование,  $РМ$  — рабочий механизм,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы поворота задающего и исполнительного валов.

Исходные данные:

1) крутизна чувствительного элемента

$$k_1 = 10 \text{ мВ/угл. мин} = 34,4 \text{ В/рад};$$

2) передаточное отношение редуктора  $i = 3500$ ;

3) максимальная скорость слежения  $\Omega = 5 \text{ град/с} = 300 \text{ угл. мин/с}$

4) максимальное ускорение

$$\varepsilon = 2 \text{ град/с}^2 = 120 \text{ угл. мин/с}^2;$$

5) максимальная ошибка  $\vartheta_{\max} = 1'$ ;

6) максимальное напряжение выхода усилителя  $U_{\max} = 110 \text{ В}$ ;

7) максимальная скорость двигателя при полном открытии усилителя  $\Omega_{\text{дmax}} = 6000 \text{ об/мин} = 630 \text{ 1/с}$ ;

8) пусковой момент  $M_0 = 100 \text{ гс} \cdot \text{см} = 9,81 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$ ; механические характеристики двигателя совместно с усилителем представляют собой параллельные прямые;

9) момент нагрузки на оси двигателя  $M_n = 10 \text{ гс} \cdot \text{см} = 9,81 \times 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

10) момент инерции, приведенный к оси двигателя,  $J = 0,018 \text{ гс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2 = 17,6 \cdot 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;

11) постоянная времени усилителя  $T_y = 0,02 \text{ с}$ ;

12) показатель колебательности  $M \leq 1,5$ .

Решение. Передаточная функция разомкнутой системы при отсутствии корректирующих устройств равна произведению передаточных функций звеньев:

$$W(p) = \frac{k_1 k_2 k_3 \frac{1}{i}}{p(1+T_{\text{д}}p)(1+T_{\text{yp}}p)} = \frac{K_{\Omega}}{p(1+T_{\text{д}}p)(1+T_{\text{yp}}p)}. \quad (1)$$

Коэффициент передачи двигателя равен

$$k_3 = \frac{\Omega_{\text{дmax}}}{U_{\max}} = \frac{630}{110} = 5,73 \text{ В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Коэффициент наклона механических характеристик данного двигателя вместе с редуктором

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\beta_0}{i} = \frac{\Omega_{\text{дmax}}}{i M_0} = \frac{630}{3500 \cdot 100} = \\ &= 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ 1/(гс} \cdot \text{см} \cdot \text{с)} = 6,3 \text{ угл. мин/(гс} \cdot \text{см} \cdot \text{с)}. \end{aligned}$$

Постоянная времени двигателя

$$T_{\text{д}} = \beta_0 J = \frac{630}{100} 0,018 \approx 0,1 \text{ с}.$$

Для определения необходимого значения общего коэффициента усиления (добротности) по скорости  $K_{\Omega}$  построим запретную зону для низкочастотной части л. а. х. (см. задачу 255). Контрольная частота

$$\omega_k = \frac{\varepsilon}{\Omega} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ с}^{-1}.$$

Ордината контрольной точки

$$L_k = 20 \lg \frac{\Omega^2 + \beta M_n \Omega}{\Phi_{\max} e} = 20 \lg \frac{300^2 + 6,3 \cdot 10 \cdot 300}{1 \cdot 120} = 59 \text{ дБ.}$$

Предельное значение добротности по скорости

$$K_\Omega = \frac{\Omega + \beta M_n}{\Phi_{\max}} = \frac{300 + 6,3 \cdot 10}{1} = 363 \text{ с}^{-1}.$$

По этим данным построена запретная область (рис. 159).

Проверим возможность работы следящей системы без корректирующих звеньев. Так как первая сопрягающая частота л. а. х. передаточной функции (1), равная  $\omega_1 = \frac{1}{T_d} = 10 \text{ с}^{-1}$ , значительно больше контрольной частоты  $\omega_k = 0,8 \text{ с}^{-1}$ , то можно в качестве

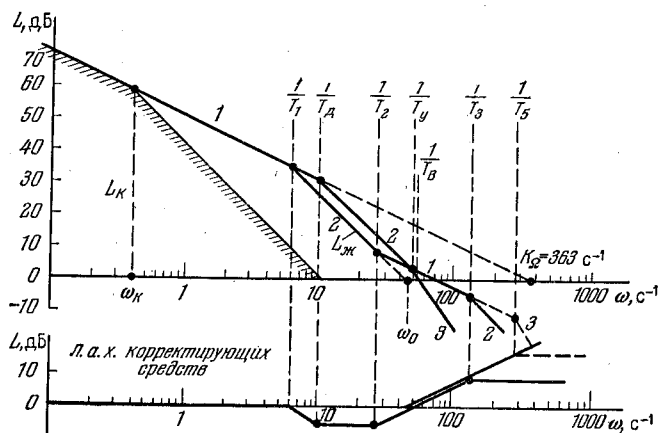


Рис. 159. Л. а. х. к задаче 270.

окончательного значения добротности по скорости принять значение, равное  $363 \text{ с}^{-1}$ . Соответствующая л. а. х. типа 1—2—3 показана на рис. 159.

Допустимая сумма постоянных времени

$$\Sigma T = \frac{1}{K_\Omega} \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2} = \frac{1}{363} \frac{1,5^2 + 1,5 \sqrt{1,5^2 - 1}}{2} = 0,0054 \text{ с.}$$

В действительности сумма имеющихся постоянных времени

$$\Sigma T = T_d + T_y = 0,10 + 0,02 = 0,12 \text{ с.}$$

Таким образом, убеждаемся, что без корректирующих устройств система не будет обладать требуемым показателем качества.

Рассмотрим возможный способ улучшения динамических свойств системы при помощи последовательных звеньев [11].

При введении в прямой канал пассивного звена, содержащего инерционную часть, необходимо так сформировать желаемую л. а. х., чтобы пик ошибки в районе перемены знака скорости не превосходил заданного максимального значения  $\vartheta_{\max}$ . Найденному значению добротности по скорости  $K_{\Omega} = 363 \text{ с}^{-1}$  соответствует добротность по моменту

$$K_m = \frac{K_{\Omega}}{\beta} = \frac{363}{6,3} \approx 57,5 \text{ гс} \cdot \text{см/угл} \cdot \text{мин.}$$

Моментная ошибка

$$\vartheta_m = \frac{M_H}{K_m} = \frac{10}{57,5} \approx 0,174'.$$

Допустимое значение большей постоянной времени

$$T_1 = 0,236 \frac{\sqrt{(\vartheta_{\max} + \vartheta_m)^3}}{\vartheta_m \sqrt{\varepsilon}} = 0,236 \frac{\sqrt{(1 + 0,174)^3}}{0,174 \sqrt{120}} = 0,16 \text{ с.}$$

По добротности  $K_{\Omega} = 363 \text{ с}^{-1}$  и постоянной времени  $T_1 = 0,16$  с можно построить низкочастотную часть л. а. х. (рис. 159). Базовая частота л. а. х.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{\Omega}}{T_1}} = \sqrt{\frac{363}{0,16}} = 47,5 \text{ с}^{-1}.$$

Сформируем теперь низкочастотную и высокочастотную части желаемой л. а. х. типа  $1-2-1-2$ . По базовой частоте определим требуемое значение второй постоянной времени:

$$T_2 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{47,5} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,0365 \text{ с.}$$

Третья постоянная времени равна

$$T_3 = \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} = \frac{1}{47,5} \frac{\sqrt{1,5(1,5-1)}}{1,5+1} = 0,0073 \text{ с.}$$

По этим данным построена вся желаемая л. а. х.  $L_{\text{ж}}$ . Л. а. х. корректирующих средств получается в результате вычитания ординат располагаемой л. а. х. из ординат желаемой л. а. х. Эта разностная л. а. х. также изображена на рис. 159. Из вида этой л. а. х. следует, что последовательное корректирующее устройство должно состоять из:

1) пассивного интегро-дифференцирующего звена с передаточной функцией

$$W_k(p) = \frac{(1 + T_d p)(1 + T_2 p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)},$$

где постоянная времени  $T_v$  определяется из известного свойства

интегро-дифференцирующего звена

$$T_v = \frac{T_d T_2}{T_1} = \frac{0,05 \cdot 0,0365}{0,16} = 0,0114 \text{ с};$$

2) идеального дифференцирующего звена с передаточной функцией

$$W_{k2}(p) = 1 + T_y p,$$

3) комбинации пассивного дифференцирующего звена и линейного усилителя с общей передаточной функцией

$$W_{k3}(p) = \frac{1 + T_v p}{1 + T_3 p} = k_y \frac{\frac{T_3}{T_v} (1 + T_v p)}{1 + T_3 p}.$$

Идеальное дифференцирующее звено может приближенно создаваться за счет использования тахогенераторов на задающей и исполнительных осях, включенных встречно и вводящих производную от угла рассогласования.

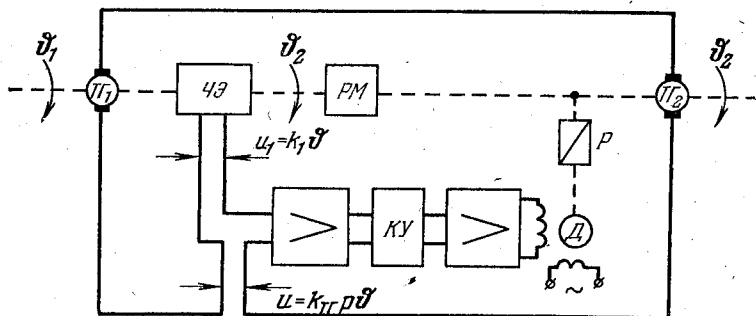


Рис. 160. Схема с тахогенераторами для получения звена чистого дифференцирования.

В случае включения сигнала от тахогенераторов в том же месте, куда включен и сигнал от основного чувствительного элемента (рис. 160), требуемая крутизна напряжения каждого тахогенератора равна

$$k_{\text{тг}} = k_1 T_y = 10 \cdot 0,02 = 0,2 \text{ мВ} \cdot \text{с/угл. мин} = 0,37 \text{ В} \cdot \text{с/об} = 0,06 \text{ В} \cdot \text{с/рад}.$$

Пассивные звенья должны вводиться в прямой канал усиления и могут состоять из  $RC$ -цепей.

Коэффициент усиления усилителя с учетом дополнительного усиления, необходимого для работы пассивного дифференцирующего звена  $k_y = T_v/T_3$ , равен

$$k_2 = \frac{T_v}{T_3} \frac{K_{\Omega i}}{k_1 k_3} = \frac{0,0114}{0,0073} \frac{363 \cdot 3500}{34,4 \cdot 5,73} = 9850.$$

В случае невозможности установки тахогенераторов для введения производной от угла рассогласования можно изменить вид требуемых корректирующих средств.

Как видно из рис. 159, идеальное дифференцирующее звено получилось вследствие того, что высокочастотная асимптота исходной л. а. х. имеет больший наклон по сравнению с наклоном желаемой л. а. х. Для устранения этого можно изменить вид желаемой л. а. х. в высокочастотной области, перейдя от л. а. х. типа 1—2—1—2 к л. а. х. типа 1—2—1—3, но с тем же запасом устойчивости.

Высокочастотная часть последней л. а. х. показана на рис. 159 штриховой линией. Ей соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{K_{\Omega} (1 + T_2 p)}{p (1 + T_1 p) (1 + T_5 p)^2}.$$

Постоянная времени  $T_5$  определяется как

$$T_5 = \frac{1}{2\omega_0} \sqrt{\frac{M(M-1)}{M+1}} = \frac{T_3}{2} = 0,0036 \text{ с.}$$

Л. а. х. корректирующего устройства показана для этого случая на рис. 159 также штриховой линией. Из рассмотрения этой л. а. х. видно, что корректирующее устройство последовательного типа должно состоять из трех пассивных звеньев: интегро-дифференцирующего звена и двух пассивных дифференцирующих звеньев в комбинации с линейным усилителем с общей передаточной функцией

$$\begin{aligned} W_k(p) &= \frac{(1 + T_d p) (1 + T_2 p)}{(1 + T_1 p) (1 + T_B p)} \cdot \frac{1 + T_R p}{1 + T_5 p} \cdot \frac{1 + T_Y p}{1 + T_5 p} = \\ &= \frac{(1 + T_d p) (1 + T_2 p) (1 + T_Y p)}{(1 + T_1 p) (1 + T_5 p)^2}. \end{aligned}$$

Коэффициент усиления  $k_y$  будет выше, чем в предыдущем случае,

$$k_y = \frac{T_Y T_B}{T_5^2} = \frac{0,02 \cdot 0,0114}{0,0036^2} = 17,5.$$

Общий коэффициент усиления усилителя оказывается также значительно больше,

$$k_2 = k_y \frac{K_{\Omega i}}{k_1 k_3} = 17,5 \frac{363 \cdot 3500}{34,4 \cdot 5,73} = 110\,000.$$

Возможен и иной выбор высокочастотной части желаемой л. а. х., в частности соответствующей передаточной функции вида

$$W(p) = \frac{K_{\Omega} (1 + T_2 p)}{p (1 + T_1 p) (1 + T_4 p) (1 + T_5 p)}.$$

При этом  $T_4 \neq T_5$ , но их сумма по-прежнему должна быть равной

$$T_4 + T_5 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M(M-1)}{M+1}}.$$

### § 6.4. Расчет дополнительных обратных связей и прямых параллельных корректирующих связей

**271.** Произвести расчет дополнительной обратной связи для следящей системы задачи 269.

Решение. Найдем дополнительную обратную связь  $W_{oc}(p)$ , эквивалентную пассивному интегро-дифференцирующему звену  $W_{пкy}(p)$ , полученному при решении задачи 269. Предположим, что дополнительная обратная связь охватывает часть системы с передаточной функцией

$$W_c(p) = \frac{k_c}{p(1+Tp)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_{oc}(p) &= \frac{1 - W_{пкy}(p)}{W_{пкy}(p) W_c(p)} = \\ &= \frac{1 - \frac{(1+T_2p)(1+Tp)}{(1+T_1p)(1+T_3p)}}{\frac{(1+T_2p)(1+Tp)}{(1+T_1p)(1+T_3p)} \cdot \frac{k_c}{p(1+Tp)}} = \frac{k_{oc} p^2}{1+T_2p}, \end{aligned}$$

где

$$k_{oc} = \frac{T_1 + T_3 - T_2 - T}{k_c}.$$

Возможная схема осуществления этой обратной связи показана на рис. 161.

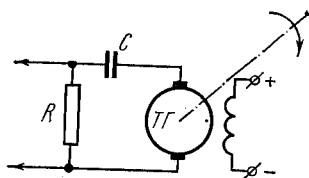


Рис. 161. Схема дополнительной обратной связи к задаче 271.

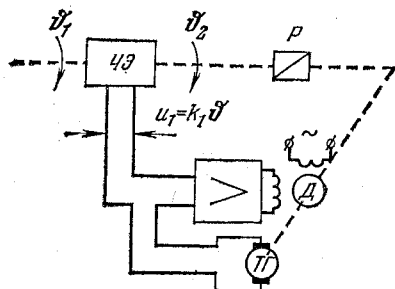


Рис. 162. Схема следящей системы с жесткой тахометрической обратной связью.

**272.** Произвести выбор параметров жесткой тахометрической обратной связи для следящей системы, схема которой приведена на рис. 162. Исходные данные те же, что и в задаче 270, кроме  $T_d = 0,05$  с.

Решение. Передаточная функция разомкнутой системы с учетом действия тахометрической обратной связи примет вид

$$W(p) = \frac{K_{н\Omega}}{p(1+ap+bp^2)}, \quad (1)$$

где  $K_{н\Omega} = \frac{K_{\Omega}}{1+k_{oc}}$  — новое значение общего коэффициента усиления по скорости (добротности по скорости),  $a = \frac{T_d + T_y}{1+k_{oc}}$  и  $b = \frac{T_d T_y}{1+k_{oc}}$  — коэффициенты эквивалентного звена второго порядка,  $k_{oc} = k_2 k_3 k_{тг}$  — коэффициент усиления канала обратной связи,  $k_{тг}$  — крутизна тахогенератора и масштабирующего устройства в цепи обратной связи.

Для обеспечения необходимого запаса устойчивости, оцениваемого величиной показателя колебательности, следует соблюсти неравенство [11]

$$\frac{T_d + T_y}{1+k_{oc}} = a \leq \frac{1}{K_{н\Omega}} \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2}. \quad (2)$$

Нужно учесть также то обстоятельство, что введение жесткой тахометрической обратной связи изменяет в  $(1+k_{oc})$  раз наклон механических характеристик исполнительного двигателя. Требуемое значение добротности по скорости при учете более жестких механических характеристик равно

$$K_{н\Omega} = \frac{\Omega_{\max} + \frac{\beta M_n}{1+k_{oc}}}{\phi_{\max}}. \quad (3)$$

Решая два последних уравнения совместно, можно определить требуемое значение коэффициента усиления канала обратной связи.

$$k_{oc} = \frac{\Omega_{\max}(T_d + T_y)}{2\mu\phi_{\max}} - 1 + \sqrt{\frac{\Omega_{\max}^2(T_d + T_y)^2}{4\mu^2\phi_{\max}^2} + \frac{\beta M_n(T_d + T_y)}{\mu\phi_{\max}}} =$$

$$= \frac{300 \cdot 0,7}{2 \cdot 1,96 \cdot 1} - 1 + \sqrt{\frac{300^2 \cdot 0,07^2}{4 \cdot 1,96^2 \cdot 1} + \frac{6,3 \cdot 10 \cdot 0,07}{1,96 \cdot 1}} = 10,$$

где

$$\mu = \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2} = \frac{1,5^2 + 1,5 \sqrt{1,5^2 - 1}}{2} = 1,96.$$

Требуемое значение добротности по скорости (3)

$$K_{н\Omega} = \frac{300 + \frac{6,3 \cdot 10}{1+10}}{1} = 306 \text{ с}^{-1}.$$

Допустимая сумма постоянных времени (2)

$$\sum T = \frac{1}{306} \frac{1,5^2 + 1,5 \sqrt{1,5^2 - 1}}{2} = 0,0064 \text{ с}.$$

Имеющаяся эквивалентная постоянная времени

$$a = \frac{T_d + T_y}{1+k_{oc}} = \frac{0,07}{1+10} = 0,0064 \text{ с}.$$

Таким образом, задачу выбора параметров цепи обратной связи можно считать решенной.

Передаточная функция разомкнутой демпфированной системы примет вид

$$W(p) = \frac{K_{\text{н}\Omega}}{p(1+ap+ba^2)} = \frac{306}{p(1+6,4 \cdot 10^{-3}p+9,1 \cdot 10^{-5}p^2)}.$$

В заключение определим требуемый коэффициент усиления усилителя и требуемую крутизну тахогенератора. Общий коэффициент усиления разомкнутой цепи следящей системы при отключенной обратной связи должен быть равен

$$K'_{\text{н}\Omega} = K_{\text{н}\Omega} (1 + k_{\text{ос}}) = 306 \cdot 11 \approx 3360 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициент усиления усилителя

$$k_2 = \frac{K'_{\text{н}\Omega} i}{k_1 k_3} = \frac{3360 \cdot 3500}{34,4 \cdot 5,73} = 59\,500.$$

Требуемое значение крутизны тахогенератора с учетом масштабирующего устройства

$$k_{\text{тг}} = \frac{k_{\text{ос}}}{k_2 k_3} = \frac{15}{59\,500 \cdot 5,73} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ В} \cdot \text{с}.$$

Большое значение коэффициента усиления усилителя является недостатком рассмотренного варианта введения обратной связи.

273. Произвести выбор параметров гибкой тахометрической обратной связи для следящей системы, схема которой приведена на рис. 163. Исходные данные те же, что в задаче 270. Крутизна тахогенератора  $k_{\text{тг}} = 0,05 \text{ В} \cdot \text{с}$ .

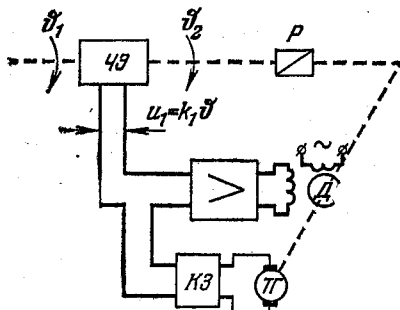


Рис. 163. Схема следящей системы с гибкой тахометрической обратной связью

Решение. В связи с тем, что используется демпфирование по первому способу [11] (см. § 6:1), желаемую л. а. х.  $L_{\text{ж}}$  можно так сформировать, чтобы ее первый излом совпадал с контрольной частотой точки  $A_{\text{к}}$  (рис. 164). При этом л. а. х. должна быть поднята выше запретной зоны на 3 дБ. Требуемое значение добротности по скорости будет  $K_{\text{т}\Omega} = \sqrt{2} K_{\Omega} =$

$= 1,41 \cdot 363 = 512 \text{ с}^{-1}$ . Это вызывает необходимость иметь коэффициент усиления усилителя

$$k_2 = \frac{K_{\text{т}\Omega} i}{k_1 k_3} = \frac{512 \cdot 3500}{34,4 \cdot 5,73} = 9100.$$

Базовая частота желаемой л. а. х.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{\tau\Omega}}{T_1}} = \sqrt{\omega_K K_{\tau\Omega}} = \sqrt{0,4 \cdot 512} = 14,3 \text{ с}^{-1}.$$

Вторая постоянная времени желаемой л. а. х.

$$T_2 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{14,3} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,12 \text{ с}.$$

Допустимая сумма постоянных времени, соответствующих сопрягающим частотам правее частоты среза [12], равна

$$\Sigma T = \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} = \frac{1}{14,3} \frac{\sqrt{1,5(1,5-1)}}{1,5+1} = 0,024 \text{ с}.$$

Сформируем желаемую л. а. х. таким образом, чтобы ее высокочастотная асимптота имела одинаковый наклон с высокочастотной асимптотой располагаемой л. а. х.  $L$ . В данном случае

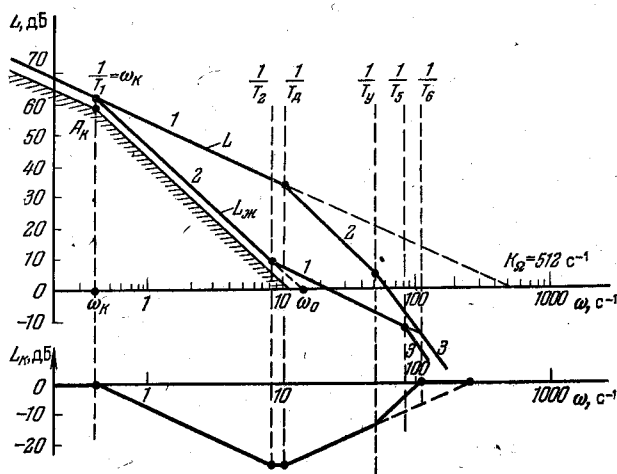


Рис. 164. Логарифмические амплитудные характеристики к задаче 273.

этот наклон составляет 60 дБ/дек. Тогда в высокочастотной части желаемой л. а. х. можно иметь двойной излом при частоте  $\omega_5 = 1/T_5$ . Соответствующая постоянная времени должна быть равна

$$T_5 = \frac{\Sigma T}{2} = \frac{0,024}{2} = 0,012 \text{ с}.$$

Для упрощения корректирующих средств можно продолжить участок с единичным наклоном желаемой л. а. х. до совпадения высокочастотных асимптот  $L_{\text{ж}}$  и  $L$ , что показано на рис. 164 штриховой линией. Это даст некоторое увеличение запаса устойчи-

вости. Постоянная времени, определяющая двойной излом желаемой л. а. х., может быть определена непосредственным измерением сопрягающей частоты. Она равна  $T_6 = 0,009$  с.

Построенной таким образом желаемой л. а. х. соответствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K_{T\Omega} (1 + T_2 p)}{p (1 + T_1 p) (1 + T_6 p)^2} = \frac{512 (1 + 0,12 p)}{p (1 + 2,5 p) (1 + 0,009)^2}.$$

В дальнейшем мы будем ориентироваться на этот более простой случай.

На рис. 164 построена л. а. х. корректирующих устройств последовательного типа  $L_k$ , полученная вычитанием ординат  $L$  из ординат  $L_{\text{ж}}$ . Она соответствует последовательному включению интегро-дифференцирующего и дифференцирующего звеньев с передаточной функцией

$$W_{\text{пз}}(p) = \frac{(1 + T_2 p) (1 + T_d p) (1 + T_y p)}{(1 + T_1 p) (1 + T_6 p)^2}.$$

Полученная передаточная функция играет вспомогательную роль, так как по условию задачи коррекция системы должна осуществляться обратной связью, а не последовательными звеньями. Поэтому, пользуясь ею, необходимо вычислить эквивалентную обратную связь.

Передаточная функция корректирующего звена в цепи тахогенератора может быть определена по формуле

$$W_{\text{ос}}(p) = \frac{1 - W_{\text{пз}}(p)}{W_{\text{пз}}(p) W_{\text{ч}}(p)},$$

где  $W_{\text{ч}}(p) = \frac{k_2 k_3}{(1 + T_y p) (1 + T_d p)}$  — передаточная функция части системы, охватываемой обратной связью.

В результате подстановки значений  $W_{\text{ч}}(p)$  и  $W_{\text{пз}}(p)$  имеем

$$\begin{aligned} W_{\text{ос}}(p) = & [(T_1 + 2T_6 - T_2 - T_d - T_y) p + \\ & + (T_6^2 + 2T_1 T_6 - T_2 T_d - T_2 T_y - T_d T_y) p^2 + \\ & + (T_1 T_6^2 - T_2 T_d T_y) p^3] [k_2 k_3 (1 + T_2 p)]^{-1}. \end{aligned}$$

Такое звено является физически нереализуемым, так как степень многочлена в числителе выше степени многочлена знаменателя. Однако можно попытаться применить какое-либо физически реализуемое звено с передаточной функцией, близкой к желаемой. В качестве физически осуществимой передаточной функции можно взять как первое приближение, функцию

$$W_{\text{ос}}(p) = \frac{T_1 p}{k_2 k_3 (1 + T_2 p)} = k_{\text{ос}} \frac{T_2 p}{1 + T_2 p},$$

где  $k_{oc} = \frac{T_1}{T_2 k_2 k_3}$ . Эта передаточная функция может быть реализована при помощи тахогенератора постоянного тока, простого делителя с коэффициентом передачи  $k_{дел}$ , и дифференцирующей RC-цепи с постоянной времени  $T_2 = 0,12$  с.

Потребный коэффициент передачи в цепи обратной связи

$$k_{oc} = k_{тг} \cdot k_{дел} = \frac{2,5}{0,12 \cdot 9100 \cdot 5,73 \cdot 0,05} = 40,5 \cdot 10^{-5}.$$

Специальный делитель может и не устанавливаться, но в этом случае место включения обратной связи в усилителе должно быть выбрано таким образом, чтобы от этого места до выхода усилителя коэффициент усиления по напряжению составлял

$$k'_2 = k_2 k_{oc} = 9100 \cdot 40,5 \cdot 10^{-5} = 3,6.$$

Таким образом, в первом приближении передаточная функция корректирующего звена в цепи обратной связи должна быть

$$W_{oc}(p) = 40,5 \cdot 10^{-5} \frac{0,12p}{1 + 0,12p}.$$

Проверим теперь применимость этого звена для достижения нужных динамических качеств для формирования л. а. х. желаемого вида. Передаточная функция разомкнутой системы с учетом гибкой тахометрической обратной связи примет вид

$$W_{ск}(p) = \frac{K_{тг} \Omega (1 + T_2 p)}{p (1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3)},$$

где

$$a_1 = T_y + T_d + T_2 + k_2 k_3 k_{oc} T_2 = T_y + T_d + T_2 + T_1 = 2,74 \text{ с},$$

$$a_2 = T_y T_d + T_y T_2 + T_d T_2 = 1,64 \cdot 10^{-4} \text{ с}^2,$$

$$a_3 = T_y T_d T_2 = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ с}^3.$$

Раскладывая знаменатель полученной передаточной функции на множители, получаем

$$\begin{aligned} W_{ск}(p) &= \frac{K_{тг} \Omega (1 + T_2 p)}{p (1 + T p) (1 + ap + bp^2)} = \\ &= \frac{512 (1 + 0,12p)}{p (1 + 2,74p) (1 + 0,6 \cdot 10^{-2}p + 0,88 \cdot 10^{-4}p^2)}. \end{aligned}$$

В низкочастотной части эта передаточная функция практически совпадает с передаточной функцией, соответствующей желаемой л. а. х.  $L_{ж}$ . Небольшое отличие имеется только в величине постоянной времени  $T_1 = 2,74$  с, формирующей первый излом л. а. х. В высокочастотной области условие ограничения суммы постоянных времени выполнено, так как  $a = 0,6 \cdot 10^{-2}$  с, а по условию допустимая сумма постоянных времени составляет  $\sum T = 2,4 \cdot 10^{-2}$  с.

Проверка того, чтобы пик амплитудной характеристики колебательного звена не заходил в запретную область для высокочастотной части л. а. х., т. е.

$$\operatorname{mod} |W(j\omega)| < \frac{M}{M+1},$$

подтверждает допустимость подобной аппроксимации.

При желании можно получить более точное совпадение полученной передаточной функции с желаемой в низкочастотной области и устранить неравенство  $T \neq T_1$ . Для этого необходимо уточнить значение коэффициента  $k'_{oc}$  и выбрать его равным

$$k'_{oc} = \frac{T_1}{T} k_{oc} = \frac{2,5}{2,74} \cdot 40,5 \cdot 10^{-5} = 37,4 \cdot 10^{-5}.$$

Тогда аналогичным образом можно получить скорректированную передаточную функцию разомкнутой системы в виде

$$W_{ск}(p) = \frac{512(1 + 0,12p)}{p(1 + 2,5p)(1 + 0,65 \cdot 10^{-2}p + 0,95 \cdot 10^{-4}p^2)}.$$

274. Определить вид и параметры обратной связи для электрогидравлической следящей системы, блок-схема которой приведена

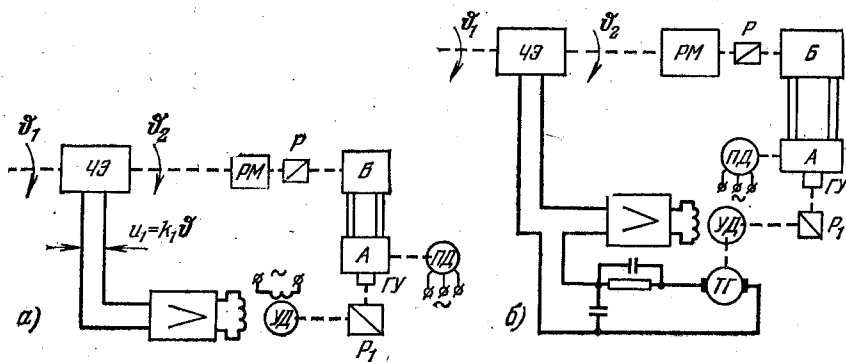


Рис. 165 Схемы электрогидравлической следящей системы к задаче 274.

на рис. 165, а. На рис. 165, а обозначено: А и Б — части гидрорегулятора, ГУ — гидроусилитель, ПД — приводной двигатель, РМ — рабочий механизм, УД — управляющий двигатель, ЧЭ — чувствительный элемент, Р — редуктор. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_e}{p^2(1 + T_d p)(1 + T_{гм} p)},$$

где  $K_e$  — добротность по ускорению,  $T_d = 0,05$  с — электромеханическая постоянная времени управляющего двигателя,  $T_{гм} = 0,02$  с —

гидромеханическая постоянная времени гидрорегулятора. Система должна иметь добротность по ускорению  $K_e \geq 25 \text{ с}^{-2}$  и показатель колебательности  $M \leq 1,8$ . Обратная связь охватывает управляющий двигатель и усилитель.

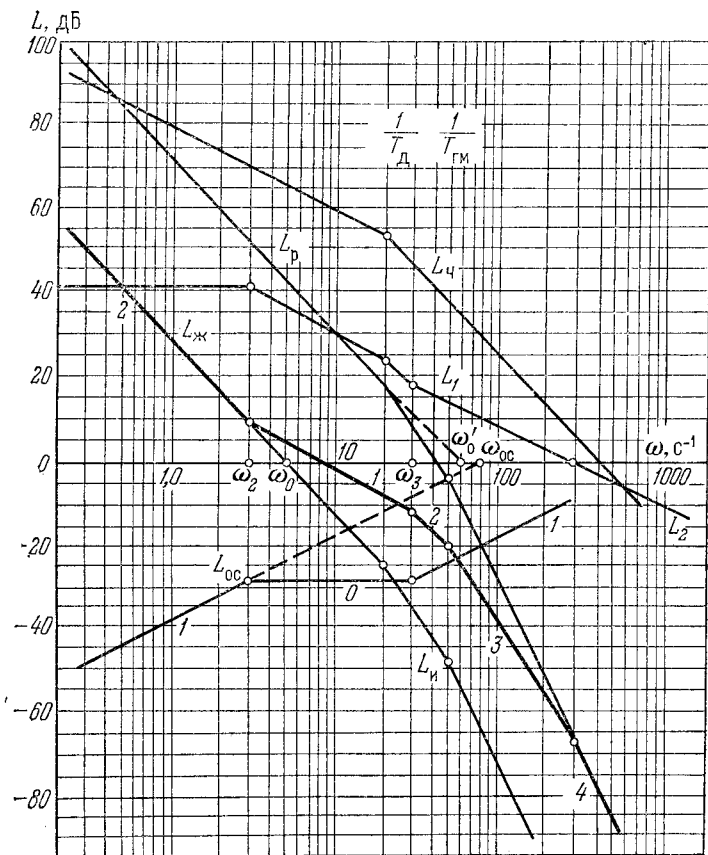


Рис. 166. Л. а. х. к задаче 274.

Решение. На рис. 166 построена л. а. х. исходной системы  $L_i$  при значениях  $K_e = 25 \text{ с}^{-2}$ . Там же построена желаемая л. а. х.  $L_{\text{ж}}$ , отвечающая всем требованиям качества, предъявляемым к системе.

Рассмотрим порядок определения вида и параметров обратной связи.

С учетом дополнительной обратной связи передаточную функцию разомкнутой системы  $W_{\text{ж}}(p)$  можно записать в виде

$$W_{\text{ж}}(p) = \frac{W(p)}{1 + W_{\text{ч}}(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)},$$

где  $W_{\text{ос}}(p)$  — передаточная функция цепи дополнительной обратной связи,  $W_{\text{ч}}(p)$  — передаточная функция части системы, замыкаемой обратной связью. Из приведенного выражения следует, что л. а. х. цепи обратной связи  $L_{\text{ос}}$  можно определить по известным л. а. х.  $L_{\text{ж}}$  и  $L_{\text{н}}$  в следующей последовательности [73]:

1) из л. а. х. исходной системы  $L_{\text{н}}$  вычитается желаемая л. а. х.  $L_{\text{ж}}$ , т. е. определяется л. а. х.  $L_1$ , соответствующая передаточной функции  $1 + W_{\text{ч}}(p) W_{\text{ос}}(p)$ ;

2) по виду л. а. х.  $L_1$  строится л. а. х.  $L_2$ , соответствующая передаточной функции  $W_{\text{ч}}(p) W_{\text{ос}}(p)$ ;

3) из л. а. х. вычитается л. а. х. той части системы, которая замыкается обратной связью  $L_{\text{ч}}$ , в результате чего определяется л. а. х. цепи обратной связи  $L_{\text{ос}}$ .

В решаемой задаче разностная л. а. х.  $L_1$  будет полностью располагаться под осью нуля децибел, что вызовет нарушение условия минимальности фазы при переходе к л. а. х.  $L_2$  [73]. Поэтому прежде следует увеличить коэффициент усиления исходной системы настолько, чтобы разностная л. а. х.  $L_1$  полностью лежала выше оси нуля децибел.

На рис. 166 построена л. а. х. исходной системы с увеличенным коэффициентом усиления  $K'_e = \omega_0'^2 = 3600 \text{ с}^{-2}$ , которая обозначена  $L_{\text{р}}$ . Там же изображена разностная л. а. х.  $L_1$ , полученная вычислением желаемой л. а. х.  $L_{\text{ж}}$  из располагаемой л. а. х.  $L_{\text{р}}$ . Для определения л. а. х.  $L_2$  обратимся к таблице преобразования л. а. х. (приложение 25, п. III).

Поскольку обратная связь охватывает управляющий двигатель и усилитель, то

$$W_{\text{ч}}(p) = \frac{k_{\text{ч}}}{p(1 + T_{\text{д}}p)}.$$

Соответствующая этому выражению л. а. х.  $L_{\text{ч}}$  построена на рис. 166.

Вычитая из ординат л. а. х.  $L_2$  ординаты л. а. х.  $L_{\text{ч}}$ , строим искомую л. а. х.  $L_{\text{ос}}$ , по виду которой может быть записано выражение для передаточной функции цепи обратной связи

$$W_{\text{ос}}(p) = \frac{k_{\text{ос}} p (1 + T_3 p)}{1 + T_2 p},$$

где

$$k_{\text{ос}} = \frac{1}{\omega_{\text{ос}}}, \quad T_2 = \frac{1}{\omega_2}, \quad T_3 = \frac{1}{\omega_3}.$$

Полученную передаточную функцию можно легко реализовать,

включив в цепь обратной связи тахогенератор и пассивное звено указанного типа (рис. 165, б).

275. Определить вид обратной связи для системы, рассмотренной в задаче 274, в предположении, что цепь обратной связи

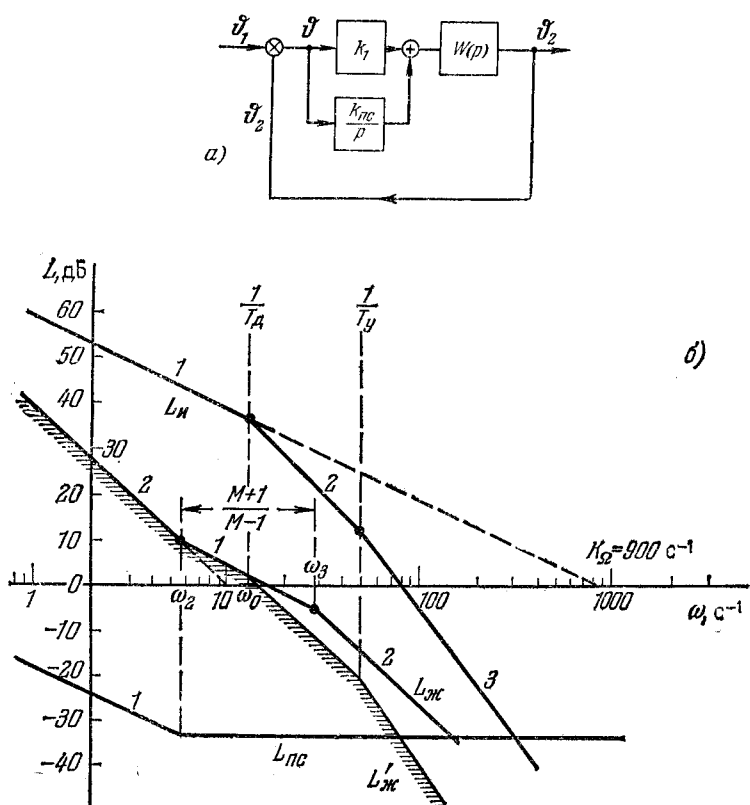


Рис. 167. Структурная схема системы с введением прямой параллельной корректирующей связи (а); л. а. х. к задаче 276 (б).

охватывает часть усилителя, т. е.  $W_q(p) = k_q$ . Остальные данные те же, что в предыдущей задаче.

Ответ. Передаточная функция цепи обратной связи имеет вид

$$W_{oc}(p) = \frac{k_{oc}(1 + T_3 p)}{(1 + T_2 p)(1 + T_d p)}.$$

276. Произвести выбор параметров прямой параллельной корректирующей связи для системы автоматического регулирования, структурная схема которой показана на рис. 167, а. Передаточная

функция разомкнутой исходной системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_{\Omega}}{p(1+T_y p)(1+T_d p)},$$

где  $K_{\Omega} = 900 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_d = 0,08 \text{ с}$ ,  $T_y = 0,02 \text{ с}$ . После введения прямой параллельной связи система должна обладать астатизмом второго порядка, иметь добротность по ускорению  $K_{\varepsilon} = 100 \text{ с}^{-2}$  и показатель колебательности  $M \leq 1,5$ .

Решение. Передаточную функцию разомкнутой системы с учетом введения прямой параллельной связи представим в виде

$$W_{\text{ск}}(p) = \frac{K_{\varepsilon} \left(1 + \frac{k_1}{k_{\text{пс}}} p\right)}{p^2(1+T_d p)(1+T_y p)},$$

где  $K_{\varepsilon} = K_{\Omega} k_{\text{пс}}$ . Реализация прямой связи, осуществляющей введение сигнала, пропорционального интегралу от ошибки (рассогласования), возможна путем использования интегрирующего привода.

На рис. 167, б изображены л. а. х. исходной системы  $L_{\text{и}}$ , желаемая л. а. х.  $L_{\text{ж}}$  и л. а. х. прямой связи  $L_{\text{пс}}$ .

Требуемое значение коэффициента передачи по цепи прямой связи  $k_{\text{пс}}$  определяется из условия

$$K_{\varepsilon} = \omega_0^2 = K_{\Omega} k_{\text{пс}}$$

или

$$k_{\text{пс}} = \frac{K_{\varepsilon}}{K_{\Omega}} = \frac{100}{900} = 0,11 \text{ с}^{-1}.$$

Отношение  $k_1/k_{\text{пс}}$  целесообразно выбрать равным  $1/\omega_2$ . Отсюда

$$k_1 = \frac{k_{\text{пс}}}{\omega_2} = \frac{0,11}{6} \approx 0,018.$$

Для выполнения этого условия придется намеренно уменьшать коэффициент передачи первого звена, охватываемого прямой параллельной связью. Одновременно во столько же раз увеличивается коэффициент передачи другого звена, входящего в прямой тракт усиления, чтобы сохранить постоянной величину  $K_{\Omega}$ .

Введением интегрирующей связи удастся приблизить л. а. х. исходной системы  $L_{\text{и}}$  к желаемому виду  $L_{\text{ж}}$  только в области низких и частично средних частот ( $L_{\text{ж}}$ ).

Окончательное приближение л. а. х. системы к желаемому виду может быть достигнуто путем коррекции л. а. х. системы в области средних и высших частот применением последовательных корректирующих звеньев либо с помощью эквивалентных им прямых или обратных связей.

### § 6.5. Расчет систем комбинированного управления

**277.** Определить требуемый уровень компенсирующего сигнала по первой производной от входного воздействия, при котором устраняется скоростная ошибка системы (рис. 168), звенья которой имеют следующие передаточные функции:

$$\varphi(p) = \tau p, \quad W_1(p) = k_1,$$

$$W_2(p) = \frac{k_2}{p(1+Tp)},$$

где  $k_1 = 10$  В/град,  $k_2 = 10$  град/(В·с),  $T = 0,02$  с,

$\tau$  [с] — коэффициент, определяющий уровень компенсирующего сигнала.

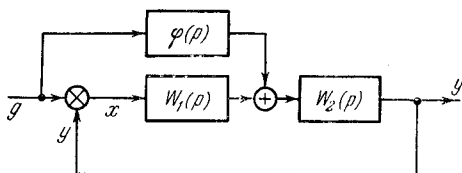


Рис. 168. Структурная схема системы комбинированного управления.

Решение. Передаточная функция замкнутой системы относительно ошибки имеет вид

$$\Phi_x(p) = \frac{1 - W_2(p) \varphi(p)}{1 + W_1(p) W_2(p)},$$

откуда

$$\Phi_x(p) = \frac{Tp^2 + p - k_2\tau p}{Tp^2 + p + k_1k_2}.$$

Условие устранения скоростной ошибки  $k_2\tau = 1$ . Следовательно, требуемый уровень компенсирующего сигнала равен

$$\tau = \frac{1}{k_2} = 0,1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{град}}.$$

**278.** Определить требуемые уровни компенсирующих сигналов по первой и второй производным от входного воздействия для следящей системы комбинированного управления (см. рис. 168) с передаточными функциями

$$\varphi(p) = \tau_1 p + \frac{\tau_1 \tau_2 p^2}{1 + \tau_3 p},$$

$$W_1(p) = 1,$$

$$W_2(p) = \frac{K_\Omega}{p(1+T_1p)(1+T_2p)},$$

где  $T_1 = 0,05$  с,  $T_2 = 0,002$  с. Система должна обеспечивать слежение с ошибкой  $x_{\max} \leq 0,1^\circ$  при максимальной скорости слежения  $\Omega_{\max} = 150$  град/с и максимальном ускорении  $\epsilon_{\max} = 750$  град/с<sup>2</sup>. Показатель колебательности  $M \leq 1,5$ .

Решение. На рис. 169 построена контрольная точка с координатами

$$\omega_k = \frac{\epsilon}{\Omega} = 5 \text{ с}^{-1}$$

и

$$L_K = 20 \lg \frac{\Omega_{\max}^2}{x_{\max} \varepsilon_{\max}} = 20 \lg \frac{150^2}{0,1 \cdot 750} \approx 50 \text{ дБ.}$$

Если провести через эту контрольную точку низкочастотную асимптоту л. а. х., соответствующей передаточной функции исходной системы, то требуемое значение добротности по скорости составит

$$K'_\Omega = \frac{\Omega_{\max}}{x_{\max}} = \frac{150}{0,1} = 1500 \text{ с}^{-1}.$$

Однако известно, что при заданном значении показателя колебательности  $M$  наименьшее допустимое значение добротности

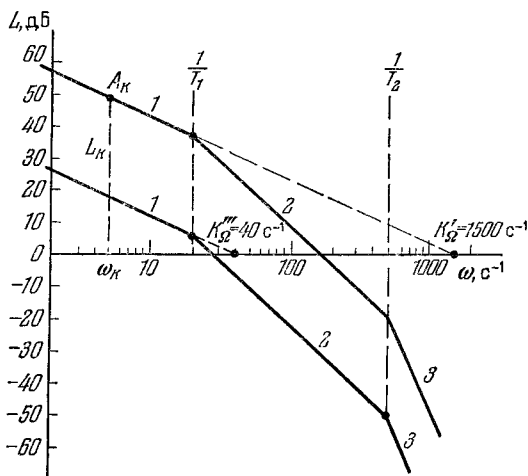


Рис. 169 Л а. х. к задаче 278.

по скорости при отсутствии каких-либо корректирующих средств составит [12]

$$K_\Omega = \frac{M^2 + M \sqrt{M^2 - 1}}{2(T_1 + T_2)} = \frac{1,5^2 + 1,5 \sqrt{1,5^2 - 1}}{2(0,05 + 0,002)} = 40 \text{ с}^{-1}.$$

Если ввести сигнал первой производной от задающего воздействия, следящая система приобретает свойства системы с астатизмом второго порядка. Требуемое значение добротности по ускорению равно

$$K_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{\max}}{x_{\max}} = \frac{750}{0,1} = 7500 \text{ с}^{-2}.$$

Требуемое значение добротности по скорости при этом для исходной системы определяется по формуле

$$K'_\Omega = (T_1 + T_2) K_\varepsilon = 0,052 \cdot 7500 = 390 \text{ с}^{-1},$$

т. е.  $K'_\Omega$  получается уже значительно меньше, чем  $K'_\Omega$ . При введении дополнительно второй производной требуемая добротность по третьей производной

$$K_\gamma = \frac{\omega_k \varepsilon_{\max}}{x_{\max}} = \frac{5 \cdot 750}{0,1} = 37\,500 \text{ с}^{-3}.$$

Требуемая добротность по скорости может быть определена по выражению

$$K''_\Omega = [T_1 T_2 + \tau_3 (T_1 + T_2)] K_\gamma.$$

Приравняв  $K''_\Omega$  добротности по скорости, которую можно иметь без корректирующих средств ( $K_\Omega = 40 \text{ с}^{-1}$ ), получим требуемое значение постоянной времени  $\tau_3$ :

$$\tau_3 = \frac{K_\Omega - T_1 T_2 K_\gamma}{(T_1 + T_2) K_\gamma} = \frac{40 - 0,05 \cdot 0,002 \cdot 37\,500}{(0,05 + 0,002) \cdot 37\,500} = 18,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Постоянные времени, определяющие уровни вводимых сигналов, находятся из условий компенсации

$$\tau_1 = \frac{1}{K_\Omega} = \frac{1}{40} = 0,025 \text{ с},$$

$$\tau_2 = T_1 + T_2 + \tau_3 = 0,05 + 0,002 + 0,018 = 0,070 \text{ с}.$$

Таким образом, передаточная функция компенсирующей цепи должна иметь вид

$$\varphi(p) = 0,025p + \frac{0,025 \cdot 0,070p^2}{1 + 0,018p}.$$

Л. а. х. системы, соответствующая найденным параметрам, показана на рис. 169 (нижняя л. а. х.).

**279.** Определить требуемый уровень компенсирующего сигнала, пропорционального первой производной от входного воздействия:

$$\varphi(p) = \tau_1 p,$$

и произвести расчет других необходимых корректирующих средств для следящей системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид (см. рис. 168)

$$W(p) = \frac{K_\Omega}{p(1 + T_d p)(1 + T_y p)},$$

$$W_1(p) = 1,$$

где  $T_d = 0,1 \text{ с}$  — электромеханическая постоянная времени двига-

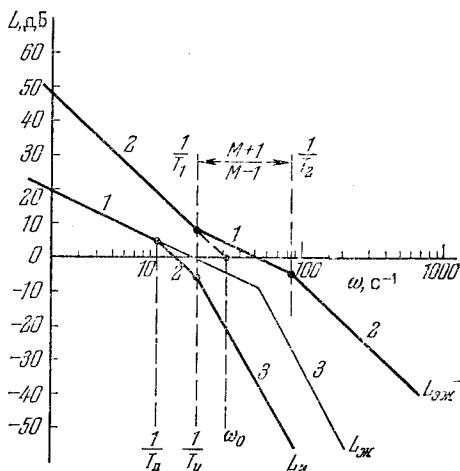


Рис. 170. Л. а. х. к задаче 279.

теля,  $T_y = 0,05$  с — постоянная времени усилителя. Система должна обладать астатизмом второго порядка и обеспечивать слежение с ошибкой  $\vartheta_{\max} \leq 2$  угл. мин, при максимальной скорости слежения  $\Omega_{\max} = 30$  град/с и максимальном ускорении  $\varepsilon_{\max} = 30$  град/с<sup>2</sup>. Запас устойчивости определяется показателем колебательности  $M \leq 1,5$ .

Решение. Определим вначале желаемую эквивалентную передаточную функцию  $W_{\text{эж}}$  разомкнутой системы.

Первая асимптота л. а. х. представляет собой прямую с наклоном 40 дБ/дек. Положение ее определяется базовой частотой (рис. 170):

$$\omega_0 = \sqrt{K_\varepsilon} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\max}}{\vartheta_{\max}}} = \sqrt{\frac{30 \cdot 60}{2}} = 30 \text{ с}^{-1}.$$

Для получения запаса устойчивости, соответствующего показателю колебательности  $M$ , передаточная функция для области средних частот должна иметь вид [12]

$$W_{\text{эж}}(p) = \frac{\omega_0^2 (1 + T_1 p)}{p^2 (1 + T_2 p)},$$

где

$$\omega_0^2 = K_\varepsilon = 900 \text{ с}^{-2},$$

$$T_1 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{30} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,0575 \text{ с.}$$

$$T_2 = \frac{M-1}{M+1} T_1 = \frac{1,5-1}{1,5+1} 0,0575 = 0,0115 \text{ с.}$$

Желаемая передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi_{\text{ж}}(p) = \frac{W_{\text{эж}}(p)}{1 + W_{\text{эж}}(p)} = \frac{K_\varepsilon (1 + T_1 p)}{K_\varepsilon + K_\varepsilon T_1 p + p^2 + T_2 p^3}.$$

При введении компенсирующего сигнала передаточную функцию замкнутой системы можно представить в виде

$$\Phi_{\text{ж}}(p) = \frac{W_{\text{эж}}(p)}{1 + W_{\text{эж}}(p)} = \frac{W_{\text{эж}}(p) [1 + \varphi(p)]}{1 + W_{\text{ж}}(p)} = \Phi_1(p) + \Phi_2(p).$$

Сравнение приведенных выражений дает

$$\varphi(p) + \tau_1 p = T_1 p,$$

или

$$\tau_1 = T_1 = 0,0575 \text{ с},$$

что определяет требуемый уровень компенсирующего сигнала. Далее имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{ж}}(p) &= \frac{K_\varepsilon}{K_\varepsilon + K_\varepsilon T_1 p + p^2 + T_2 p^3} + \frac{K_\varepsilon T_1 p}{K_\varepsilon + K_\varepsilon T_1 p + p^2 + T_2 p^3} = \\ &= \Phi_1(p) + \Phi_2(p). \end{aligned}$$

Желаемая передаточная функция исходной следящей системы равна

$$W_{\text{ж}}(p) = \frac{\Phi_1(p)}{1 - \Phi_1(p)} = \frac{\frac{1}{T_1}}{p \left( 1 + \frac{1}{K_{\varepsilon} T_1} p + \frac{T_2}{K_{\varepsilon} T_1} p^2 \right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{T_1}}{p(1 + ap + bp^2)} = \frac{17,4}{p[1 + 0,0193p + 0,00022p^2]}.$$

Передаточная функция нескорректированной системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_{\Omega}}{p(1 + T_{\text{д}}p)(1 + T_{\text{y}}p)} = \frac{K_{\Omega}}{p[1 + (T_{\text{д}} + T_{\text{y}})p + T_{\text{д}}T_{\text{y}}p^2]}.$$

Сравнение двух последних выражений показывает, что для получения равенства  $W_{\text{ж}}(p) = W(p)$  необходимо выполнение следующих условий:

$$K_{\Omega} = 17,4 \text{ с}^{-1}, \quad T_{\text{д}} + T_{\text{y}} = 0,0193 \text{ с}, \quad T_{\text{д}}T_{\text{y}} = 0,00022 \text{ с}^2.$$

Выполнение первого условия не представляет трудностей, так как добротность по скорости  $K_{\Omega}$ , представляющая собой общий коэффициент передачи разомкнутой системы, может быть принята

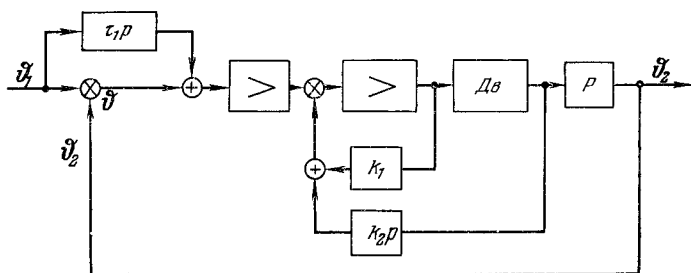


Рис. 171. Структурная схема системы к задаче 279.

любой. Выполнение второго и третьего условий требует введения корректирующих звеньев, снижающих коэффициенты при  $p$  и  $p^2$  в квадратной скобке выражения для  $W(p)$ , так как без корректирующих звеньев

$$T_{\text{д}} + T_{\text{y}} = 0,15 \text{ с} \quad \text{и} \quad T_{\text{д}}T_{\text{y}} = 0,005 \text{ с}^2.$$

Это может быть сделано введением жестких обратных связей, охватывающих усилитель и усилитель совместно с двигателем (рис. 171). В этом случае передаточная функция разомкнутой цепи вместе с обратными связями будет равна

$$W_{\text{ск}}(p) = \frac{K_{\Omega}}{p \left[ 1 + \left( \frac{T_{\text{д}} + T_{\text{y}} + k_3 T_{\text{д}}}{1 + k_3 + k_4} \right) p + \frac{T_{\text{д}}T_{\text{y}}}{1 + k_3 + k_4} p^2 \right]}.$$

Сравнивая последнее выражение с выражением для  $W_{\text{ж}}(p)$ , получаем

$$\frac{T_d + T_y + k_3 T_d}{1 + k_3 + k_4} = a = 0,0193 \text{ с},$$

$$\frac{T_d T_y}{1 + k_3 + k_4} = 0,00022 \text{ с}^2,$$

откуда находим требуемые коэффициенты усиления по первой и второй петлям обратных связей (см. рис. 171)

$$k_3 = k_1 k_{yc} = 1,9, \quad k_4 = k_2 k_{yc} k_d = 22,5.$$

## § 6.6. Расчет корректирующих устройств при помощи ЭВМ

280. Определить структуру и параметры простейшего последовательного корректирующего устройства для системы автоматического управления с частотной характеристикой неизменяемой части вида

$$W_0(j\omega) = U^0(\omega) + jV^0(\omega) =$$

$$= \frac{k_0}{T^2(j\omega)^2 - 1} + \frac{k_1}{T_1(j\omega) + 1},$$

где  $k_0 = 1,96$ ,  $T = 0,75$  с,  $k_1 = 0,013$ ,  $T_1 = 0,035$  с. Соответствующая

$W_0(j\omega)$  амплитудно-фазовая характеристика приведена на рис. 172, а. Желаемая амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы задана таким образом, чтобы годограф а. ф. х. не заходил в запретную область — круг радиуса  $R = 0,5$  [75] (рис. 172, б). В этом случае в низкочастотном диапазоне обеспечивается запас устойчивости по фазе —  $30^\circ$  и амплитуде — 12 дБ. В окрестности резонансной частоты

$\omega = \frac{1}{T_1}$  обеспечивается запас по фазе —  $60^\circ$ . Значения вещественной  $U_k$  и мнимой  $V_k$  частей желаемой (корректированной) частотной ха-

рактеристики  $W_{\text{ж}}(j\omega_k) = U_k + jV_k$  в выбранных точках  $\omega_k$  ( $k = 1, 2$ ) приведены в таблице 1.

Решение. Воспользуемся методом автоматического синтеза корректирующих устройств при помощи ЦВМ [75]. В этом случае задача инженерного расчета корректирующих устройств для

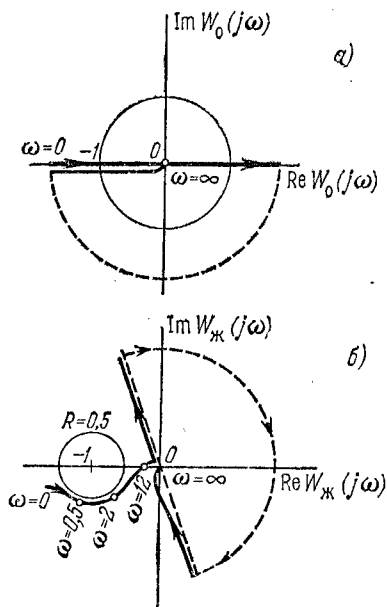


Рис. 172. Амплитудно-фазовые характеристики разомкнутой системы: а) исходная, б) желаемая.

Т а б л и ц а 1

| $\omega_k, \text{с}^{-1}$ | 0,5    | 1      | 2      | 5      | 12     | 26          |
|---------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|-------------|
| $U_k$                     | -1,141 | -1,0   | -0,745 | -0,251 | -0,054 | -0,04       |
| $V_k$                     | -0,511 | -0,523 | -0,469 | 0      | +0,032 | $\pm 0,069$ |

сложной системы автоматического управления сводится к последовательному перебору различных структур физически реализуемых корректирующих устройств и выбору устройств простейшей структуры с параметрами, обеспечивающими минимум некоторого критерия  $E_1$ .

Упрощенная блок-схема программы автоматического синтеза корректирующих устройств приведена на рис. 173. В блок-схеме приняты следующие обозначения:  $l$  — число точек частотной характеристики, в которых выполняется приближение;  $m, n$  — число неизвестных коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции корректирующего устройства;  $N_{\max}$  — максимальная размерность корректирующего устройства;  $E_{\min}$  — минимальное значение критерия.

Пусть максимальная размерность корректирующего устройства  $N_{\max} = 5$ . Проведем перебор структур корректирующего устройства в следующей последовательности:

- 1)  $m = 2, n = 1, W_{\phi}(p) = \frac{a_0 + a_1 p}{1 + b_1 p}$ ;
- 2)  $m = 2, n = 2, W_{\phi}(p) = \frac{a_0 + a_1 p}{1 + b_1 p + b_2 p^2}$ ;
- 3)  $m = 2, n = 3, W_{\phi}(p) = \frac{a_0 + a_1 p}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3}$ .

В соответствии с блок-схемой (рис. 173) в программу вводились: 1) значения  $U_k$  и  $V_k$  в выбранных точках  $\omega_k$  ( $k = \overline{1, l}$ ); 2)  $E_{\min}$  — минимальное значение критерия; 3) начальные значения  $m$  и  $n$ .

В таблице 2 приведены полученные в результате счета по программе на ЦВМ М220-М частотные характеристики скорректированной разомкнутой системы для трех рассматриваемых структур  $W_{\phi}(p)$ , искомые параметры этих фильтров, а также минимальные значения критерия  $E_1$ , соответствующие заданным структурам и полученным параметрам корректирующих фильтров. Из таблицы видно, что наилучшее приближение к желаемой а. ф. х. обеспечивает фильтр с

$$W_{\phi}(p) = \frac{a_0 + a_1 p}{1 + b_1 p + b_2 p^2}$$

размерности  $N = m + n = 2 + 2 = 4$  с коэффициентами  $a_0 = 0,582$ ,  $a_1 = 0,786$  с,  $b_1 = 0,427$  с,  $b_2 = 0,0263$  с<sup>2</sup>. При этом имеет место наименьшее значение критерия  $E_1 = 14,77$ .

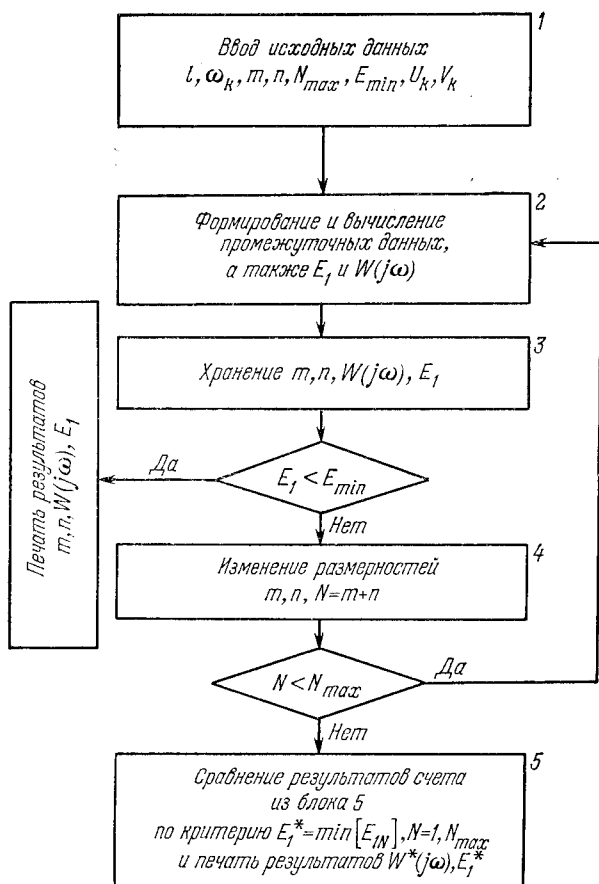


Рис 173 Упрощенная блок-схема программы автоматического синтеза корректирующего устройства

281. Решить предыдущую задачу, если  $m = 3$ ,  $n = 2$ ,  $W_\Phi(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{1 + b_1 p + b_2 p^2}$ .

Ответ.  $a_0 = 0,57$ ,  $a_1 = 0,815$  с,  $a_2 = -0,52 \cdot 10^{-2}$  с<sup>2</sup>,  $b_1 = 0,49$ ,  $b_2 = 0,0243$  с<sup>2</sup>,  $E_1 = 33,1$ .

Таблица 2

| Фильтр                                              | Параметры                                                                                                                                 | $E_1$ | Скорректированная характеристика разомкнутой системы |              |              |               |                 |               |               |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|------------------------------------------------------|--------------|--------------|---------------|-----------------|---------------|---------------|
|                                                     |                                                                                                                                           |       | $\omega_k, \text{с}^{-1}$                            | 0,5          | 1            | 2             | 5               | 12            | 26            |
| $\frac{a_0 + a_1 p}{1 + b_1 p}$                     | $a_0 = 0,606$<br>$a_1 = 0,66 \text{ с}$<br>$b_1 = 0,27 \text{ с}$                                                                         | 1808  | Амплитуда, дБ<br>Фаза, град                          | 1,46<br>-158 | 0,82<br>-147 | -2,04<br>-143 | -11<br>-154     | -20,5<br>-167 | -14<br>-178   |
| $\frac{a_0 + a_1 p}{1 + b_1 p + b_2 p^2}$           | $a_0 = 0,582$<br>$a_1 = 0,786 \text{ с}$<br>$b_1 = 0,427 \text{ с}$<br>$b_2 = 0,0263 \text{ с}^2$                                         | 14,77 | Амплитуда, дБ<br>Фаза, град                          | 1,54<br>-158 | 1,3<br>-150  | -1,6<br>-154  | -11,6<br>-170,4 | -23,8<br>-214 | -21,6<br>-242 |
| $\frac{a_0 + a_1 p}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3}$ | $a_0 = 0,56$<br>$a_1 = 0,82 \text{ с}$<br>$b_1 = 0,486 \text{ с}$<br>$b_2 = 0,0275 \text{ с}^2$<br>$b_3 = 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ с}^3$ | 24,1  | Амплитуда, дБ<br>Фаза, град                          | 1,67<br>-158 | 1,51<br>-151 | -1,63<br>-156 | -12,1<br>-180   | -24<br>-210   | -21<br>-244   |

## СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

## § 9.1. Системы с временным запаздыванием

322. Определить критическое время чистого запаздывания для системы автоматического управления, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии  $W(p) = \frac{Ke^{-\tau p}}{1+Tp}$ , где  $K=10$ ,  $T=0,5$  с.

Решение. Частотная передаточная функция разомкнутой системы

$$W(j\omega) = \frac{Ke^{-j\omega\tau}}{1+j\omega T}.$$

Частоту среза  $\omega_c$ , при которой а. ф. х. разомкнутой системы пересекает окружность единичного радиуса, найдем из условия

$$|W(j\omega_c)| = 1. \quad (1)$$

Из (1) получим  $\omega_c = \frac{\sqrt{K^2-1}}{T} = \frac{\sqrt{10^2-1}}{0,5} = 19,9 \text{ с}^{-1}$ .

Критическое время запаздывания  $\tau_{кр}$  найдем из условия равенства фазовой частотной характеристики разомкнутой системы на частоте  $\omega_c$  величине  $-\pi$ :

$$\psi(\omega_c) = -\arctg \omega_c T - \omega_c \tau_{кр} = -\pi.$$

Из последнего уравнения находим

$$\tau_{кр} = (\pi - \arctg \omega_c T) \omega_c^{-1} = 0,085 \text{ с}.$$

323. Передаточная функция разомкнутой системы автоматического управления имеет вид

$$W_o(p) = \frac{K}{p(1+Tp)},$$

где  $K=20 \text{ с}^{-1}$  — общий коэффициент усиления разомкнутой системы,  $T=0,1$  с — постоянная времени. Последовательно в канал управления включается звено чистого запаздывания, имеющее передаточную функцию  $e^{-\tau p}$ , где  $\tau$  — время запаздывания. Требуется

найти критическое время запаздывания  $\tau_{кр}$ , при котором замкнутая система автоматического управления находится на границе устойчивости, и частоту незатухающих колебаний  $\omega_{кр}$ .

Ответ.  $\omega_{кр} = 12,5 \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau_{кр} = 0,053 \text{ с}$ .

324. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{Ke^{-\tau p}}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}.$$

С помощью логарифмических частотных характеристик определить критическое время запаздывания  $\tau_{кр}$ , если коэффициент усиления разомкнутой системы  $K = 30 \text{ с}^{-1}$ , постоянные времени  $T_1 = 0,025 \text{ с}$  и  $T_2 = 0,2 \text{ с}$ .

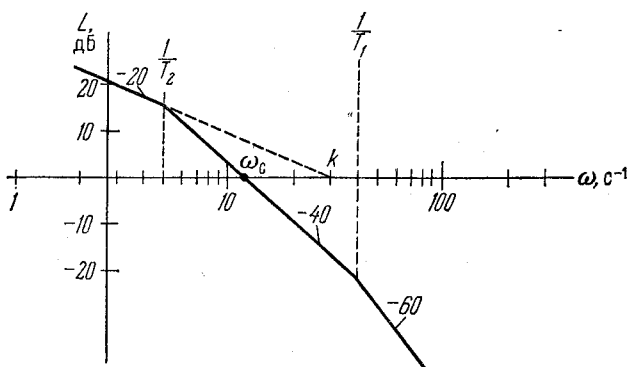


Рис. 191. Асимптотическая л. а. х. к задаче 324.

Решение. Асимптотическая л. а. х. системы приведена на рис. 191. Частота среза разомкнутой системы  $\omega_c = 12,3 \text{ с}^{-1}$ . Фазовая частотная характеристика при частоте  $\omega = \omega_c$  и критическом времени запаздывания  $\tau_{кр}$  должна пересекать линию  $\psi = -\pi$ . Поэтому

$$\psi(\omega_c) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \omega_c T_1 - \arctg \omega_c T_2 - \omega_c \tau_{кр} = -\pi.$$

Отсюда находим

$$\tau_{кр} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg \omega_c T_1 - \arctg \omega_c T_2}{\omega_c} = 0,71 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

325. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_0(p) = \frac{K}{p(1+T^2 p^2)},$$

где  $K = 2 \text{ с}^{-1}$ ,  $T = 0,1 \text{ с}$ . Для достижения устойчивости системы последовательно в канал управления вводится звено чистого запаздывания с передаточной функцией  $e^{-\tau p}$ . Определить, при каких значениях времени запаздывания  $\tau$  замкнутая система устойчива.

Решение. Результирующая передаточная функция разомкнутой системы  $W(p) = W_0(p) e^{-\tau p} = \frac{K e^{-\tau p}}{p(1+T^2 p^2)}$ .

Асимптотическая л. а. х. системы приведена на рис. 192. Замкнутая система будет устойчивой, если л. ф. х. пересекает линию  $\varphi = -\pi$  в диапазоне частот  $K \div 1/T$ . Критические значения времени запаздывания  $\tau_{кр}$  найдем из следующих уравнений:

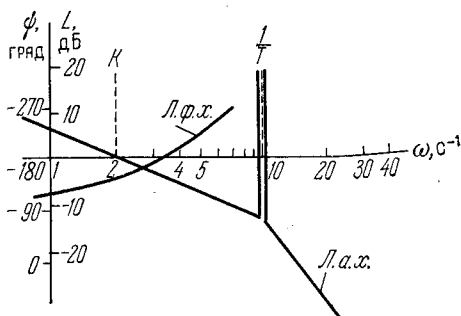


Рис. 192. Асимптотическая л. а. х. и л. ф. х. к задаче 325.

$$-\frac{\pi}{2} - K\tau_{кр\max} = -\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{T}\tau_{кр\min} = -\pi.$$

Отсюда

$$\tau_{кр\max} = \frac{\pi}{2K} = 0,79 \text{ с},$$

$$\tau_{кр\min} = \frac{\pi}{2} T = 0,16 \text{ с}.$$

Замкнутая система устойчива, если выполняется следующее неравенство:  $0,16 \text{ с} < \tau < 0,79 \text{ с}$ .

326. Структурная схема автоматической системы приведена на рис. 193. Коэффициенты передачи звеньев соответственно равны  $k_1 = 1 \text{ с}^{-1}$ ,  $k_2 = 0,125$ ,  $k_3 = 1$ . Постоянная времени  $T = 2 \text{ с}$ . Время запаздывания  $\tau = 0,2 \text{ с}$ . Определить устойчивость системы по критерию Найквиста. Размыкание системы произвести в точке  $x$  (см. рис. 193).

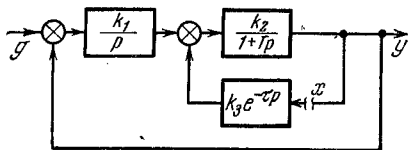


Рис. 193. Структурная схема к задаче 326.

Ответ. Система устойчива.

327. Передаточная функция разомкнутой системы с запаздыванием имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1+T_1 p)}{p^2(1+T_2 p)} e^{-\tau p},$$

где  $T_1 = 0,5 \text{ с}$ ,  $T_2 = 0,2 \text{ с}$ ,  $\tau = 0,3 \text{ с}$ . Определить значения общего коэффициента усиления разомкнутой системы  $K$ , при которых замкнутая система устойчива.

Решение. Фазовая частотная характеристика системы определяется следующим выражением:

$$\varphi(\omega) = -180^\circ + \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2 - \omega \tau \frac{180^\circ}{\pi} \quad (1)$$

и приведена на рис. 194. Замкнутая система устойчива, если л. а. х. пересекает линию  $L=0$  левее точки пересечения  $\psi(\omega)$  линии  $\psi=-180^\circ$ . В критическом случае л. а. х. пересекает линию  $L=0$  на частоте  $\omega_\pi$ . Проводим асимптотическую л. а. х. так, чтобы она пересекла линию  $L=0$  на частоте  $\omega_\pi$ . Частота пересечения низкочастотной асимптоты л. а. х. с осью частот равна  $\sqrt{K_{кр}}=0,35 \text{ с}^{-1}$ . Отсюда находим, что  $K_{кр}=0,35^2=0,12 \text{ с}^{-2}$ . Асимптотическая л. а. х. в точке излома примерно на 3 дБ отличается от действительной л. а. х. Поэтому окончательно получаем  $K_{кр}=\sqrt{2} \cdot 0,12=0,17 \text{ с}^{-2}$ . Замкнутая система устойчива при  $0 < K < 0,17 \text{ с}^{-2}$ .

328. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{p(1+Tp)},$$

где  $K=10 \text{ с}^{-1}$ ,  $T=0,05 \text{ с}$ ,  $\tau$  — время запаздывания.

Определить допустимое значение времени запаздывания  $\tau_d$ , при котором показатель колебательности системы не превышает  $M=1,1$ .

Решение. Показатель колебательности системы не превышает заданного значения  $M$ , если выполняется следующее условие [12]:

$$K(T+\tau) \leq \frac{M^2 + M\sqrt{M^2-1}}{2}.$$

Из неравенства получаем выражение для допустимого времени запаздывания

$$\tau_d = \frac{M^2 + M\sqrt{M^2-1} - 2KT}{2K} = 0,036 \text{ с}.$$

329. Построить переходную функцию замкнутой системы, передаточная функций которой в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{p(1+Tp)},$$

где  $K=10 \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau=0,04 \text{ с}$ ,  $T=0,1 \text{ с}$ .

Решение. В соответствии со структурной схемой системы (рис. 195, а) уравнения движения системы представим в следующем виде:

$$\dot{x}_1 = 1, \quad \dot{x}_2 = K(g-y), \quad \dot{x}_3 = (x_2 - x_3)T^{-1}, \quad y = x_3(t-\tau).$$

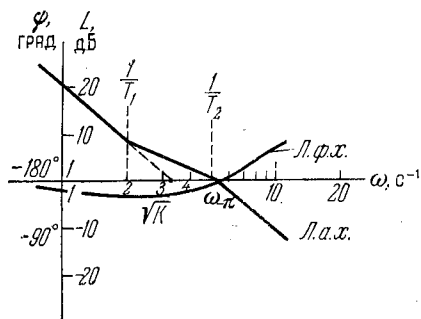


Рис. 194. Асимптотическая л. а. х. и л. ф. х. к задаче 327.

Первое уравнение необходимо для представления системы уравнений в форме, удобной для использования стандартной процедуры Рунге — Кутты  $RK(h, n, x, f)$ . Переменная  $x_1$  равна текущему времени,  $y$  — управляемой величине. Для получения переходной функции положим задающее воздействие  $g = 1$ .

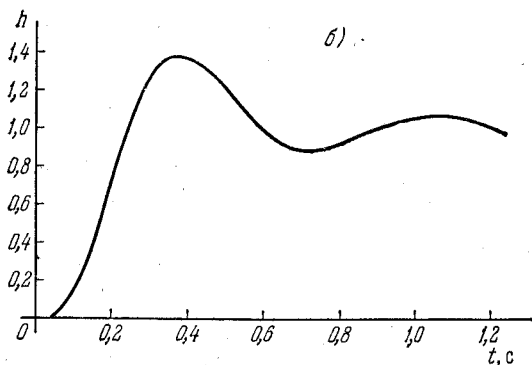
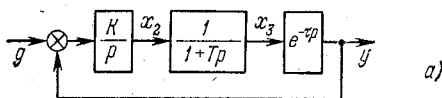


Рис. 195. Структурная схема и переходная функция к задаче 329.

Составим АЛГОЛ-программу для расчета переходной функции:

- ```

1) BEGIN REAL K, T, TT, TK, H, Y; ARRAY X [1 : 9], Z [1 : 2]; INTEGER
   M, KK;
2) PROCEDURE F; BEGIN FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 3 DO X [9+I]:=
   X [3+I]; X [4]:=1; X [5]:=K*(1-Y); X [6]:=(X [11]-X [12])/T; END F;
3) X [1]:=X [2]:=X [3]:=0; Y:=0;
4) K:=10; TT:=.04; T:=.1, TK:=1.2; H:=.001; M:=TT/H;
5) BEGIN ARRAY M1 [1 : M]; INTEGER I; FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
   M1 [I]:=0; KK:=0; N:RK (H, 3, X F); Y:=M1 [M]; FOR I:=1 STEP 1
   UNTIL 2 DO M1 [I]:=M1 [I-1]; M1 [1]:=X [3];
6) Z [1]:=X [1]; Z [2]:=Y;
7) KK:=KK+1; IF KK=20 THEN BEGIN ВЫВОД (Z); KK:=0 END; IF
   X [1] ≥ TK THEN GO TO L ELSE GO TO N; L: ВЫВОД (Z) END END
  
```

Пояснения к программе. Позиции 1 — 3 содержат описание используемых идентификаторов, процедуру правых частей системы уравнений и начальные условия.

Переменной M присваивается значение, равное числу обращений к процедуре RK за время запаздывания $\tau = 0,04$ с (позиция 4). Массив $M1$ и позиция 5 служат для организации чистого запаз-

дывания переменной y на время чистого запаздывания относительно переменной x_3 . На печать выдается текущее время ($X[1]$) и управляемая величина Y с шагом, равным $20 \cdot h = 0,02$ с. Решение ведется до времени $T_K = 1,2$ с.

Переходная функция системы приведена на рис. 195, б.

§ 9.2. Системы с распределенными параметрами

330. Структурная схема системы автоматического управления гидротурбиной имеет вид, изображенный на рис. 196, v , v_d , φ и μ — соответственно относительные величины момента нагрузки турбины, момента, развиваемого турбиной, угловой скорости вращения турбины и перемещения регулирующего органа. Передаточная

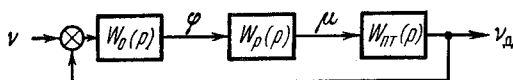


Рис. 196. Структурная схема системы управления гидротурбиной.

функция приведенного трубопровода, полученная с учетом волновых явлений [20], равна

$$W_{п.т}(p) = \frac{1 - 2\gamma \operatorname{th} \tau p}{1 + \gamma \operatorname{th} \tau p}.$$

Передаточная функция турбины $W_0(p) = \frac{k_0}{1 + T_0 p}$, передаточная функция безынерционного регулятора $W_p(p) = \frac{1}{\delta}$, $\delta = 0,05$, $T_0 = 6$ с, $k_0 = 1$, $\gamma = 0,05$. Определить критическое время запаздывания $\tau_{кр}$, соответствующее границе устойчивости системы.

Решение. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{k_0}{\delta(1 + T_0 p)} \frac{1 - 2\gamma \operatorname{th} \tau p}{1 + \gamma \operatorname{th} \tau p} = \frac{1 - 2\gamma \operatorname{th} \tau p}{\delta(1 + T_0 p)(1 + \gamma \operatorname{th} \tau p)}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы записывается в виде

$$\delta(1 + T_0 p)(1 + \gamma \operatorname{th} \tau p) + 1 - 2\gamma \operatorname{th} \tau p = 0.$$

После замены $\operatorname{th} \tau p$ на $\frac{e^{\tau p} - e^{-\tau p}}{e^{\tau p} + e^{-\tau p}}$ и несложных преобразований характеристическое уравнение приведем к следующему виду:

$$1 - 2\gamma + (1 + \gamma)\delta + (1 + \gamma)\delta T_0 p + \\ + [1 + 2\gamma + (1 - \gamma)\delta + (1 - \gamma)\delta T_0 p] e^{-2\tau p} = 0.$$

Эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы (эквивалентность понимается в смысле тождественности характеристических уравнений замкнутой системы) равна

$$W_s(p) = \frac{1+2\gamma+(1-\gamma)\delta+(1-\gamma)\delta T_{0p}}{1-2\gamma+(1+\gamma)\delta+(1+\gamma)\delta T_{0p}} e^{-2\tau p} = 1,21 \frac{1+0,21p}{1+0,34p} e^{-2\tau p}.$$

Эквивалентная частотная передаточная функция разомкнутой системы примет вид

$$W_s(j\omega) = 1,21 \frac{1+0,21(j\omega)}{1+0,34(j\omega)} e^{-j2\omega\tau}. \quad (1)$$

Частота среза, соответствующая модулю (1), равному единице, равна $\omega_c = \sqrt{\frac{1,21^2-1}{0,34^2-(0,21 \cdot 1,21)^2}} = 4,3 \text{ с}^{-1}$. При $\tau = \tau_{кр}$ фазовый сдвиг на частоте $\omega = \omega_c$ должен равняться $-\pi$. Поэтому

$$\arctg(0,21 \cdot 4,3) - \arctg(0,34 \cdot 4,3) - 2 \cdot 4,3\tau_k = -\pi.$$

Из последнего уравнения получаем

$$\tau_{кр} = \frac{\pi - \arctg(0,21 \cdot 4,3) - \arctg(0,34 \cdot 4,3)}{2 \cdot 4,3} = 0,34 \text{ с}.$$

331. Для системы, рассмотренной в задаче 330, построить амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы и по ней определить запас устойчивости по фазе и значения общего коэффициента усиления разомкнутой системы K , при котором замкнутая система устойчива. Передаточную функцию объекта принять равной

$$W_o(p) = \frac{k_o}{1+T_{0p}}, \text{ приведенного трубопровода } W_{пт}(p) = \frac{1-2\gamma \operatorname{th}(\tau p)}{1+\gamma \operatorname{th}(\tau p)},$$

регулятора $W_p(p) = \frac{k_p(1+T_1p)}{p(1+T_2p)}$. Значения параметров системы: $k_o = 2$, $T_o = 31,5 \text{ с}$, $\gamma = 0,03$, $k_p = 0,77 \text{ с}^{-1}$, $T_1 = 12,5 \text{ с}$, $T_2 = 0,48 \text{ с}$, $\tau = 1 \text{ с}$.

Решение. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(1+T_1p)}{p(1+T_{0p})(1+T_2p)} \cdot \frac{1-2\gamma \operatorname{th}(\tau p)}{1+\gamma \operatorname{th}(\tau p)},$$

где $K = k_o k_p = 1,54 \text{ с}^{-1}$. Частотную передаточную функцию разомкнутой системы представим в виде

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) W_2(j\omega),$$

где

$$W_1(j\omega) = \frac{K + jK\omega T_1}{-(T_o + T_2)\omega^2 + j\omega(1 - T_o T_2 \omega^2)},$$

$$W_2(j\omega) = \frac{1-2\gamma \operatorname{th}(j\omega\tau)}{1+\gamma \operatorname{th}(j\omega\tau)} = \frac{1-j2\gamma \operatorname{tg}\omega\tau}{1+j\gamma \operatorname{tg}\omega\tau}.$$

Составим АЛГОЛ-программу для расчета амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы:

- 1) **BEGIN** REAL K, T0, T1, T2, T, G, A, B, C, D, X, Y, X1, Y1, X2, Y2, U, V, Q, Z; **ARRAY** M [1:3];
- 2) **PROCEDURE** XY (A, B, C, D); **BEGIN** Z := C ↑ 2 + D ↑ 2; X := (A × C + B × D)/Z; Y := (D × C - A × B)/Z; **END** XY;
- 3) **PROCEDURE** UV (X1, Y1, X2, Y2); **BEGIN** U := X1 × X2 - Y1 × Y2; V := X1 × Y2 + Y1 × X2; **END** UV;
- 4) K := 1.54; T0 := 31.5; T1 := 12.5; T2 := .48; T := 1; G := .03;
- 5) **FOR** Q := .5 **STEP** .02 **UNTIL** 3.51 **DO**
- 6) **BEGIN** A := K; B := K × T1 × Q; C := - (T0 + T2) × Q ↑ 2; D := Q × (1 - T0 × T2 × Q ↑ 2); XY (A, B, C, D); X1 := X, Y1 := Y;
- 7) A := 1; B := -2 × G × T × G (Q × T); C := 1; D := G × T × G (Q × T); XY (A, B, C, D); X2 := X; Y2 := Y;
- 8) UV (X1, Y1, X2, Y2);
- 9) M [1] := Q; M [2] := U; M [3] := V; **ВЫВОД** (M) **END** **END**

Пояснения к программе. Позиция 1) содержит описание используемых идентификаторов. Процедура позиции 2) предназначена для вычисления вещественной и мнимой частей дроби $(a + jb) : (c + jd)$. Процедура позиции 3) — для вычисления вещественной и мнимой частей произведения $(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2)$. Позиции 6), 7), 8) — для вычисления вещественной и мнимой частей $W_1(j\omega)$, $W_2(j\omega)$, $W(j\omega)$. Частота задается оператором цикла (позиция 5)) от $0,5 \text{ с}^{-1}$ до $3,5 \text{ с}^{-1}$ с шагом $0,02 \text{ с}^{-1}$.

Амплитудно-фазовая характеристика системы приведена на рис. 197. Запас устойчивости системы по фазе равен 65° . Система устойчива при $K < 1,54 : 0,35 = 4,4 \text{ с}^{-1}$.

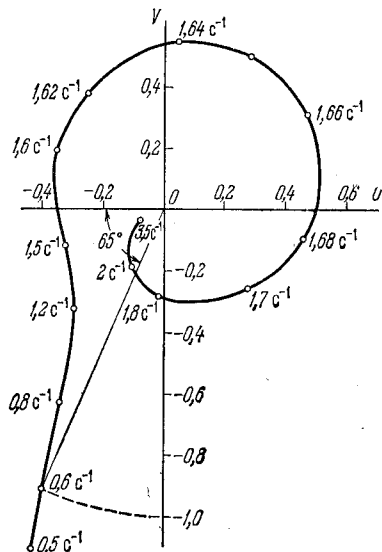


Рис. 197. А. ф. х. к задаче 331

332. Построить переходную функцию системы, рассмотренной в предыдущей задаче.

Решение. Представим уравнения движения системы в виде, удобном для решения их на ЦВМ. С этой целью структурную схему системы изобразим так, как показано на рис. 198. На рис. 198 введены следующие обозначения $g = v_c$, $x_2 = \varphi$, $x_1 = \mu$, $v_g = y$, $a = 1 - 2\gamma$, $b = 1 + 2\gamma$, $c = 1 + \gamma$, $d = 1 - \gamma$.

Уравнения объекта

$$\dot{x}_2 = (-x_2 + k_0(g - y)) T_0^{-1}.$$

Уравнения регулятора

$$\dot{x}_3 = k_p x_2, \quad \dot{x}_4 = (-x_4 + k_p(T_1 - T_2)x_2) T_2^{-1}, \quad x_1 = x_3 + x_4.$$

В операторной форме уравнение приведенного трубопровода представим следующим образом:

$$y = \frac{a + be^{-2\tau p}}{c + de^{-2\tau p}} x_1 = (a + be^{-2\tau p}) z,$$

где

$$z = \frac{1}{c + de^{-2\tau p}} x_1.$$

Отсюда получаем

$$z(t) = (x_1(t) - dz_1(t)) \cdot c, \quad y(t) = az(t) + bz_1(t),$$

где $z_1(t) = z(t - 2\tau)$.

Таким образом, при математическом моделировании приведенный трубопровод может быть представлен в виде соединения

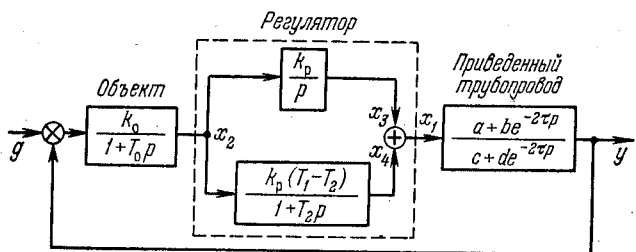


Рис. 198. Структурная схема к задаче 332.

идеальных безынерционных звеньев и звена чистого запаздывания со временем запаздывания, равным 2τ .

АЛГОЛ-программа:

- ```

1) BEGIN REAL K0, KP, T0, T1, T2, T, G, X1, Z1, Y, Z, A, B, C, D, H,
 TK; INTEGER L, I, M, KK, J; ARRAY X [1:16], L [1:2];
2) PROCEDURE F; BEGIN FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 4 DO X [12+I] :=
 X [4+I]; X [5] := 1; X [6] := (-X [14] + K0*(1-Y))/T0; X [7] :=
 KP*X [14]; X [8] := (-X [16] + KP*(T1-T2)*X [14])/T2 END F;
3) X [1] := X [2] := X [3] := X [4] := Y := 0;
4) K0 := 2; T0 := 31.5; T1 := 12.5; T2 := .48; KP := .77; T := 1; G := .03;
 TK := 25; H := .01; M := 2*T/H;

```

```

5) BEGIN ARRAY M1 [1:M]; FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO M1 [I] := 0;
6) KK:=0; A:=1-2×G; D:=1+2×G; C:=1+G; D:=1-G;
7) N: RK (H, 4, X, F); X1:=X [3]+X [4]; Z1:=M1 [M]; Z:=(X1-D×
 Z1)/C;
8) FOR J:=M STEP-1 UNTIL 2 DO M1 [J] :=M1 [J-1]; M1 [1] :=Z;
9) Y:=A×Z+B×Z1; L [1] :=X [1]; L [2] :=Y; KK:=KK+1;
10) IF KK=50 THEN BEGIN ВЫВОД (L); KK:=0 END
11) IF X [1] ≥ TK THEN GO TO K ELSE GO TO N; K: ВЫВОД (L) END END

```

*Пояснения к программе.* Позиции 1)–3) содержат описание используемых идентификаторов, процедуру правых частей уравнений системы и начальные условия. Позиция 5) необходима для

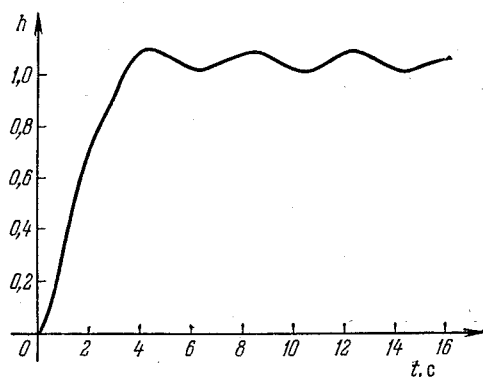


Рис. 199. Переходная функция к задаче 332.

первоначального обнуления массива  $M1$ . Переменная  $M$  равна числу обращений к процедуре  $RK$ , описанной в приложении 37, за время запаздывания  $2\tau$ . Массив  $M1$  и позиция 8) служат для организации чистого запаздывания переменной  $z1$  на время  $2\tau$  по отношению к переменной  $z$ .

На печать выдается время  $z[1]$  и выходная координата системы  $y$  с шагом, равным  $50H = 50 \cdot 0,01 = 0,5$  с. Решение ведется до времени  $TK = 25$  с.

Переходная функция системы приведена на рис. 199.