

Федеральное агентство по образованию

Томский государственный
архитектурно-строительный университет

**ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ
МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

Методические указания

Издание второе, с изменениями

Составитель В.Г. Симоненко

Томск 2007

Общие теоремы динамики механической системы: методические указания / Сост. В.Г. Симоненко. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2007. – 39 с.

Рецензент Е.В. Евтюшкин
Редактор Е.Ю. Глотова

В методических указаниях содержатся материалы и рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по теоретической механике, даны указания по решению задач, примеры решения, список рекомендуемой литературы.

Методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов всех специальностей дневной и заочной формы обучения.

Печатаются по решению методического семинара кафедры теоретической механики № 3 от 3 октября 2006 г.

Утверждены и введены в действие проректором по учебной работе В.В. Дзюбо

с 6.12.2007
до 6.12.2012

Подписано в печать .
Формат 60x90/16. Бумага офсет. Гарнитура Таймс, печать офсет.
Уч.-изд.л. 2. Тираж 1500 экз. Заказ №

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Общие положения	4
2. Методические указания	4
3. Решение типовых задач	6
3.1. Задача 1.....	6
3.2. Задача 2.....	16
3.3. Задача 3.....	25
Список рекомендуемой литературы.....	36
Приложение. Осевые моменты инерции некоторых однородных тел	37

«Первое, что бросается в глаза при рассмотрении движущейся материи, это взаимная связь отдельных тел между собой, их обусловленность друг другом».

Ф. Энгельс. Диалектика природы

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Общие теоремы динамики механической системы широко используются для решения задач инженерной практики.

Для успешного применения этих теорем необходимы не только их тщательная проработка, но и приобретение навыков их применения в каждом конкретном случае. Следовательно, каждому студенту необходимо самостоятельно решить определенный комплекс задач. Этот набор задач представлен в расчётно-графической работе Д-2.

Методика решения типовых задач задания рассматривается на конкретных примерах.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЮ Д-2

2.1. Объем задания

Задание включает в себя типовые задачи на применение общих теорем динамики к исследованию движения механической системы.

Задание состоит из 30 вариантов, в каждом варианте по 3 задачи, а каждая задача имеет 6 различных исходных данных – подвариантов.

Студент должен самостоятельно решить задачи одного из вариантов с указанием номера подварианта.

Для каждой задачи приведен чертеж, поясняющий заданную механическую систему, а необходимые для решения данные приводятся в соответствующей таблице подвариантов. Те-

ла, составляющие систему, пронумерованы цифрами $1, 2, 3, \dots$; их массы обозначены как m_1, m_2, m_3, \dots соответственно; массами нитей (тросов, лент) пренебречь. При определении осевых моментов инерции тел следует считать их однородными, воспользовавшись сводной таблицей. Для тел сложной формы заданы осевые радиусы инерции i_1, i_2, i_3, \dots . Во всех задачах трением скольжения, трением качения и сопротивлением вращению в подшипниках пренебречь.

2.2. Содержание задания

2.2.1. В первой задаче во всех нечётных вариантах (№ 1, 3, 5, ..., 29) необходимо определить уравнение движения $S_1 = S_1(t)$ и скорость $V_1 = V_1(t)$ тела I , исходя из закона сохранения проекции количества движения на ось, и проверить решение при помощи закона сохранения положения центра масс механической системы.

2.2.2. В первой задаче во всех чётных вариантах (№ 2, 4, ..., 30) определить суммарную горизонтальную и вертикальную составляющие реакций опор в зависимости от времени, используя теорему об изменении количества движения центра масс системы, и проверить решение при помощи теоремы о движении центра масс механической системы.

2.2.3. Во второй задаче во всех нечётных вариантах определить угловую скорость ω тела I при $t = t_1$, используя теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно оси.

2.2.4. Во второй задаче во всех чётных вариантах определить угловую скорость ω тела I для момента времени $t = t_1$, исходя из закона сохранения кинетического момента механической системы.

2.2.5. В третьей задаче во всех нечётных вариантах:

а) вычислить кинетическую энергию механизма как функцию скорости тела I ;

б) исходя из теоремы об изменении кинетической энергии механической системы, определить скорость V_1 тела I в момент, когда пройденный им путь равен S_1 .

2.2.6. В третьей задаче во всех чётных вариантах:

а) вычислить кинетическую энергию механизма как функцию угловой скорости ω и угла поворота φ ведущего звена I ;

б) исходя из теоремы об изменении кинетической энергии механической системы, определить угловую скорость ω звена I в тот момент, когда звено I повернется на угол φ .

3. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ЗАДАНИЯ Д-2

3.1. Задача 1

Для решения задачи 1 (чётные и нечётные варианты) используются: теорема об изменении количества движения механической системы и теорема о движении центра масс механической системы, одна из которых используется как проверочная правильности полученных результатов.

Приведём справочный теоретический материал, необходимый для решения задачи.

Вектором количества движения материальной точки называется произведение массы m точки на вектор её скорости \vec{V} , т.е.

$$\vec{q} = m\vec{V}. \quad (1.1)$$

Вектором количества движения механической системы называется векторная сумма количеств движения всех точек (тел) системы, т.е.

$$\vec{Q} = \sum \vec{q}_k. \quad (1.2)$$

Количество движения твёрдого тела равно произведению массы M тела на абсолютную скорость его центра масс \vec{V}_C

$$\vec{Q} = M \cdot \vec{V}_C. \quad (1.3)$$

Его проекции на оси декартовой системы координат:

$$Q_x = M \cdot V_{Cx}, \quad Q_y = M \cdot V_{Cy}, \quad Q_z = M \cdot V_{Cz}. \quad (1.4)$$

Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме имеет вид: *производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме (главному вектору) всех действующих на систему внешних сил*

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e. \quad (1.5)$$

Правая часть этой формулы – главный вектор всех внешних сил, в число которых входят все активные внешние силы и реакции связей.

Теорема (5) в проекциях на оси декартовой системы координат

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \quad (1.6)$$

Закон сохранения проекции количества движения на какую-либо ось x формулируется следующим образом: *если равна нулю проекция главного вектора всех внешних сил на какую-либо ось x , т.е. $\sum F_{kx}^e = 0$, то из формулы (6) следует*

$$Q_x = \text{const}. \quad (1.7)$$

Массой механической системы называется сумма масс всех точек (тел), входящих в систему,

$$M = \sum m_k. \quad (1.8)$$

Центром масс механической системы называется геометрическая точка C пространства, координаты которой определяются формулами:

$$x_C = \frac{1}{M} \sum m_k x_k; \quad y_C = \frac{1}{M} \sum m_k y_k; \quad z_C = \frac{1}{M} \sum m_k z_k. \quad (1.9)$$

В формулах (1.9) x_k, y_k, z_k – координаты k -й точки массой m_k или координаты центров масс тел системы.

Теорема о движении центра масс механической системы имеет вид: *центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на систему*

$$M \vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e, \quad (1.10)$$

где \vec{a}_C – ускорение центра масс системы.

Формула (10) в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$M \ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \quad M \ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e, \quad M \ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e, \quad (1.11)$$

здесь $\ddot{x}_C, \ddot{y}_C, \ddot{z}_C$ – проекции ускорения центра масс механической системы на оси координат.

Закон сохранения движения центра масс в проекции на какую-либо ось x имеет вид (см. формулы (1.11)):

$$\text{если } \sum F_{kx}^e = 0, \text{ то } V_{Cx} = \text{const}; \quad (1.12)$$

и если в начальный момент времени система находилась в покое, т.е. $V_{Cx}^0 = 0$, то $x_C = x_C^0 = \text{const}$.

3.1.1. Задача 1 (нечётные варианты)

Дано: $m_4 = 10$ кг, $m_2 = m_3 = 2m_4$, $m_1 = 10m_4$, $R = 20$ см,
 $r = 10$ см, $l = 40$ см, $\varphi = \pi t$ (рад), $\alpha = 60^\circ$.

Механизм (рис. 1) представляет собой систему, состоящую из станины 1 с лебёдкой, двух грузов 2 и 3 и рукоятки 4. Масса станины с лебёдкой – m_1 , массы грузов – m_2, m_3 . Масса рукоятки – m_4 , ее длина $OD = l$. R и r – радиусы барабанов лебедки. Рукоятка вращается против хода часовой стрелки по закону $\varphi = \varphi(t)$. В начальный момент времени система находи-

лась в состоянии покоя. Определить уравнение движения $S_1 = S_1(t)$ и скорость $V_1 = V_1(t)$ станины.

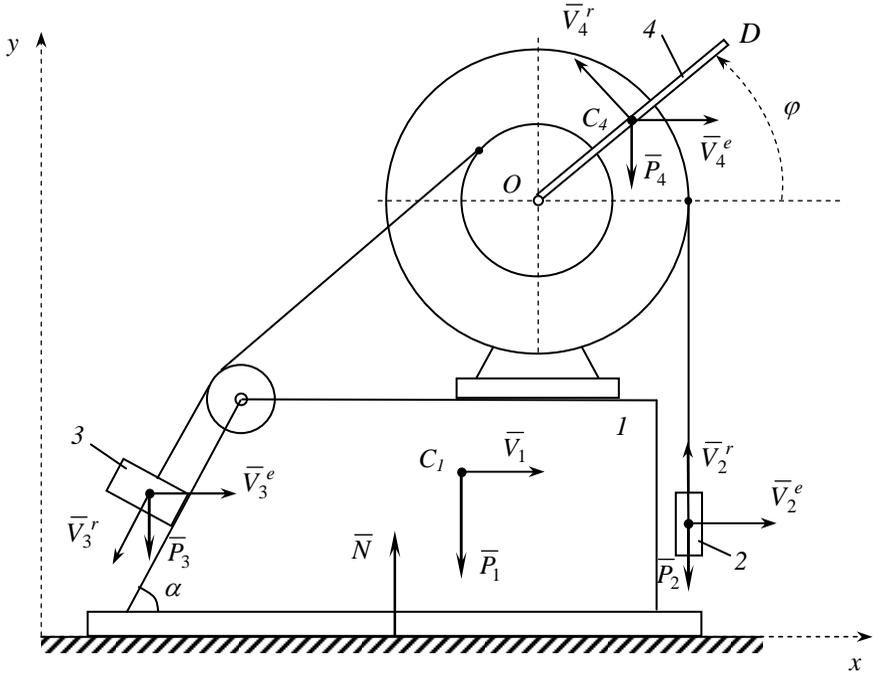


Рис. 1

Решение. Для решения задачи применим теорему об изменении количества движения механической системы (1.5).

Введём декартовую систему координат x, y .

Внешними силами, приложенными к системе, являются: вес \vec{P}_1 станины с лебедкой, вес \vec{P}_2 и \vec{P}_3 грузов 2 и 3, вес рукоятки \vec{P}_4 и нормальная реакция \vec{N} неподвижной поверхности. Все эти силы направлены вертикально, и их сумма проекций на ось x равна 0, т.е. $\sum F_{kx}^e = N_x - P_{1x} - P_{2x} - P_{3x} - P_{4x} = 0$ и, следова-

тельно, выполняется закон сохранения проекции количества движения системы на ось x (1.7): $Q_x = \text{const}$.

Из этой формулы следует, что $Q_x = Q_x^0$, где Q_x^0 – проекция количества движения системы на ось x в начальный момент времени и, так как в этот момент система была в покое, то $Q_x^0 = 0$. Следовательно, во все время движения

$$Q_x = 0. \quad (1.14)$$

Согласно формуле (1.2) количество движения системы равно

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 + \vec{Q}_4. \quad (1.15)$$

Учитывая выражение (1.3),

$$\vec{Q}_1 = m_1 \vec{V}_1, \quad \vec{Q}_2 = m_2 \vec{V}_2, \quad \vec{Q}_3 = m_3 \vec{V}_3, \quad \vec{Q}_4 = m_4 \vec{V}_4.$$

В этих формулах $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4$ – абсолютные скорости центров масс C_1, C_2, C_3, C_4 тел системы. Так как центры масс тел совершают сложное движение, представленное относительным и переносным движениями, то

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_1^r + \vec{V}_1^e, \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_2^r + \vec{V}_2^e, \quad \vec{V}_3 = \vec{V}_3^r + \vec{V}_3^e, \quad \vec{V}_4 = \vec{V}_4^r + \vec{V}_4^e.$$

Индексы r и e обозначают относительную и переносную скорости центров масс тел 1, 2, 3, 4 системы соответственно.

Исходя из рис.1, получим

$$\vec{V}_1^e = \vec{V}_2^e = \vec{V}_3^e = \vec{V}_4^e = \vec{V}_1,$$

$$V_2^r = V_B; \quad V_B = \omega R = \frac{d\varphi}{dt} R; \quad V_B = \pi R; \quad V_2^r = \pi R;$$

$$V_3^r = V_A; \quad V_A = \omega r = \frac{d\varphi}{dt} r; \quad V_A = \pi r; \quad V_3^r = \pi r;$$

$$V_4^r = V_{C4}; \quad V_{C4} = \omega \frac{l}{2} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{l}{2}; \quad V_{C4} = \pi \frac{l}{2}; \quad V_4^r = \pi \frac{l}{2}.$$

Проецируя (1.15) на ось x , получим

$$Q_x = 10m_4V_1 + 2m_4V_1 - 2m_4\pi r \cos \alpha + m_4V_1 - m_4 \frac{\pi}{2} l \sin \pi t,$$

откуда, учитывая (1.14),

$$V_1 = \frac{\pi(2r \cos \alpha + \frac{l}{2} \sin \pi t)}{15}. \quad (1.16)$$

Подставляя числовые данные в формулу (1.16), получим

$$V_1 = 0,314 + 0,2 \sin \pi t \text{ (м/с)}.$$

Закон движения станины можно определить, используя (1.16), где $V_1 = \frac{dS_1}{dt}$.

$$dS_1 = V_1 dt, \quad S_1 = \int_0^t \frac{2\pi r \cos \alpha}{15} dt + \int_0^t \frac{\pi l \sin \pi t}{30} dt;$$

$$S_1 = \frac{2\pi r t \cos \alpha + \frac{l}{2}(1 - \cos \pi t)}{15}. \quad (1.17)$$

С учетом числовых данных $S_1 = 0,314t + 0,2(1 - \cos \pi t)$ (м).

Так как $\sum F_{kx}^e = 0$, то проверку найденных величин $S_1(t)$ и $V_1(t)$ можно провести, используя закон сохранения движения центра масс системы в виде (1.13):

$$x_c = x_c^0 = \text{const}.$$

Согласно первой формуле (1.9)

$$x_c^0 = \frac{m_1x_1^0 + m_2x_2^0 + m_3x_3^0 + m_4x_4^0}{M},$$

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{M}. \quad (1.18)$$

Пусть при $t = 0$ координаты центров масс на ось x имеют вид: $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0$, а x_1, x_2, x_3, x_4 – те же величины при повороте рукоятки на угол φ . Выразим последние координаты через смещение S_1 станины с учетом того, что грузы 2, 3 и рукоятка 4 участвуют в сложном движении. Центры масс тел 2, 3 и 4 в переносном движении сместятся, как и станина, на величину S_1 . В относительном движении эти тела получают некоторые перемещения вдоль оси x .

С учетом вышесказанного

$$x_1 = x_1^0 + S_1, \quad x_2 = x_2^0 + S_1,$$

$$x_3 = x_3^0 + S_1 - \varphi r \cos \alpha, \quad x_4 = x_4^0 + S_1 - \frac{l}{2}(1 - \cos \pi t).$$

В этих формулах « $\varphi r \cos \alpha$ » и « $\frac{l}{2}(1 - \cos \pi t)$ » – относительные смещения центров тяжести груза 3 и рукоятки 4 соответственно вдоль оси x .

Подставляя значения координат в формулу (1.13) с учетом (1.18) и выражая оттуда S_1 , получим

$$S_1 = \frac{2\pi r t \cos \alpha + \frac{l}{2}(1 - \cos \pi t)}{15}. \quad (1.19)$$

Скорость станины V_1 получим, дифференцируя (1.19) по времени:

$$V_1 = \frac{\pi(2r \cos \alpha + \frac{l}{2} \sin \pi t)}{15}. \quad (1.20)$$

Сравнивая (1.19) с (1.17) и (1.20) с (1.16), убеждаемся в правильности решения задачи.

3.1.2. Задача 1 (чётные варианты)

Статор 1 , масса которого равна m_1 , прикреплен к фундаменту болтами A . Масса ротора 2 равна m_2 , его центр масс C_2 смещен относительно оси вращения на расстояние $OC_2 = l$. Ротор вращается по закону $\varphi = \varphi(t)$.

Определить суммарную и горизонтальную составляющие реакции опор A в зависимости от времени.

Дано: $m_1 = 100$ кг, $m_2 = 20$ кг, $\varphi = \frac{\pi t^2}{2}$ рад, $l = 10$ см.

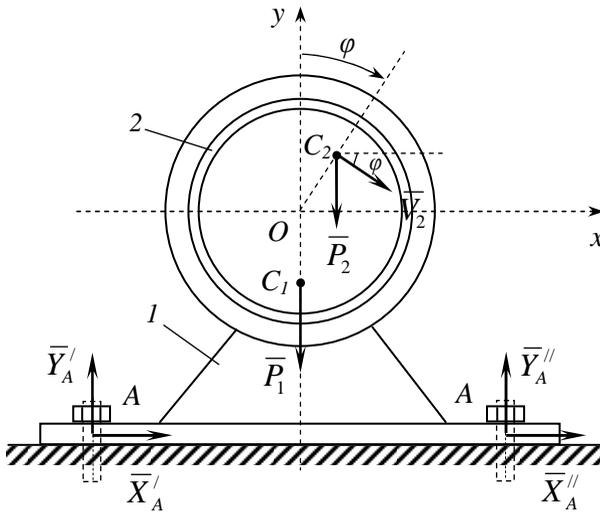


Рис. 2

Решение. Рассмотрим механизм, состоящий из двух тел: статора 1 и ротора 2 . Внешними силами, приложенными к этой системе, являются веса тел \vec{P}_1, \vec{P}_2 и реакции опор A , суммарные

составляющие которых обозначены через $\vec{X}_A = \vec{X}'_A + \vec{X}''_A$ и $\vec{Y}_A = \vec{Y}'_A + \vec{Y}''_A$.

Декартовую систему координат введем так, как показано на рис. 2.

Для решения поставленной задачи применим теорему об изменении количества движения механической системы в проекциях на оси координат (1.6):

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e.$$

Проекции главного вектора внешних сил на оси x и y

$$\sum F_{kx}^e = X_A, \quad \sum F_{ky}^e = Y_A - P_1 - P_2,$$

тогда

$$\frac{dQ_x}{dt} = X_A, \quad \frac{dQ_y}{dt} = Y_A - P_1 - P_2. \quad (1.21)$$

Уравнения (1.21) позволяют вычислить искомые реакции X_A, Y_A , если предварительно установить зависимость Q_x и Q_y от времени. Согласно формуле (1.2) $\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$. Так как статор неподвижен, то его количество движения $\vec{Q}_1 = 0$ и, следовательно, $\vec{Q} = \vec{Q}_2$. Согласно (1.3) $\vec{Q}_2 = m_2 \vec{V}_2$, где \vec{V}_2 – скорость центра масс ротора. Его проекции на оси:

$$Q_x = m_2 V_{2x}, \quad Q_y = m_2 V_{2y},$$

$$V_{2x} = V_2 \cos \varphi, \quad \text{где } V_2 = \omega \cdot OC_2 \text{ и } \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \pi t,$$

$$\text{откуда } V_{2x} = \pi l t \cos \frac{\pi t^2}{2}.$$

$$\text{Аналогично, } V_{2y} = -V_2 \sin \varphi = -\pi l t \sin \frac{\pi t^2}{2}.$$

$$\text{Тогда } Q_x = m_2 \pi l t \cos \frac{\pi t^2}{2}, \quad Q_y = -m_2 \pi l t \sin \frac{\pi t^2}{2}.$$

Далее

$$\frac{dQ_x}{dt} = m_2 \pi l \left(\cos \frac{\pi t^2}{2} - t^2 \pi \sin \frac{\pi t^2}{2} \right),$$

$$\frac{dQ_y}{dt} = -m_2 \pi l \left(\sin \frac{\pi t^2}{2} + t^2 \pi \cos \frac{\pi t^2}{2} \right),$$

откуда согласно формулам (1.21)

$$X_A = m_2 \pi l \left(\cos \frac{\pi t^2}{2} - t^2 \pi \sin \frac{\pi t^2}{2} \right), \quad (1.22)$$

$$Y_A = P_1 + P_2 - m_2 \pi l \left(\sin \frac{\pi t^2}{2} + t^2 \pi \cos \frac{\pi t^2}{2} \right). \quad (1.23)$$

Проверку полученного решения проведем, используя теорему о движении центра масс механической системы в проекциях на оси координат (1.11),

$$M \ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \quad M \ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e.$$

$$\text{Согласно рис. 2 } \sum F_{kx}^e = X_A, \quad \sum F_{ky}^e = Y_A - P_1 - P_2,$$

$$\text{откуда } X_A = M \ddot{x}_C, \quad Y_A = M \ddot{y}_C + P_1 + P_2. \quad (1.24)$$

Определим координаты x_C и y_C центра масс механической системы как функции времени. Согласно формулам (1.9)

$$Mx_C = m_1 x_1 + m_2 x_2, \quad My_C = m_1 y_1 + m_2 y_2.$$

В этих формулах x_1, y_1 и x_2, y_2 – координаты центров масс статора и ротора, причем $x_1 = y_1 = 0$ (начало системы координат). Тогда $Mx_C = m_2 x_2, \quad My_C = m_2 y_2.$

$$\text{В этих формулах } x_2 = l \sin \frac{\pi t^2}{2}, \quad y_2 = l \cos \frac{\pi t^2}{2}.$$

Дважды дифференцируя полученные выражения по времени и учитывая формулы (1.24), получим:

$$X_A = m_2 \pi l \left(\cos \frac{\pi t^2}{2} - t^2 \pi \sin \frac{\pi t^2}{2} \right), \quad (1.25)$$

$$Y_A = P_1 + P_2 - m_2 \pi l \left(\sin \frac{\pi t^2}{2} + t^2 \pi \cos \frac{\pi t^2}{2} \right). \quad (1.26)$$

Сравнивая (1.25) с (1.22) и (1.26) с (1.23), приходим к выводу, что задача решена правильно.

Подставляя числовые данные, получим

$$X_A = 6,28\left(\cos\frac{\pi t^2}{2} - \pi t^2 \sin\frac{\pi t^2}{2}\right) \text{ (Н)};$$

$$Y_A = 1176 + 6,28\left(\sin\frac{\pi t^2}{2} + \pi t^2 \cos\frac{\pi t^2}{2}\right) \text{ (Н)}.$$

3.2. Задача 2

Предложенные ниже задачи решаются с применением теоремы об изменении кинетического момента механической системы для нечётных вариантов, для чётных – с применением закона сохранения кинетического момента механической системы.

Приведём краткие сведения из теории.

Моментом количества движения (кинетическим моментом) материальной точки относительно некоторого центра O называется векторное произведение радиуса-вектора точки относительно этого центра на вектор её количества движения

$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times m\vec{V} = \vec{M}_0(m\vec{V}). \quad (2.1)$$

Направление вектора \vec{l}_0 определяется по правилу векторного произведения: вектор \vec{l}_0 направлен перпендикулярно плоскости, содержащей векторы \vec{r} и $m\vec{V}$ в ту сторону, откуда кратчайший поворот от радиуса-вектора \vec{r} к вектору количества движения происходит против хода часовой стрелки.

Модуль кинетического момента вычисляется по формуле:

$$l_0 = mV r \sin(\hat{\vec{r}}; m\vec{V}) = mVh, \quad (2.2)$$

где h – плечо вектора количества движения $m\vec{V}$ относительно центра O .

Проецируя (2.1) на оси декартовой системы координат, получим кинетические моменты точки относительно осей

$$l_x = M_x(m\vec{V}), \quad l_y = M_y(m\vec{V}), \quad l_z = M_z(m\vec{V}). \quad (2.3)$$

Подсчитать кинетический момент точки относительно какой-либо оси можно так же, как момент силы относительно оси, то есть кинетический момент точки относительно какой-то оси z равен взятому со знаком плюс или минус произведению модуля проекции вектора количества движения mV_{np} на плоскость, перпендикулярную оси z , на плечо этой проекции $m\vec{V}_{np}$ относительно точки O пересечения оси z с плоскостью

$$l_z = \pm mV_{np}h. \quad (2.4)$$

Причем $l_z > 0$, если с положительного направления оси поворот тела происходит против хода часовой стрелки и $l_z < 0$ в противном случае.

Кинетическим моментом или главным моментом количества движения механической системы относительно данного центра называется вектор \vec{L}_0 , равный векторной сумме кинетических моментов всех точек (тел) системы относительно этого же центра

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{M}_0(m_k\vec{V}_k) = \sum \vec{r}_k \times m_k\vec{V}_k. \quad (2.5)$$

Кинетические моменты системы относительно координатных осей получим, проецируя (5) на оси декартовой системы координат:

$$L_x = \sum M_x(m_k\vec{V}_k), \quad L_y = \sum M_y(m_k\vec{V}_k), \quad L_z = \sum M_z(m_k\vec{V}_k). \quad (2.6)$$

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω , то его кинетический момент относительно этой оси равен

$$L_z = J_z\omega, \quad (2.7)$$

где J_z – момент инерции тела относительно данной оси.

Знак кинетического момента относительно оси вращения совпадает со знаком угловой скорости. При вращении против

хода часовой стрелки он положителен, по часовой – отрицателен.

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно какого-либо центра O имеет вид: *производная по времени от кинетического момента механической системы относительно неподвижного центра O равна главному моменту внешних сил системы относительно того же центра:*

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_k^e). \quad (2.8)$$

В ней $\sum \vec{M}_0(\vec{F}_k^e)$ – сумма моментов всех внешних сил, приложенных к системе.

Проецируя (2.8) на оси декартовой системы координат, получим теоремы об изменении кинетических моментов относительно этих осей:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum M_x(\vec{F}_k^e), \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum M_y(\vec{F}_k^e), \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e). \quad (2.9)$$

Закон сохранения кинетического момента относительно какой-либо оси z имеет место в случае равенства нулю суммы моментов всех внешних сил относительно этой оси, т.е. при $\sum M_z(\vec{F}_k^e) = 0$ согласно (2.9) кинетический момент системы относительно оси есть константа

$$L_z = \text{const}. \quad (2.10)$$

Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей z и z_C , одна из которых проходит через центр масс C (центральная ось), выражается с помощью теоремы Штейнера–Гюйгенса

$$J_z = J_{z_C} + M d^2, \quad (2.11)$$

где J_{z_C} – момент инерции относительно центральной оси;

M – масса тела;

d – расстояние между осями.

Моменты инерции некоторых простейших однородных тел приведены в таблице.

3.2.1. Задача 2 (нечётные варианты)

Дано: $m_1 = m_2 = 2 \text{ кг}$, $m_3 = 5 \text{ кг}$, $m_4 = 40 \text{ кг}$,
 $a = 8 \text{ см}$, $d = 10 \text{ см}$, $M_c = 2\omega \text{ (Н}\cdot\text{м)}$, $t_1 = 0,1 \text{ с}$.

Механизм, представленный на рис. 3, состоит из вращающегося вала AB , на котором жёстко закреплены лопатки 1 , 2 и барабан 3 , диаметр которого равен d . К барабану прикреплен с помощью троса груз 4 . На вал действует момент сопротивления вращению M_c . Массами стержней 5 и троса пренебречь. Движение механизма началось из состояния покоя.

Определить угловую скорость ω вала при $t = t_1$.

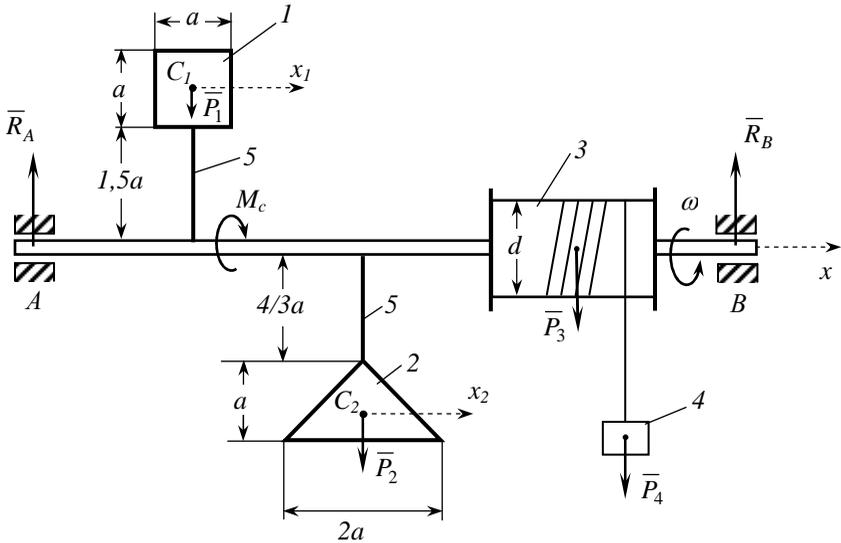


Рис. 3

Решение. Для решения задачи применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения x . Согласно формулам (2.9)

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum M_x(\vec{F}_{kx}^e), \quad (2.12)$$

здесь $\sum M_x(\vec{F}_{kx}^e)$ – главный момент всех внешних сил относительно оси x .

Вычислим правую часть этой формулы. Расставим все внешние силы, действующие на механизм. Этими силами будут: $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ – вес тел системы, M_C – силы сопротивления вращению вала и \vec{R}_A, \vec{R}_B – реакции подшипников A и B .

Так как центры тяжести лопаток отстоят от оси вращения на равных расстояниях ($2a$) и их веса \vec{P}_1 и \vec{P}_2 равны, то сумма моментов этих сил относительно оси вращения равна нулю при любом угле поворота вала (их моменты имеют противоположные знаки). Моменты сил $\vec{P}_3, \vec{R}_A, \vec{R}_B$ относительно оси x равны нулю, так как их линии действия пересекают эту ось. Момент силы \vec{P}_4 : $M_x(\vec{P}_4) = \frac{1}{2}P_4d$. Момент сил сопротивления M_C препятствует вращению вала, поэтому его знак будет отрицательным: $M_C = -2\omega$.

Окончательно

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = \frac{1}{2}m_4gd - 2\omega. \quad (2.13)$$

Рассмотрим теперь левую часть выражения (2.12).

Согласно (2.6) кинетический момент L_x всех тел механизма относительно оси x

$$L_x = L_{1x} + L_{2x} + L_{3x} + L_{4x}. \quad (2.14)$$

Кинетические моменты вращающихся тел $1, 2, 3$ согласно формуле (2.7) равны

$$L_{1x} = J_{1x}\omega, \quad L_{2x} = J_{2x}\omega, \quad L_{3x} = J_{3x}\omega.$$

Моменты инерции J_{1x}, J_{2x} вычислим, используя теорему Штейнера–Гюйгенса (2.11):

$$J_{1x} = J_{1xC} + m_1(2a)^2 = \frac{1}{12}m_1a^2 + 4m_1a^2 = \frac{49}{12}m_1a^2.$$

$$J_{2x} = J_{2xC} + m_2(2a)^2 = \frac{1}{18}m_2a^2 + 4m_2a^2 = \frac{73}{18}m_2a^2.$$

В этих формулах J_{1xC} и J_{2xC} определяются из таблицы. Кинетический момент груза 4 подсчитаем, используя формулу (2.4):

$$L_{4x} = m_4V_4 \frac{d}{2} = \frac{1}{4}m_4d^2\omega,$$

где $V_4 = \omega \frac{d}{2}$.

Таким образом, кинетический момент L_x согласно (2.14) равен

$$L_x = (J_{1x} + J_{2x} + J_{3x} + J_{4x})\omega = \frac{1}{2}A\omega, \quad (2.15)$$

где $A = \frac{293}{18}m_1a^2 + \frac{1}{4}(m_3 + 2m_4)d^2$.

Подставляя (2.13) и (2.15) в формулу (2.12), получим дифференциальное уравнение для ω :

$$\frac{1}{2}A \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}m_4gd - 2\omega.$$

Проинтегрируем это дифференциальное уравнение методом разделения переменных:

$$\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{gm_4d - 4\omega} = \frac{1}{A} \int_0^t dt,$$

$$\frac{1}{4} \ln(gm_4d - 4\omega) - \frac{1}{4} \ln(gm_4d) = \frac{1}{A} t,$$

откуда $\omega = \frac{1}{4}gm_4d(1 - e^{\frac{4t}{A}})$.

При $t = t_1 = 0,1$ с угловая скорость $\omega = 6,02$ с⁻¹.

3.2.2. Задача 2 (чётные варианты)

Дано: $m_2 = \frac{1}{4}m_1$, $S = O\ddot{N} = \pi t$ (м), $a = 4$ м,

$R = 3$ м, $\omega_0 = 1$ с⁻¹, $t_1 = 4$ с.

Механизм, представленный на рис. 4, состоит из вращающейся вокруг оси z платформы массой m_1 и тележки массой m_2 , движущейся в относительном движении по дуге окружности радиуса R : $\ddot{S} = O\ddot{N}$. В начальный момент времени платформа имела угловую скорость ω_0 . Определить угловую скорость ω вращения платформы при $t = t_1$. Сопротивлением вращению пренебречь.

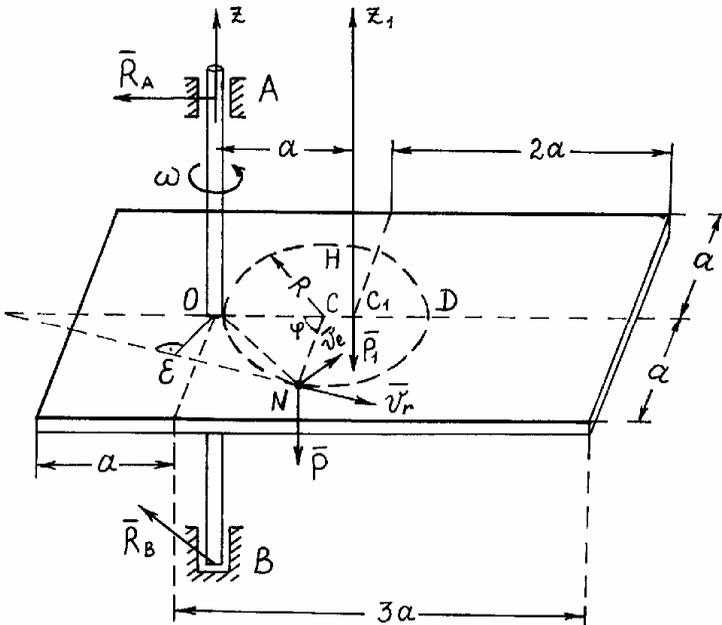


Рис. 4

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения z согласно формуле (2.9)

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e), \quad (2.16)$$

где $\sum M_z(\vec{F}_k^e)$ – главный момент всех внешних сил относительно оси вращения z .

Расставим все внешние силы, действующие на систему: силы тяжести \vec{P}_1 и \vec{P}_2 – платформы и тележки соответственно; \vec{R}_A и \vec{R}_B – реакции в подшипнике A и в подпятнике B . Моменты этих сил относительно оси вращения z равны нулю, так как силы или параллельны оси, или пересекают эту ось. Отсюда следует, что правая часть формулы (2.16) $\sum M_z(\vec{F}_k^e) = 0$ и, следовательно, выполняется закон сохранения кинетического момента относительно оси вращения z и согласно (2.10)

$$L_z = L_z^0 = \text{const}. \quad (2.17)$$

Вычислим начальный кинетический момент L_z^0 системы с учетом формулы (2.6):

$$L_z^0 = L_{1z}^0 + L_{2z}^0, \quad (2.18)$$

где L_{1z}^0 и L_{2z}^0 – начальные кинетические моменты платформы и тележки соответственно.

При $t = 0, S = 0$, то есть тележка находится на оси вращения, скорость её равна 0 и, следовательно, $L_{2z}^0 = 0$. Платформа вращается вокруг неподвижной оси z и её кинетический момент относительно этой оси, учитывая формулу (2.7), – $L_{1z}^0 = J_{1z} \omega_0$, где J_{1z} – осевой момент инерции платформы. Для его вычисления воспользуемся теоремой Штейнера–Гюйгенса (2.11):

$$J_{1z} = J_{1zC1} + m_1 a^2,$$

где J_{1zC_1} – момент инерции платформы относительно центральной оси z_1 , проходящей через центр тяжести C_1 платформы. Согласно таблице находим $J_{1zC_1} = \frac{5}{3}m_1a^2$, тогда

$$J_{1z}^0 = \frac{5}{3}m_1a^2 + m_1a^2 = \frac{8}{3}m_1a^2.$$

Подставляя L_{1z}^0 и L_{2z}^0 в формулу (2.18), получим

$$L_z^0 = \frac{8}{3}m_1a^2\omega_0.$$

Теперь вычислим L_z – кинетический момент системы в произвольный момент времени t :

$$L_z = L_{1z} + L_{2z}. \quad (2.19)$$

Кинетический момент платформы согласно формуле (2.7):

$$L_{1z} = J_{1z}\omega = \frac{8}{3}m_1a^2\omega.$$

Для вычисления L_{2z} необходимо учесть, что тележка участвует в сложном движении и её абсолютная скорость складывается из относительной скорости \vec{V}_r по отношению к платформе и переносной скорости \vec{V}_e в движении вместе с платформой. Изобразим на чертеже положение тележки и её векторы \vec{V}_r и \vec{V}_e скоростей в момент времени t (рис. 4). Из чертежа видно, что

$$L_{2z} = m_2V_r \cdot OE + m_2V_e \cdot ON.$$

Так как $\angle ONC = \angle CON = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ и $\angle ONE = \frac{\varphi}{2}$,

$$\text{то } ON = 2R \sin \frac{\varphi}{2}, \quad OE = ON \sin \frac{\varphi}{2} = 2R \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$\text{то } V_r = \frac{dS}{dt} = \pi \text{ м/с}, \quad V_e = \omega \cdot ON = 2\omega \cdot R \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \frac{S}{R} = \frac{\pi}{R} t \text{ с}^{-1}.$$

Отсюда $L_{2z} = 2m_2R(2R\omega + \pi)\sin^2\frac{\varphi}{2}$.

Согласно формуле (2.19)

$$L_z = \frac{8}{3}m_1a^2\omega + 2m_2R(2\omega R + \pi)\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Из условия (2.17) определим искомую угловую скорость ω платформы

$$\omega = \frac{8m_1a^2\omega_0 - 6\pi Rm_2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{8m_1a^2 + 12R^2m_2\sin^2\frac{\varphi}{2}}. \quad (2.20)$$

Подставляя в формулу (2.20) исходные данные, получим $\omega = 0,79 \text{ с}^{-1}$.

Если относительное движение тележки по дуге окружности противоположно ω_0 , то в числителе формулы (2.20) следует заменить знак «минус» на «плюс».

3.3. Задача 3

Для решения задачи 3 (чётные и нечётные варианты) используется теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

Необходимый справочный материал для решения этой задачи представлен ниже.

Кинетическая энергия точки представлена формулой

$$T' = \frac{mV^2}{2},$$

где m – масса точки, V – её скорость.

Кинетическая энергия механической системы – сумма кинетических энергий всех её точек

$$T = \sum \frac{m_k V_k^2}{2}. \quad (3.1)$$

Кинетическая энергия механической системы, состоящей из твёрдых тел,

$$T = \sum \frac{m_k V_{Ck}^2}{2}, \quad (3.2)$$

в которой V_{Ck} – скорость центра масс k -го тела.

Кинетическая энергия твердого тела подсчитывается в зависимости от вида его движения.

1. Если тело движется поступательно, то его кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} MV_C^2. \quad (3.3)$$

В формуле (3.3) V_C – скорость центра масс тела.

2. При вращении тела вокруг неподвижной оси его кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \quad (3.4)$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения z , ω – угловая скорость.

3. В случае плоского движения твердого тела кинетическую энергию можно подсчитать по формуле

$$T = \frac{1}{2} MV_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2, \quad (3.5)$$

в которой V_C – скорость центра масс тела, J_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной (конечной) форме имеет вид: *изменение кинетической энергии системы при некотором конечном её перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на точки системы, при этом перемещении*

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \quad (3.6)$$

Здесь T_0 – кинетическая энергия в начальном положении системы, T – в текущем (конечном) состоянии, $\sum A_k^e$ – сумма ра-

бот всех внешних сил, приложенных к системе, $\sum A_k^i$ – сумма работ всех внутренних сил.

В случае абсолютно твердого тела сумма работ всех внутренних сил равна 0, т.е. $\sum A_k^i = 0$ и формула (3.6) примет вид

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \quad (3.7)$$

В тех случаях, когда в начальный момент времени система находилась в состоянии покоя, ее кинетическая энергия $T_0 = 0$ и выражение (3.7) приобретет вид

$$T = \sum A_k^e. \quad (3.8)$$

Для того, чтобы использовать теорему (3.7) или (3.8), необходимо правильно вычислить работу силы.

1. Работа любой силы равна нулю, если:

- а) сила перпендикулярна направлению перемещения;
- б) сила приложена всё время в неподвижной точке или в точках, скорость которых равна нулю в данный момент времени, например, в мгновенном центре скоростей при плоском движении тела.

2. Работа силы тяжести для точки

$$A(\vec{P}) = \pm mgh. \quad (3.9)$$

В формуле (3.9) h – перемещение точки по вертикали. Если точка опускается, то $A > 0$, если поднимается – $A < 0$.

Для твёрдого тела

$$A(\vec{P}) = \pm mgh_C, \quad (3.10)$$

где h_C – перемещение центра тяжести тела по вертикали.

3. Работа силы, приложенной к точке твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси,

$$A(M_z) = M_z \varphi. \quad (3.11)$$

Формула (3.11) получена в предположении, что M_z – момент силы относительно оси вращения z есть величина постоянная, т.е. $M_z = \text{const}$. φ – угол поворота тела, при котором вычисляется работа силы.

4. Работа силы трения скольжения имеет вид

$$A(\vec{F}_{mp}) = -F_{mp} \cdot S = -fNS, \quad (3.12)$$

где f – коэффициент трения скольжения, N – нормальная реакция шероховатой поверхности, S – перемещение центра тяжести тела.

3.3.1. Задача 3 (нечётные варианты)

Дано: $m_1 = 12m_4$, $m_2 = 8m_4$, $m_3 = 3m_4$, $m_4 = 10$ кг,
 $r_2 = 8$ см, $R_2 = 2r_2$, $r_3 = 6$ см, $R_3 = 2r_3$, $i_2 = 4$ см,
 $i_3 = 6$ см, $f = 0,1$, $\alpha = 60^\circ$, $S_1 = 1$ м.

Здесь m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел системы; r_2, R_2, r_3, R_3 – радиусы тел 2 и 3; i_2, i_3 – их радиусы инерции, f – коэффициент трения скольжения.

В начальный момент времени механизм находился в состоянии покоя.

Определить:

1) кинетическую энергию механизма как функцию скорости V_1 груза I $T = T(V_1)$;

2) скорость груза I , когда пройденный им путь станет равным S_1 .

Решение. Рассмотрим механизм (рис. 5), состоящий из четырех тел.

Согласно (3.2)

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \quad (3.13)$$

где T_1, T_2, T_3, T_4 – кинетическая энергия тел 1, 2, 3, 4.

Тело 1 движется поступательно, следовательно, согласно формуле (3.3)

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} \quad \text{или} \quad T_1 = 6m_4 V_1^2.$$

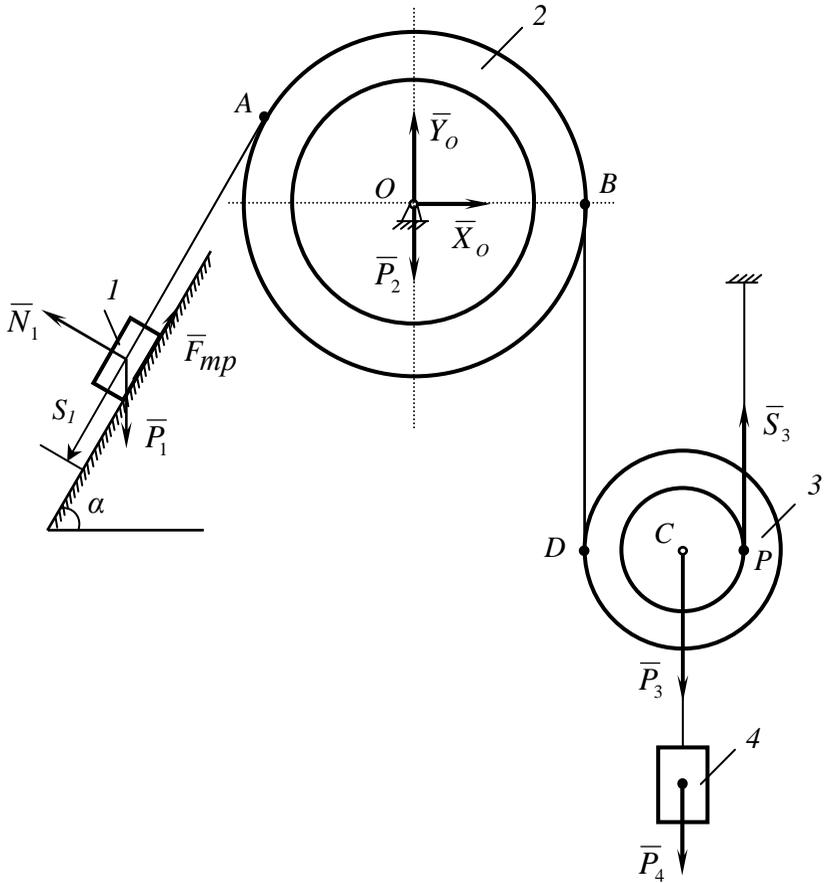


Рис. 5

Звено 2 вращается вокруг оси O и, согласно выражению (3.4)

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2.$$

Зная радиус инерции i_2 , вычислим осевой момент инерции: $J_2 = m_2 i_2^2$.

Выразим угловую скорость ω_2 через скорость V_1 .

$$\omega_2 = \frac{V_A}{R_2}; \quad V_A = V_1; \quad \omega_2 = \frac{V_1}{R_2}.$$

Учитывая это, окончательно получим

$$T_2 = \frac{1}{4} m_4 V_1^2.$$

Тело 3 движется плоско и поэтому согласно (3.5)

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_3^2.$$

Определим ω_3 через скорость V_1 . Так как точка P является мгновенным центром скоростей звена 3, то $\omega_3 = \frac{V_D}{DP}$;

$$V_D = V_B; \quad V_B = \omega_2 r_2; \quad V_B = \frac{V_1}{2}; \quad DP = 3r_3; \quad \omega_3 = \frac{V_1}{6r_3}.$$

Скорость точки C найдём, зная положение мгновенного центра скоростей: $V_C = \omega_3 r_3 = \frac{V_1}{6}$.

Подставив эти значения, получим

$$T_3 = \frac{1}{12} m_4 V_1^2.$$

Тело 4 движется поступательно. Его кинетическая энергия, следуя формуле (3.3),

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2.$$

$$\text{Здесь } V_4 = V_C = \frac{V_1}{6} \quad \text{и} \quad T_4 = \frac{1}{72} m_4 V_1^2.$$

Подставив значения кинетических энергий тел системы в (3.13), найдём

$$T = \frac{457}{72} m_4 V_1^2 \quad \text{или} \quad T = 63,47 V_1^2 \text{ Дж.}$$

Для определения скорости V_1 груза, когда он пройдёт путь, равный S_1 , воспользуемся теоремой (3.8)

$$T = \sum A_k^e .$$

Расставим все внешние силы, приложенные к системе. Это будут силы тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$, нормальная реакция поверхности \vec{N}_1 , сила трения скольжения тела l по шероховатой поверхности \vec{F}_{mp} , \vec{X}_O, \vec{Y}_O – реакции в шарнире O , \vec{S}_3 – натяжение нити.

Их сумма работ:

$$\begin{aligned} \sum A_k^e = & A(\vec{P}_1) + A(\vec{P}_2) + A(\vec{P}_3) + A(\vec{P}_4) + A(\vec{F}_{mp}) + \\ & + A(\vec{X}_O) + A(\vec{Y}_O) + A(\vec{S}_3). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Работа сил $\vec{P}_2, \vec{X}_O, \vec{Y}_O$ равна нулю, так как они приложены к неподвижной точке O . Работа силы натяжения \vec{S}_3 равна нулю, так как она приложена в мгновенном центре скоростей P .

Работу сил тяжести \vec{P}_1, \vec{P}_3 и \vec{P}_4 вычислим, используя формулу (3.10):

$$A(\vec{P}_1) = m_1 g h_1, \text{ где } h_1 = S_1 \sin \alpha, \text{ т.е. } A(\vec{P}_1) = 12 m_4 g S_1 \sin \alpha .$$

$$A(\vec{P}_3) = -m_3 g S_C .$$

S_C – перемещение центра тяжести тела 3 по вертикали. Найдем

$$S_C \text{ из соотношения } \frac{V_1}{V_C} = \frac{S_1}{S_C}; \quad S_C = \frac{S_1}{6};$$

$$A(\vec{P}_3) = -\frac{1}{6} m_3 g S_1 = -\frac{1}{2} m_4 g S_1 .$$

$$A(\vec{P}_4) = -m_4 g S_4; \quad S_4 = S_C; \quad A(\vec{P}_4) = -\frac{1}{6} m_4 g S_1 .$$

Работу силы трения скольжения определим с помощью формулы (3.12):

$$A(\vec{F}_{mp}) = -f m_1 g \cos \alpha \cdot S_1, \text{ где } N_1 = m_1 \cos \alpha .$$

$$A(\vec{F}_{mp}) = -12 f m_4 g \cos \alpha \cdot S_1 .$$

После выполненных вычислений

$$\sum A_k^e = m_4 g \left(12 \sin \alpha - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - 12 f \cos \alpha \right) S_1 = 894,3 S_1 \text{ Дж.}$$

Приравнявая (3.13) и (3.14), согласно формуле (3.8) получим

$$63,47 V_1^2 = 894,3 S_1,$$

откуда $V_1 = \sqrt{\frac{894,3}{63,47} S_1} = 3,75 \sqrt{S_1}.$

При $S_1 = 1 \text{ м}$ $V_1 = 3,75 \text{ м/с}.$

3.3.2. Задача 3 (чётные варианты)

Дано: $m_1 = m_3 = m_4 = m = 1 \text{ кг}, m_2 = 2m,$

$$OA = AB = CA = l = 1 \text{ м}, M = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}, \varphi = 30^\circ,$$

где m_1 – масса кривошипа 1, m_2 – масса шатуна 2, m_3 и m_4 – массы ползунов 3 и 4, M – вращающий момент, приложенный к кривошипу 1. Движение механизма началось из состояния покоя ($\varphi = 0$).

Определить:

- 1) кинетическую энергию механизма как функцию угловой скорости ω_1 и угла поворота φ кривошипа;
- 2) угловую скорость ω_1 при $\varphi = 30^\circ$.

Решение. Рассмотрим механизм, изображенный на рис. 6, состоящий из четырех звеньев.

Его кинетическая энергия, следуя формуле (3.2),

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (3.15)$$

Кинетическая энергия вращающегося кривошипа 1 согласно (3.4)

$$T_1 = \frac{1}{2} J_0 \omega_1^2 = \frac{1}{6} m l^2 \omega_1^2,$$

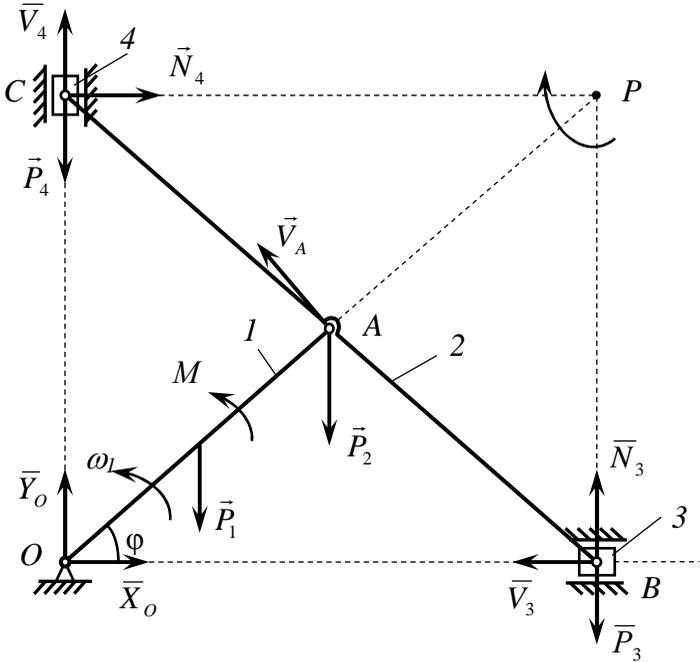


Рис. 6

так как $J_0 = \frac{1}{3} m_1 l^2 = \frac{1}{3} m l^2$ – момент инерции кривошипа относительно оси вращения O .

Кинетическая энергия шатуна 2, совершающего плоское движение, может быть подсчитана, применяя формулу (3.5):

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_2^2,$$

где V_A – скорость центра масс шатуна, $J_A = \frac{1}{12} m_2 4l^2 = \frac{2}{3} m l^2$ – момент инерции относительно центральной оси, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости движения.

Выразим V_A и ω_2 через угловую скорость ω_1 кривошипа.

$V_A = \omega_1 l$, с другой стороны, учитывая, что P – мгновенный центр скоростей шатуна, $V_A = \omega_2 l$ и, следовательно, $\omega_2 = \omega_1$.

В результате

$$T_2 = \frac{4}{3} ml^2 \omega_1^2.$$

Ползуны 3 и 4 движутся поступательно, и их кинетическая энергия, учитывая (3.3),

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_B^2 \quad \text{и} \quad T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_C^2.$$

Скорости V_B и V_C выразим через ω_1 и угол поворота φ кривошипа

$$V_B = \omega_2 \cdot BP = \omega_1 \cdot 2l \sin \varphi,$$

$$V_C = \omega_2 \cdot CP = \omega_1 \cdot 2l \cos \varphi.$$

Учитывая это, получим:

$$T_3 = 2ml^2 \omega_1^2 \sin^2 \varphi,$$

$$T_4 = 2ml^2 \omega_1^2 \cos^2 \varphi.$$

Окончательно

$$T = \frac{21}{6} ml^2 \omega_1^2, \quad \text{или} \quad T = \frac{21}{6} \omega_1^2. \quad (3.16)$$

Для вычисления угловой скорости ω_1 кривошипа при $\varphi = 30^\circ$ воспользуемся теоремой (3.8):

$$T = \sum A_k^e.$$

Расставим все внешние силы, действующие на механизм:

$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ – силы тяжести тел;

\vec{X}_O, \vec{Y}_O – реакции в шарнире O ;

\vec{N}_3, \vec{N}_4 – нормальные реакции поверхностей.

Полная работа этих сил

$$\begin{aligned} \sum A_k^e = & A(\vec{P}_1) + A(\vec{P}_2) + A(\vec{P}_3) + A(\vec{P}_4) + A(M) + A(\vec{X}_O) + \\ & + A(\vec{Y}_O) + A(\vec{N}_3) + A(\vec{N}_4). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Работа силы тяжести \vec{P}_3 равна 0, так как центр тяжести ползуна 3 не перемещается вертикально, работа сил \vec{X}_O, \vec{Y}_O равна 0 в силу того, что они приложены к неподвижной точке O , работа сил \vec{N}_3, \vec{N}_4 также равна 0, потому что они перпендикулярны перемещениям ползунков 3, 4. Работы сил тяжести вычислим, используя формулу (3.10), а работу момента – формулу (3.11):

$$A(\vec{P}_1) = -\frac{l}{2} mg \sin \varphi,$$

$$A(\vec{P}_2) = -2lmg \sin \varphi,$$

$$A(\vec{P}_4) = -2lmg \sin \varphi,$$

$$A(M) = M\varphi.$$

В результате: $\sum A_k^e = M\varphi - 4,5lmg \sin \varphi = 100\varphi - 44,1 \sin \varphi$ (Дж).

Приравняв (3.16) и (3.17), получим

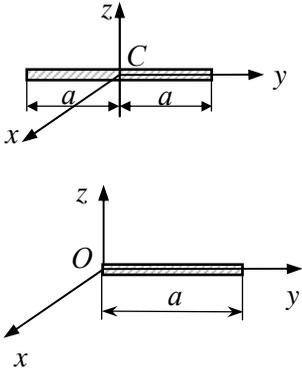
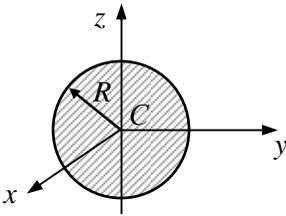
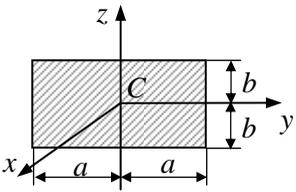
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{6}{21}(100\varphi - 44,1 \sin \varphi)} \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

$$\text{При } \varphi = 30^\circ \quad \omega_1 = 2,95 \text{ с}^{-1}.$$

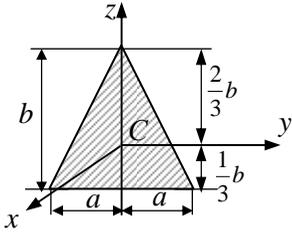
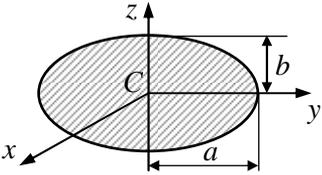
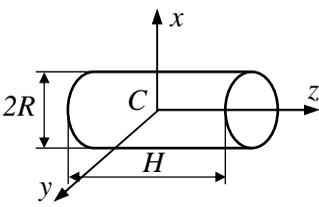
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

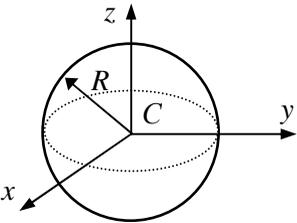
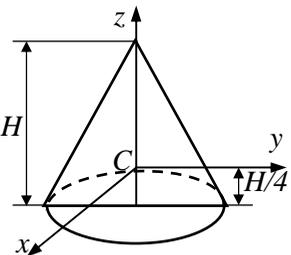
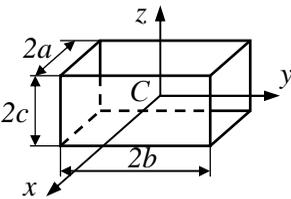
1. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М.: Высшая школа, 2002 и предыдущие.
2. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин. – М.: Высшая школа, 2003 и предыдущие.
3. Яблонский, А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / А.А. Яблонский, С.С. Нарейко [и др.]. – М.: Интеграл-пресс, 2002. – 384 с.
4. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике / И.В. Мещерский.– СПб.: Лань, 1998. – 448 с.
5. Бражниченко, Н.А. Сборник задач по теоретической механике / Н.А. Бражниченко, В.Л. Кан, Б.Л. Минцберг, В.И. Морозов. – М.: Высшая школа, 1986. – 480 с.
6. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Изд. 12-е. – М.: Высшая школа, 1998. – 416 с.
7. Курс теоретической механики / под ред. К.С. Колесникова. – М.: МГТУ им. Баумана, 2002. – 736 с.

Осевые моменты инерции некоторых однородных тел

№	Тело	Моменты инерции		
		J_x	J_y	J_z
1	<p>Тонкий прямолинейный стержень</p> 	$\frac{ma^2}{3}$	0	$\frac{ma^2}{3}$
2	<p>Тонкий круглый диск</p> 	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$
3	<p>Тонкая прямоугольная пластина</p> 	$\frac{m(a^2 + b^2)}{3}$	$\frac{mb^2}{3}$	$\frac{ma^2}{3}$

Продолжение табл.

№	Тело	Моменты инерции		
		J_x	J_y	J_z
4	Тонкая треугольная пластина 	$\frac{m(3a^2 + b^2)}{3}$	$\frac{mb^2}{18}$	$\frac{ma^2}{6}$
5	Тонкая эллиптическая пластина 	$\frac{m}{4}(a^2 + b^2)$	$\frac{mb^2}{4}$	$\frac{ma^2}{4}$
6	Прямой круглый цилиндр 	$\frac{m}{4}\left(\frac{H^2}{3} + R^2\right)$	$\frac{mR^2}{2}$	

№	Тело	Моменты инерции		
		J_x	J_y	J_z
7	 <p>Шар</p>	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$
8	<p>Прямой круглый конус</p> 	$\frac{3m}{20} \left(\frac{H^2}{4} + R^2 \right)$		$\frac{3}{10}mR^2$
9	<p>Прямоугольный параллелепипед</p> 	$\frac{m}{3}(b^2 + c^2)$	$\frac{m}{3}(a^2 + c^2)$	$\frac{m}{3}(a^2 + b^2)$