Методические указания к выполнению РГР

«ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ.

Целью РГР является усвоение студентом знаний, полученных на лекциях, практических и лабораторных занятиях и их использование при определении показателей точности измерений.

При выполнении РГР студенту предлагается провести:

Провести обработку результатов прямых многократных измерений сопротивления постоянному току, косвенных измерений плотности твердого тела совместных измерений электрического сопротивления медного стержня при разной температуре.

РГР оформляется на листах формата А4. Общий объем пояснительной записки не должен превышать 15–20 страниц рукописного текста. Формат бумаги А4 с полями: слева – 30 мм; сверху – 20 мм; снизу – 25 мм; справа – 10 мм. Счет страниц начинать с титульного листа, а их нумерацию – с листа содержания. Бланк с заданием на курсовую работу подшить после титульного листа и в счет страниц не включать.

1. Определение показателей точности прямых измерений с многократными независимыми наблюдениями

Задача обработки результатов многократных измерений заключается в определении оценки измеряемой величины и доверительного интервала, в котором находится ее истинное значение.

Порядок и методику выполнения прямых измерений с многократными независимыми наблюдениями, обработки результатов наблюдений и оценки их погрешностей регламентирует ГОСТ 8.207–76 «ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Общие положения».

При статистической обработке группы результатов наблюдений следует выполнить следующие операции:

– исключить известные систематические погрешности из результатов наблюдений;

– вычислить среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений, принимаемое за результат измерения;

– вычислить оценку среднего квадратического отклонения результата наблюдения;

– вычислить оценку среднего квадратического отклонения результата измерения;

– проверить гипотезу о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению;

– вычислить доверительные границы случайной составляющей погрешности результата измерения;

– вычислить границы неисключенной систематической погрешности (неисключенных остатков систематической погрешности) результата измерения;

– вычислить доверительные границы погрешности результата измерения;

– проверить гипотезу о различии между средними арифметическими двух групп наблюдений ;

– сделать вывод о допустимости различия средних арифметических значений групп наблюдений.

Исключение известных систематических погрешностей из результатов наблюдений. Исключение систематических погрешностей до начала измерений достигается соответствующим выбором метода и средством измерений, а также условий измерений, при которых факторы, вызывающие эти погрешности, не проявляются или оказывают возможно меньшее воздействие. Исключить систематические погрешности полностью не всегда удается, то есть в каждом измерении имеет место неисключенный остаток систематической погрешности.

Неисключенная систематическая погрешность результата измерения образуется из составляющих, в качестве которых могут быть неисключенные систематические погрешности (НСП):

– метода;

– средства измерений;

– вызванные другими источниками.

В качестве границ, составляющих НСП, принимают пределы допускаемых основных и дополнительных погрешностей средства измерений, если их случайные составляющие достаточно малы.

Неподдающиеся исключению систематические погрешности составляют неисключенные систематические погрешности экспериментальных данных.

Обнаружение грубых погрешностей. Грубая погрешность, или промах, – это погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая при данных условиях резко отличается от остальных результатов этого ряда.

Грубые погрешности явно превышают по своему значению погрешности, оправданные условиями проведения эксперимента. Вопрос о том, содержит ли данный результат наблюдений грубую погрешность, решается общими методами проверки статистических гипотез. Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат наблюдения не содержит грубой погрешности, то есть является одним из значений случайной величины с законом распределения, статистические оценки параметров которого предварительно определены. Существует ряд критериев для оценки грубых погрешностей.

Если число измерений $15 < n < 20$, применяется *критерий Романовского.*

Для выявления грубых погрешностей задаются вероятностью q (уровнем значимости) того, что сомнительный результат действительно мог иметь место в данной совокупности результатов измерений. Сомнительным может быть в первую очередь лишь наибольший x_{max} или наименьший x_{min} из результатов наблюдений. Поэтому для проверки гипотезы следует воспользоваться распределениями величин, определив отношения:

$$\beta = |(\overline{X} - x_{max}) / S_x| \text{ или } \beta = |(\overline{X} - x_{min}) / S_x|,$$

где S_x – среднее квадратическое отклонение результата наблюдения;

$\overline{X}$ – среднее арифметическое значение измеряемой величины.

Функции их распределения определяют методами теории вероятностей. Они совпадают между собой и для нормального распределения результатов наблюдений протабулированы и представлены в таблице (прил. 1). По данным этой таблицы при заданной доверительной вероятности или уровне значимости q можно для чисел измерения n = 3…25 найти те наибольшие значения β_m , которые случайная величина β может еще принять по чисто случайным причинам. Если вычисленное по опытным данным значение β окажется меньше β_m, то гипотеза принимается; в противном случае ее следует отвергнуть как противоречащую данным наблюдений. Результат x_{max} или x_{min} рассматривается как содержащий грубую погрешность, то есть при $\beta \geq \beta_m$ результат считается промахом и отбрасывается. Производится повторный расчет оценок среднего арифметического значения и его среднего квадратического отклонения.

Оценка среднего квадратического отклонения результата наблюдения. При ограниченном числе наблюдений в качестве результата измерения целесообразно принять оценку математического ожидания случайной величины *X*, то есть *M[X]*, статистическим аналогом которого является среднее арифметическое значение результатов наблюдений.

При любом законе распределения среднее арифметическое значение является состоятельной и несмещенной оценкой математического ожидания (МО) и принимается в качестве результата прямого измерения:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

При ограниченном числе наблюдений X является случайной величиной.

Состоятельной называется оценка, которая при увеличении объема выборки стремится по вероятности к истинному значению числовой характеристики.

Несмещенной называется оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемой числовой характеристике.

Характеристикой рассеивания среднего арифметического значения $\overline{X}$ относительно истинного значения величины a является дисперсия или среднее квадратическое отклонение (СКО) результата измерения. Точечная оценка дисперсии является несмещенной и состоятельной и определяется по формуле

$$\tilde{D}[X] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2.$$

СКО случайной величины X определяется как корень квадратный из дисперсии. Соответственно его оценка может быть найдена путем извлечения корня из оценки дисперсии. Эта операция является нелинейной процедурой, приводящей к смещенности получаемой таким образом оценки. Для исправления оценки СКО вводят поправочный множитель *k(n),* зависящий от числа наблюдений n. Оценка СКО результатов наблюдения осуществляется по формуле

$$\tilde{\sigma} = S_x = k(n)\sqrt{\tilde{D}[X]} = k(n)\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}\ .$$

Несмещенную оценку для СКО отдельных наблюдений, т. е. считают $k(n)=1$, определяют по формуле

$$\tilde{\sigma} = S_x = \sqrt{\tilde{D}[X]} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}\ .$$

Эта оценка характеризует сходимость результатов отдельных наблюдений, т.е. степень их концентрации относительно среднего арифметического, которое, являясь случайной величиной, имеет дисперсию, в n раз меньшую дисперсии случайной погрешности. Поэтому в качестве точечной оценки дисперсии среднего арифметического принимается выражение

$$S_{\overline{X}}^2 = \frac{1}{n}S_X^2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2,$$

где S_x – среднее квадратическое отклонение результата наблюдений.

Оценка среднего квадратического отклонения результата измерения. Среднее квадратическое отклонение $\sigma\ (\tilde{A})$ результата измерения оценивается по формулам

$$S(\tilde{A}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{A})^2}{n(n-1)}} \quad \text{или} \quad S_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n(n-1)}}$$

где x_i – i –й результат наблюдения;

$\tilde{A}$ – результат измерения (среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений);

n – число результатов наблюдений;

$S(\tilde{A})$ – оценка среднего квадратического отклонения результата измерения.

Доверительные границы случайной погрешности результата измерения в соответствии с ГОСТ 8.207–76 устанавливают для результатов наблюдений, принадлежащих нормальному распределению. Доверительные границы ε (без учета знака) случайной погрешности результата измерения находят по формуле

$$\varepsilon = t\, S\, (\tilde{A}),$$

где t – коэффициент Стьюдента, который в зависимости от доверительной вероятности P и числа результатов наблюдений n находят по таблице (прил.2.)

Определение закона распределения результатов измерений или случайных погрешностей измерений. Исходной информацией для обработки результатов наблюдений является ряд (выборка) из n результатов измерений $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, x_n$ из которых исключены известные систематические погрешности. От выборки результатов измерений переходят к выборке отклонений от среднего арифметического: $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \Delta x_n$, где $\Delta x_i = x_i - \overline{X}$.

Для идентификации закона распределения:

1) производят построение по исправленным результатам измерений x_i, где $i = 1,2,\ldots, n$, *вариационного ряда* (упорядоченной выборки), а также y_i, где $y_i = min\ (x_i),\ y_n = max\ (x_i)$. В вариационном ряду результаты измерений (или их отклонения от среднего арифметического) располагают в порядке возрастания. Далее этот ряд разбивается на оптимальное число m, как правило, одинаковых *интервалов группирования* длиной $h = (y_1 + y_n)/m;$

2) определяют оптимальное число m интервалов группирования, при котором возможное максимальное сглаживание случайных флуктуаций данных сопровождается с минимальным искажением от сглаживания самой кривой искомого распределения по формулам

$$m_{min} = 0{,}55n^{0,4}\ ;\ m_{max} = 1{,}25n^{0,4}$$

Искомое значение m должно находиться в пределах от m_{min} до m_{max} и быть нечетным. При четном числе m в островершинном распределении в центре гистограммы оказывается два равных по высоте столбца и середина кривой распределения искусственно уплощается. Полученное значение длины интервала группирования h округляют в большую сторону, иначе последняя точка окажется за пределами крайнего интервала;

3) определяют интервалы группирования экспериментальных данных в виде $\Delta_1 = (y_1, y_1 + h);\ \Delta_2 = (y_1 + h, y_1 + 2h);\ldots;\ \Delta_m = (y_n - h;\ y_n)$, и подсчитывают число попаданий n_k(*частоты)* результатов измерений в каждый интервал группирования. Сумма этих чисел должна равняться числу измерений. По полученным значениям рассчитывают вероятности попаданий результатов измерений (частости) в каждый из интервалов группирования по формуле $p_k = n_k/n$, где $k = 1, 2,\ldots,m;$

4) по приведенным расчетам строят гистограмму, полигон и кумулятивную кривую. Для построения *гистограммы* по оси результатов наблюдений x откладывают интервалы Δ_k в порядке возрастания номеров, и на каждом интервале строится прямоугольник высотой p_k. Площадь, заключенная под графиком, пропорциональна числу наблюдений n. При увеличении числа интервалов и соответственно уменьшении их длины гистограмма все более приближается к гладкой кривой – графику плотности распределения вероятности;

5) производят построение полигона, который представляет собой ломаную кривую, соединяющую середины верхних оснований каждого столбца гистограммы (рис.1, а). Он более наглядно, чем гистограмма отражает форму кривой распределения. За пределами гистограммы справа и слева остаются пустые интервалы, в которых точки, соответствующие их серединам, лежат на оси абсцисс. Эти точки при построении полигона соединяют между собой отрезками прямых линий. В результате совместно с осью x образуется замкнутая фигура, площадь которой в соответствии с правилом нормирования должна быть равна единице (или числу наблюдений при использовании частостей);

6) строится кумулятивная кривая – график статистической функции распределения. Для ее построения по оси результатов наблюдений x (рис.1, б)

откладывают интервалы Δ_k в порядке возрастания номеров и на каждом интервале строят прямоугольник высотой

$$F_k = \sum_{k=1}^{k} P_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k} n_k .$$

Значение F_k называется *кумулятивной частостью* а сумма n_k *кумулятивной частотой*. По виду построенных зависимостей может быть оценен закон распределения результатов измерений.

Проверка нормальности распределения результатов наблюдений группы. На практике считается, что погрешность измерения всегда существенно меньше результата измерения. Из теории вероятностей следует, что погрешность в принципе может быть сколь угодно большой (хотя вероятность появления такой погрешности крайне мала). Возникшее противоречие между теорией и практикой можно разрешить, если вместо невозможных и достоверных событий использовать так называемые практически невозможные и практически достоверные события, вероятности появления которых весьма близки соответственно к нулю и единице. Например, если известно, что вероятность появления события A в данном опыте равна 0,3, то это еще не дает возможности предсказать результат опыта. Но если вероятность события A в данном опыте ничтожно мала или, наоборот, весьма близка к единице, то это уже дает возможность предсказать результат опыта с достаточным основанием. При этом руководствуются принципом практической уверенности, который формулируется следующим образом.

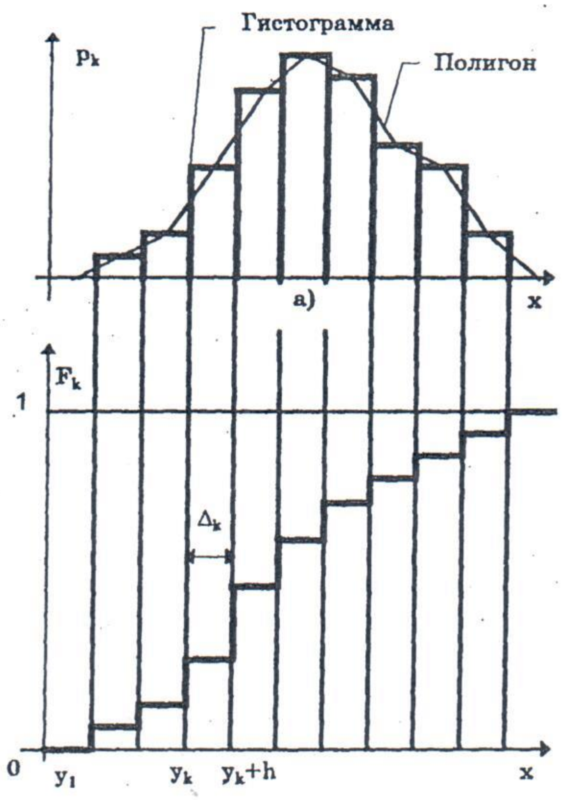

Рис.1. Гистограмма, полигон (а) и кумулятивная кривая (б)

Например, если известно, что вероятность появления события A в данном опыте равна 0,3, то это еще не дает возможности предсказать результат опыта. Но если вероятность события A в данном опыте ничтожно мала или, наоборот, весьма близка к единице, то это уже дает возможность предсказать результат опыта с достаточным основанием. При этом руководствуются принципом практической уверенности, который формулируется следующим образом.

Если вероятность некоторого события в данном опыте весьма мала (велика), то можно быть практически уверенным в том, что при однократном выполнении опыта событие A не произойдет (произойдет). Иными словами, события с очень малыми (большими) вероятностями можно считать практически невозможными (достоверными).

Наибольшее значение малой вероятности, при котором событие можно считать практически невозможным, называют уровнем значимости.

Вопрос о количественном значении уровня значимости выходит за рамки математической теории, и в каждом конкретном случае он решается из практических соображений в зависимости от того, насколько важное значение имеет принятое решение и насколько велика опасность одиночной ошибки. На практике обычно принимают уровень значимости 0,05; 0,02; 0,01 и реже 0,10 или 0,01. Согласно ГОСТ 8.207–76 при проверке гипотезы о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению, принимают уровни значимости от 0,10 до 0,02.

При определении закона распределения случайной величины на основании данных статистического материала *выдвигается гипотеза о теоретическом распределении.* Основное требование к теоретическому распределению состоит в том, чтобы оно отражало лишь существенные стороны статистического материала, а не случайные, обусловленные недостаточностью экспериментальных данных.

Степень согласованности между теоретическим и статистическим распределениями оценивается с помощью критериев согласия.

Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Проверка гипотезы по критериям согласия производится следующим образом.

Выбирается некоторая величина d, которая характеризует степень расхождения теоретического и статистического распределений. Она может быть выбрана различными способами и должна удовлетворять некоторым общим требованиям. Необходимо, чтобы закон распределения величины d определялся просто и не зависел от закона статистического распределения. Кроме того, необходимо, чтобы отличие теоретического распределения от статистического существенно сказывалось на значении величины d.

Задаемся уровнем значимости q. Исходя из закона распределения случайной величины d, определяем такое ее значение d_q, для которого выполняется равенство $P\ (d > d_q) = q$. Найденное для данной выборки значение $d = d_a$ сравнивают с d_q. Если $d_a < d_q$, то считают, что гипотеза не противоречит опытным данным и она может быть принята, а если $d_a > d_q$ то гипотезу отвергают.

Составной критерий, регламентированный ГОСТ 8.207–76, применяется для проверки принадлежности результатов наблюдений нормальному распределению при малом числе результатов наблюдений $15 < n < 50$ (d – критерий).

Отношение d□ вычисляют по формуле

$$\tilde{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} | x_i - \tilde{A} |}{n S_x^*},$$

где S_x* – смещенная оценка среднего квадратического отклонения,

$$S^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{A})}{n}}.$$

Результаты наблюдений группы можно считать распределенными нормально, если

$$d_{1-q/2} < d\square \leq d_{q/2},$$

где $d_{1-q/2}$ и $d_{q/2}$ — квантили распределения, получаемые из табл. приложения 3, q - заранее выбранный уровень значимости критерия.

Доверительные границы неисключенной систематической погрешности θ результата измерения вычисляют путем построения композиции неисключенных систематических погрешностей средств измерений, метода и погрешностей, вызванных другими источниками, субъективной погрешности. Границы НСП принимаются равными пределам допускаемых и дополнительных погрешностей средств измерений, если их случайные составляющие пренебрежимо малы.

При выборе закона распределения необходимо руководствоваться следующими правилами:

- если известна оценка границ погрешности $\pm\ \theta_i$, то ее распределение следует считать равномерным;
- если известна оценка СКО, то распределение следует считать нормальным.

Применение этого правила позволяет статистически суммировать элементарные систематические погрешности и обычно приводит к не слишком завышенным оценкам результата измерений.

При равномерном законе распределения неисключенных систематических погрешностей границы θ (без учета знака) можно вычислить по формуле

$$\theta = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \theta_i^2},$$

где θ_i – граница i–й неисключенной систематической погрешности;

k – поправочный коэффициент, зависящий от числа слагаемых m, их соотношения и доверительной вероятности.

При $P < 0{,}99$ поправочный коэффициент мало зависит от числа слагаемых и может быть представлен усредненными значениями (табл.1)

Таблица 1

Р	Значение k при m равном					Среднее значение
	2	3	4	5	∞	
0,90	0,97	0,96	1,95	0,95	0,95	0,95
0,95	1,10	1,12	1,12	1,12	1,13	1,1
0,99	1,27	1,37	1,41	1,42	1,49	1,4

При $P \geq 0{,}99$ коэффициент k существенно зависит от числа слагаемых и соотношения между ними. При $m > 4$ рекомендуется принимать среднее значение $k = 1{,}4$, а при $m \leq 4$ значение k необходимо уточнить по ГОСТ 8.207–76.

При большом числе слагаемых результирующая погрешность имеет практически нормальное распределение. Оценка дисперсии этого распределения равна сумме дисперсий слагаемых и определяется по формуле

$$S_\theta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \theta_i^2}{3}.$$

Доверительную вероятность для вычисления границ НСП принимают той же, что и при вычислении доверительных границ случайной погрешности результата измерения.

Определение доверительных границ погрешности результата измерения. Данная операция осуществляется путем суммирования СКО случайной составляющей $S(\tilde{A})$ и границ неисключенной систематической составляющей θ в зависимости от соотношения $\theta / S(\tilde{A})$.

Согласно ГОСТ 8.207–76 погрешность результата измерения определяется по следующим правилам:

- если $\theta / S(\tilde{A}) < 0{,}8$, то НСП пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата $\Delta = \varepsilon$;

-если $\theta / S(\tilde{A}) > 8$, то пренебрегают случайной погрешностью и принимают, что граница погрешности результата $\Delta = \theta$;

-если неравенства не выполняются, то есть $0{,}8 < \theta / S(\tilde{A}) < 8$, то границу погрешности результата измерения находят путем построения композиции распределений случайных и неисключенных систематических погрешностей, рассматриваемых как случайные величины.

Однако следует понимать, что погрешность, возникающая вследствие пренебрежения одной из составляющих погрешности результата измерений при выполнении указанных неравенств, не должна превышать 15 %. Без построения композиции используют эмпирическую формулу расчета доверительной погрешности результата измерения (без учета знака)

$$\Delta = K S_\Sigma$$

где K – коэффициент, зависящий от соотношения случайной и неисключенной систематической погрешностей

$$K = \frac{\varepsilon + \theta}{S(\tilde{A}) + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i^2}{3}}};$$

S_Σ – оценка суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения

$$S_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i^2}{3} + S^2(\tilde{A})}.$$

Представление границ систематической погрешности и среднего квадратического отклонения результата измерения целесообразно в тех случаях, когда полученный результат используется как промежуточный при нахождении других данных или когда он подвергается анализу или сопоставлению с другими результатами.

Суммарная погрешность по указанным формулам представляется в случае, если результат измерения является окончательным и требуется лишь оценить границы зоны той неопределенности, с которой он установлен.

Числа 0,8 и 8 в стандарте никак не обосновываются, однако если принять во внимание, что $\Delta_{0,9} = 1{,}6\,S$, то условие $\theta < 0{,}8\,S$ эквивалентно неравенству

$$\theta < \Delta_{0,9} / 2.$$

Условие $\theta > 8\,S$ эквивалентно неравенству $\theta > 5\,\Delta_{0,9}$. Следовательно, ГОСТ 8.207–76 разрешает пренебрегать систематической составляющей и учитывает только случайную составляющую лишь тогда, когда она в два раза превышает систематическую. Если же случайная составляющая меньше 1/5 систематической, ею можно пренебречь.

Форма записи результатов измерений. При симметричной доверительной погрешности результаты измерения представляются в форме

$$\tilde{A} \pm \Delta,\ P,$$

где $\tilde{A}$ – результат измерения.

Числовое значение результата измерения должно оканчиваться цифрой того же разряда, что и значение погрешности Δ.

При отсутствии данных о виде функций распределения составляющих погрешности результата и необходимости дальнейшей обработки результатов или анализа погрешностей, результаты измерений представляют в форме

$$\tilde{A};\ S(\tilde{A}),\ n;\ \theta.$$

В случае, если границы неисключенной систематической погрешности вычислены при равномерном распределении НСП следует дополнительно указывать доверительную вероятность P.

Оценки $S(\tilde{A})$ и θ могут быть выражены в абсолютной или относительной формах.

При проведении многократных измерений физической величины, (например, активного сопротивления) несколькими операторами, при совместном анализе их точности проверяется влияние одного фактора – о ператора – на погрешность измерения, то есть ставится вопрос: можно ли считать их систематические погрешности одинаковыми. Для этого путем объединения полученных экспериментальных данных необходимо проверить гипотезу о различии между средними арифметическими двух или нескольких групп наблюдений. В курсовой работе предлагается выполнить два варианта сравнения средних арифметических. Первый вариант – сравнение для двух групп наблюдения; второй – сравнение при большом числе групп наблюдений с помощью дисперсионного анализа (критерия Фишера).

Сравнение средних арифметических для двух групп наблюдений. Число наблюдений в каждой группе велико и каждую из оценок дисперсии можно считать совпадающей со своей дисперсией. Основой для расчета служат следующие данные:

$\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ – средние арифметические групп наблюдений;

σ_1^2 и σ_2^2 – дисперсии результатов измерений в группах наблюдений;

n_1 и n_2 – число наблюдений в группах;

$\bar{x}_1, \sigma_1^2, n_1$ – данные, относящиеся к первой группе наблюдений;

$\bar{x}_2, \sigma_2^2, n_2$ – данные, относящиеся ко второй группе наблюдений.

Составляется разность $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ и оценивается ее дисперсия:

$$\sigma^2\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) = \frac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1} + \frac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2} \quad .$$

Установив определенный уровень значимости q, находят $P = 1 - q$, и по таблице определяют аргумент $Z_{p/2}$ функции Лапласа, соответствующий вероятности $P/2$. Различие между средними арифметическими считается допустимым, если

$$\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right| \le Z_{P/2}\,\sigma\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) \quad .$$

Порядок обработки результатов наблюдений и оценивание погрешностей результата измерения.

1. Для определения доверительных границ погрешности результата измерений доверительную вероятность P принять равной 0,95. Установленный размер выборки $n = 20$.

2. Записать в табл. 3 результаты наблюдений физической величины (r_i (Ом)) в объеме установленной выборки (данные по заданию курсовой работы)

Таблица 3

Результаты наблюдений, r_i , Ом				

3. Вычислить:

а) среднее арифметическое $\bar{r}$ (Ом) результатов наблюдений, принимаемое за результат измерения по формуле

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n}$$

где r_i – i-ый результат наблюдения, Ом;

n – число наблюдений;

б) случайные отклонения результатов наблюдений Δr_i (Ом) по формуле

$$\Delta r_i = r_i - \bar{r},$$

Сумма случайных отклонений $\sum \Delta r_i = 0$ служить проверкой правильности вычислений, так как:

$$\Delta r_1 = r_1 - \bar{r}$$

$$\Delta r_2 = r_2 - \bar{r}$$

$$\Delta r_n = r_n - \bar{r}$$

$$\sum \Delta r_i = \sum r_i - n\bar{r}$$

Из равенства $\bar{r} = (\sum r_i) / n$ следует, что $\sum r_i = n\bar{r}$, откуда $\sum r_i = 0$.

Это равенство справедливо всегда, если при вычислении среднего арифметического не производится округление;

в) квадраты случайных отклонений результатов наблюдений – $(\Delta r_i)^2$. Данные вычислений записать в табл. 4.

г) среднее квадратическое отклонение результата наблюдения S_r по формуле

$$S_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta r_i^2}{n}};$$

д) среднее квадратическое отклонение среднего арифметического значения или результата измерения по формуле

$$S(\tilde{\bar{r}}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (r_i - \tilde{r})^2}{n(n-1)}},$$

где r_i – i-й результат наблюдения;

$\bar{r}$ – результат измерения (среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений);

n – число результатов наблюдений;

Таблица 4

Номер наблюдения, (n = 20)	Результат наблюдения r, Ом (вариационный ряд),	Случайное отклонение, Ом $\Delta r_i = r_i - r$□	Квадрат случайных отклонений, Ом $(\Delta r_i)^2$
1			
...			
r_n			
	r□	$\sum \Delta r_i = 0{,}00$	$\sum$

4. По опытным данным проверить содержит ли результат наблюдений грубую погрешность:

а) вычислить отношения $\beta = |(\bar{r} - r_{max}) / Sr|$ или $\beta = |(\bar{r} - r_{min}) / S_r|$;

б) сравнить с критерием β_m. выбранным по таблице (прил.1);

в) если $\beta \geq \beta_m$, то результат r_{max} или r_{min} считается промахом и отбрасывается. Производится повторный расчет оценок среднего арифметического значения и его среднего квадратического отклонения.

5. Определить закон распределения результатов измерений или случайных погрешностей измерений:

а) определить оптимальное число m интервалов группирования, округляя до большего числа

$$m_{min} = 0,55n^{0,4} \;\; ; \;\; m_{max} = 1,25n^{0,4}$$

б) определить длину (шаг) интервалов группирования погрешностей

$$h = (r_{max} \pm r_{min}) / m,$$

где r_{max} и r_{min} – максимальное и минимальное значения сопротивления;

в) определить границы интервалов

$$r_{max\,i} = r_{min} + k\,h,$$

где $r_{max\,i}$ - верхняя граница i-го интервала, k – порядковый номер (1-й, 2-й, и т.д.) i-го интервала

г) определить середины интервалов

$$r_{cp\,i} = r_{min} + (k - 0,5)\,h,$$

где $r_{cp\,i}$ - середина i-го интервала

д) определить число попаданий n_i результатов измерений в каждый интервал

е) вычислить вероятности попаданий результатов измерений в каждый интервал P_i^* и кумулятивные частости попаданий F_i по формулам

$$P_i^* = n_i / n\,; \qquad F_i = \sum P_i^*$$

Где n – общее число результатов измерений, $\sum P_i^*$ - сумма с нарастанием (для 2-го интервала $\sum P_i^* = P_1 + P_2$, для 3-го $\sum P_i^* = P_1 + P_2 + P_3$ и т.д.)

Результаты расчетов записать в табл. 5.

Таблица 5

№ интервала группирования	Верхние границы интервалов $r_{max\,i}$	Середины интервалов $r_{cp\,i}$	Количество попаданий в интервал n_i	Вероятность попаданий результатов в интервал P_i^*	Кумулятивная частость F_i
1					
2					
3					
…					
m					

д) по данным табл. 5 построить гистограмму и аппроксимирующую кривую распределения результатов наблюдений при измерении сопротивления $P_i^* = f(r_i)$. Масштабы вертикальной и горизонтальной осей гистограммы подобрать такими, чтобы отношение высоты оси к ее основанию было равным 5…8. Если полученная гистограмма окажется сильно изрезана, что обусловлено случайным характером попаданий в интервалы, то изрезанность можно уменьшить путем расширения интервалов или увеличением числа наблюдений.

6. Проверить нормальность распределения результатов наблюдений группы при помощи составного критерия (d – критерия) согласно ГОСТ 8. 207–76. Выбрать уровень значимости критерия q_1

7. Определить доверительные границы случайной погрешности по формуле

$$\varepsilon = \pm t S(\bar{r})$$

Значение коэффициента t для случайной величины, имеющей распределение Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы, для доверительной вероятности $P = 0{,}95$ найти по таблице (прил. 2).

8. Определить неисключенный остаток систематической составляющей погрешности результата измерения сопротивления r.

Доверительную вероятность для вычисления границ неисключенной систематической погрешности принять такой же, что при вычислении доверительных границ случайной погрешности результата измерений.

Мост Р4053 в диапазоне измерения сопротивления от 50 до 10^5 Ом имеет класс точности 0,05. Класс точности моста характеризует предел допускаемой систематической погрешности, выраженной в процентах от значения измеряемой величины. Таким образом, измерение сопротивления на мосте Р4053 класса 0,05 сопровождается неисключенным остатком систематической погрешности, определяемой по формуле, Ом

$$\theta_r = \pm (0{,}05\, \bar{r} / 100)$$

Считать, что остатки систематических погрешностей в этих границах распределены равномерно, их среднее квадратическое отклонение можно определить по формуле, Ом

$$S\theta_r = \theta_r / \sqrt{3}$$

9. Определить общую погрешность результата измерения

10. При симметричной доверительной погрешности результаты измерений представить в форме:

$$\bar{r} \pm \Delta,\ P,$$

Числовое значение результата закончить цифрой того же разряда, что и значение погрешности Δ.

11. Провести сравнение средних арифметических для двух групп наблюдений по результатам измерений, полученным всеми операторами.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значения β при различных числах измерения n

n	$q = 1{-}a$				n	$q = 1{-}a$			
	0,10	0,05	0,025	0,01		0,10	0,05	0,025	0,01
3	1,406	1,412	1,414	1,414	14	2,297	2,461	2,602	2,759
4	1,645	1,689	1,710	1,723	15	2,326	2,493	2,638	2,808
5	1,731	1,869	1,917	1,955	16	2,354	2,523	2,670	2,837
6	1,894	1,996	2,067	2,130	17	2,380	2,551	2,701	2,871
7	1,974	2,093	2,182	2,265	18	2,404	2,557	2,728	2,903
8	2,041	2,172	2,273	2,374	19	2,426	2,600	2,754	2,932
9	2,097	2,237	2,349	2,464	20	2,447	2,623	2,778	2,959
10	2,146	2,294	2,414	2,540	21	2,467	2,644	2,801	2,984
11	2,190	2,383	2,470	2,606	22	2,486	2,664	2,823	3,008
12	1,229	2,387	2,519	2,663	23	2,504	2,683	2,843	3,030
13	2,264	2,426	2,562	2,714	24	2,520	2,701	2,862	3,051
					25	2,537	2,717	2,880	3,071
					26	2,552	2,733	2,897	3,090
					27	2,571	2,748	2,914	3,108
					28	2,585	2,762	2,930	3,126
					29	2,598	2,775	2,946	3,143
					30	2,613	2,788	2,961	3,159

Приложение 2

Значение коэффициента Стьюдента (t_S), в зависимости от доверительной вероятности P и числа результатов наблюдений

$n{-}1$	$P = 0{,}95$	$P = 0{,}99$	$n{-}1$	$P = 0{,}95$	$P = 0{,}99$
3	3,182	5,841	16	2,120	2,921
4	2,776	4,604	18	2,101	2,878
5	2,571	4,032	20	2,086	2,845
6	2,447	3,707	22	2,074	2,819
7	2,365	3,988	24	2,064	2,797
8	2,306	3,355	26	2,056	2,779
9	2,262	3,250	28	2,048	2,763
10	2,228	3,169	30	2,043	2,750
12	2,179	3,055	∞	1,960	2,576
14	2,145	2,977			

Приложение 3

Статистика d

n	$q_{½}$		$(1-q_{½})$	
	1%	5%	95%	99%
16	0,9137	8884	7236	6829
21	9001	8768	7304	6950
26	8901	8686	7360	7040
31	8826	8625	7404	7110
36	8769	8578	7440	7167
41	8722	8540	7470	7216
47	8682	8508	7496	7256
51	8648	8481	7518	7291