# Лабораторная работа

## Множественная регрессия и корреляция

### 3.1. Понятие множественной регрессии

**Множественная регрессия** представляет собой уравнение связи с несколькими независимыми переменными:

$$y = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

где $y$ – зависимая переменная (результативный признак); $x_1, x_2, \ldots, x_p$ – независимые переменные (факторы).

Множественная регрессия применяется в ситуациях, когда из множества факторов, влияющих на результативный признак, нельзя выделить один доминирующий фактор и необходимо учитывать влияние нескольких факторов.

**Основная цель множественной регрессии** – построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также совокупное их воздействие на моделируемый показатель.

**Постановка задачи множественной регрессии**. По имеющимся данным $n$ наблюдений за совместным изменением $p$+1 переменной $y$ *и* $x_j$ и $\{(y_i,\ x_{j,i});\ j=1,2,\ldots,p;\ i=1,2,\ldots,n\}$ (табл. 3.1) необходимо определить аналитическую зависимость $\hat{y} = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, наилучшим образом описывающую данные наблюдений.

Таблица 3.1

**Результаты наблюдений**

| | $y$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $y_1$ | $x_{11}$ | $x_{21}$ | … | $x_{p1}$ |
| 2 | $y_2$ | $x_{12}$ | $x_{22}$ | … | $x_{p2}$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $n$ | $y_n$ | $x_{1n}$ | $x_{2n}$ | … | $x_{pn}$ |

Как и в случае парной регрессии, построение уравнения множественной регрессии осуществляется в два этапа:

– спецификация модели;

– оценка параметров выбранной модели.

Спецификация модели включает в себя решение двух задач:

– отбор $p$ факторов $x_j$, наиболее влияющих на величину $y$;

– выбор вида уравнения регрессии $\hat{y} = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_p)$;.

### 3.2. Отбор факторов при построении множественной регрессии

Включение в уравнение множественной регрессии того или иного набора факторов связано, прежде всего, с представлением исследователя о природе взаимосвязи моделируемого показателя с другими экономическими явлениями. Факторы, включаемые во множественную регрессию, должны отвечать следующим требованиям:

1. *Факторы не должны быть взаимно коррелированы* и, тем более, находиться в точной функциональной связи. Если между факторами существует высокая корреляция, то нельзя определить их изолированное влияние на результа-

тивный показатель, и параметры уравнения регрессии оказываются неинтерпретируемыми.

2. Включаемые во множественную регрессию факторы *должны существенно влиять на вариацию независимой переменной*. Т. е. включаемые в модель факторы должны быть статистически значимыми и существенно улучшать показатель качества модели (например, коэффициент детерминации $R^2$).

Отбор факторов производится на основе качественного теоретико-экономического анализа и обычно осуществляется в две стадии:

– на первой стадии факторы подбираются исходя из сущности проблемы;

– на второй стадии применяются формальные статистические критерии, например, значения $t$-статистики для соответствующих коэффициентов регрессии.

Наличие высокой корреляции выявляется по значению линейного коэффициента корреляции $r_{x_i x_j}$. Если выполняется условие

$$r_{x_i x_j} \geq 0{,}8\,, \tag{3.1}$$

то факторные переменные $x_i, x_j$ находятся в линейной зависимости между собой, а сами переменные $x_i, x_j$ называются явно коллинеарными.

Значения линейных коэффициентов корреляции $r_{x_i x_j}$ для всевозможных комбинаций переменные $x_i, x_j$ составляют корреляционную матрицу $\{r_{x_i x_j}\}$. Для трех факторов матрица $\{r_{x_i x_j}\}$ принимает вид

$$\left\{r_{x_i x_j}\right\} = \begin{bmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_2x_1} & r_{x_3x_1} \\ r_{x_1x_2} & r_{x_2x_2} & r_{x_3x_2} \\ r_{x_1x_3} & r_{x_2x_3} & r_{x_3x_3} \end{bmatrix}$$

В уравнение регрессии включается только один из коллинеарных факторов, при этом предпочтение отдается тому фактору, который при достаточно тесной связи с результатом имеет наименьшую тесноту связи с другими факторами.

Для преодоления сильной межфакторной корреляции используется ряд подходов:

– *исключение из модели одного или нескольких факторов*;

– *преобразование факторов*, при котором уменьшается корреляция между ними;

– *переход к совмещенным уравнениям регрессии*, т. е. к уравнениям, которые отражают не только влияние факторов, но и их взаимодействие, например $y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + \varepsilon$,

где члены $b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2$, $b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3$ выражают взаимодействие факторов.

После исключения коллинеарных факторов осуществляется процедура отбора факторов, наиболее влияющих на изменение результативного признака (факторов, включаемых в регрессию). Наиболее широкое применение получили:

– метод исключения;

– метод включения.

В уравнении регрессии включаются только значимые факторы, что проверяется с помощью критерия Стьюдента.

При отборе факторов рекомендуется, кроме всего прочего, пользоваться следующим правилом: число включаемых факторов должно быть в 6–7 раз меньше объема совокупности, по которой строится регрессия.

## 3.3. Выбор формы уравнения регрессии

Кроме точности модели для исследователя наиболее важными качествами модели являются простота модели и возможность наглядной интерпретации параметров модели. По этой причине наиболее широко используются линейная и степенная модели.

В уравнении *линейной* множественной регрессии

$$\hat{y}_x = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \ldots + b_p \cdot x_p \tag{3.2}$$

параметры $b_i$ при $x_i$ называются коэффициентами «чистой» регрессии и интерпретируется следующим образом. Параметры $b_i$ характеризуют среднее изменение результата с изменением соответствующего фактора на единицу при неизмененном значении других факторов, закрепленных на среднем уровне.

В уравнении *степенной* множественной регрессии

$$\hat{y}_x = a \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot x_p^{b_p} \tag{3.3}$$

показатели степеней $b_j$ являются коэффициентами эластичности. Они показывают, на сколько процентов изменяется в среднем результат с изменением соответствующего фактора на 1% при неизменности действия других факторов. Этот вид уравнения регрессии получил наибольшее распространение в производственных функциях, в исследованиях спроса и потребления.

## 3.4. Оценка параметров уравнения множественной регрессии

Для оценки параметров уравнения множественной регрессии применяют *метод наименьших квадратов* (МНК). Для линейных уравнений регрессии строится система нормальных уравнений, решение которой позволяет получить оценки параметров регрессии. В случае линейной множественной регрессии (3.2) система нормальных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \sum y = n \cdot a + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2 + \ldots + b_p \sum x_p; \\ \sum y x_1 = a \sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_2 x_1 + \ldots + b_p \sum x_p x_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum y x_p = a \sum x_p + b_1 \sum x_1 x_p + b_2 \sum x_2 x_p + \ldots + b_p \sum x_p^2. \end{cases} \tag{3.4}$$

## 3.5. Частные уравнения регрессии

Уравнение линейной множественной регрессии (3.2) позволяет построить, так называемые, частные уравнения регрессии, показывающие зависимость результативного признака от отдельного фактора, при исключении влияния остальных факторов, входящих в уравнение множественной регрессии.

Частные уравнения регрессии получаются из уравнения множественной регрессии (3.2) с помощью замены всех факторов, кроме одного на их средние значения:

$$\begin{aligned} y_{y,x_1} &= a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot \bar{x}_2 + b_3 \cdot \bar{x}_3 + \ldots + b_p \cdot \bar{x}_p + \varepsilon; \\ y_{y,x_2} &= a + b_1 \cdot \bar{x}_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot \bar{x}_3 + \ldots + b_p \cdot \bar{x}_p + \varepsilon; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{y,x_p} &= a + b_1 \cdot \bar{x}_1 + b_2 \cdot \bar{x}_2 + \ldots + b_{p-1} \cdot \bar{x}_{p-1} + b_p \cdot x_p + \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Уравнения (3.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} y_{y,x_1} &= A_1 + b_1 \cdot x_1, \\ y_{y,x_2} &= A_2 + b_2 \cdot x_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{y,x_p} &= A_p + b_p \cdot x_p, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= a + b_2 \cdot \bar{x}_2 + b_3 \cdot \bar{x}_3 + \ldots + b_p \cdot \bar{x}_p; \\ A_2 &= a + b_1 \cdot \bar{x}_1 + b_3 \cdot \bar{x}_3 + \ldots + b_p \cdot \bar{x}_p; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_p &= a + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \cdot \bar{x}_2 + \ldots + b_{p-1} \cdot \bar{x}_{p-1}. \end{aligned} \tag{3.7)}$$

В отличие от парной регрессии, частные уравнения регрессии характеризуют изолированное влияние фактора на результат, ибо другие факторы закреплены на неизменном уровне. Эффекты влияния других факторов присоединены в них к свободному члену уравнения множественной регрессии.

Частные уравнения регрессии позволяют определить *частные коэффициенты эластичности*

$$Э_{yx_i} = b_i \frac{x_i}{y_{y,x_i}}, \tag{3.8}$$

где $b_i$ – коэффициенты регрессии для фактора $x_i$ в уравнении множественной регрессии; $y_{y,x_i}$ – значение результативного фактора, полученное из частного уравнения регрессии при данном значении фактора $x_i$.

Средние показатели эластичности можно сравнивать друг с другом и соответственно ранжировать факторы по силе их воздействия на результат.

*Средние коэффициенты эластичности* для линейной множественной регрессии рассчитываются по формуле

$$\bar{Э}_{yx_i} = b_i \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}_{y,x_i}} \tag{3.9}$$

и показывают, на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результат $y$ от своей величины при изменении фактора $x$ на 1% от своего значения при неизменных значениях других факторов.

## 3.6. Множественная корреляция

Коэффициент множественной корреляции характеризует тесноту связи рассматриваемого набора факторов с исследуемым признаком, или, иначе говоря, оценивает тесноту совместного влияния факторов на результат и вычисляется по формуле:

$$R = R_{yx_1x_2\dots x_p} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}, \tag{3.10}$$

где $n$ – количество наблюдений; $x_i$, $y_i$ – данные наблюдений; $\bar{x}, \bar{y}$ – средние значения переменных $x$ и $y$; $\hat{y}_i$ – расчетные значения переменной $y$, вычисленные по уравнению множественной регрессии, т. е. $\hat{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Коэффициент множественной корреляции изменяется от 0 до 1. Чем ближе его значение к 1, тем теснее связь результативного признака со всем набором исследуемых факторов. Величина коэффициента множественной корреляции больше или равна максимальному парному коэффициенту корреляции

$$R_{yx_1x_2\dots x_p} \geq R_{yx_i(\max)} (i = \overline{1, p}).$$

При правильном включении факторов в регрессионный анализ величина индекса множественной корреляции будет существенно отличаться от индекса корреляции парной зависимости.

Квадрат коэффициента множественной корреляции называется *коэффициентом детерминации* и обозначается $R^2$. Величина коэффициента детерминации используется для оценки качества регрессионной модели. Чем его величина больше, тем лучше данная модель согласуется с данными наблюдений.

Низкое значение коэффициента (индекса) множественной корреляции означает, что либо в регрессионную модель не включены существенные факторы, либо рассматриваемая форма связи не отражает реальные соотношения между переменными, включенными в модель. В этом случае требуются дальнейшие исследования по улучшению качества модели и увеличению ее практической значимости.

## 3.7. Оценка качества результатов моделирования

Статистическая значимость уравнения множественной регрессии в целом оценивается с помощью $F$-критерия Фишера.

Статистическая значимость коэффициентов уравнения множественной регрессии в целом оценивается с помощью $t$-критерия Стьюдента.

## 3.8. Проверка остатков регрессии на гомоскедастичность

Для того чтобы МНК давал надежные оценки параметров линейной регрессии, требуется чтобы дисперсии остатков модели $\varepsilon$

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_p \cdot x_p + \varepsilon \tag{3.11}$$

для каждого наблюдения были одинаковыми. Остатки, обладающие таким свойством, называются *гомоскедастичными*, а не обладающие – *гетероскедастичными*.

При нарушении гомоскедастичности мы имеем неравенства

$$\sigma^2_{\varepsilon_i} \neq \sigma^2_{\varepsilon_j} \neq \sigma^2, \qquad j \neq i.$$

Для оценки гетероскедастичности можно использовать метод Гольдфельда–Квандта, который проверяет наличие зависимости остатков $\varepsilon$ от одной из факторных переменных $x_i$. Алгоритм применения теста Гольдфельда–Квандта состоит из следующих шагов:

1) исходные данные наблюдений упорядочиваются по мере возрастания выбранной переменной $x_i$;

2) выделяются первые $n_0$ и последние $n_0$ наблюдений и исключаются из рассмотрения $C = n–2n_0$ центральных наблюдений. При этом должно выполняться условие $n_0 > p$, где p – число оцениваемых параметров;

3) для каждой из групп наблюдений оцениваются уравнения регрессии остатков $\varepsilon$ по значимым факторам

$$\varepsilon = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + ... + b_p \cdot x_p + u\,; \tag{3.12}$$

4) для каждого уравнения определяются остаточные суммы квадратов ($S_1$) и ($S_2$) остатков $u_i$ и находится их отношение: $R = \max(S_2, S_1) / \min(S_2, S_1)$.

Если выполняется условие

$$R > F_{табл}, \tag{3.13}$$

где $F_{табл}$ представляет собой табличное значение $F$-критерия Фишера при уровне значимости α и числе степенях свободы $k_1 = n_0 – p$, $k_2 = n_0 – p$, то предпосылка о *равенстве дисперсий* остаточных величин отвергается с уровнем значимости α.

Чем больше величина $R$ превышает табличное значение критерия $F_{табл}$, тем более нарушена предпосылка о равенстве дисперсий остаточных величин.

Авторами метода рекомендовано для случая одного фактора $n$=20 принимать $C$=4, при $n$=30 принимать $C$=8, при $n$=60 принимать $C$=16.

## Контрольные вопросы

1. Что понимается под множественной регрессией?
2. Какие задачи решаются при построении уравнения регрессии?
3. Какие задачи решаются при спецификации модели?
4. Какие требования предъявляются к факторам, включаемым в уравнение регрессии?
5. Что понимается под коллинеарностью факторов?
6. Как проверяется наличие коллинеарности?
7. Какие подходы применяются для преодоления межфакторной корреляции?
8. Какие функции чаще используются для построения уравнения множественной регрессии?
9. По какой формуле вычисляется индекс множественной корреляции?
10. Как вычисляются индекс множественной детерминации?
11. Что означает низкое значение коэффициента множественной корреляции?
12. Как проверяется значимость уравнения регрессии и отдельных коэффициентов?
13. Как строятся частные уравнения регрессии?
14. Как вычисляются средние частные коэффициенты эластичности?
15. Что понимается под гомоскедастичностью ряда остатков?
16. Как проверяется гипотеза о гомоскедастичности ряда остатков?

## Задачи

1. Проверить наличие линейной коллинеарности между факторами x, z, t, если корреляционная матрица имеет вид

| | $x$ | $z$ | $t$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | | |
| $z$ | 0,35 | 1 | |
| $t$ | 0,56 | 0,86 | 1 |

(Коллинеарны $z$ и $t$).

2. Дать интерпретацию параметрам уравнения регрессии

$$\hat{y}_x = 21{,}5 + 4{,}35 \cdot x + 2{,}1 \cdot z.$$

(При увеличении $x$ на 1 величина $\hat{y}_x$ изменится на 4,35, а при увеличении $z$ на 1 – на 2,1).

3. Дать интерпретацию параметрам уравнения регрессии

$$\hat{y}_x = 3{,}4 \cdot x^{0,4} \cdot z^{1,1}.$$

(При увеличении $x$ на 1% величина $\hat{y}_x$ изменится на 0,4%, а при увеличении $z$ на 1% – на 1,1%).

4. По заданному уравнению регрессии

$$\hat{y}_x = 20 + 4 \cdot x + 2{,}5 \cdot z$$

построить частные уравнения регрессии, если $\bar{x} = 5$, $\bar{z} = 20$.

($\hat{y}_x = 70 + 4 \cdot x$, $\hat{y}_x = 40 + 2{,}5 \cdot z$).

5. По заданному уравнению регрессии

$$\hat{y}_x = 20 + 4 \cdot x + 2{,}5 \cdot z$$

найти коэффициенты эластичности, если $\bar{x} = 5$, $\bar{z} = 20$, $\bar{y} = 100$. (0,2; 0,5).

6. По величине коэффициента детерминации $R^2 = 0{,}45$ определить долю вариации результативного признака, объясненного уравнением регрессии.

(45%)

7. Из предложенных уравнений выбрать лучшее

$\hat{y}_x = 21{,}5 + 4{,}35 \cdot x - 0{,}2 \cdot x^2 + 2{,}1 \cdot z$, $R^2 = 0{,}456$,

$\hat{y}_x = 3{,}4 \cdot x^{0,4} \cdot z^{1,1}$, $R^2 = 0{,}56$.

(Второе).

8. Найти критические значения F–критерия и t–критерия по количеству наблюдений и уровню значимости: n = 50, $\alpha$ =0,01, m = 2; n = 20, $\alpha$ =0,05, m = 3, где m – количество факторов в уравнении регрессии. (5,09; 2,81).

9. По величине множественного коэффициента корреляции $r_{xy} = 0{,}56$ для уравнения регрессии

$$\hat{y}_x = 21{,}5 + 4{,}35 \cdot x + 2{,}1 \cdot z,$$

проверить его значимость ($\alpha$ =0,05). Число наблюдений n = 25. (Значимо).

## Лабораторная работа. Множественный регрессионный анализ: построение модели в виде уравнения множественной регрессии с учетом только значимых факторов и проверка ее качества

Задание. На основании данных табл. П1.2 для соответствующего варианта (табл. 3.2):

1) Проверить факторы на наличие коллинеарности. Отобрать неколлинеарные факторы.

2) Построить уравнение линейной множественной регрессии.

3) Определить значения коэффициента множественной корреляции и коэффициента детерминации.

4) Проверить значимость уравнения при заданном уровне значимости.

5) Проверить значимость коэффициентов уравнения при заданном уровне значимости.

6) Построить уравнение линейной множественной регрессии с учетом только значимых факторов.

7) Проверить гипотезу о гомоскедастичности ряда остатков с уровнем значимости $\alpha = 0,05$.

8) Построить частные уравнения регрессии.

9) Определить средние частные коэффициенты эластичности.

**Указания к решению**. При выполнении лабораторной работы использовать возможности надстройки «Анализ данных» табличного процессора MS Excel (для расчета корреляционной матрицы, нахождения уравнений регрессии, нахождения коэффициентов координации и др.), либо программного пакета Matrixer 5.1, либо какого-либо другого статистического или эконометрического программного пакета.

Таблица 3.2

**Варианты выполнения лабораторной работы**

| Варианты | Номер графы для переменной y (табл. П1.2) | Номера граф для переменных-факторов (табл. П1.2) | Уровень значимости α |
|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 1,2,3 | 0,05 |
| 2 | 15 | 1,2,3 | 0,01 |
| 3 | 16 | 1,2,3 | 0,05 |
| 4 | 17 | 1,2,3 | 0,01 |
| 5 | 18 | 1,2,3 | 0,05 |
| 6 | 14 | 2,3,4 | 0,01 |
| 7 | 15 | 2,3,4 | 0,05 |
| 8 | 17 | 2,3,4 | 0,01 |
| 9 | 18 | 2,3,4 | 0,05 |
| 10 | 15 | 3,4,5 | 0,01 |
| 11 | 19 | 3,4,5 | 0,05 |
| 12 | 14 | 6,7,8 | 0,01 |
| 13 | 15 | 6,7,8 | 0,05 |
| 14 | 16 | 6,7,8 | 0,01 |
| 15 | 17 | 6,7,8 | 0,05 |

Окончание таблицы 3.2

| Вари-анты | Номер графы для переменной y (табл. П1.2) | Номера граф для перемен-ных-факторов (табл. П1.2) | Уровень значимости α |
|---|---|---|---|
| 16 | 18 | 6,7,8 | 0,05 |
| 17 | 14 | 7,8,9 | 0,01 |
| 18 | 15 | 7,8,9 | 0,05 |
| 19 | 17 | 7,8,9 | 0,01 |
| 20 | 18 | 7,8,9 | 0,05 |
| 21 | 15 | 8,9,10 | 0,01 |
| 22 | 19 | 8,9,10 | 0,05 |
| 23 | 16 | 11,12,13 | 0,01 |
| 24 | 17 | 11,12,13 | 0,05 |
| 25 | 18 | 11,12,13 | 0,01 |

## Пример выполнения лабораторной работы

Исходные данные:

– данные наблюдений переменных $y$ и $x_1$, $x_2$, $x_3$ даны в таблицы 3.3;

– уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Таблица 3.3

**Исходные данные для примера выполнения лабораторной работы №3**

| | Области | y | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | Области | y | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Белгородская | 113 | 10 | 38 | 163 | 113 | Рязанская | 120 | 16 | 38 | 160 |
| 2 | Брянская | 124 | 5 | 37 | 165 | 124 | Смоленская | 125 | 10 | 37 | 167 |
| 3 | Владимирская | 124 | 10 | 38 | 163 | 124 | Тамбовская | 118 | 12 | 37 | 163 |
| 4 | Воронежская | 122 | 13 | 36 | 163 | 122 | Тверская | 122 | 8 | 38 | 162 |
| 5 | Ивановская | 128 | 9 | 37 | 152 | 128 | Тульская | 133 | 29 | 39 | 184 |
| 6 | Калужская | 140 | 14 | 39 | 176 | 140 | Ярославская | 136 | 9 | 39 | 167 |
| 7 | Костромская | 117 | 12 | 36 | 155 | 117 | Архангельская | 136 | 91 | 37 | 166 |
| 8 | Курская | 113 | 15 | 36 | 164 | 113 | Вологодская | 138 | 14 | 39 | 166 |
| 9 | Липецкая | 122 | 13 | 38 | 175 | 122 | Калининградская | 124 | 12 | 38 | 176 |
| 10 | Московская | 139 | 27 | 38 | 194 | 139 | Ленинградская | 123 | 11 | 38 | 156 |
| 11 | Орловская | 126 | 8 | 39 | 167 | 126 | Мурманская | 149 | 8 | 39 | 194 |
| 12 | Оренбургская | 125 | 17 | 38 | 164 | 125 | Астраханская | 126 | 11 | 38 | 182 |
| 13 | Пензенская | 124 | 7 | 37 | 175 | 124 | Волгоградская | 109 | 8 | 37 | 164 |
| 14 | Пермская | 121 | 15 | 37 | 162 | 121 | Ростовская | 120 | 20 | 38 | 170 |
| 15 | Самарская | 123 | 24 | 38 | 168 | 123 | Ульяновская | 115 | 16 | 37 | 165 |

**1) *Проверка факторов на наличие коллинеарности* (п. 3.2). *Отбор неколлинеарных факторов.***

Построим корреляционную матрицу, используя функцию «Сервис.Анализ данных.Корреляция» табличного процессора MS Excel (приложение 2).

| | y | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| y | 1 | | | |
| $x_1$ | 0,263 | 1 | | |
| $x_2$ | 0,605 | -0,071 | 1 | |
| $x_3$ | 0,599 | 0,091 | 0,471 | 1 |

Рис. 3.1 Корреляционная матрица

Из матрицы следует, что $r_{x_1x_2} = -0,071$, $r_{x_1x_3} = 0,091$, $r_{x_2x_3} = 0,471$, следовательно, коллинеарность между факторами отсутствует и нет основания исключать какой-либо фактор из рассмотрения.

Таким образом, далее будет строиться регрессия $y$ по факторам $x_1$, $x_2$ и $x_3$.

***2) Построение уравнения линейной множественной регрессии.***

Для построения уравнения линейной регрессии используем функцию «Сервис.Анализ данных.Регрессия» табличного процессора MS Excel (рис 3.2):

1) вызов функции осуществляется через пункты меню: <Сервис> – <Анализ данных> – <Регрессия>;

2) указываются ячейки, содержащие исходные значения переменных $y$ и $x_i$ (рис. 3.2);

3) если отсутствует свободный член в уравнении регрессии – установить флажок «Константа–ноль» (рис. 3.2);

4) указать место, где будут представлены результаты работы функции (выходной интервал на данном рабочем листе, новый рабочий лист, новая рабочая книга);

5) искомые значения коэффициентов линейного уравнения регрессии ($a$, $b_i$) берутся из столбца «Коэффициенты» таблицы результатов регрессии (табл. 3.6).

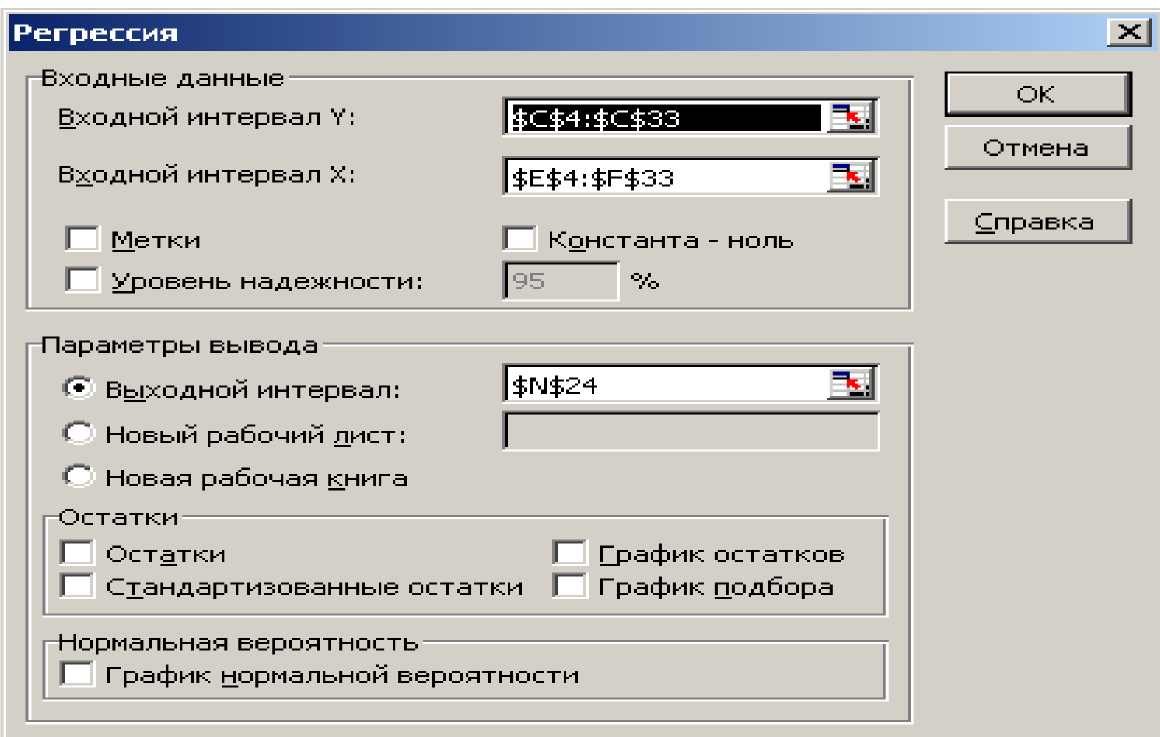



Рис. 3.2. Окно ввода параметров регрессии MS Excel

Результаты работы функции приведены в таблицах 3.4, 3.5, 3.6.

Таблица 3.4

## Результаты корреляционного анализа

| | | |
|---|---|---|
| Множественный *R* | 0,748 | *Множественный коэффициент корреляции R* |
| *R*-квадрат | 0,560 | *Коэффициент детерминации $R^2$* |
| Нормированный *R*-квадрат | 0,509 | *Модифицированный коэффициент детерминации R* |
| Стандартная ошибка | 6,302 | *Стандартная ошибка определения R* |
| Наблюдения | 30 | *Число наблюдений* |

Таблица 3.5

## Результаты дисперсионного анализа

| Пояснения | Число степеней свободы *df* | Сумма квадратов отклонений *SS* | Дисперсия на 1 степень свободы *MS* | Статистика Фишера *F* | Уровень значимости *Значимость F* |
|---|---|---|---|---|---|
| Регрессия | 3 | 1311,7 | 437,2 | 11,011 | 7,55E-05 |
| Остаток | 26 | 1032,4 | 39,7 | | |
| Итого | 29 | 2344,2 | | | |

Таблица 3.6

## Результаты регрессионного анализа

| Пояснения | Коэффициенты уравнения регрессии | Стандартная ошибка определения коэффициентов | t-статистика | Вероятность ошибки α | Нижние 95%-пределы | Верхние 95%-пределы |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Показатели* | *Коэффициенты* | Стандартная ошибка | t-статистика | P-Значение | Нижние 95% | Верхние 95% |
| Y-пересечение | –99,816 | 48,6093 | –2,0534 | 0,0502 | –199,7334 | 0,1023 |
| Переменная X 1 | 0,154 | 0,0775 | 1,9856 | 0,0577 | –0,0054 | 0,3131 |
| Переменная X 2 | 4,459 | 1,4617 | 3,0504 | 0,0052 | 1,4542 | 7,4634 |
| Переменная X 3 | 0,324 | 0,1337 | 2,4203 | 0,0228 | 0,0488 | 0,5985 |

Из таблицы 3.6 следует, что уравнение регрессии имеет вид

$$y = -99{,}816 + 0{,}154 \cdot x_1 + 4{,}459 \cdot x_2 + 0{,}324 \cdot x_3.$$

**3) *Определение значений коэффициента множественной корреляции R и коэффициента детерминации $R^2$.***

Как следует из таблицы 3.2

$$R = 0{,}748; \qquad R^2 = 0{,}560.$$

4) Проверка значимости уравнения регрессии (п. 2.4).

Применим *F*-критерий Фишера.

Вычислим фактическое значение критерия (2.14)

$$F_{факт} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{0{,}560}{1-0{,}560} \cdot \frac{30-3-1}{3} = 11{,}01.$$

Это же значение $F_{факт}$ можно было взять из таблицы 3.4.

Определим критическое значение критерия $F_{крит}$ $F$-критерия Фишера, используя функцию MS Excel «FРАСПОБР()»:

- уровень значимости $\alpha = 0{,}05$;
- число степеней свободы $k_1 = m = 3$; $k_2 = n - m - 1 = 30 - 3 - 1 = 26$;
- $F_{крит}$ = FРАСПОБР(0,05; 3; 26) = 2,98.

Так как $F_{факт} = 11{,}01 > F_{крит} = 2{,}28$, то делаем вывод о значимости построенного уравнения регрессии.

Из таблицы 3.5 следует, что уровень значимости уравнения регрессии $\alpha = 7{,}55 \cdot 10^{-5}$, т. е. заведомо ниже требуемого уровня $\alpha = 0{,}05$, т. е. уравнение значимо и при более низком уровне значимости.

**5) *Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии*.**

Применим $t$-критерий Стьюдента. Из таблицы 3.6 следует, что уровни значимости коэффициентов уравнения регрессии имеют значения:

$\alpha_a = 0{,}050$; $\alpha_{b1} = 0{,}058$; $\alpha_{b2} = 0{,}005$; $\alpha_{b3} = 0{,}023$.

Таким образом, оценки параметров $a$, $b_2$, $b_3$ значимы при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, а значение $b_1$ не значимо при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

**6) *Построение уравнения линейной множественной регрессии* с учетом только значимых факторов.**

Значимыми факторами являются $x_2$, $x_3$.

Для построения уравнения линейной регрессии используем функцию «Сервис.Анализ данных.Регрессия» табличного процессора MS Excel (рис 3.1).

Задав соответствующие диапазоны данных в окне ввода параметров регрессии (рис. 3.2), получим

Множественный коэффициент корреляции $R = 0{,}702$,

Коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}493$,

$F_{факт} = 13{,}12$,

уровень значимости уравнения регрессии $\alpha = 0{,}0001$.

Таблица 3.7

## Результаты регрессионного анализа

| Показатели | Коэффициенты уравнения регрессии | Стандартная ошибка определения коэффициентов | t-статистика | Вероятность ошибки α | Нижние 95%–пределы | Верхние 95%–пределы |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y-пересечение | −89,520 | 50,898 | −1,759 | 0,090 | −193,954 | 14,914 |
| Переменная X 2 | 4,082 | 1,526 | 2,674 | 0,013 | 0,950 | 7,214 |
| Переменная X 3 | 0,361 | 0,139 | 2,592 | 0,015 | 0,075 | 0,647 |

Из таблицы 3.7 следует, что уравнение регрессии имеет вид

$$y = -89{,}520 + 4{,}082 \cdot x_2 + 0{,}361 \cdot x_3.$$

7) ***Проверка гипотезы о гомоскедастичности ряда остатков с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$***

Рассчитаем модельные значения переменной по уравнению регрессии и соответствующие остатки (табл. 3.8).

Таблица 3.8

**Промежуточные результаты расчета**

| Наблюдения | $y$ | $x_2$ | $x_3$ | Модельные значения $\hat{y} = f(x)$ | Отклонения $\varepsilon = \hat{y} - y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 113 | 38 | 163 | 124,49 | 11,49 |
| 2 | 124 | 37 | 165 | 121,13 | -2,87 |
| 3 | 124 | 38 | 163 | 124,49 | 0,49 |
| 4 | 122 | 36 | 163 | 116,32 | -5,68 |
| 5 | 128 | 37 | 152 | 116,43 | -11,57 |
| 6 | 140 | 39 | 176 | 133,27 | -6,73 |
| 7 | 117 | 36 | 155 | 113,43 | -3,57 |
| 8 | 113 | 36 | 164 | 116,69 | 3,69 |
| 9 | 122 | 38 | 175 | 128,82 | 6,82 |
| 10 | 139 | 38 | 194 | 135,69 | -3,31 |
| 11 | 126 | 39 | 167 | 130,02 | 4,02 |
| 12 | 125 | 38 | 164 | 124,85 | -0,15 |
| 13 | 124 | 37 | 175 | 124,74 | 0,74 |
| 14 | 121 | 37 | 162 | 120,05 | -0,95 |
| 15 | 123 | 38 | 168 | 126,29 | 3,29 |
| 16 | 120 | 38 | 160 | 123,40 | 3,40 |
| 17 | 125 | 37 | 167 | 121,85 | -3,15 |
| 18 | 118 | 37 | 163 | 120,41 | 2,41 |
| 19 | 122 | 38 | 162 | 124,13 | 2,13 |
| 20 | 133 | 39 | 184 | 136,16 | 3,16 |
| 21 | 136 | 39 | 167 | 130,02 | -5,98 |
| 22 | 136 | 37 | 166 | 121,49 | -14,51 |
| 23 | 138 | 39 | 166 | 129,65 | -8,35 |
| 24 | 124 | 38 | 176 | 129,19 | 5,19 |
| 25 | 123 | 38 | 156 | 121,96 | -1,04 |
| 26 | 149 | 39 | 194 | 139,77 | -9,23 |
| 27 | 126 | 38 | 182 | 131,35 | 5,35 |
| 28 | 109 | 37 | 164 | 120,77 | 11,77 |
| 29 | 120 | 38 | 170 | 127,02 | 7,02 |
| 30 | 115 | 37 | 165 | 121,13 | 6,13 |

Отсортируем данные таблицы 3.8 по переменным $x_2$ и $x_3$ (табл. 3.9).

Таблица 3.9

**Результаты сортировки данных таблицы 3.8 по переменным $x_2$ и $x_3$**

| Результаты сортировки по $x_2$ | | | Результаты сортировки по $x_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Отклонения $\varepsilon = \hat{y} - y)$ | x2 | x3 | Отклонения $\varepsilon = \hat{y} - y)$ | x2 | x3 |
| -5,68 | 36 | 163 | -11,57 | 37 | 152 |
| -3,57 | 36 | 155 | -3,57 | 36 | 155 |
| 3,69 | 36 | 164 | -1,04 | 38 | 156 |
| -14,51 | 37 | 166 | 3,40 | 38 | 160 |
| -11,57 | 37 | 152 | -0,95 | 37 | 162 |
| -3,15 | 37 | 167 | 2,13 | 38 | 162 |
| -2,87 | 37 | 165 | -5,68 | 36 | 163 |
| -0,95 | 37 | 162 | 2,41 | 37 | 163 |
| 0,74 | 37 | 175 | 0,49 | 38 | 163 |
| 2,41 | 37 | 163 | 11,49 | 38 | 163 |
| 6,13 | 37 | 165 | 3,69 | 36 | 164 |
| 11,77 | 37 | 164 | 11,77 | 37 | 164 |
| **-3,31** | **38** | **194** | **-0,15** | **38** | **164** |
| **-1,04** | **38** | **156** | **-2,87** | **37** | **165** |
| **-0,15** | **38** | **164** | **6,13** | **37** | **165** |
| **0,49** | **38** | **163** | **-14,51** | **37** | **166** |
| **2,13** | **38** | **162** | **-8,35** | **39** | **166** |
| **3,29** | **38** | **168** | **-3,15** | **37** | **167** |
| 3,40 | 38 | 160 | -5,98 | 39 | 167 |
| 5,19 | 38 | 176 | 4,02 | 39 | 167 |
| 5,35 | 38 | 182 | 3,29 | 38 | 168 |
| 6,82 | 38 | 175 | 7,02 | 38 | 170 |
| 7,02 | 38 | 170 | 0,74 | 37 | 175 |
| 11,49 | 38 | 163 | 6,82 | 38 | 175 |
| -9,23 | 39 | 194 | 5,19 | 38 | 176 |
| -8,35 | 39 | 166 | -6,73 | 39 | 176 |
| -6,73 | 39 | 176 | 5,35 | 38 | 182 |
| -5,98 | 39 | 167 | 3,16 | 39 | 184 |
| 3,16 | 39 | 184 | -3,31 | 38 | 194 |
| 4,02 | 39 | 167 | -9,23 | 39 | 194 |

Темным цветом в таблице 3.9 выделены данные, которые исключаются из дальнейшего рассмотрения.

а) Для проверки гомоскедастичности ряда остатков по переменной $x_2$ построим два уравнения регрессии $\varepsilon = a + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3$ по первой и второй группе отсортированных данных по переменной $x_2$ из таблицы 3.9 и определим остаточные суммы квадратов ($S_1$) и ($S_2$) остатков при $n_0 = 11$ и $p = 2$:

1) $\varepsilon = 27{,}071 - 2{,}675 \cdot x_2 + 0{,}419 \cdot x_3$, $\quad S_1 = 326{,}42$,

2) $\varepsilon = 436{,}74 - 10{,}70 \cdot x_2 + -0{,}133 \cdot x_3$, $\quad S_2 = 184{,}00$.

Вычислим отношение

$$R = \max(S_2, S_1) / \min(S_2, S_1) = 326{,}42/184{,}00 = 1{,}77$$

и определим критическое значение $F$-критерия Фишера $F_{крит}$

$F_{крит}$ = FРАСПОБР(0,05;  $n_0 - p$;  $n_0 - p$) =
=FРАСПОБР(0,05; 11–2; 11– 2) = FРАСПОБР(0,05; 9; 9) = 3,18.

Так как не выполняется условие

$$R = 1{,}77 > F_{крит} = 3{,}18,$$

то нет оснований отвергать предположение о постоянстве дисперсии остатков (остатки гомоскедастичны) по переменной $x_2$.

8) Для проверки гомоскедастичности ряда остатков по переменной $x_3$ построим два уравнения регрессии $\varepsilon = a + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3$ по первой и второй группе отсортированных данных по переменной $x_3$ из таблицы 3.9 и определим остаточные суммы квадратов ($S_1$) и ($S_2$) остатков

1) $\varepsilon = -249{,}8 - 2{,}687 \cdot x_2 + 0{,}936 \cdot x_3$, $S_1 = 142{,}2$,

2) $\varepsilon = 154{,}6 - 2{,}456 \cdot x_2 - 0{,}332 \cdot x_3$, $S_2 = 166{,}4$.

Вычислим отношение

$$R = \max(S_2, S_1) / \min(S_2, S_1) = 166{,}4/142{,}2 = 1{,}17.$$

Критическое значение $F$-критерия Фишера то же самое $F_{крит} = 3{,}18$.

Так как не выполняется условие

$$R = 1{,}17 > F_{крит} = 3{,}18,$$

то нет оснований отвергать предположение об постоянстве дисперсии остатков (остатки гомоскедастичны) по переменной $x_3$.

9) *Построение частных уравнений регрессии* (п. 3.5, формулы (3.6), (3.7)) на основании уравнения

$$y = -89{,}520 + 4{,}082 \cdot x_2 + 0{,}361 \cdot x_3.$$

Определим средние значения переменных используя функции СРЗНАЧ() табличного процессора MS Excel $\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{y}$

$\bar{x}_2$ = СРЗНАЧ() = 37,70;  $\bar{x}_3 = 168{,}27$;  $\bar{y} = 125{,}17$.

Вычислим свободные члены частных уравнений регрессии (3.7)

$$A_2 = a + b_3 \cdot \bar{x}_3 = -89{,}520 + 0{,}361 \cdot 168{,}27 = -28{,}77;$$

$$A_3 = a + b_2 \cdot \bar{x}_2 = -89{,}520 + 4{,}082 \cdot 37{,}70 = 64{,}37.$$

Частные уравнения регрессии

$$y_{y,x_2} = -28{,}77 + 4{,}082 \cdot x_2,$$

$$y_{y,x_3} = 64{,}37 + 0{,}361 \cdot x_3.$$

10) *Определение средних частных коэффициентов эластичности* (п. 3.6, формула (3.9))

$$\bar{Y}_{y\,x_2} = b_2 \frac{\bar{x}_2}{\bar{y}_{y,x_2}} = 4{,}082 \frac{37{,}70}{125{,}17} = 1{,}228;$$

$$\bar{Y}_{y\,x_3} = b_3 \frac{\bar{x}_3}{\bar{y}_{y,x_3}} = 0{,}361 \frac{168{,}27}{125{,}17} = 0{,}485.$$

## Результаты

1) Проверка факторов на наличие коллинеарности показала, что коллинеарность между факторами отсутствует.

2) Уравнение линейной множественной регрессии

$$y = -99{,}816 + 0{,}154 \cdot x_1 + 4{,}459 \cdot x_2 + 0{,}324 \cdot x_3.$$

3) Значения коэффициента множественной корреляции $R$ и коэффициента детерминации $R^2$

$$R = 0{,}748; \qquad R^2 = 0{,}560.$$

4) Проверка значимости уравнения регрессии.

$$y = -99{,}816 + 0{,}154 \cdot x_1 + 4{,}459 \cdot x_2 + 0{,}324 \cdot x_3.$$

Построенное уравнение регрессии значимо при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

5) Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии.

Оценки параметров $a$, $b_2$, $b_3$ значимы при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, а значение $b_1$ не значимо при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

6) Построение уравнения линейной множественной регрессии с учетом только значимых факторов.

Уравнение регрессии имеет вид

$$y = -89{,}520 + 4{,}082 \cdot x_2 + 0{,}361 \cdot x_3.$$

7) Проверка гипотезы о гомоскедастичности ряда остатков с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$.

Дисперсии остатков постоянны (остатки гомоскедастичны) по переменным $x_2$ и $x_3$.

8) Частные уравнения регрессии

$$y_{y,x_2} = -28{,}77 + 4{,}082 \cdot x_2,$$

$$y_{y,x_3} = 64{,}37 + 0{,}361 \cdot x_3.$$

9) Средние частные коэффициенты эластичности

$$\bar{Y}_{y\,x_2} = 1{,}228; \qquad \bar{Y}_{y\,x_3} = 0{,}485.$$

Таблица П1.2

## Исходные данные к лабораторной работе

| Факторные переменные | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 0,16 | 0,11 | 2,40 | 0,16 | 14,99 | 0,80 | 0,57 | 12,01 | 0,81 | 74,96 | 3,35 | 2,39 | 50,46 |
| 0,80 | 0,19 | 5,44 | 0,24 | 14,72 | 4,01 | 0,96 | 27,20 | 1,20 | 73,61 | 16,83 | 4,02 | 114,26 |
| 0,94 | 0,20 | 5,87 | 0,32 | 4,55 | 4,72 | 1,00 | 29,33 | 1,58 | 22,77 | 19,80 | 4,19 | 123,17 |
| 0,26 | 0,15 | 9,65 | 0,48 | 11,57 | 1,29 | 0,75 | 48,27 | 2,39 | 57,86 | 5,44 | 3,13 | 202,72 |
| 0,27 | 0,05 | 8,11 | 0,13 | 1,64 | 1,36 | 0,23 | 40,53 | 0,66 | 8,18 | 5,73 | 0,99 | 170,22 |
| 0,47 | 0,05 | 8,23 | 0,10 | 16,75 | 2,35 | 0,25 | 41,17 | 0,50 | 83,73 | 9,87 | 1,04 | 172,90 |
| 0,34 | 0,16 | 3,89 | 0,22 | 17,56 | 1,71 | 0,80 | 19,47 | 1,12 | 87,81 | 7,17 | 3,35 | 81,79 |
| 0,31 | 0,06 | 7,97 | 0,13 | 18,92 | 1,55 | 0,28 | 39,87 | 0,66 | 94,60 | 6,53 | 1,18 | 167,45 |
| 0,65 | 0,12 | 0,97 | 0,11 | 6,11 | 3,27 | 0,61 | 4,83 | 0,53 | 30,57 | 13,74 | 2,55 | 20,29 |
| 0,06 | 0,08 | 9,05 | 0,30 | 14,92 | 0,31 | 0,40 | 45,24 | 1,48 | 74,62 | 1,28 | 1,66 | 190,01 |
| 0,14 | 0,05 | 9,20 | 0,18 | 19,72 | 0,70 | 0,25 | 46,02 | 0,90 | 98,58 | 2,95 | 1,05 | 193,29 |
| 0,10 | 0,09 | 5,00 | 0,14 | 19,90 | 0,52 | 0,46 | 25,01 | 0,68 | 99,52 | 2,20 | 1,94 | 105,02 |
| 0,81 | 0,15 | 5,69 | 0,24 | 9,36 | 4,04 | 0,75 | 28,47 | 1,18 | 46,81 | 16,95 | 3,14 | 119,58 |
| 0,19 | 0,11 | 7,32 | 0,36 | 3,61 | 0,93 | 0,53 | 36,59 | 1,81 | 18,07 | 3,89 | 2,22 | 153,66 |
| 0,39 | 0,05 | 2,99 | 0,17 | 1,02 | 1,97 | 0,26 | 14,93 | 0,85 | 5,08 | 8,26 | 1,10 | 62,71 |
| 0,91 | 0,11 | 3,05 | 0,19 | 3,11 | 4,55 | 0,55 | 15,27 | 0,94 | 15,53 | 19,12 | 2,32 | 64,15 |
| 0,64 | 0,02 | 4,17 | 0,48 | 1,89 | 3,20 | 0,11 | 20,87 | 2,39 | 9,45 | 13,44 | 0,46 | 87,66 |
| 0,87 | 0,01 | 9,54 | 0,03 | 9,53 | 4,33 | 0,06 | 47,72 | 0,16 | 47,64 | 18,17 | 0,24 | 200,41 |
| 0,33 | 0,14 | 6,88 | 0,15 | 0,01 | 1,64 | 0,69 | 34,41 | 0,76 | 0,03 | 6,90 | 2,92 | 144,51 |
| 0,92 | 0,16 | 8,51 | 0,04 | 11,08 | 4,62 | 0,78 | 42,57 | 0,20 | 55,39 | 19,39 | 3,26 | 178,80 |
| 0,49 | 0,11 | 0,94 | 0,09 | 2,98 | 2,44 | 0,53 | 4,69 | 0,45 | 14,92 | 10,24 | 2,24 | 19,70 |
| 0,17 | 0,01 | 7,51 | 0,10 | 1,88 | 0,83 | 0,03 | 37,56 | 0,52 | 9,39 | 3,48 | 0,14 | 157,75 |
| 0,47 | 0,07 | 0,81 | 0,17 | 7,65 | 2,33 | 0,35 | 4,06 | 0,84 | 38,25 | 9,80 | 1,45 | 17,06 |
| 0,79 | 0,15 | 5,16 | 0,44 | 0,02 | 3,97 | 0,75 | 25,80 | 2,18 | 0,08 | 16,67 | 3,17 | 108,35 |
| 0,22 | 0,08 | 6,21 | 0,33 | 4,25 | 1,08 | 0,38 | 31,06 | 1,66 | 21,25 | 4,53 | 1,60 | 130,45 |
| 0,39 | 0,04 | 9,38 | 0,47 | 0,60 | 1,95 | 0,21 | 46,88 | 2,34 | 3,01 | 8,20 | 0,86 | 196,90 |
| 0,57 | 0,04 | 4,28 | 0,10 | 2,30 | 2,84 | 0,22 | 21,38 | 0,52 | 11,51 | 11,94 | 0,93 | 89,80 |
| 0,24 | 0,05 | 3,42 | 0,30 | 10,11 | 1,20 | 0,24 | 17,10 | 1,52 | 50,53 | 5,03 | 1,00 | 71,83 |
| 0,08 | 0,20 | 3,90 | 0,06 | 0,10 | 0,39 | 1,00 | 19,52 | 0,28 | 0,48 | 1,64 | 4,19 | 81,98 |
| 0,53 | 0,08 | 4,38 | 0,11 | 17,98 | 2,66 | 0,40 | 21,90 | 0,56 | 89,90 | 11,18 | 1,69 | 91,97 |
| 0,24 | 0,11 | 5,30 | 0,28 | 1,34 | 1,19 | 0,55 | 26,51 | 1,41 | 6,70 | 5,01 | 2,29 | 111,35 |
| 0,12 | 0,13 | 1,63 | 0,39 | 6,40 | 0,58 | 0,65 | 8,15 | 1,95 | 32,01 | 2,45 | 2,74 | 34,25 |
| 0,76 | 0,09 | 5,71 | 0,47 | 1,86 | 3,78 | 0,44 | 28,53 | 2,37 | 9,32 | 15,87 | 1,85 | 119,84 |
| 0,61 | 0,01 | 7,65 | 0,45 | 3,49 | 3,07 | 0,03 | 38,25 | 2,24 | 17,47 | 12,90 | 0,12 | 160,64 |
| 0,85 | 0,13 | 0,82 | 0,41 | 15,02 | 4,23 | 0,63 | 4,10 | 2,05 | 75,10 | 17,78 | 2,63 | 17,24 |
| 0,39 | 0,20 | 4,50 | 0,38 | 10,15 | 1,95 | 0,99 | 22,50 | 1,89 | 50,76 | 8,17 | 4,18 | 94,51 |
| 0,23 | 0,17 | 1,17 | 0,09 | 14,31 | 1,17 | 0,85 | 5,87 | 0,47 | 71,55 | 4,90 | 3,58 | 24,66 |
| 0,77 | 0,10 | 5,71 | 0,28 | 6,39 | 3,85 | 0,51 | 28,53 | 1,42 | 31,96 | 16,15 | 2,15 | 119,82 |
| 0,29 | 0,15 | 8,93 | 0,48 | 11,19 | 1,46 | 0,76 | 44,64 | 2,38 | 55,95 | 6,13 | 3,20 | 187,48 |
| 0,99 | 0,15 | 1,63 | 0,12 | 0,30 | 4,97 | 0,76 | 8,17 | 0,59 | 1,51 | 20,89 | 3,19 | 34,32 |
| 0,83 | 0,17 | 8,58 | 0,08 | 17,06 | 4,17 | 0,86 | 42,91 | 0,42 | 85,30 | 17,50 | 3,61 | 180,22 |
| 0,44 | 0,13 | 4,19 | 0,46 | 1,50 | 2,19 | 0,65 | 20,96 | 2,28 | 7,50 | 9,20 | 2,73 | 88,02 |
| 0,03 | 0,16 | 6,48 | 0,34 | 12,22 | 0,14 | 0,81 | 32,40 | 1,69 | 61,08 | 0,60 | 3,38 | 136,08 |
| 0,07 | 0,11 | 2,37 | 0,34 | 5,36 | 0,33 | 0,57 | 11,85 | 1,71 | 26,79 | 1,41 | 2,40 | 49,77 |
| 0,75 | 0,16 | 2,80 | 0,10 | 3,24 | 3,74 | 0,80 | 14,00 | 0,50 | 16,22 | 15,69 | 3,36 | 58,78 |

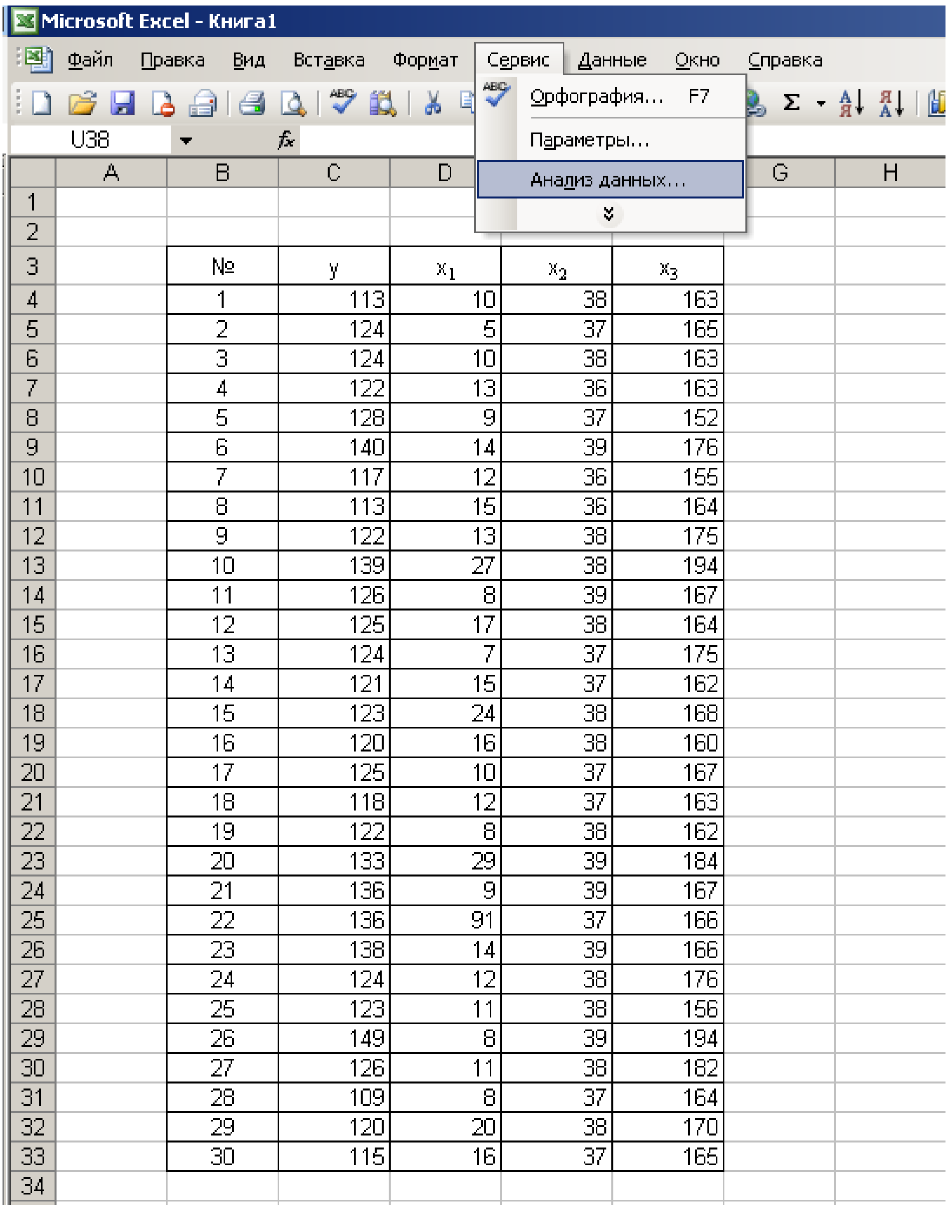
| Переменная y | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 21,1 | 15,0 | -0,6 | 20,7 | 23,0 | 12,7 |
| 20,6 | 10,3 | 43,0 | 20,5 | 24,4 | 45,7 |
| 20,7 | 4,5 | 49,2 | 20,6 | 25,7 | 51,0 |
| 22,1 | -0,5 | 51,7 | 21,0 | 28,5 | 101,7 |
| 20,2 | -4,5 | 27,6 | 19,9 | 20,3 | 49,5 |
| 19,8 | 2,9 | 41,7 | 19,6 | 19,4 | 62,4 |
| 21,3 | 14,2 | 26,2 | 20,8 | 24,8 | 34,8 |
| 20,2 | 4,6 | 23,7 | 20,0 | 20,4 | 41,4 |
| 20,0 | 13,6 | 24,2 | 19,9 | 20,6 | 5,9 |
| 21,4 | 0,9 | 36,8 | 20,6 | 23,4 | 80,1 |
| 20,7 | 2,4 | 42,4 | 20,2 | 21,1 | 83,9 |
| 20,9 | 11,8 | 32,0 | 20,6 | 22,3 | 51,6 |
| 20,3 | 6,3 | 36,4 | 20,2 | 22,7 | 38,9 |
| 21,6 | -0,7 | 17,4 | 20,7 | 24,8 | 42,5 |
| 20,1 | 5,6 | 33,0 | 19,8 | 20,2 | 30,8 |
| 19,6 | 7,7 | 45,1 | 19,6 | 20,2 | 29,7 |
| 20,3 | 3,0 | 31,6 | 19,8 | 18,8 | 38,6 |
| 18,5 | -4,1 | 70,8 | 18,4 | 16,8 | 94,3 |
| 20,9 | -1,0 | 26,3 | 20,6 | 23,0 | 44,8 |
| 19,5 | 1,6 | 71,4 | 19,5 | 19,4 | 88,9 |
| 20,1 | 11,8 | 23,8 | 20,0 | 20,7 | 6,2 |
| 20,0 | -3,9 | 34,6 | 19,8 | 19,5 | 64,1 |
| 20,1 | 13,6 | 4,7 | 19,9 | 20,4 | 3,6 |
| 20,9 | 2,7 | 25,3 | 20,7 | 25,8 | 30,4 |
| 21,2 | 1,2 | 31,1 | 20,4 | 22,9 | 57,3 |
| 21,0 | -7,6 | 46,4 | 20,1 | 21,0 | 83,4 |
| 19,5 | 3,5 | 19,9 | 19,4 | 18,9 | 23,3 |
| 20,8 | 9,2 | 27,5 | 20,1 | 21,2 | 36,4 |
| 21,6 | 6,2 | 1,0 | 21,5 | 24,0 | 18,0 |
| 19,9 | 11,8 | 19,6 | 19,8 | 20,1 | 24,5 |
| 21,2 | 2,2 | 30,2 | 20,6 | 23,9 | 50,3 |
| 22,0 | 12,5 | 1,4 | 20,9 | 26,7 | 14,7 |
| 20,6 | 1,3 | 40,0 | 20,3 | 22,6 | 49,6 |
| 20,2 | -3,4 | 54,4 | 19,6 | 17,9 | 81,0 |
| 20,5 | 18,4 | 29,6 | 20,4 | 23,8 | 10,7 |
| 21,9 | 10,1 | 22,8 | 21,3 | 29,1 | 36,9 |
| 21,2 | 18,2 | -2,8 | 21,0 | 23,4 | 4,0 |
| 20,1 | 3,8 | 50,4 | 19,9 | 21,5 | 57,1 |
| 22,1 | 0,8 | 49,5 | 21,0 | 28,5 | 93,8 |
| 19,6 | 9,9 | 37,4 | 19,6 | 20,2 | 12,4 |
| 20,0 | 4,8 | 44,1 | 19,9 | 20,9 | 47,8 |
| 21,5 | 5,0 | 28,8 | 20,8 | 26,2 | 40,9 |
| 22,2 | 6,4 | 18,1 | 21,3 | 27,9 | 48,8 |
| 21,8 | 10,2 | 20,0 | 20,8 | 25,5 | 27,2 |
| 20,1 | 9,2 | 14,5 | 20,0 | 21,2 | 11,5 |

## Приложение. Использование возможностей MS Excel для проведения корреляционного и регрессионного анализа

### Корреляционный анализ

Рассмотрим построение корреляционной матрицы (матрицы парных корреляций) $\{r_{x_i x_j}\}$по данным наблюдений за совместным изменением $n$ переменных $x_j$ (табл. 3.1).

Расположим исходные данные в ячейках с C4 по F33 (рис. П2.1) и вызовем функцию «Сервис.Анализ данных.Корреляция» табличного процессора MS Excel (рис. П2.1, П2.2).




| № | y | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 113 | 10 | 38 | 163 |
| 2 | 124 | 5 | 37 | 165 |
| 3 | 124 | 10 | 38 | 163 |
| 4 | 122 | 13 | 36 | 163 |
| 5 | 128 | 9 | 37 | 152 |
| 6 | 140 | 14 | 39 | 176 |
| 7 | 117 | 12 | 36 | 155 |
| 8 | 113 | 15 | 36 | 164 |
| 9 | 122 | 13 | 38 | 175 |
| 10 | 139 | 27 | 38 | 194 |
| 11 | 126 | 8 | 39 | 167 |
| 12 | 125 | 17 | 38 | 164 |
| 13 | 124 | 7 | 37 | 175 |
| 14 | 121 | 15 | 37 | 162 |
| 15 | 123 | 24 | 38 | 168 |
| 16 | 120 | 16 | 38 | 160 |
| 17 | 125 | 10 | 37 | 167 |
| 18 | 118 | 12 | 37 | 163 |
| 19 | 122 | 8 | 38 | 162 |
| 20 | 133 | 29 | 39 | 184 |
| 21 | 136 | 9 | 39 | 167 |
| 22 | 136 | 91 | 37 | 166 |
| 23 | 138 | 14 | 39 | 166 |
| 24 | 124 | 12 | 38 | 176 |
| 25 | 123 | 11 | 38 | 156 |
| 26 | 149 | 8 | 39 | 194 |
| 27 | 126 | 11 | 38 | 182 |
| 28 | 109 | 8 | 37 | 164 |
| 29 | 120 | 20 | 38 | 170 |
| 30 | 115 | 16 | 37 | 165 |

Рис. П2.1. Вызов функции «Сервис.Анализ данных»

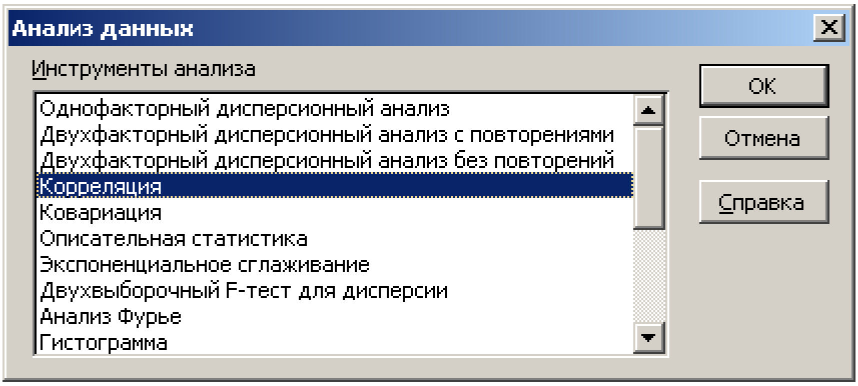



Рис. П2.2. Вызов функции «Сервис.Анализ данных.Корреляция»

В окне ввода параметров функции «Сервис.Анализ данных.Корреляция» (рис. П2.3) необходимо указать диапазон ячеек, содержащих исходные данные («Входной интервал»), и диапазон ячеек, в которых будет располагаться полученная корреляционная матрица («Выходной интервал»).

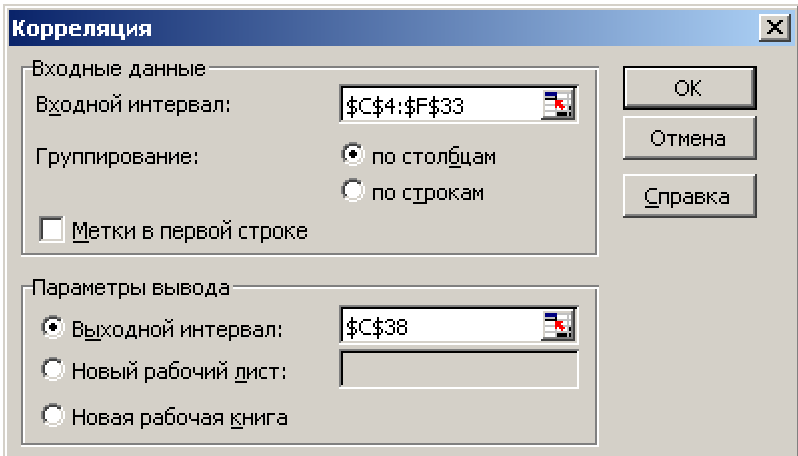



Рис. П2.3. Окно ввода параметров функции «Сервис.Анализ данных.Корреляция»

В области ячеек, начиная с указанной ячейки C38 получим искомую матрицу (рис. П2.4):

| | Столбец 1 | Столбец 2 | Столбец 3 | Столбец 4 |
|---|---|---|---|---|
| Столбец 1 | 1 | | | |
| Столбец 2 | 0,263 | 1 | | |
| Столбец 3 | 0,605 | –0,071 | 1 | |
| Столбец 4 | 0,599 | 0,091 | 0,471 | 1 |

Рис. П2.4. Корреляционная матрица

## Регрессионный анализ

Рассмотрим построение уравнения линейной множественной регрессии по данным наблюдений за совместным изменением $p$+1 переменной $y$ *и* $x_j$ и (($y_i$, $x_{j,i}$); $j$=1, 2, ..., $p$; $i$=1, 2, ..., $n$) (табл. 3.1).
Будем считать, что имеется три факторные переменные ($p$ = 3) и число наблюдений равно 30. Расположим исходные данные в ячейках с C4 по F33 и вызовем функцию «Сервис.Анализ данных.Регрессия» табличного процессора MS Excel

(рис.П2.1, П2.5), в результате чего на экране появится окно ввода параметров данной функции (рис. П2.6).

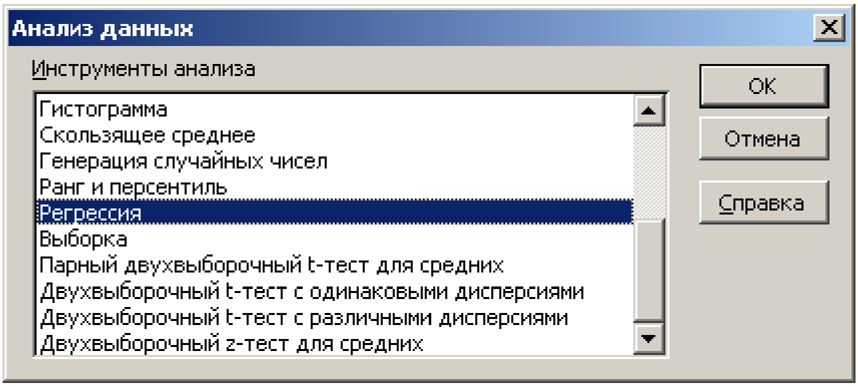



Рис. П2.5. Вызов функции «Сервис.Анализ данных. Регрессия»

В окне ввода параметров функции «Сервис.Анализ данных. Регрессия» (рис. П2.6) необходимо указать диапазон ячеек, содержащих исходные данные («Входной интервал по Y», «Входной интервал по X»), и место, где будут располагаться результаты: диапазон ячеек на данном рабочем листе, новый рабочий лист, новая рабочая книга («Выходной интервал»). Если требуется получить уравнение регрессии без свободного члена, то нужно установить флажок «Константа–ноль» (рис. П2.6);

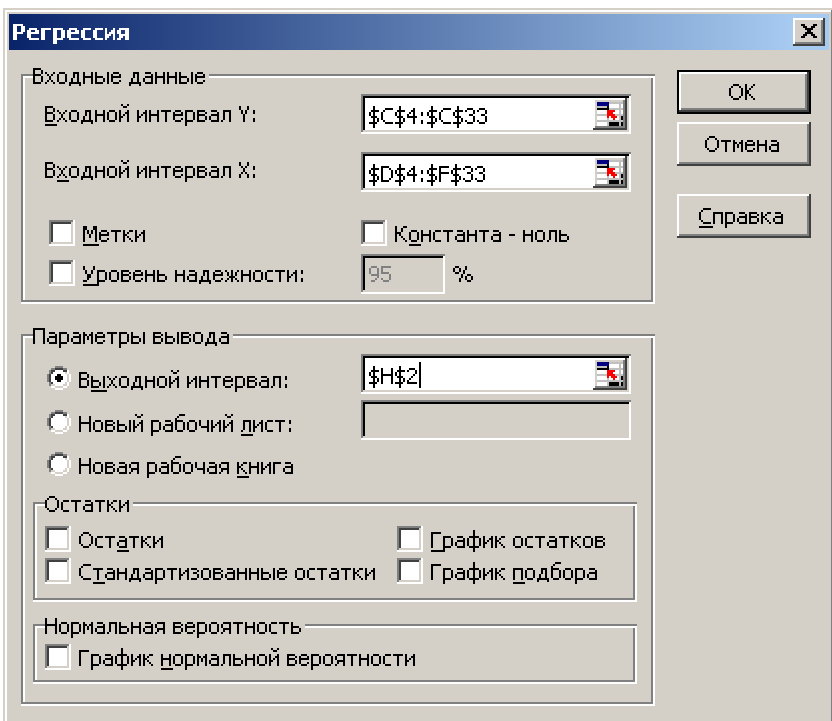



Рис. П2.6. Окно ввода параметров функции «Сервис.Анализ данных. Регрессия»

После выполнения функции «Сервис.Анализ данных. Регрессия» рабочий лист Excel примет вид (рис. П2.7).

xcel - Книга1

Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

| № | y | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 113 | 10 | 38 | 163 |
| 2 | 124 | 5 | 37 | 165 |
| 3 | 124 | 10 | 38 | 163 |
| 4 | 122 | 13 | 36 | 163 |
| 5 | 128 | 9 | 37 | 152 |
| 6 | 140 | 14 | 39 | 176 |
| 7 | 117 | 12 | 36 | 155 |
| 8 | 113 | 15 | 36 | 164 |
| 9 | 122 | 13 | 38 | 175 |
| 10 | 139 | 27 | 38 | 194 |
| 11 | 126 | 8 | 39 | 167 |
| 12 | 125 | 17 | 38 | 164 |
| 13 | 124 | 7 | 37 | 175 |
| 14 | 121 | 15 | 37 | 162 |
| 15 | 123 | 24 | 38 | 168 |
| 16 | 120 | 16 | 38 | 160 |
| 17 | 125 | 10 | 37 | 167 |
| 18 | 118 | 12 | 37 | 163 |
| 19 | 122 | 8 | 38 | 162 |
| 20 | 133 | 29 | 39 | 184 |
| 21 | 136 | 9 | 39 | 167 |
| 22 | 136 | 91 | 37 | 166 |
| 23 | 138 | 14 | 39 | 166 |
| 24 | 124 | 12 | 38 | 176 |
| 25 | 123 | 11 | 38 | 156 |
| 26 | 149 | 8 | 39 | 194 |
| 27 | 126 | 11 | 38 | 182 |
| 28 | 109 | 8 | 37 | 164 |
| 29 | 120 | 20 | 38 | 170 |
| 30 | 115 | 16 | 37 | 165 |

ВЫВОД ИТОГОВ

*Регрессионная статистика*

| | |
|---|---|
| Множеств | 0,748046 |
| R-квадрат | 0,559572 |
| Нормиров | 0,508754 |
| Стандартн | 6,301513 |
| Наблюден | 30 |

Дисперсионный анализ

| | *df* | *SS* | *MS* | *F* | *ачимость F* |
|---|---|---|---|---|---|
| Регрессия | 3 | 1311,731 | 437,2437 | 11,01118 | 7,55E-05 |
| Остаток | 26 | 1032,436 | 39,70906 | | |
| Итого | 29 | 2344,167 | | | |

| | *Коэффициен* | *дартная о* | *татисти* | *Р-Значени* | *ижние 95%* | *ерхние 95%* | *ижние 9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y-пересеч | -99,8155 | 48,60931 | -2,05342 | 0,050218 | -199,733 | 0,102343 | -199,7 |
| Переменн | 0,153849 | 0,07748 | 1,985649 | 0,057713 | -0,00541 | 0,313111 | -0,005 |
| Переменн | 4,458819 | 1,461728 | 3,050375 | 0,005206 | 1,454194 | 7,463444 | 1,454 |
| Переменн | 0,323617 | 0,13371 | 2,420292 | 0,022796 | 0,048772 | 0,598461 | 0,048 |

Рис. П2.7. Результаты регрессионного анализа – вызова функции «Сервис.Анализ данных. Регрессия»

Результаты регрессионного анализа представлены в виде трех таблиц

Таблица П2.1

## Результаты корреляционного анализа («Регрессионная статистика»)

| | | |
|---|---|---|
| Множественный *R* | 0,748 | *Множественный коэффициент корреляции R* |
| *R*-квадрат | 0,560 | *Коэффициент детерминации* $R^2$ |
| Нормированный *R*-квадрат | 0,509 | *Модифицированный коэффициент детерминации* $\overline{R}^2$ (У3.28) |
| Стандартная ошибка | 6,302 | *Стандартная ошибка определения R* |
| Наблюдения | 30 | *Число наблюдений* |

Таблица П2.2

## Результаты дисперсионного анализа

| Пояснения | Число степеней свободы *df* | Сумма квадратов отклонений *SS* | Дисперсия на 1 степень свободы *MS* | Статистика Фишера *F* | Уровень значимости *Значимость F* |
|---|---|---|---|---|---|
| Регрессия | 3 | 1311,7 | 437,2 | 11,011 | 7,55E-05 |
| Остаток | 26 | 1032,4 | 39,7 | | |
| Итого | 29 | 2344,2 | | | |

Столбец «Сумма квадратов отклонений» содержит следующие суммы:

$$\text{Регрессия} = \frac{1}{n}\sum\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2; \quad \text{Остаток} = \frac{1}{n}\sum\left(\hat{y}_i - y_i\right)^2; \quad \text{Итого} = \frac{1}{n}\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2.$$

Столбцы «Статистика Фишера *F*» и «Уровень значимости» содержат фактическое значение критерия Фишера $F = 11{,}011$ и минимальный уровень значимости уравнения регрессии $\alpha_0$, т. е. уравнение регрессии значимо при всех $\alpha > \alpha_0$.

Таблица П2.3

## Результаты регрессионного анализа

| Пояснения | Коэффициенты уравнения регрессии | Стандартная ошибка определения коэффициентов | t-статистика | Вероятность ошибки α | Нижние 95%-пределы | Верхние 95%-пределы |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Показатели* | Коэффициенты | Стандартная ошибка | t-статистика | P-значение | Нижние 95% | Верхние 95% |
| Y-пересечение | –99,816 | 48,6093 | –2,0534 | 0,0502 | –199,7334 | 0,1023 |
| Переменная X 1 | 0,154 | 0,0775 | 1,9856 | 0,0577 | –0,0054 | 0,3131 |
| Переменная X 2 | 4,459 | 1,4617 | 3,0504 | 0,0052 | 1,4542 | 7,4634 |
| Переменная X 3 | 0,324 | 0,1337 | 2,4203 | 0,0228 | 0,0488 | 0,5985 |

Искомые значения коэффициентов линейного уравнения регрессии ($a$, $b_i$) берутся из столбца «Коэффициенты» таблицы результатов регрессии (табл. 2.3), из которой следует, что уравнение регрессии имеет вид

$$\hat{y} = -99{,}816 + 0{,}154 \cdot x_1 + 4{,}459 \cdot x_2 + 0{,}324 \cdot x_3.$$

Столбец «Стандартная ошибка определения коэффициентов» содержит стандартные ошибки определения коэффициентов уравнения регрессии.

Столбец «t-статистика» содержит фактические значения критерия Стьюдента для соответствующего коэффициента.

Столбец «Вероятность ошибки» содержит минимальный уровень значимости коэффициента $\alpha_0$.

Столбцы «Нижние 95%–пределы» и «Верхние 95%–пределы» содержат границы доверительных интервалов для значений коэффициентов. Разные знаки нижней и верхней границы доверительного интервала говорят о ненадежности полученного значения соответствующего коэффициента (свободный член и первый коэффициент в нашем примере).

# Приложение 2. Статистические таблицы

## 2.1. Нормированная функция Лапласа

$$\Phi(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^e e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-e}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$$

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 40 | 80 | 120 | 160 | 199 | 239 | 279 | 319 | 359 |
| 0,1 | 398 | 438 | 478 | 517 | 557 | 596 | 636 | 675 | 714 | 753 |
| 0,2 | 793 | 832 | 871 | 910 | 948 | 987 | 1026 | 1064 | 1103 | 1141 |
| 0,3 | 1179 | 1217 | 1255 | 1293 | 1331 | 1368 | 1406 | 1443 | 1480 | 1517 |
| 0,4 | 1554 | 1591 | 1628 | 1664 | 1700 | 1736 | 1772 | 1808 | 1844 | 1879 |
| 0,5 | 1915 | 1950 | 1985 | 2019 | 2054 | 2088 | 2123 | 2157 | 2190 | 2224 |
| 0,6 | 2257 | 2291 | 2324 | 2357 | 2389 | 2422 | 2454 | 2486 | 2517 | 2549 |
| 0,7 | 2580 | 2611 | 2642 | 2673 | 2704 | 2734 | 2764 | 2794 | 2823 | 2852 |
| 0,8 | 2881 | 2910 | 2939 | 2967 | 2995 | 3023 | 3051 | 3078 | 3106 | 3133 |
| 0,9 | 3159 | 3186 | 3212 | 3238 | 3264 | 3289 | 3315 | 3340 | 3365 | 3389 |
| 1 | 3413 | 3438 | 3461 | 3485 | 3508 | 3531 | 3554 | 3577 | 3599 | 3621 |
| 1,1 | 3643 | 3665 | 3686 | 3708 | 3729 | 3749 | 3770 | 3790 | 3810 | 3830 |
| 1,2 | 3849 | 3869 | 3888 | 3907 | 3925 | 3944 | 3962 | 3980 | 3997 | 4015 |
| 1,3 | 4032 | 4049 | 4066 | 4082 | 4099 | 4115 | 4131 | 4147 | 4162 | 4177 |
| 1,4 | 4192 | 4207 | 4222 | 4236 | 4251 | 4265 | 4279 | 4292 | 4306 | 4319 |
| 1,5 | 4332 | 4345 | 4357 | 4370 | 4382 | 4394 | 4406 | 4418 | 4429 | 4441 |
| 1,6 | 4452 | 4463 | 4474 | 4484 | 4495 | 4505 | 4515 | 4525 | 4535 | 4545 |
| 1,7 | 4554 | 4564 | 4573 | 4582 | 4591 | 4599 | 4608 | 4616 | 4625 | 4633 |
| 1,8 | 4641 | 4649 | 4656 | 4664 | 4671 | 4678 | 4686 | 4693 | 4699 | 4706 |
| 1,9 | 4713 | 4719 | 4726 | 4732 | 4738 | 4744 | 4750 | 4756 | 4761 | 4767 |
| 2 | 4772 | 4778 | 4783 | 4788 | 4793 | 4798 | 4803 | 4808 | 4812 | 4817 |
| 2,1 | 4821 | 4826 | 4830 | 4834 | 4838 | 4842 | 4846 | 4850 | 4854 | 4857 |
| 2,2 | 4861 | 4864 | 4868 | 4871 | 4875 | 4878 | 4881 | 4884 | 4887 | 4890 |
| 2,3 | 4893 | 4896 | 4898 | 4901 | 4904 | 4906 | 4909 | 4911 | 4913 | 4916 |
| 2,4 | 4918 | 4920 | 4922 | 4925 | 4927 | 4929 | 4931 | 4932 | 4934 | 4936 |
| 2,5 | 4938 | 4940 | 4941 | 4943 | 4945 | 4946 | 4948 | 4949 | 4951 | 4952 |
| 2,6 | 4953 | 4955 | 4956 | 4957 | 4959 | 4960 | 4961 | 4962 | 4963 | 4964 |
| 2,7 | 4965 | 4966 | 4967 | 4968 | 4969 | 4970 | 4971 | 4972 | 4973 | 4974 |
| 2,8 | 4974 | 4975 | 4976 | 4977 | 4977 | 4978 | 4979 | 4979 | 4980 | 4981 |
| 2,9 | 4981 | 4982 | 4982 | 4983 | 4984 | 4984 | 4985 | 4985 | 4986 | 4986 |
| 3 | 4987 | 4987 | 4987 | 4988 | 4988 | 4989 | 4989 | 4989 | 4990 | 4990 |
| 3,1 | 4990 | 4991 | 4991 | 4991 | 4992 | 4992 | 4992 | 4992 | 4993 | 4993 |
| 3,2 | 4993 | 4993 | 4994 | 4994 | 4994 | 4994 | 4994 | 4995 | 4995 | 4995 |
| 3,3 | 4995 | 4995 | 4995 | 4996 | 4996 | 4996 | 4996 | 4996 | 4996 | 4997 |
| 3,4 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4998 |
| 3,5 | 4998 | 4998 | 4998 | 4998 | 4998 | 4998 | 4998 | 4998 | 4998 | 4998 |
| *Значения ординат увеличены в 10 000 раз | | | | | | | | | | |

## 2.2. Значения критических уровней $t_{\alpha,k}$ в зависимости от k степеней свободы и заданного уровня значимости α для распределения Стьюдента

| k \ α | 0,1 | 0,05 | 0,025 | 0,02 | 0,01 | 0,005 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6,31 | 12,71 | 25,45 | 31,82 | 63,66 | 127,32 | 636,62 |
| 2 | 2,92 | 4,30 | 6,21 | 6,96 | 9,92 | 14,09 | 31,60 |
| 3 | 2,35 | 3,18 | 4,18 | 4,54 | 5,84 | 7,45 | 12,92 |
| 4 | 2,13 | 2,78 | 3,50 | 3,75 | 4,60 | 5,60 | 8,61 |
| 5 | 2,02 | 2,57 | 3,16 | 3,36 | 4,03 | 4,77 | 6,87 |
| 6 | 1,94 | 2,45 | 2,97 | 3,14 | 3,71 | 4,32 | 5,96 |
| 7 | 1,89 | 2,36 | 2,84 | 3,00 | 3,50 | 4,03 | 5,41 |
| 8 | 1,86 | 2,31 | 2,75 | 2,90 | 3,36 | 3,83 | 5,04 |
| 9 | 1,83 | 2,26 | 2,69 | 2,82 | 3,25 | 3,69 | 4,78 |
| 10 | 1,81 | 2,23 | 2,63 | 2,76 | 3,17 | 3,58 | 4,59 |
| 11 | 1,80 | 2,20 | 2,59 | 2,72 | 3,11 | 3,50 | 4,44 |
| 12 | 1,78 | 2,18 | 2,56 | 2,68 | 3,05 | 3,43 | 4,32 |
| 13 | 1,77 | 2,16 | 2,53 | 2,65 | 3,01 | 3,37 | 4,22 |
| 14 | 1,76 | 2,14 | 2,51 | 2,62 | 2,98 | 3,33 | 4,14 |
| 15 | 1,75 | 2,13 | 2,49 | 2,60 | 2,95 | 3,29 | 4,07 |
| 16 | 1,75 | 2,12 | 2,47 | 2,58 | 2,92 | 3,25 | 4,01 |
| 17 | 1,74 | 2,11 | 2,46 | 2,57 | 2,90 | 3,22 | 3,97 |
| 18 | 1,73 | 2,10 | 2,45 | 2,55 | 2,88 | 3,20 | 3,92 |
| 19 | 1,73 | 2,09 | 2,43 | 2,54 | 2,86 | 3,17 | 3,88 |
| 20 | 1,72 | 2,09 | 2,42 | 2,53 | 2,85 | 3,15 | 3,85 |
| 21 | 1,72 | 2,08 | 2,41 | 2,52 | 2,83 | 3,14 | 3,82 |
| 22 | 1,72 | 2,07 | 2,41 | 2,51 | 2,82 | 3,12 | 3,79 |
| 23 | 1,71 | 2,07 | 2,40 | 2,50 | 2,81 | 3,10 | 3,77 |
| 24 | 1,71 | 2,06 | 2,39 | 2,49 | 2,80 | 3,09 | 3,75 |
| 25 | 1,71 | 2,06 | 2,38 | 2,49 | 2,79 | 3,08 | 3,73 |
| 26 | 1,71 | 2,06 | 2,38 | 2,48 | 2,78 | 3,07 | 3,71 |
| 27 | 1,70 | 2,05 | 2,37 | 2,47 | 2,77 | 3,06 | 3,69 |
| 28 | 1,70 | 2,05 | 2,37 | 2,47 | 2,76 | 3,05 | 3,67 |
| 29 | 1,70 | 2,05 | 2,36 | 2,46 | 2,76 | 3,04 | 3,66 |
| 30 | 1,70 | 2,04 | 2,36 | 2,46 | 2,75 | 3,03 | 3,65 |
| 35 | 1,69 | 2,03 | 2,34 | 2,44 | 2,72 | 3,00 | 3,59 |
| 40 | 1,68 | 2,02 | 2,33 | 2,42 | 2,70 | 2,97 | 3,55 |
| 45 | 1,68 | 2,01 | 2,32 | 2,41 | 2,69 | 2,95 | 3,52 |
| 50 | 1,68 | 2,01 | 2,31 | 2,40 | 2,68 | 2,94 | 3,50 |
| 60 | 1,67 | 2,00 | 2,30 | 2,39 | 2,66 | 2,91 | 3,46 |
| 70 | 1,67 | 1,99 | 2,29 | 2,38 | 2,65 | 2,90 | 3,44 |
| 80 | 1,66 | 1,99 | 2,28 | 2,37 | 2,64 | 2,89 | 3,42 |
| 100 | 1,66 | 1,98 | 2,28 | 2,36 | 2,63 | 2,87 | 3,39 |
| ∞ | 1,64 | 1,96 | 2,24 | 2,33 | 2,58 | 2,81 | 3,29 |

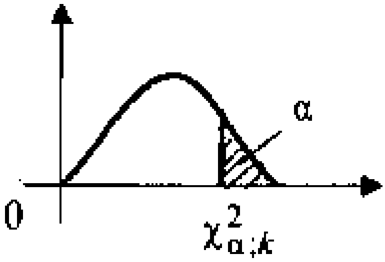
## 2.3. Значения *F*-критерия Фишера на уровне значимости α = 0,05

| $k_2$ \ $k_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161,45 | 199,50 | 215,71 | 224,58 | 230,16 | 233,99 | 238,88 | 243,91 | 249,05 | 254,31 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,37 | 19,41 | 19,45 | 19,50 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,85 | 8,74 | 8,64 | 8,53 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,04 | 5,91 | 5,77 | 5,63 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,82 | 4,68 | 4,53 | 4,36 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,15 | 4,00 | 3,84 | 3,67 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,73 | 3,57 | 3,41 | 3,23 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,44 | 3,28 | 3,12 | 2,93 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,23 | 3,07 | 2,90 | 2,71 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,07 | 2,91 | 2,74 | 2,54 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 2,95 | 2,79 | 2,61 | 2,40 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,85 | 2,69 | 2,51 | 2,30 |
| 13 | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 3,18 | 3,03 | 2,92 | 2,77 | 2,60 | 2,42 | 2,21 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,70 | 2,53 | 2,35 | 2,13 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,64 | 2,48 | 2,29 | 2,07 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,59 | 2,42 | 2,24 | 2,01 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,55 | 2,38 | 2,19 | 1,96 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,51 | 2,34 | 2,15 | 1,92 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,48 | 2,31 | 2,11 | 1,88 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,45 | 2,28 | 2,08 | 1,84 |
| 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,42 | 2,25 | 2,05 | 1,81 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,40 | 2,23 | 2,03 | 1,78 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,80 | 2,64 | 2,53 | 2,37 | 2,20 | 2,01 | 1,76 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,36 | 2,18 | 1,98 | 1,73 |
| 25 | 4,24 | 3,39 | 2,99 | 2,76 | 2,60 | 2,49 | 2,34 | 2,16 | 1,96 | 1,71 |
| 26 | 4,23 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,32 | 2,15 | 1,95 | 1,69 |
| 27 | 4,21 | 3,35 | 2,96 | 2,73 | 2,57 | 2,46 | 2,31 | 2,13 | 1,93 | 1,67 |
| 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,45 | 2,29 | 2,12 | 1,91 | 1,65 |
| 29 | 4,18 | 3,33 | 2,93 | 2,70 | 2,55 | 2,43 | 2,28 | 2,10 | 1,90 | 1,64 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,27 | 2,09 | 1,89 | 1,62 |
| 35 | 4,12 | 3,27 | 2,87 | 2,64 | 2,49 | 2,37 | 2,22 | 2,04 | 1,83 | 1,56 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,18 | 2,00 | 1,79 | 1,51 |
| 45 | 4,06 | 3,20 | 2,81 | 2,58 | 2,42 | 2,31 | 2,15 | 1,97 | 1,76 | 1,47 |
| 50 | 4,03 | 3,18 | 2,79 | 2,56 | 2,40 | 2,29 | 2,13 | 1,95 | 1,74 | 1,44 |
| 60 | 4,00 | 3,15 | 2,76 | 2,53 | 2,37 | 2,25 | 2,10 | 1,92 | 1,70 | 1,39 |
| 70 | 3,98 | 3,13 | 2,74 | 2,50 | 2,35 | 2,23 | 2,07 | 1,89 | 1,67 | 1,35 |
| 80 | 3,96 | 3,11 | 2,72 | 2,49 | 2,33 | 2,21 | 2,06 | 1,88 | 1,65 | 1,32 |
| 90 | 3,95 | 3,10 | 2,71 | 2,47 | 2,32 | 2,20 | 2,04 | 1,86 | 1,64 | 1,30 |
| 100 | 3,94 | 3,09 | 2,70 | 2,46 | 2,31 | 2,19 | 2,03 | 1,85 | 1,63 | 1,28 |
| ∞ | 3,84 | 3,00 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,10 | 1,94 | 1,75 | 1,52 | 1,00 |

## 2.4. Значения *F*-критерия Фишера на уровне значимости α = 0,01

| $k_2$ \ $k_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4052,18 | 4999,50 | 5403,35 | 5624,58 | 5763,65 | 5858,99 | 5981,07 | 6106,32 | 6234,63 | 6365,86 |
| 2 | 98,50 | 99,00 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,37 | 99,42 | 99,46 | 99,50 |
| 3 | 34,12 | 30,82 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,49 | 27,05 | 26,60 | 26,13 |
| 4 | 21,20 | 18,00 | 16,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,80 | 14,37 | 13,93 | 13,46 |
| 5 | 16,26 | 13,27 | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 10,29 | 9,89 | 9,47 | 9,02 |
| 6 | 13,75 | 10,92 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,10 | 7,72 | 7,31 | 6,88 |
| 7 | 12,25 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 6,84 | 6,47 | 6,07 | 5,65 |
| 8 | 11,26 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,03 | 5,67 | 5,28 | 4,86 |
| 9 | 10,56 | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6,06 | 5,80 | 5,47 | 5,11 | 4,73 | 4,31 |
| 10 | 10,04 | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,06 | 4,71 | 4,33 | 3,91 |
| 11 | 9,65 | 7,21 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,74 | 4,40 | 4,02 | 3,60 |
| 12 | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,50 | 4,16 | 3,78 | 3,36 |
| 13 | 9,07 | 6,70 | 5,74 | 5,21 | 4,86 | 4,62 | 4,30 | 3,96 | 3,59 | 3,17 |
| 14 | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,04 | 4,69 | 4,46 | 4,14 | 3,80 | 3,43 | 3,00 |
| 15 | 8,68 | 6,36 | 5,42 | 4,89 | 4,56 | 4,32 | 4,00 | 3,67 | 3,29 | 2,87 |
| 16 | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 3,89 | 3,55 | 3,18 | 2,75 |
| 17 | 8,40 | 6,11 | 5,18 | 4,67 | 4,34 | 4,10 | 3,79 | 3,46 | 3,08 | 2,65 |
| 18 | 8,29 | 6,01 | 5,09 | 4,58 | 4,25 | 4,01 | 3,71 | 3,37 | 3,00 | 2,57 |
| 19 | 8,18 | 5,93 | 5,01 | 4,50 | 4,17 | 3,94 | 3,63 | 3,30 | 2,92 | 2,49 |
| 20 | 8,10 | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 4,10 | 3,87 | 3,56 | 3,23 | 2,86 | 2,42 |
| 21 | 8,02 | 5,78 | 4,87 | 4,37 | 4,04 | 3,81 | 3,51 | 3,17 | 2,80 | 2,36 |
| 22 | 7,95 | 5,72 | 4,82 | 4,31 | 3,99 | 3,76 | 3,45 | 3,12 | 2,75 | 2,31 |
| 23 | 7,88 | 5,66 | 4,76 | 4,26 | 3,94 | 3,71 | 3,41 | 3,07 | 2,70 | 2,26 |
| 24 | 7,82 | 5,61 | 4,72 | 4,22 | 3,90 | 3,67 | 3,36 | 3,03 | 2,66 | 2,21 |
| 25 | 7,77 | 5,57 | 4,68 | 4,18 | 3,85 | 3,63 | 3,32 | 2,99 | 2,62 | 2,17 |
| 26 | 7,72 | 5,53 | 4,64 | 4,14 | 3,82 | 3,59 | 3,29 | 2,96 | 2,58 | 2,13 |
| 27 | 7,68 | 5,49 | 4,60 | 4,11 | 3,78 | 3,56 | 3,26 | 2,93 | 2,55 | 2,10 |
| 28 | 7,64 | 5,45 | 4,57 | 4,07 | 3,75 | 3,53 | 3,23 | 2,90 | 2,52 | 2,06 |
| 29 | 7,60 | 5,42 | 4,54 | 4,04 | 3,73 | 3,50 | 3,20 | 2,87 | 2,49 | 2,03 |
| 30 | 7,56 | 5,39 | 4,51 | 4,02 | 3,70 | 3,47 | 3,17 | 2,84 | 2,47 | 2,01 |
| 35 | 7,42 | 5,27 | 4,40 | 3,91 | 3,59 | 3,37 | 3,07 | 2,74 | 2,36 | 1,89 |
| 40 | 7,31 | 5,18 | 4,31 | 3,83 | 3,51 | 3,29 | 2,99 | 2,66 | 2,29 | 1,80 |
| 45 | 7,23 | 5,11 | 4,25 | 3,77 | 3,45 | 3,23 | 2,94 | 2,61 | 2,23 | 1,74 |
| 50 | 7,17 | 5,06 | 4,20 | 3,72 | 3,41 | 3,19 | 2,89 | 2,56 | 2,18 | 1,68 |
| 60 | 7,08 | 4,98 | 4,13 | 3,65 | 3,34 | 3,12 | 2,82 | 2,50 | 2,12 | 1,60 |
| 70 | 7,01 | 4,92 | 4,07 | 3,60 | 3,29 | 3,07 | 2,78 | 2,45 | 2,07 | 1,54 |
| 80 | 6,96 | 4,88 | 4,04 | 3,56 | 3,26 | 3,04 | 2,74 | 2,42 | 2,03 | 1,49 |
| 90 | 6,93 | 4,85 | 4,01 | 3,53 | 3,23 | 3,01 | 2,72 | 2,39 | 2,00 | 1,46 |
| 100 | 6,90 | 4,82 | 3,98 | 3,51 | 3,21 | 2,99 | 2,69 | 2,37 | 1,98 | 1,43 |
| ∞ | 6,63 | 4,61 | 3,78 | 3,32 | 3,02 | 2,80 | 2,51 | 2,18 | 1,79 | 1,00 |

## 2.5. Значения $_{\alpha}\chi^{2}_{;k}$ критерия Пирсона




| Число степеней свободы *к* | Вероятность α | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,99 | 0,98 | 0,95 | 0,90 | 0,80 | 0,70 | 0,50 | 0,30 | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 |
| 1 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,02 | 0,06 | 0,15 | 0,45 | 1,07 | 1.64 | 2,71 | 3,84 | 5,41 | 6,64 |
| 2 | 0,02 | 0,04 | 0,10 | 0,21 | 0,45 | 0,71 | 1,39 | 2,41 | 3,22 | 4,60 | 5,99 | 7,82 | 9,21 |
| 3 | 0,11 | 0,18 | 0,35 | 0,58 | 1,00 | 1,42 | 2,37 | 3,66 | 4,64 | 6,25 | 7,82 | 9,84 | 11,3 |
| 4 | 0,30 | 0,43 | 0,71 | 1,06 | 1,65 | 2,20 | 3,36 | 4,88 | 5,99 | 7,78 | 9,49 | 11,7 | 13,3 |
| 5 | 0,55 | 0,75 | 1,14 | 1,61 | 2,34 | 3,00 | 4,35 | 6,06 | 7,29 | 9,24 | 11,1 | 13,4 | 15,1 |
| 6 | 0,87 | 1,13 | 1,63 | 2,20 | 3,07 | 3,83 | 5,35 | 7,23 | 8,56 | 10,6 | 12,6 | 15,0 | 16,8 |
| 7 | 1,24 | 1,56 | 2,17 | 2,83 | 3,82 | 4,67 | 6,35 | 8,38 | 9,80 | 12,0 | 14,1 | 16,6 | 18,5 |
| 8 | 1,65 | 2,03 | 2,73 | 3,49 | 4,59 | 5,53 | 7,34 | 9,52 | 11,0 | 13,4 | 15,5 | 18,2 | 20,1 |
| 9 | 2,09 | 2,53 | 3,32 | 4,17 | 5,38 | 6,39 | 8,34 | 10,7 | 12,2 | 14,7 | 16,9 | 19,7 | 21,7 |
| 10 | 2,56 | 3,06 | 3,94 | 4,86 | 6,18 | 7,27 | 9,34 | 11,8 | 13,4 | 16,0 | 18,3 | 21,2 | 23,2 |
| 11 | 3,05 | 3,61 | 4,58 | 5,58 | 6,99 | 8,15 | 10,3 | 12,9 | 14,6 | 17,3 | 19,7 | 22,6 | 24,7 |
| 12 | 3,57 | 4,18 | 5,23 | 6,30 | 7,81 | 9,03 | 11,3 | 14,0 | 15,8 | 18,5 | 21,0 | 24,1 | 26,2 |
| 13 | 4,11 | 4,76 | 5,89 | 7,04 | 8,63 | 9,93 | 12,3 | 15,1 | 17,0 | 19,8 | 22,4 | 25,5 | 27,7 |
| 14 | 4,66 | 5,37 | 6,57 | 7,79 | 9,47 | 10,8 | 13,3 | 16,2 | 18,1 | 21,1 | 23,7 | 26,9 | 29,1 |
| 15 | 5,23 | 5,98 | 7,26 | 8,55 | 10,3 | П,7 | 14,3 | 17,3 | 19,3 | 22,3 | 25,0 | 28,3 | 30,6 |
| 16 | 5,81 | 6,61 | 7,96 | 9,31 | 11,1 | 12,6 | 15,3 | 18,4 | 20,5 | 23,5 | 26,3 | 29,6 | 32,0 |
| 17 | 6,41 | 7,26 | 8,67 | 10,1 | 12,0 | 13,5 | 16,3 | 19,5 | 21,6 | 24,8 | 27,6 | 31,0 | 33,4 |
| 18 | 7.02 | 7,91 | 9,39 | 10,9 | 12,9 | 14,4 | 17,3 | 20,6 | 22,8 | 26,0 | 28,9 | 32,3 | 34,8 |
| 19 | 7,63 | 8,57 | 10,1 | 11,6 | 13,7 | 15,3 | 18,3 | 21,7 | 23,9 | 27,2 | 30,1 | 33,7 | 36,2 |
| 20 | 8.26 | 9,24 | 10,8 | 12,4 | 14,6 | 16,3 | 19,3 | 22,8 | 25,0 | 28,4 | 31,4 | 35,0 | 37,6 |
| 21 | 8,90 | 9,92 | 11,6 | 13,2 | 15,4 | 17,2 | 20,3 | 23,9 | 26,2 | 29,6 | 32,7 | 36,3 | 38,9 |
| 22 | 9,54 | 10,6 | 12,3 | 14,0 | 16,3 | 18,1 | 21,3 | 24,9 | 27,3 | 30,8 | 33,9 | 37,7 | 40,3 |
| 23 | 10,2 | 11,3 | 13,1 | 14,8 | 17,2 | 19,0 | 22,3 | 26,0 | 28,4 | 32,0 | 35,2 | 39,0 | 41,6 |
| 24 | 10,9 | 12,0 | 13,8 | 15,7 | 18,1 | 19,9 | 23,3 | 27,1 | 29,6 | 33,2 | 36,4 | 40,3 | 43,0 |
| 25 | 11,5 | 12,7 | 14,6 | 16,5 | 18,9 | 20,9 | 24,3 | 28,2 | 30,7 | 34,4 | 37,7 | 41,7 | 44,3 |
| 26 | 12,2 | 13,4 | 15,4 | 17,3 | 19,8 | 21,8 | 25,3 | 29,2 | 31,8 | 35,6 | 38,9 | 42,9 | 45,6 |
| 27 | 12,9 | 14,1 | 16,1 | 18,1 | 20,7 | 22,7 | 26,3 | 30,3 | 32,9 | 36,7 | 40,1 | 44,1 | 47,0 |
| 28 | 13,6 | 14,8 | 16,9 | 18,9 | 21,6 | 23,6 | 27,3 | 31,4 | 34,0 | 37,9 | 41,3 | 45,4 | 48,3 |
| 29 | 14,3 | 15,6 | 17,7 | 19,8 | 22,5 | 24,6 | 28,3 | 32,5 | 35,1 | 39,1 | 42.6 | 46,7 | 49,6 |
| 30 | 14,9 | 16,3 | 18,5 | 20,6 | 23,4 | 25,5 | 29,3 | 33,5 | 36,2 | 40,3 | 43,8 | 48,0 | 50,9 |

## 2.6. Значения статистик Дарбина-Уотсона $d_L$ $d_U$ при уровне значимости α = 0,05

(n – число наблюдений; m – число объясняющих переменных)

| n | m=1 | | m=2 | | m=3 | | m=4 | | m=5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $d_L$ | $d_U$ | $d_L$ | $d_U$ | $d_L$ | $d_U$ | $d_L$ | $d_U$ | $d_L$ | $d_U$ |
| | 0,61 | 1,40 | – | – | – | – | | | | |
| 7 | 0,70 | 1,36 | 0,47 | 1,90 | – | – | | | | |
| 8 | 0,76 | 1,33 | 0,56 | 1,78 | 0,37 | 2,29 | | | | |
| 9 | 0,82 | 1,32 | 0,63 | 1,70 | 0,46 | 2,13 | | | | |
| 10 | 0,88 | 1,32 | 0,70 | 1,64 | 0,53 | 2,02 | | | | |
| 11 | 0,93 | 1,32 | 0,66 | 1,60 | 0,60 | 1,93 | | | | |
| 12 | 0,97 | 1,33 | 0,81 | 1,58 | 0,66 | 1,86 | | | | |
| 13 | 1,01 | 1,34 | 0,86 | 1,56 | 0,72 | 1,82 | | | | |
| 14 | 1,05 | 1,35 | 0,91 | 1,55 | 0,77 | 1,78 | | | | |
| 15 | 1,08 | 1,36 | 0,95 | 1,54 | 0,82 | 1,75 | 0,69 | 1,97 | 0,56 | 2,21 |
| 16 | 1,10 | 1,37 | 0,98 | 1,54 | 0,86 | 1,73 | 0,74 | 1,93 | 0,62 | 2,15 |
| 17 | 1,13 | 1,38 | 1,02 | 1,54 | 0,90 | 1,71 | 0,78 | 1,90 | 0,67 | 2,10 |
| 18 | 1,16 | 1,39 | 1,05 | 1,53 | 0,93 | 1,69 | 0,82 | 1,87 | 0,71 | 2,06 |
| 19 | 1,18 | 1,40 | 1,08 | 1,53 | 0,97 | 1,68 | 0,86 | 1,85 | 0,75 | 2,02 |
| 20 | 1,20 | 1,41 | 1,10 | 1,54 | 1,00 | 1,68 | 0,90 | 1,83 | 0,79 | 1,99 |
| 21 | 1,22 | 1,42 | 1,13 | 1,54 | 1,03 | 1,67 | 0,93 | 1,81 | 0,83 | 1,96 |
| 22 | 1,24 | 1,43 | 1,15 | 1,54 | 1,05 | 1,66 | 0,96 | 1,80 | 0,86 | 1,94 |
| 23 | 1,26 | 1,44 | 1,17 | 1,54 | 1,08 | 1,66 | 0,99 | 1,79 | 0,90 | 1,92 |
| 24 | 1,27 | 1,45 | 1,19 | 1,55 | 1,10 | 1,66 | 1,01 | 1,78 | 0,93 | 1,90 |
| 25 | 1,29 | 1,45 | 1,21 | 1,55 | 1,12 | 1,66 | 1,04 | 1,77 | 0,95 | 1,89 |
| 26 | 1,30 | 1,46 | 1,22 | 1,55 | 1,14 | 1,65 | 1,06 | 1,76 | 0,98 | 1,88 |
| 27 | 1,32 | 1,47 | 1,24 | 1,56 | 1,16 | 1,65 | 1,08 | 1,76 | 1,01 | 1,86 |
| 28 | 1,33 | 1,48 | 1,26 | 1,56 | 1,18 | 1,65 | 1,10 | 1,75 | 1,03 | 1,85 |
| 29 | 1,34 | 1,48 | 1,27 | 1,56 | 1,20 | 1,65 | 1,12 | 1,74 | 1,05 | 1,84 |
| 30 | 1,35 | 1,49 | 1,28 | 1,57 | 1,21 | 1,65 | 1,14 | 1,74 | 1,07 | 1,83 |
| 31 | 1,36 | 1,50 | 1,30 | 1,57 | 1,23 | 1,65 | 1,16 | 1,74 | 1,09 | 1,83 |
| 32 | 1,37 | 1,50 | 1,31 | 1,57 | 1,24 | 1,65 | 1,18 | 1,73 | 1,11 | 1,82 |
| 33 | 1,38 | 1,51 | 1,32 | 1,58 | 1,26 | 1,65 | 1,19 | 1,73 | 1,13 | 1,18 |
| 34 | 1,39 | 1,51 | 1,33 | 1,58 | 1,27 | 1,65 | 1,21 | 1,73 | 1,15 | 1,81 |
| 35 | 140 | 1,52 | 1,34 | 1,58 | 1,28 | 1,65 | 1,22 | 1,73 | 1,16 | 1,80 |
| 36 | 1,41 | 1,52 | 1,35 | 1,59 | 1,29 | 1,65 | 1,24 | 1,73 | 1,18 | 1,80 |
| 37 | 1,42 | 1,53 | 1,36 | 1,59 | 1,31 | 1,66 | 1,25 | 1,72 | 1,19 | 1,80 |
| 38 | 1,43 | 1,54 | 1,37 | 1,59 | 1,32 | 1,66 | 1,26 | 1,72 | 1,21 | 1,79 |
| 39 | 1,43 | 1,54 | 1,38 | 1,60 | 1,33 | 1,66 | 1,27 | 1,72 | 1,22 | 1,79 |
| 40 | 1,44 | 1,54 | 1,39 | 1,60 | 1,34 | 1,66 | 1,28 | 1,72 | 1,23 | 1,78 |
| 100 | 1,65 | 1,69 | 1,63 | 1,72 | 1,61 | 1,74 | 1,59 | 1,76 | 1,57 | 1,78 |

## 2.7. Критические значения *f*-критерия для DF-, ADF- и PP-тестов

| Уровень значимости | Тип функции | | |
|---|---|---|---|
| | без параметра смещения и тренда | включая параметр смещения | включая параметр смещения и тренд |
| | T=25 | | |
| 0,01 | –2,66 | –3,75 | –4,38 |
| 0,025 | -2,26 | -3,33 | -3,95 |
| 0,05 | –1,95 | –3,00 | –3,60 |
| | T=50 | | |
| 0,01 | –2,62 | –3,58 | –4,15 |
| 0,025 | –2,25 | –3,22 | –3,80 |
| 0,05 | –1,95 | –2,93 | –3,50 |
| | T=100 | | |
| 0,01 | –2,60 | –3,51 | –4,04 |
| 0,025 | –2,24 | –3,17 | –3,69 |
| 0,05 | –1,95 | –2,89 | –3,45 |
| | T= ∞ | | |
| 0,01 | –2,58 | –3,43 | –3,96 |
| 0,025 | –2,23 | –3,12 | –3,66 |
| 0,05 | –1,951 | –2,86 | –3,41 |

# Приложение 3. Функции табличных процессоров MS Excel и OpenOffice.org Calc

## 3.1. Функции табличного процессора MS Excel

| Значение | Обозначение | Функция |
|---|---|---|
| Критическое значение $F$-критерия Фишера при уровне значимости α = 0,05 и числе степеней свободы $k_1$ и $k_2$ | $F_{крит}$ | FРАСПОБР(α; $k_1$; $k_2$) |
| Критическое значение $t$-критерия Стьюдента при уровне значимости α = 0,05 и числе степеней свободы $k$ | $t_{\text{крит}}$ | СТЬЮДРАСПОБР(α; $k$) |
| Квантиль стандартного нормального распределения порядка 1–α/2 | $t_{1-\alpha/2}$ | НОРМСТОБР(1–α/2) |
| Среднее квадратическое отклонение | $\sigma$ | СТАНДОТКЛОН() |
| Среднее значение | $\overline{x}$ | СРЗНАЧ() |
| Преобразование Фишера | $z = \mathrm{Z}(r)$ | ФИШЕР($r$) |
| Обратное преобразование Фишера | $r = Z^{-1}(z)$ | ФИШЕРОБР(z) |
| Вычисление коэффициента корреляции | $r_{xy}$ | КОРРЕЛ() |