## Задания для контрольной работы № 1.

**Задача 1.** Выбор способа производства. Предприятие производит три вида продукции, используя четыре типа ресурсов. Выпуск продукции может производиться одним из двух способов. Первый способ производства описывается матрицей $A_{4\times 3} = \left(a_{ij}\right)$ и обеспечивает выпуск, заданный матрицей $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, второй – технологической матрицей $B_{4\times 3} = \left(b_{ij}\right)$ и обеспечивает выпуск $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. $a_{ij}$ и $b_{ij}$ – затраты $i$-го типа ресурса на производство единицы $j$- го вида продукции первым и вторым способом. $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ – матрица строка цен на единицу продукции каждого вида, $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ – матрица строка цен на единицу сырья каждого типа. Определить какой из способов производства даёт большую прибыль и на сколько?

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 10 & 12 & 15 \\ 6 & 11 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 10 \\ 9 & 15 & 12 \\ 8 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 120 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 8 & 10 & 12 \\ 5 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 10 \\ 7 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ 16 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 100 & 90 & 110 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 8 & 10 & 12 \\ 4 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 11 \\ 9 & 8 & 10 \\ 5 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 13 \\ 19 \\ 16 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 100 & 120 & 110 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $A=\begin{pmatrix}11 & 12 & 10\\ 6 & 7 & 5\\ 6 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 6 & 8\\ 9 & 10 & 10\\ 7 & 8 & 6\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}15\\ 20\\ 10\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}18\\ 18\\ 11\end{pmatrix}$,

$P=\begin{pmatrix}150 & 130 & 120\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8 & 2 & 2 & 5\end{pmatrix}$.

5) $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 4\\ 8 & 10 & 10\\ 10 & 9 & 11\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 6 & 5\\ 9 & 8 & 9\\ 11 & 9 & 10\\ 3 & 6 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}22\\ 20\\ 12\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}16\\ 18\\ 20\end{pmatrix}$,

$P=\begin{pmatrix}100 & 120 & 110\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

6) $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 5\\ 6 & 10 & 8\\ 8 & 6 & 7\\ 9 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 8 & 11 & 10\\ 7 & 4 & 5\\ 9 & 6 & 3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}18\\ 20\\ 12\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}15\\ 22\\ 13\end{pmatrix}$,

$P=\begin{pmatrix}120 & 100 & 110\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8 & 2 & 2 & 5\end{pmatrix}$.

7) $A=\begin{pmatrix}4 & 4 & 8\\ 8 & 10 & 6\\ 9 & 9 & 10\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 5 & 6\\ 9 & 10 & 7\\ 8 & 9 & 10\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}14\\ 20\\ 12\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}15\\ 19\\ 13\end{pmatrix}$,

$P=\begin{pmatrix}110 & 130 & 110\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 5 & 3 & 6\end{pmatrix}$.

8) $A=\begin{pmatrix}4 & 4 & 5\\ 5 & 6 & 6\\ 6 & 5 & 4\\ 7 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 6 & 10 & 4\\ 7 & 9 & 5\\ 4 & 4 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}18\\ 20\\ 22\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}17\\ 20\\ 24\end{pmatrix}$,

$P=\begin{pmatrix}200 & 180 & 160\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}10 & 9 & 6 & 8\end{pmatrix}$.

9) $A=\begin{pmatrix}6 & 4 & 8\\ 7 & 10 & 6\\ 6 & 9 & 5\\ 5 & 5 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 5 & 6\\ 6 & 10 & 7\\ 6 & 9 & 7\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}32\\ 20\\ 22\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}30\\ 21\\ 24\end{pmatrix}$,

$P=\begin{pmatrix}210 & 200 & 190\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8 & 9 & 7 & 10\end{pmatrix}$.

10) $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 8 & 5 & 6 \\ 9 & 9 & 8 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 5 \\ 8 & 9 & 10 \\ 9 & 9 & 8 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 16 \\ 19 \\ 15 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 200 & 190 & 210 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

**Примечание.** При выполнении задания см. пример 1.3.

**Задача 2**. Предприятие специализируется по выпуску изделий трёх видов: $A_1, A_2, A_3$; при этом используется сырь трех типов: $S_1, S_2, S_3$.

Нормы расхода каждого типа сырья на одно изделие каждого вида и запас сырья на один день заданы в таблице 4. Найти ежедневный объём выпуска каждого вида изделий, при условии, что сырьё используется полностью.

*Указание.* Обозначив, через $x_j\,(j = 1, 2, 3)$ ежедневный объём выпуска изделий каждого вида, записать условия расхода по каждому типу сырья в виде системы трёх уравнений с тремя неизвестными. Полученную систему решить двумя способами:

1) по формулам Крамера,
2) методом Гаусса.

Таблица 4.

| № вар. | Тип сырья | Нормы расхода сырья на одно изделие, усл. ед. | | | Запасы сырья на 1 день, усл.ед. |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | |
| 1 | $S_1$ | 1 | 3 | 4 | 190 |
| | $S_2$ | 2 | 1 | 2 | 110 |
| | $S_3$ | 3 | 2 | 1 | 140 |
| 2 | $S_1$ | 1 | 2 | 3 | 170 |
| | $S_2$ | 3 | 5 | 2 | 250 |
| | $S_3$ | 4 | 3 | 4 | 300 |
| 3 | $S_1$ | 1 | 4 | 3 | 260 |
| | $S_2$ | 4 | 2 | 1 | 180 |
| | $S_3$ | 5 | 1 | 4 | 290 |
| 4 | $S_1$ | 1 | 5 | 3 | 310 |
| | $S_2$ | 4 | 2 | 4 | 280 |
| | $S_3$ | 2 | 3 | 5 | 310 |
| 5 | $S_1$ | 1 | 3 | 5 | 290 |
| | $S_2$ | 2 | 4 | 1 | 280 |
| | $S_3$ | 4 | 3 | 3 | 300 |

Продолжение таблицы 4.

| № вар. | Тип сырья | Нормы расхода сырья на одно изделие, усл. ед. | | | Запасы сырья на 1 день, усл.ед. |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | $S_1$ | 1 | 2 | 4 | 190 |
| | $S_2$ | 3 | 5 | 1 | 310 |
| | $S_3$ | 4 | 2 | 3 | 260 |
| 7 | $S_1$ | 1 | 3 | 4 | 260 |
| | $S_2$ | 5 | 4 | 2 | 340 |
| | $S_3$ | 2 | 3 | 1 | 200 |
| 8 | $S_1$ | 1 | 3 | 2 | 190 |
| | $S_2$ | 2 | 4 | 5 | 350 |
| | $S_3$ | 5 | 1 | 3 | 320 |
| 9 | $S_1$ | 1 | 2 | 4 | 270 |
| | $S_2$ | 3 | 5 | 1 | 330 |
| | $S_3$ | 5 | 2 | 2 | 310 |
| 10 | $S_1$ | 1 | 2 | 4 | 180 |
| | $S_2$ | 3 | 3 | 4 | 290 |
| | $S_3$ | 2 | 4 | 3 | 260 |

**Примечание.** При выполнении задания см. примеры 2.1, 2.2, 2.3.

**Задача 3.** Проверить продуктивность модели Леонтьева. Найти вектор валового выпуска $X$, который при известной матрице прямых затрат $A$ обеспечивает заданный вектор конечного продукта $Y$. Найти внутрипроизводственные поставки каждой отрасли.

1) $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,2 & 0,3\\ 0,5 & 0,3 & 0,1\\ 0,1 & 0,4 & 0,5\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}149\\107\\73\end{pmatrix};$ 2) $A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3 & 0,4\\ 0,4 & 0,1 & 0,2\\ 0,3 & 0,4 & 0,1\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}28\\72\\7\end{pmatrix};$

3) $A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,5 & 0,4\\ 0,2 & 0,2 & 0,1\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}190\\75\\205\end{pmatrix};$ 4) $A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3 & 0,4\\ 0,2 & 0,1 & 0,3\\ 0,3 & 0,4 & 0,2\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}168\\214\\51\end{pmatrix};$

5) $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,4 & 0,4\\ 0,1 & 0,2 & 0,2\\ 0,3 & 0,1 & 0,3\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}124\\218\\178\end{pmatrix};$ 6) $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,3 & 0,1\\ 0,1 & 0,2 & 0,2\\ 0,2 & 0,3 & 0,4\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}129\\186\\104\end{pmatrix};$

7) $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}198\\258\\243\end{pmatrix}$; 8) $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1\\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}144\\109\\7\end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1\\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}141\\29\\177\end{pmatrix}$; 10) $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}9\\19\\11\end{pmatrix}$.

**Примечание.** При выполнении задания см. пример 2.5.

**Задача 4.** Векторы $e_1', e_2', e_3'$ и вектор $x$ заданы своими координатами в некотором базисе пространства арифметических векторов $R_3$. Доказать, что $e_1', e_2', e_3'$ – базис в пространстве в $R_3$ и записать разложение вектора $x$ по этому базису.

1) $\begin{aligned}&e_1' = e_2 + 2e_3,\\ &e_2' = e_1 + e_3,\\ &e_3' = -e_1 + 2e_2 + 4e_3,\\ &x = -2e_1 + 4e_2 + 7e_3;\end{aligned}$ 2) $\begin{aligned}&e_1' = e_1 + 3e_2,\\ &e_2' = 2e_1 - e_2 + e_3,\\ &e_3' = -e_2 + 2e_3,\\ &x = 6e_1 + 12e_2 - e_3;\end{aligned}$ 3) $\begin{aligned}&e_1' = 2e_1 + e_2 - e_2,\\ &e_2' = 3e_2 + 2e_3,\\ &e_3' = e_1 - e_2 + e_3,\\ &x = e_1 - 4e_2 + 4e_3;\end{aligned}$

4) $\begin{aligned}&e_1' = 4e_1 + e_2 + e_2,\\ &e_2' = 2e_2 - 3e_3,\\ &e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3,\\ &x = -9e_1 + 5e_2 + 5e_3;\end{aligned}$ 5) $\begin{aligned}&e_1' = -e_1 + e_2,\\ &e_2' = e_1 + 3e_2 - e_3,\\ &e_3' = 4e_2 + e_3,\\ &x = -5e_1 - 5e_2 + 5e_3;\end{aligned}$ 6) $\begin{aligned}&e_1' = 5e_1 + e_2,\\ &e_2' = 2e_1 - e_2 + 3e_3,\\ &e_3' = e_1 - e_3,\\ &x = 13e_1 + 2e_2 + 7e_3;\end{aligned}$

7) $\begin{aligned}&e_1' = e_2 + e_3,\\ &e_2' = -2e_1 + e_3,\\ &e_3' = 3e_1 + e_2,\\ &x = -19e_1 - e_2 + 7e_3;\end{aligned}$ 8) $\begin{aligned}&e_1' = e_1 + 2e_3,\\ &e_2' = e_2 + e_3,\\ &e_3' = 2e_1 - e_2 + 4e_3,\\ &x = 3e_1 - 3e_2 + 4e_3;\end{aligned}$ 9) $\begin{aligned}&e_1' = 3e_1 + e_3,\\ &e_2' = -e_1 + 2e_2 + e_3,\\ &e_3' = -e_1 + 2e_3,\\ &x = 3e_1 + 3e_2 - e_3;\end{aligned}$

10) $\begin{aligned}&e_1' = 2e_1 + e_2 - e_3,\\ &e_2' = 3e_2 + 2e_3,\\ &e_3' = e_1 - e_2 + e_3,\\ &x = e_1 - 4e_2 + 4e_3.\end{aligned}$

**Примечание.** При выполнении задания см. примеры 3.5, 3.7.

**Задача 5.** Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы:

1) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

**Примечание.** При выполнении задания см. пример 3.6.

**Задача 6.** Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. 5) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 6) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

7) $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.   8) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.   9) $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

10) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

**Примечание.** При выполнении задания см. пример 4.6.