Домашнее задание 2 для магистров (лектор Шахов Е.М.)

Задача 6 (6 баллов). Решить краевую задачу методом конечных разностей $y'' + py' + qy = f(x)$, $a < x < b$, $y'(a) + \gamma y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

Решение выполнить с шагом $h = (b - a)/n$ для различных n (n = 2; 4; 16; 100). Результаты изобразить графически, сравнить их между собой и с точным решением. Значения констант и функцию $f(x)$ взять из таблицы.

Привести оценки времени работы программы при n = 100 для решения с методом прогонки и без него (см. задачу 6 из ДЗ2 первого семестра).

№	p	q	$f(x)$	a	b	α	β	γ
1	2	1	e^x	0	1	1	2	3
2	5	6	e^{-x}	1	2	6	5	2
3	4	3	$\cos x$	−1	0	3	4	4
4	6	5	$\sin 2x$	−2	−1	5	6	5
5	−2	1	x^2	0	1	1	1	2
6	−5	6	$5x$	1	2	3	1	3
7	−4	3	$3e^x$	−1	0	4	5	4
8	−6	5	e^{-3x}	−2	−1	2	2	5

Задача 7 (6 баллов). Решить краевую задачу для уравнения теплопроводности методом конечных разностей с использованием схемы Кранка − Николсона. Для разрешения СЛАУ использовать метод прогонки. Уравнение

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \le x \le l$$

и граничными условиями

$$u\big|_{x=0} = \mu_1,\ \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \beta u\right)\right|_{x=l} = \mu_2,\ t \ge 0$$

Построить график полученного численного решения в моменты времени T_1 и T_2.

№	a	$\varphi(x)$	μ_1	μ_2	β	l	T_1	T_2	$f(x,t)$
1	2	$3\cos x + 1$	2	1	5	π	0,08	8	8
2	3	$2\sin x + 2$	2	3	2	2π	0,07	7	7
3	4	$\sin^2 x$	2	4	3	3π	0,06	6	6
4	1	$\cos^2 x$	2	5	4	$\pi/2$	0,05	5	5
5	3	$3\cos x + 4$	1	1	1	π	0,04	4	4

6	4	$2\sin x+2$	2	3	4	2π	0,03	3	3
7	2	$\sin^2 x$	4	2	3	3π	0,02	2	2
8	1	$\cos^2 x$	3	3	1	π/2	0,01	1	1

Задача 8 (6 баллов). Решить краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольной области методом конечных разностей с использованием продольно поперечной прогонки. Уравнение

$$u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f(x,y,t)$$

с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \le x \le l_1,\ 0 \le y \le l_2$$

и граничными условиями

$$u\big|_{x=0} = \mu_1(y,t),\ u\big|_{x=l_1} = \mu_2(y,t),\ t \ge 0,\ 0 \le y \le l_2$$

$$u\big|_{y=0} = \mu_3(x,t),\ u\big|_{y=l_2} = \mu_4(x,t),\ t \ge 0,\ 0 \le x \le l_1$$

Построить линии уровня полученной численного функции $u(x, y, t)$ в моменты времени T_1 и T_2.

№	a	$\varphi(x)$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	l_1	l_2	T_1	T_2	$f(x,y,t)$
1	2	$3\cos x+1$	2	1	0	t	π	1	0,08	8	8
2	3	$2\sin x+2$	2	3	t	0	2π	2	0,07	7	7
3	4	$\sin^2 x$	2	4	1	t	3π	1	0,06	6	6
4	1	$\cos^2 x$	2	5	t	1	π/2	2	0,05	5	5
5	3	$3\cos x+4$	1	1	t	t	π	3	0,04	4	4
6	4	$2\sin x+2$	2	3	1	1	2π	4	0,03	3	3
7	2	$\sin^2 x$	4	2	0	t^2	3π	1	0,02	2	2
8	1	$\cos^2 x$	3	3	t^2	1	π/2	2	0,01	1	1

Задача 9 (6 баллов). В таблице задан функционал $J[y(x)]$. Решите для него следующие задачи:

1) Составьте уравнение Эйлера и найдите его точное решение.

2) Найдите минимум функционала $J[y(x)]$ методом Ритца при $n = 1$ (принять, что $\varphi_1(x) = x^2 - x$).

3) Найдите минимум функционала $J[y(x)]$ методом Галеркина при $n = 1$ (принять, что $\varphi_1(x) = x\left(1-x\right)$).

4) Постройте графики функций найденных в пунктах 1)−3).

Необязательное задание: сделать пункты 2)−4) в случае $n = 2$ и $n = 3$.

№	$J[y(x)]$
1	$J\left[y(x)\right]=\int\limits_0^1\left(y'^2+xy\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$
2	$J\left[y(x)\right]=\int\limits_0^1\left(y'^2+9y^2+12xy\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$
3	$J\left[y(x)\right]=\int\limits_0^1\left(y'^2+y^2+2e^x y\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$
4	$J\left[y(x)\right]=\int\limits_0^1\left(y'^2+4y^2+2x^2 y\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$
5	$J\left[y(x)\right]=\int\limits_0^1\left(y'^2-xy\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$
6	$J\left[y(x)\right]=\int\limits_0^1\left(y'^2+y^2+6x^2 y\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$
7	$J\left[y(x)\right]=\int\limits_0^1\left(y'^2+y^2+2e^{-2x} y\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$
8	$J\left[y(x)\right]=\int\limits_0^1\left(y'^2+4y^2+2(x+1)y\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$

Задача 10 (6 баллов). Найти решение краевой задачи, полученной в задаче 9 (в пункте 1) вариационно-сеточным методом Ритца.

Провести расчеты для разбиения отрезка [0, 1] на 2, 3, 4, 10 и 100 частей. Результаты сравнить с точным решением и решениями, полученными численно в задаче 9.