Решение типового варианта из "Домашнее задание 2 для магистров (лектор Шахов Е.М.)"

Задача 6 Решить краевую задачу метолом конечных разностей

$$y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x},\ 0 < x < 1,\ y'(0) = 2(e^2 - 2),\ y(1) = 2 \qquad (1)$$

Решение выполнить с шагом $h = (b - a)/n$ для различных n (n = 2; 4; 16; 100) с использованием метода прогонки. Результаты изобразить графически, сравнить их между собой и с точным решением. Привести оценки времени работы программы при n = 100 для решения с методом прогонки и без него (см. задачу 6 из ДЗ2 первого семестра).

Решение. Так как это модельная учебная задача, то найти здесь точное аналитическое решение не составляет труда (см. задачу 2 из ДЗ1 первого семестра)

$$y(x) = e^{-2x}(x^2 + 2(e^2 - 1)x + 1)$$

(Код для вставки в математический пакет: y''+4*y'+4*y=2*exp(-2*x), y'(0)=2*(exp(2)-2), y(1)=2.). Однако не всякая краевая задача вида (1) имеет аналитическое решение.

Используем теперь метод конечных разностей для нахождения приближенного решения (1). (Подробнее о методе и его применении можно прочитать, например, в [1]). Здесь же воспользуемся [2]. Введем на отрезке $[a, b]$ равномерную сетку ω_h

$$\omega_h = \{x_i = x_1 + ih,\ x_1 = a,\ h = (b - a)/n,\ i = 1, \dots, n+1\}$$

Записывая уравнение (1) во внутренних узлах сетки ω_h, получим $(n - 1)$-но уравнение для определения $3(n - 1)$ неизвестных y_i, y_i' и y_i'':

$$y_i'' + 4y_i' + 4y_i = 2e^{-2x_i},\ i = 2, \dots, n \qquad (2)$$

где $y_i = y(x_i)$, $y_i' = y'(x_i)$, $y_i'' = y''(x_i)$. Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений относительно y_i, необходимо первые и вторые производные функции $y(x)$ в узловых точках выразить через значения $y(x)$ в этих точках. Предполагая, что функция $y(x)$ имеет все необходимые по ходу рассуждения непрерывные производные и используя формулу Тейлора получим:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

где $\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$ − центральная разностная производная

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Отбрасывая слагаемые вида $O(h^2)$ из (2) приходим к системе линейных уравнений

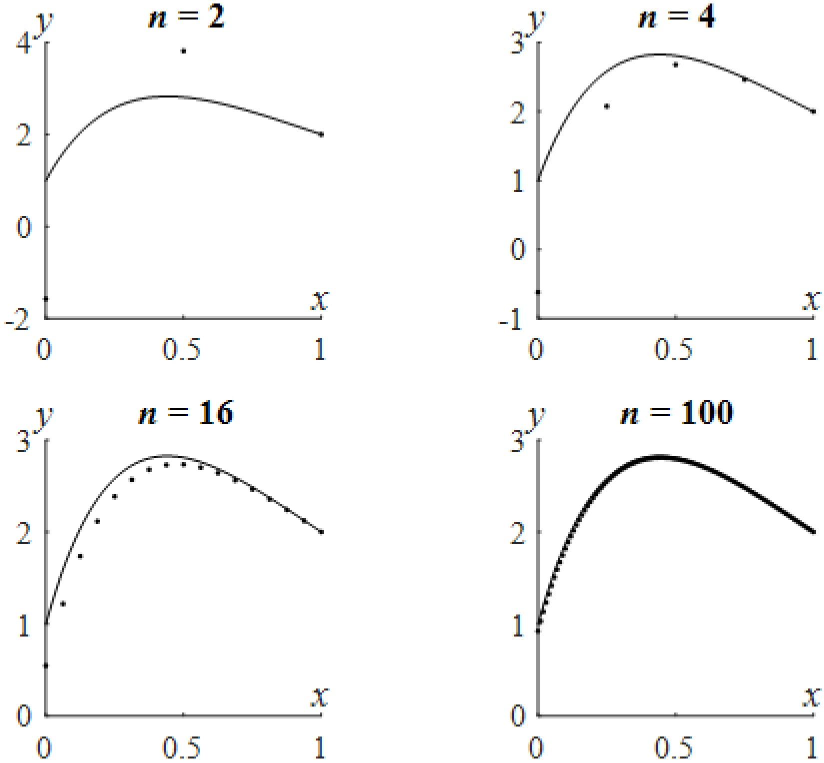

Рис. 1. Графики функций $y(x)$ (сплошная линия) и y_i (точки) при различных n.

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+4\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+4y_i=2e^{-2x_i}\ ,\ i=2,\ldots,n$$

$$y_{n+1} = 2$$

Для составления недостающего уравнения в СЛАУ используем условие $y'(0)=2(e^2-2)$. Аппроксимируем его разностным соотношением (для производной используем разность вперед)

$$\frac{y_2-y_1}{h}=2(e^2-2)$$

Перепишем эту систему в более удобном виде $\boldsymbol{AY} = \boldsymbol{B}$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1/h & 1/h & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & D_1 & E_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & D_2 & E_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_{n-1} & D_{n-1} & E_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2(e^2-2) \\ 2e^{-2x_2} \\ 2e^{-2x_3} \\ \dots \\ 2e^{-2x_n} \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_{n+1} \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{C} = \left(\frac{1}{h^2} - \frac{2}{h}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{D} = \left(4 - \frac{2}{h^2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E} = \left(\frac{1}{h^2} + \frac{2}{h}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Полученную трехдиагональную систему линейных уравнений удобно решать методом прогонки. Графики функций $y(x)$ и y_i при различных n, показаны на Рис. 1. В файлах z6graph1.m программа помогающая построить графики, функция метода прогонки реализована в файле tridiag.m.

Задача 7. Решить краевую задачу для уравнения теплопроводности методом конечных разностей.

$$
u_t = u_{xx}
$$

с начальным условием

$$
u\big|_{t=0} = \sin x + 2\,,\ 0 \le x \le \pi
$$

и граничными условиями

$$
\left(\frac{\partial u}{\partial x} + u\right)\bigg|_{x=0} = 5\,,\ u\big|_{x=\pi} = 2\,,\ t \ge 0
$$

Построить график полученного численного решения в моменты времени $T = 1$.

Решение. Подобно тому, как это было сделано в задаче 6, введем равномерную сетку

$$
\omega_{h,\tau} = \begin{Bmatrix} x_i = x_1 + ih,\ x_1 = 0,\ h = l/n,\ i = 1,\dots,n+1 \\ t_j = (j-1)\tau,\ \tau = T/m,\ j = 1,\dots,m+1 \end{Bmatrix}
$$

Построим явно-неявную схему Кранка − Николсона

$$
\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}\right)
$$

Перепишем ее в более удобном виде

$$u_{i-1}^{j+1}\frac{1}{h^2}-u_i^{j+1}\left(\frac{2}{h^2}+\frac{2}{\tau}\right)+u_{i+1}^{j+1}\frac{1}{h^2}=-\frac{2u_i^j}{\tau}-\left(\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2}\right)$$

Из начального условия получаем, что

$$u_i^1=\sin(x_i)+2$$

Из второго граничного условия следует, что

$$u_{n+1}^j=2$$

Первое граничное условие аппроксимируем со вторым порядком точности

$$\left(\frac{u_2^{j+1}-u_1^{j+1}}{h}-u_1^{j+1}\right)+\left(\frac{u_2^j-u_1^j}{h}-u_1^j\right)=h\frac{u_1^{j+1}-u_1^j}{\tau}-10$$

Которое тоже запишем в виде, удобном для решения СЛАУ

$$-u_1^{j+1}\left(\frac{h}{\tau}+\frac{1}{h}+1\right)+u_2^{j+1}\frac{1}{h}=-\left(\frac{u_2^j-u_1^j}{h}-u_1^j\right)-h\frac{u_1^j}{\tau}-10$$

Так как нам известно распределение температуры на первом слое по времени (в начальный момент), то для определения температуры на втором слое мы имеем систему линейных уравнений, подобную той, что была в задаче 6. А значит, мы можем найти решение на втором слое по времени. Рассуждая подобным образом, найдем решение на всех слоях по времени до момент T. Запишем систему $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -\left(\frac{h}{\tau}+\frac{1}{h}+1\right) & (1/h) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ C_1 & D_1 & E_1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & C_2 & D_2 & E_2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_{n-1} & D_{n-1} & E_{n-1}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -\left(\frac{u_2^j-u_1^j}{h}-u_1^j\right)-h\frac{u_1^j}{\tau}-10\\ -\frac{2u_2^j}{\tau}-\left(\frac{u_3^j-2u_2^j+u_1^j}{h^2}\right)\\ -\frac{2u_3^j}{\tau}-\left(\frac{u_4^j-2u_3^j+u_2^j}{h^2}\right)\\ \dots\\ -\frac{2u_n^j}{\tau}-\left(\frac{u_{n+1}^j-2u_n^j+u_{n-1}^j}{h^2}\right)\\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}u_1^{j+1}\\ \dots\\ u_{n+1}^{j+1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}1\\ \dots\\ 1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{D}=-\left(\frac{2}{\tau}+\frac{2}{h^2}\right)\begin{pmatrix}1\\ \dots\\ 1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}1\\ \dots\\ 1\end{pmatrix}$$

Полученную трехдиагональную систему линейных уравнений удобно решать методом прогонки. В z7graph1.m представлено решение с использованием метода прогонки (вспомогательный файл tridiag.m). График функции u_i^{m+1} показан на Рис. 2.

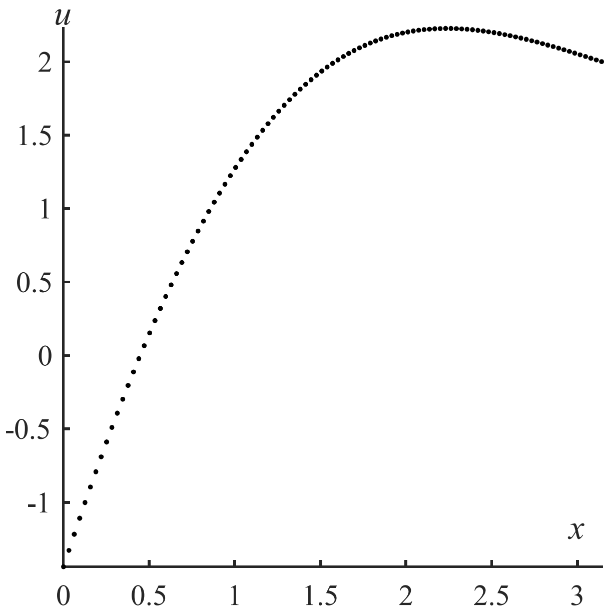

Рис. 2. График функции u_i^{m+1}.

Задача 8. Решить краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольной области методом конечных разностей с использованием продольно поперечной прогонки. Уравнение

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = 0,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$$

и граничными условиями

$$u\big|_{x=0} = 1,\ u\big|_{x=l_1} = 0,\ t \ge 0,\ 0 \le y \le 1$$

$$u\big|_{y=0} = 0,\ u\big|_{y=l_2} = 0,\ t \ge 0,\ 0 \le x \le 1$$

Построить линии уровня полученной численного функции $u(x, y, t)$ в моменты времени t = 1.

Решение. Введем сетки

$$\omega_{h_1} = \{x_n = (n-1)h,\ n = 1,\ldots,N+1\},\ \omega_{h_2} = \{y_m = (m-1)h,\ m = 1,\ldots,M+1\},$$

$$\omega_\tau = \{t_j = (j-1)\tau,\ j = 1, ..., j_0 + 1\}$$

и сетку в $\bar{D}$

$$\bar{\omega}_{h_1 h_2 \tau} = \omega_{h_1} \times \omega_{h_2} \times \omega_\tau$$

с шагами $h_1 = 1/N$, $h_2 = 1/M$ и $\tau = T / j_0$. Обозначим через u_{nm}^j значение в узле (x_n, y_m, t_j) сеточной функции u, определенной на $\bar{\omega}_{h_1 h_2 \tau}$. Используем разностную схему

$$\frac{u_{nm}^{j+1/2} - u_{nm}^j}{0.5\tau} = \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n-1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} + \frac{u_{n,m-1}^j - 2u_{n,m}^j + u_{n,m+1}^j}{h_2^2} + \varphi_{nm}^j$$

$$\frac{u_{nm}^{j+1} - u_{nm}^{j+1/2}}{0.5\tau} = \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n-1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} + \frac{u_{n,m+1}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+1} + u_{n,m-1}^{j+1}}{h_2^2} + \varphi_{nm}^j$$

$$n = 2, ..., N,\ m = 2, ..., M,\ j = 1, ..., j_0$$

С граничными условиями

$$u_{n,1}^{j+1} = \mu_3(x_n, t_{j+1}),\ u_{n,M+1}^{j+1} = \mu_4(x_n, t_{j+1}),\ n = 1, ..., N+1$$

$$u_{1,m}^{j+1/2} = d_{11},\ u_{N+1,m}^{j+1/2} = d_{N+1}^1$$

где

$$d_1^1 = \frac{1}{2}\Big(\mu_1(y_m, t_{j+1}) + \mu_1(y_m, t_j)\Big) - \frac{\tau}{4}\frac{\mu_1(y_{m-1}, t_{j+1}) - 2\mu_1(y_m, t_{j+1}) + \mu_1(y_{m+1}, t_{j+1})}{h_2^2} +$$

$$+\frac{\tau}{4}\frac{\mu_1(y_{m-1}, t_j) - 2\mu_1(y_m, t_j) + \mu_1(y_{m+1}, t_j)}{h_2^2}, \quad m = 2, ..., M$$

$$d_{N+1}^1 = \frac{1}{2}\Big(\mu_2(y_m, t_{j+1}) + \mu_2(y_m, t_j)\Big) - \frac{\tau}{4}\frac{\mu_2(y_{m-1}, t_{j+1}) - 2\mu_2(y_m, t_{j+1}) + \mu_2(y_{m+1}, t_{j+1})}{h_2^2} +$$

$$+\frac{\tau}{4}\frac{\mu_2(y_{m-1}, t_j) - 2\mu_2(y_m, t_j) + \mu_2(y_{m+1}, t_j)}{h_2^2}, \quad m = 2, ..., M$$

И начальным условием

$$u_{n,m}^1 = \nu_0(x_n, y_m),\ n = 1, ..., N+1,\ m = 1, ..., M+1$$

Перепишем полученную задачу в виде СЛАУ. Уравнения на полуцелом слое

$$a_n^1 u_{n-1,m}^{j+1/2} + b_n^1 u_{nm}^{j+1/2} + c_n^1 u_{n-1,m}^{j+1/2} = d_n^1$$

где

$$\boldsymbol{a}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/h_1^2 \\ 1/h_1^2 \\ \dots \\ 1/h_1^2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/h_1^2 - 2/\tau \\ -2/h_1^2 - 2/\tau \\ \dots \\ -2/h_1^2 - 2/\tau \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/h_1^2 \\ 1/h_1^2 \\ \dots \\ 1/h_1^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{d}^1 = \begin{pmatrix} d_1^1 \\ -\dfrac{2u_{2,m}^j}{\tau} - \dfrac{u_{2,m-1}^j - 2u_{2,m}^j + u_{2,m+1}^j}{h_2^2} - \varphi_{2,m}^j \\ -\dfrac{2u_{3,m}^j}{\tau} - \dfrac{u_{3,m-1}^j - 2u_{3,m}^j + u_{3,m+1}^j}{h_2^2} - \varphi_{3,m}^j \\ \dots \\ -\dfrac{2u_{N,m}^j}{\tau} - \dfrac{u_{N,m-1}^j - 2u_{N,m}^j + u_{N,m+1}^j}{h_2^2} - \varphi_{N,m}^j \\ d_{N+1}^1 \end{pmatrix}$$

На целом слое имеем

$$a_n^2 u_{n-1,m}^{j+1} + b_n^2 u_{nm}^{j+1} + c_n^2 u_{n-1,m}^{j+1} = d_n^2$$

где

$$\boldsymbol{a}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/h_2^2 \\ 1/h_2^2 \\ \dots \\ 1/h_2^2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/h_2^2 - 2/\tau \\ -2/h_2^2 - 2/\tau \\ \dots \\ -2/h_2^2 - 2/\tau \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/h_2^2 \\ 1/h_2^2 \\ \dots \\ 1/h_2^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$
\boldsymbol{d}^2 = \begin{pmatrix} \mu_3(x_n, t_{j+1}) \\ -\dfrac{2u_{n,2}^{j+1/2}}{\tau} - \dfrac{u_{n+1,2}^{j+1/2} - 2u_{n,2}^{j+1/2} + u_{n-1,2}^{j+1/2}}{h_1^2} - \varphi_{n,2}^j \\ -\dfrac{2u_{n,3}^{j+1/2}}{\tau} - \dfrac{u_{n+1,3}^{j+1/2} - 2u_{n,3}^{j+1/2} + u_{n-1,3}^{j+1/2}}{h_1^2} - \varphi_{n,3}^j \\ \ldots \\ -\dfrac{2u_{n,M}^{j+1/2}}{\tau} - \dfrac{u_{n+1,M}^{j+1/2} - 2u_{n,M}^{j+1/2} + u_{n-1,M}^{j+1/2}}{h_1^2} - \varphi_{n,M}^j \\ \mu_4(x_n, t_{j+1}) \end{pmatrix}
$$

В нашем примере следует положить $\mu_1(y,t)=1$, $\mu_2(y,t)=0$, $\mu_3(x,t)=0$, $\mu_4(x,t)=0$, $\nu_0(x,y)=0$, $\mu_4(x,t)=0$. На Рис. 3 показан результат численного расчета по построенной схеме. Файлы помогающие построить решение: z8graph1.m, tridiag.m, mu1.m, mu2.m, mu3.m, mu4.m, fun.m.

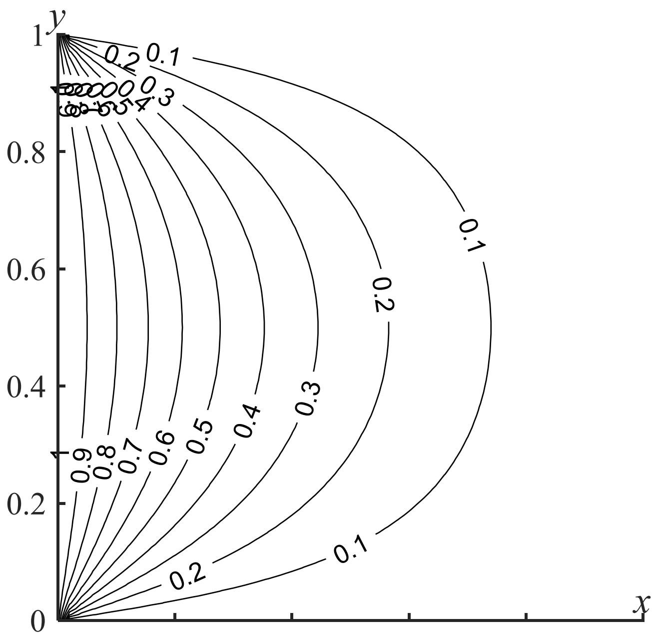

Рис. 3. Линии уровня $u(x,y,1)$ (численное решение).

Задача 9. Дан функционал

$$J\left[y(x)\right]=\int_0^1\left(y'^2+y^2+2xy\right)dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$$

1) Составьте уравнение Эйлера и найдите его точное решение.
2) Найдите минимум функционала $J[y(x)]$ методом Ритца при $n = 1$ (принять, что $\varphi_1(x)=x^2-x$).
3) Найдите минимум функционала $J[y(x)]$ методом Галеркина при $n = 1$ (принять, что $\varphi_1(x)=x\left(1-x\right)$).
4) Постройте графики функций найденных в пунктах 1)−3).
Решение. 1) Уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

В данной задаче

$$F=y'^2+y^2+2xy$$

Поэтому

$$F_y=2y+2x,\ F_{y'}=2y',\ \frac{d}{dx}F_{y'}=2y''$$

Откуда находим, что в данном случае уравнение Эйлера имеет вид

$$2y+2x-2y''=0 \text{ или } y''-y=x$$

С заданными граничными условиями $y(0) = 0$, $y(1) = 0$. Его решение нетрудно найти аналитически или с помощью математических пакетов (код для вставки y'' - y = x, y(0) = 0, y(1) = 0)

$$y(x)=\frac{e}{e^2-1}(e^x-e^{-x})-x$$

2) Полагаем $\varphi_0(x)\equiv 0$. В качестве координатных функций выбираем $\varphi_k(x)=x^{k+1}-x^k$, $k\in \boldsymbol{N}$. Эти функции удовлетворяют граничным условиям $\varphi_k(0)=\varphi_k(1)=0$. Так как $n = 1$, то $y_1(x)=C_1(x^2-x)$ и

$$J\left[y_1(x)\right]=\int_0^1\left(C_1^2(2x-1)^2+C_1^2(x^2-x)^2+2C_1(x^3-x\right)dx$$

Нетрудно посчитать этот интеграл аналитически, но удобнее использовать математический пакет. В MATLAB для этого используется команда int (подробнее в файле z9graph1Ritz.m). Вычислив этот интеграл первым или втором способом, получим

$$J\left[y_1(x)\right]=\Phi(C_1)=\frac{11}{30}C_1^2-\frac{5}{30}C_1$$

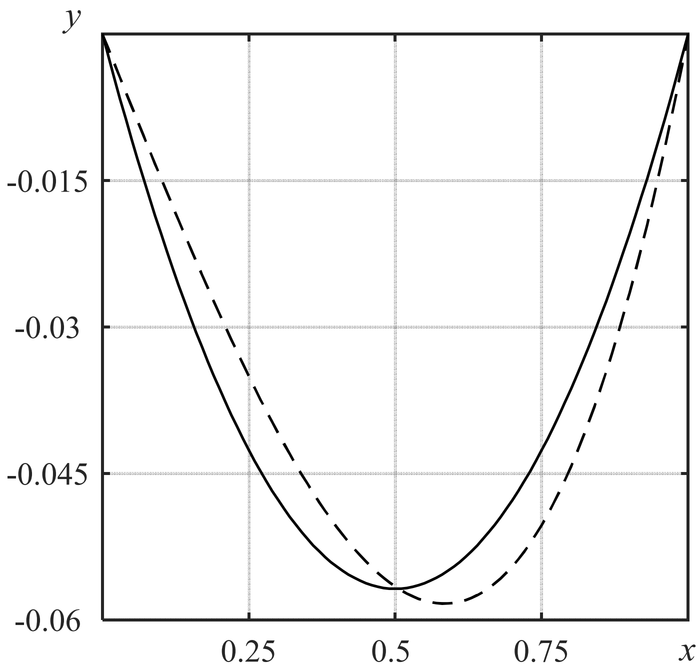

Рис. 4. сплошная кривая − $y_1(x)$, пунктир − точное решение задачи.

Ясно, что минимум $\Phi(C_1)$ достигается при $C_1^* = 5/22$. Таким образом,

$$y_1^*(x) = 5(x^2 - x)/22$$

3) В пункте 1) было составлено уравнение Эйлера

$$y'' - y = x,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$$

Поэтому в данной задаче $Ly = y'' - y$, $f(x) = x$. Для $n = 1$, имеем $y_1(x) = C_1\varphi_1(x) = C_1x(1-x)$. Найдем невязку

$$\delta f = L(y_n(x)) - f(x) = \left(C_1x(1-x)\right)'' - C_1x(1-x) - x$$

Упрощая, получим

$$\delta f = -2C_1 - C_1x + C_1x^2 - x$$

Условие ортогональности невязки δf к функции $\varphi_1(x) = x(1-x)$ имеет вид

$$\int_0^1 \left[-2C_1 - C_1x + C_1x^2 - x\right] x(1-x)dx = 0$$

Интегрируя, находим

$$-\frac{11}{30}C_1-\frac{1}{12}=0 \text{ или } C_1=-\frac{5}{22}$$

То есть, как и в методе Ритца, $y_1(x)=5(x^2-x)/22$.

4) Графики функций показаны на Рис. 4 (кривые из пунктов 2) и 3) в данной задаче совпадают). Файлы MATLAB, помогающие построить эти графики z1graph1Ritz.m и z1graph1Galerkin.m.

***Задача* 10.** Решить краевую задачу

$$-y''+y=-x,\ 0\le x\le 1,\ y(0)=0,\ y(1)=0$$

вариационно-сеточным методом Ритца (вариант метода конечных элементов).

Решение. На занятии 10 были даны формулы, используемые в решении этой задачи. Подробнее вариационно-сеточный метод Ритца описан в [5]. Итак, в данном примере $p = 1$, $q = 1$, $f(x) = -x$. Так как входящие в задачу функции непрерывны, выберем $\Delta x_{k+1/2}=h=1/n$, где n − число частей, на которые разобьем отрезок [0, 1]. Прогоночные коэффициенты из разностной задачи

$$a_k y_{k-1}-b_k y_k+c_k y_{k+1}=-F_k,\ k=2, ..., n,\ y_1=0,\ y_{n+1}=0$$

будем считать по формулам

$$a_k=\frac{1}{h}-\frac{1}{6},\ c_k=\frac{1}{h}-\frac{1}{6},\ b_k=\frac{2}{h}+\frac{2}{3}h$$

Для простоты положим, что $F_k\approx h\dfrac{f(x_k+h/2)+f(x_k-h/2)}{2}$. Такое предположение ухудшает точность расчетов, но избавляет от подсчета интегралов вида

$$F_k=\int_{x_{k-1}}^{x_k}x\omega_1 dx+\int_{x_k}^{x_{k+1}}x\omega_2 dx$$

где

$$\omega_1(x)=\frac{x-x_k}{h},\ \omega_2(x)=\frac{x_{k+1}-x}{h}$$

Результаты расчетов, показанные на Рис. 2, получены с помощью файла z10graph1.m и файлов функций p.m, q.m, fz10.m. Функция yritz.m позволяет по найденным y_k вычислить приближенные значения y в любой промежуточной точке отрезка [0, 1].

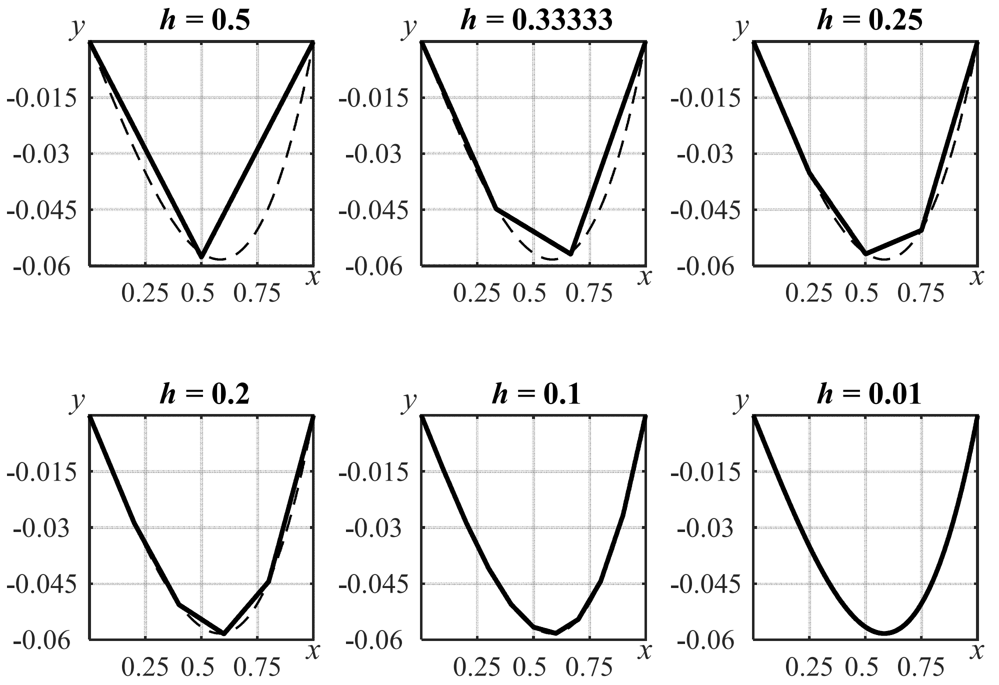

Рис. 5. y^h вычисленное для различных значений h; пунктирная кривая − точное решение, сплошная − решение полученное с помощью конечно-элементного метода Ритца.

Список литературы

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – 1989.
2. Федотов А.А., Храпов П.В. Численные методы. Электронное учебное издание. Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу "Численные методы". − 2012.
3. Владимиров В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики. – "Наука" Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1982.
4. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 3: Учебное пособие для втузов /Под общ. ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова. − 4-е изд. перераб. и доп. − М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. − 576 с. − ISBN 5-94052-036-7 (Ч. 3).
5. Марчук Г.И. Методы математической физики. М.Наука. 1980.