

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА СТАТИСТИКИ

Д.Ю. Могилко., Т.Г. Максимова, С.И. Шаныгин

**Оптимизационные задачи в принятии
управленческих решений**

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2011

УДК 338.24:65.012.224

ББК 65.291.213я73

Могилко Д.Ю., Максимова Т.Г., Шаныгин С.И. Оптимизационные задачи в принятии управленческих решений: учебное пособие. СПб.: СПбТЭИ, 2011. 61 с.

Учебное пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Принятие решений в условиях неопределенности» направления подготовки магистров 080100 «Экономика».

Представлены краткие теоретические основы постановки и решения задач количественного обоснования управленческих решений. Изложены практические приемы использования для этих целей пакета «Поиск решений» программного средства «Microsoft Excel».

Пособие предназначено для магистрантов Санкт-Петербургского торгово-экономического института.

© Санкт-Петербургский торгово-экономический институт, 2011

© Д.Ю. Могилко, Т.Г. Максимова, С.И. Шаныгин, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Задача «упаковки ранца»	4
2. Задача «о назначении»	6
3. Задача «упаковки контейнеров»	9
4. Задача «об ассортименте продукции»	13
5. Задача «транспортная-сбалансированная»	16
6. Задача «транспортная-несбалансированная»	19
7. Задача «поиска кратчайшего пути»	22
8. Задача «о максимальном потоке»	26
9. Задача «коммивояжера»	30
10. Задача «о раскрое».....	34
11. Задача «об альтернативном раскрое»	37
12. Задача «минимизации позднего времени окончания работ»	41
13. Задача «минимизации числа исполнителей»	45
14. Задача «минимизации суммарного штрафа»	49
15. Задача «распределения ресурсов на сетевом графике проекта»	53
Рекомендуемая литература	60

1. Задача «упаковки ранца»

Дано: Имеются $n = 5$ объектов, каждый из которых характеризуется свойствами: важности и размерности, соответственно:

$\{c_i\} = \{2, 5, 4, 7, 3\}$ - значения показателя важности объектов;

$\{v_i\} = \{4, 3, 1, 5, 2\}$ - значения показателя размерности объектов;

$w = 11$ – вместимость ранца.

Найти: Оптимальную упаковку ранца, с целью максимизации суммарной важности взятых объектов при соблюдении ограничения на вместимость ранца.

Решение: Решение задачи представляется множеством булевых переменных:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{- если объект взят (упакован);} \\ 0 & \text{- если – нет.} \end{cases}$$

С учетом введенных переменных ограничение задачи может быть записано в виде:

$$\sum_{i=1}^5 v_i \cdot \delta_i = v_1 \cdot \delta_1 + v_2 \cdot \delta_2 + v_3 \cdot \delta_3 + v_4 \cdot \delta_4 + v_5 \cdot \delta_5 \leq w,$$

и целевая функция:

$$Y = \sum_{i=1}^5 c_i \cdot \delta_i = c_1 \cdot \delta_1 + c_2 \cdot \delta_2 + c_3 \cdot \delta_3 + c_4 \cdot \delta_4 + c_5 \cdot \delta_5 \rightarrow \max_{\Omega},$$

где Ω - множество допустимых альтернатив, обусловленных ограничениями задачи.

1. Для автоматизированного расчета результатов решения задачи в ячейки **C2:G2** ввести числа: **1, 2, 3, 4, 5**. В ячейку **A4** ввести слово **Важности**, в ячейки **C4:G4** ввести числа, соответствующие значениям параметра важности объектов: **2, 5, 4, 7, 3** и выделить их цветом и границами обрамления.
2. В ячейку **A6** ввести слово **Размерности**, в ячейки **C6:G6** ввести числа, соответствующие значениям параметра размерности объектов: **4, 3, 1, 5, 2** и выделить их цветом и границами обрамления.

3. В ячейку **A8** ввести слово **Переменные**, ячейки **C8:G8**, содержимое которых будет соответствовать решению задачи, выделить цветом и границами оформления.
4. В ячейку **A10** ввести слово **Ограничение**, в ячейку **C10** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничения задачи: **=СУММПРОИЗВ(C6:G6;C8:G8)**, в ячейку **E10** ввести число, соответствующее правой части ограничения задачи: **11**, выделить ячейки цветом и границами оформления.
5. В ячейку **A12** ввести **Целевая функция**, в ячейку **C12** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую выражению целевой функции задачи: **=СУММПРОИЗВ(C4:G4;C8:G8)**, выделить ячейки цветом и границами оформления.
6. В главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения....**
7. В открывшемся диалоговом окне в области **Установить целевую** должна быть указана целевая ячейка **C12** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), в области **равной установить флажок максимальному значению**.
8. Установить курсор в область **Изменяя ячейки:**, затем выделить на листе диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C8:G8**.
9. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C8:G8**, затем в выпадающем списке выбрать **двоич** и щелкнуть кнопку **Добавить**.
10. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести ячейку, соответствующую левой части ограничения задачи: **C10**, в выпадающем списке выбрать знак: \leq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и указать ячейку, содержащую правую часть ограничения задачи: **E10** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), нажать кнопку **ОК**.
11. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне установить флажок **Линейная модель** и нажать кнопку **ОК**.
12. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Выполнить** (в случае корректной постановки задачи автоматически будет найдено оптимальное решение задачи, о чем появится сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условие оптимальности выполнены**, нажать кнопку **ОК**).

13. Ячейки переменных и целевой функции примут оптимальные значения: в ранец будут включены 2-й, 3-й, 4-й и 5-й объекты, имеющие суммарное ограничение, равное 11 и значение целевой функции, равное 19.
14. Выделить область ячеек, соответствующих переменным задачи (для чего щелчком установить курсор в ячейку **C8** и удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **G8**). Затем в главном меню выбрать **Формат** и щелкнуть на **Условное форматирование....**
15. В открывшемся диалоговом окне в выпадающем списке, отражающем условие (по умолчанию **между**), выбрать **больше** и в следующей области ввести число **0,001**. Далее нажать кнопку **Формат**, в открывшемся диалоговом окне перейти на вкладку **Вид** и в области **Цвет:** выбрать цвет, которым будут выделены ячейки с решением задачи (например, синий). Нажать кнопку **ОК**, нажать кнопку **ОК**.
16. Изменить исходные данные задачи (ячейки: **C4:G4**, **C6:G6** и **E10**), выбрать в главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения**, в открывшемся диалоговом окне нажать на **Выполнить**.
17. Проанализировать решение задачи.
18. Сохранить файл с шаблоном решения задачи в своем подкаталоге.

2. Задача «о назначении»

Дано: Имеются $n = 4$ вида работ и $m = 4$ исполнителя (кандидата), каждый из которых характеризуется соответствующими затратами необходимых ресурсов на выполнение работ, соответственно:

$$1\text{-й исполнитель: } \{t_{1j}\} = \{3, 4, 5, 5\},$$

$$2\text{-й исполнитель: } \{t_{2j}\} = \{4, 3, 2, 4\},$$

$$3\text{-й исполнитель: } \{t_{3j}\} = \{2, 4, 3, 5\},$$

$$4\text{-й исполнитель: } \{t_{4j}\} = \{3, 4, 5, 5\}.$$

Найти: Оптимальное назначение исполнителей на работы, с целью минимизации суммарных затрат ресурсов на выполнение всех работ.

Решение: Решение задачи представляется множеством булевых переменных:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{- если } i\text{-й исполнитель назначается на } j\text{-ю работу;} \\ 0 & \text{- если – нет.} \end{cases}$$

С учетом введенных переменных ограничения могут быть записаны в виде:

- чтобы каждый исполнитель был назначен только на одну работу:

➤ для 1-го исполнителя: $\sum_{j=1}^4 \delta_{1j} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} = 1,$

➤ для 2-го исполнителя: $\sum_{j=1}^4 \delta_{2j} = \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{24} = 1$ и т.д.

- чтобы каждая работа выполнялась только одним исполнителем:

➤ для 1-й работы: $\sum_{i=1}^4 \delta_{i1} = \delta_{11} + \delta_{21} + \delta_{31} + \delta_{41} = 1,$

➤ для 2-й работы: $\sum_{i=1}^4 \delta_{i2} = \delta_{12} + \delta_{22} + \delta_{32} + \delta_{42} = 1$ и т.д.

и целевая функция в виде:

$$Y = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 t_{ij} \cdot \delta_{ij} = t_{11} \cdot \delta_{11} + t_{12} \cdot \delta_{12} + t_{13} \cdot \delta_{13} + t_{14} \cdot \delta_{14} + \dots \\ \dots + t_{41} \cdot \delta_{41} + t_{42} \cdot \delta_{42} + t_{43} \cdot \delta_{43} + t_{44} \cdot \delta_{44} \rightarrow \min_{\Omega}$$

где Ω - множество допустимых альтернатив, обусловленных ограничениями задачи.

1. Для автоматизированного расчета результатов решения задачи в ячейки **C3:F3** ввести числа: **1, 2, 3, 4**. В ячейку **D2** ввести слово **Работы**, в ячейки **B4:B7** ввести числа: **1, 2, 3, 4**, в ячейку **A4** ввести слово **Исполнители** (нажать клавишу **Enter**, щелкнуть на ячейке **A4** и удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть область выделения до ячейки **A8**, выбрать в главном меню **Формат** и щелкнуть на **Ячейки...**, в открывшемся диалоговом окне перейти на вкладку **Выравнивание**, установить флажок **объединение ячеек** и в области **Ориентация** установить **90°**, нажать кнопку **ОК**) и выделить их цветом и границами обрамления.

2. В ячейки **C4:F7** ввести числа, соответствующие значениям затрат ресурсов на выполнение работ: **3, 4, 5, 5; 4, 3, 2, 4; 2, 4, 3, 5; 3, 4, 5, 5** и выделить их цветом и границами обрамления.
3. В ячейку **D10** ввести слово **Переменные**, ячейки **C12:F15**, содержимое которых будет соответствовать решению задачи, выделить цветом и границами обрамления.
4. В **H10** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **H12** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для исполнителей: **=СУММ(C12:F12)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **H12** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H15** (тем самым копируя формулы), выделить их цветом и границами обрамления.
5. В ячейку **A17** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **C17** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для работ: **=СУММ(C12:C15)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **C17** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **F17** (тем самым копируя формулы), выделить их цветом и границами обрамления.
6. В ячейку **A19** ввести **Целевая функция**, в ячейку **C19** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую выражению целевой функции задачи: **=СУММПРОИЗВ(C4:F7;C12:F15)**, выделить ячейки цветом и границами обрамления.
7. В главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения....**
8. В открывшемся диалоговом окне в области **Установить целевую** должна быть указана целевая ячейка **C19** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), в области **равной установить флажок минимальному значению**.
9. Установить курсор в область **Изменяя ячейки:**, затем выделить на листе диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C12:F15**.
10. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C12:F15**, затем в выпадающем списке выбрать **двоич** и щелкнуть кнопку **Добавить**.

11. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку**: указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для исполнителей: **H12:H15**, в выпадающем списке выбрать знак: =, щелкнуть курсором в области **Ограничение**: и ввести число **1**, соответствующее правой части ограничения задачи, нажать кнопку **Добавить**.
12. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку**: указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для исполнителей: **C17:F17**, в выпадающем списке выбрать знак: =, щелкнуть курсором в области **Ограничение**: и ввести число **1**, соответствующее правой части ограничения задачи, нажать кнопку **ОК**.
13. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне установить флажок **Линейная модель** и нажать кнопку **ОК**.
14. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Выполнить** (в случае корректной постановки задачи автоматически будет найдено оптимальное решение задачи, о чем появится сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условие оптимальности выполнены**, нажать кнопку **ОК**).
15. Ячейки переменных и целевой функции примут оптимальные значения: 1-й исполнитель будет назначен на 2-ю работу, 2-й на 3-ю, 3-й на 1-ю и 4-й на 4-ю и значение целевой функции, равное 13.
16. Изменить исходные данные задачи (ячейки: **C4:F7**), в главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения**, в открывшемся диалоговом окне нажать кнопку **Выполнить**.
17. Проанализировать решение задачи.
18. Сохранить файл с шаблоном решения задачи в своем подкаталоге.

3. Задача «упаковки контейнеров»

Дано: Имеются $n = 3$ контейнера, имеющие соответствующие значения показателя вместимости: $\{w_i\} = \{1, 7, 9\}$,
и $m = 8$ объектов, каждый из которых характеризуется свойствами: важности и размерности, соответственно:
 $\{c_j\} = \{2, 5, 4, 7, 3, 4, 7, 6\}$ - значения показателя важности объектов;

$\{v_j\} = \{4, 3, 1, 5, 2, 6, 4, 7\}$ - значения показателя размерности объектов.

Найти: Оптимальную упаковку контейнеров (т.е. какой объект – в какой контейнер), с целью максимизации суммарной важности взятых объектов при соблюдении ограничения на вместимость контейнеров.

Решение: Решение задачи представляется множеством булевых переменных:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{- если } j\text{-й объект берется в } i\text{-й контейнер;} \\ 0 & \text{- если – нет.} \end{cases}$$

С учетом введенных переменных ограничения могут быть записаны в виде:

- чтобы суммарный объем упакованных объектов не превышал вместимости контейнера:

➤ для 1-го контейнера:

$$\sum_{j=1}^8 v_j \cdot \delta_{1j} = v_1 \cdot \delta_{11} + v_2 \cdot \delta_{12} + v_3 \cdot \delta_{13} + v_4 \cdot \delta_{14} + \\ + v_5 \cdot \delta_{15} + v_6 \cdot \delta_{16} + v_7 \cdot \delta_{17} + v_8 \cdot \delta_{18} \leq w_1$$

➤ для 2-го контейнера:

$$\sum_{j=1}^8 v_j \cdot \delta_{2j} = v_1 \cdot \delta_{21} + v_2 \cdot \delta_{22} + v_3 \cdot \delta_{23} + v_4 \cdot \delta_{24} + \\ + v_5 \cdot \delta_{25} + v_6 \cdot \delta_{26} + v_7 \cdot \delta_{27} + v_8 \cdot \delta_{28} \leq w_2$$

➤ для 3-го контейнера:

$$\sum_{j=1}^8 v_j \cdot \delta_{3j} = v_1 \cdot \delta_{31} + v_2 \cdot \delta_{32} + v_3 \cdot \delta_{33} + v_4 \cdot \delta_{34} + \\ + v_5 \cdot \delta_{35} + v_6 \cdot \delta_{36} + v_7 \cdot \delta_{37} + v_8 \cdot \delta_{38} \leq w_3$$

- чтобы каждый объект упаковывался лишь в один из контейнеров:

➤ для 1-го объекта: $\sum_{i=1}^3 \delta_{i1} = \delta_{11} + \delta_{21} + \delta_{31} \leq 1,$

➤ для 2-го объекта: $\sum_{i=1}^3 \delta_{i2} = \delta_{12} + \delta_{22} + \delta_{32} \leq 1$ и т.д.

и целевая функция в виде:

$$Y = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^8 c_j \cdot \delta_{ij} = c_1 \cdot \delta_{11} + c_2 \cdot \delta_{12} + c_3 \cdot \delta_{13} + c_4 \cdot \delta_{14} + c_5 \cdot \delta_{15} + c_6 \cdot \delta_{16} + \\ + c_7 \cdot \delta_{17} + c_8 \cdot \delta_{18} + \dots + c_1 \cdot \delta_{31} + c_2 \cdot \delta_{32} + c_3 \cdot \delta_{33} + c_4 \cdot \delta_{34} + c_5 \cdot \delta_{35} + \\ + c_6 \cdot \delta_{36} + c_7 \cdot \delta_{37} + c_8 \cdot \delta_{38} \rightarrow \max_{\Omega}$$

где Ω - множество допустимых альтернатив, обусловленных ограничениями задачи.

1. Для автоматизированного расчета результатов решения задачи в ячейки **C2:J2** ввести числа: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**. В ячейку **A4** ввести слово **Важности**, в ячейки **C4:J4** ввести числа, соответствующие значениям параметра важности объектов: **2, 5, 4, 7, 3, 4, 7, 6** и выделить их цветом и границами обрамления.
2. В ячейку **A6** ввести слово **Размерности**, в ячейки **C6:J6** ввести числа, соответствующие значениям параметра размерности объектов: **4, 3, 1, 5, 2, 6, 4, 7** и выделить их цветом и границами обрамления.
3. В ячейку **A8** ввести слово **Переменные**, в ячейки **B8:V10** ввести числа: **1, 2, 3** (соответствующие номерам контейнеров), ячейки **C8:J10**, содержимое которых будет соответствовать решению задачи, выделить цветом и границами обрамления.
4. В **L6** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **L8** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для контейнеров: **=СУММПРОИЗВ(\$C\$6:\$J\$6;C8:J8)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **L8** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **L10** (тем самым копируя формулы), в ячейки **N8:N10** ввести числа: **11, 7, 9** (соответствующие правым частям ограничений для контейнеров), выделить их цветом и границами обрамления.
5. В ячейку **A12** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **C12** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для объектов: **=СУММ(C8:C10)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **C12** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **J12** (тем самым копируя формулы), выделить их цветом и границами обрамления.

6. В ячейку **A14** ввести **Целевая функция**, в ячейку **C14** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую выражению целевой функции задачи: **=СУММПРОИЗВ(C4:J4;C8:J8)+СУММПРОИЗВ(C4:J4;C9:J9)+СУММПРОИЗВ(C4:J4;C10:J10)**, выделить ячейки цветом и границами обрамления.
7. В главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения....**
8. В открывшемся диалоговом окне в области **Установить целевую** должна быть указана целевая ячейка **C14** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), в области равной установить флажок **максимальному значению**.
9. Установить курсор в область **Изменяя ячейки:**, затем выделить на листе диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C8:J10**.
10. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C8:J10**, затем в выпадающем списке выбрать **двоич** и щелкнуть кнопку **Добавить**.
11. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для контейнеров: **L8:L10**, в выпадающем списке выбрать знак: \leq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и указать диапазон ячеек, соответствующих правой части ограничения задачи для контейнеров: **N8:N10**, нажать кнопку **Добавить**.
12. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для объектов: **C12:J12**, в выпадающем списке выбрать знак: \leq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **1**, соответствующее правой части ограничения задачи, нажать кнопку **ОК**.
13. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне установить флажок **Линейная модель** и нажать кнопку **ОК**.
14. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Выполнить** (в случае корректной постановки задачи автоматически будет найдено оптимальное решение задачи, о чем появится сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условие оптимальности выполнены**, нажать кнопку **ОК**). Повторить процедуру поиска несколько раз в случае сообщения **Поиск не может найти подходящего решения**.
15. Сохранить файл с шаблоном решения задачи в своем подкаталоге.

4. Задача «об ассортименте продукции»

Дано: Имеются $n = 3$ вида продукции (которые выпускает фирма), прибыль от продажи которых соответственно равна $\{c_i\} = \{3, 2, 5\}$, в процессе производства видов продукции используются (последовательно) $m = 3$ технологические операции, при этом производство каждого вида характеризуется соответствующими продолжительностями операций на изготовление единицы продукции:

для 1-го вида: $\{t_{1j}\} = \{1, 3, 1\}$ единиц времени, для 2-го вида:

$\{t_{2j}\} = \{2, 0, 4\}$, для 3-го вида: $\{t_{3j}\} = \{1, 2, 0\}$, фонд рабочего времени,

в течении которого могут выполняться технологические операции ограничен соответствующими предельными значениями $\{T_j\} = \{430, 460, 420\}$ единиц времени в сутки.

Найти: Оптимальный суточный объем производства каждого вида продукции с целью максимизации суммарной прибыли от ее реализации при соблюдении ограничений на общую продолжительность технологических операций.

Решение: Решение задачи представляется множеством переменных $\{x_i\}$, соответствующих количеству производимых в сутки единиц продукции соответствующих видов.

С учетом введенных переменных ограничения могут быть записаны в виде:

чтобы суммарная продолжительность технологических операций не превышала их предельное время:

- для 1-й операции (по всем видам продукции):

$$\sum_{i=1}^3 t_{i1} \cdot x_i = t_{11} \cdot x_1 + t_{21} \cdot x_2 + t_{31} \cdot x_3 \leq T_1,$$

- для 2-й операции (по всем видам продукции):

$$\sum_{i=1}^3 t_{i2} \cdot x_i = t_{12} \cdot x_1 + t_{22} \cdot x_2 + t_{32} \cdot x_3 \leq T_2,$$

- для 3-й операции (по всем видам продукции):

$$\sum_{i=1}^3 t_{i3} \cdot x_i = t_{13} \cdot x_1 + t_{23} \cdot x_2 + t_{33} \cdot x_3 \leq T_3.$$

и целевая функция в виде:

$$Y = \sum_{i=1}^3 c_i \cdot x_i = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 \rightarrow \max_{\Omega}$$

где Ω - множество допустимых альтернатив, обусловленных ограничениями задачи.

1. Для автоматизированного расчета результатов решения задачи в ячейки **C3:E3** ввести числа: **1, 2, 3**. В ячейку **D2** ввести слово **Операции**, в ячейки **B4:B6** ввести числа: **1, 2, 3**, в ячейку **A4** ввести слово **Виды** (нажать клавишу **Enter**, щелкнуть на ячейке **A4** и удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть область выделения до ячейки **A6**, выбрать в главном меню **Формат** и щелкнуть на **Ячейки...**, в открывшемся диалоговом окне перейти на вкладку **Выравнивание**, установить флажок **объединение ячеек** и в области **Ориентация** установить **90°**, нажать кнопку **ОК**) и выделить их цветом и границами оформления.
2. В ячейки **C4:E6** ввести числа, соответствующие длительностям технологических операций при изготовлении различных видов изделий: **1, 3, 1; 2, 0, 4; 1, 2, 0** и выделить их цветом и границами оформления.
3. В ячейку **G2** ввести слово **Переменные**, ячейки **G4:G6**, содержимое которых будет соответствовать решению задачи, выделить цветом и границами оформления.
4. В **A8** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **C8** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для операций: **=СУММПРОИЗВ(C4:C6;\$G\$4:\$G\$6)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **C8** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **E8** (тем самым копируя формулы). В ячейки **C10:E10** ввести числа, соответствующие правой части ограничений для операций и отражающие их предельные продолжительности: **430, 460, 420**, выделить их цветом и границами оформления.
5. В ячейку **I2** ввести слово **Прибыльность**, в ячейки **I4:I6** ввести числа, соответствующие значениям прибыли от продажи единицы соответствующего вида продукции: **3, 2, 5** и выделить их цветом и границами оформления.

6. В ячейку **A12** ввести **Целевая функция**, в ячейку **C12** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую выражению целевой функции задачи: **=СУММПРОИЗВ(G4:G6;I4:I6)**, выделить ячейки цветом и границами обрамления.
7. В главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения....**
8. В открывшемся диалоговом окне в области **Установить целевую** должна быть указана целевая ячейка **C12** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), в области **равной установить флажок максимальному значению**.
9. Установить курсор в область **Изменяя ячейки:**, затем выделить на листе диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **G4:G6**.
10. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **G4:G6**, затем в выпадающем списке выбрать знак: \geq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **0**, соответствующее правой части ограничения задачи и щелкнуть кнопку **Добавить**.
11. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для операций: **C8:E8**, в выпадающем списке выбрать знак: \leq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и указать диапазон ячеек, соответствующих правой части ограничения задачи для операций: **C10:E10**, нажать кнопку **ОК**.
12. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне установить флажок **Линейная модель** и нажать кнопку **ОК**.
13. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Выполнить** (в случае корректной постановки задачи автоматически будет найдено оптимальное решение задачи, о чем появится сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условие оптимальности выполнены**, нажать кнопку **ОК**).
14. Ячейки переменных и целевой функции примут оптимальные значения: целесообразно в сутки производить 100 единиц 2-го вида продукции и 230 единиц 3-го вида, при этом достигается прибыль в размере 1350.
15. Изменить исходные данные задачи (ячейки: **C4:E6**, **I4:I6** и **C10:E10**), в главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения**, в открывшемся диалоговом окне нажать **Выполнить**.
16. Проанализировать решение задачи.
17. Сохранить файл с шаблоном решения задачи в своем подкаталоге.

5. Задача «транспортная-сбалансированная»

Дано: Имеются $n = 3$ склада товаров, имеющие соответствующие значения запасов: $\{w_i\} = \{8, 4, 6\}$ и $m = 4$ магазина, каждый из которых характеризуется ежедневными потребностями в товарах, соответственно: $\{v_j\} = \{4, 3, 6, 5\}$,

известны соответствующие расходы по доставке единицы товара со складов в магазины: с 1-го склада: $c_{1j} = \{2, 2, 4, 5\}$, со 2-го склада: $c_{2j} = \{3, 2, 2, 3\}$, с 3-го склада: $c_{3j} = \{3, 6, 7, 6\}$.

Найти: Оптимальный план перевозки товаров со складов в магазины (т.е. с какого склада – в какой магазин сколько товара), с целью минимизации суммарных транспортных расходов по доставке требуемого количества товаров в соответствующие магазины.

Решение: Решение задачи представляется множеством переменных $\{x_{ij}\}$, соответствующих количеству единиц перевозимого товара с i -го склада в j -й магазин.

С учетом введенных переменных ограничения могут быть записаны в виде:

- чтобы суммарный объем перевезенного товара соответствовал заказанному:

➤ для 1-го магазина: $\sum_{i=1}^3 x_{i1} = x_{11} + x_{21} + x_{31} = v_1$,

➤ для 2-го магазина: $\sum_{i=1}^3 x_{i2} = x_{12} + x_{22} + x_{32} = v_2$ и т.д.

- чтобы суммарный объем вывезенного товара был равен складским запасам:

➤ для 1-го склада: $\sum_{j=1}^4 x_{1j} = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = w_1$,

➤ для 2-го склада: $\sum_{j=1}^4 x_{2j} = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = w_2$ и т.д.

и целевая функция в виде:

$$Y = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} \cdot x_{ij} = c_{11} \cdot x_{11} + c_{12} \cdot x_{12} + c_{13} \cdot x_{13} + c_{14} \cdot x_{14} + c_{21} \cdot x_{21} + c_{22} \cdot x_{22} + c_{23} \cdot x_{23} + c_{24} \cdot x_{24} + c_{31} \cdot x_{31} + c_{32} \cdot x_{32} + c_{33} \cdot x_{33} + c_{34} \cdot x_{34} \rightarrow \min_{\Omega}$$

где Ω - множество допустимых альтернатив, обусловленных ограничениями задачи.

1. Для автоматизированного расчета результатов решения задачи в ячейки **C3:F3** ввести числа: **1, 2, 3, 4**. В ячейку **D2** ввести слово **Магазины**, в ячейки **B4:B6** ввести числа: **1, 2, 3**, в ячейку **A4** ввести слово **Склады** (нажать клавишу **Enter**, щелкнуть на ячейке **A4** и удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть область выделения до ячейки **A6**, выбрать в главном меню **Формат** и щелкнуть на **Ячейки...**, в открывшемся диалоговом окне перейти на вкладку **Выравнивание**, установить флажок **объединение ячеек** и в области **Ориентация** установить **90°**, нажать кнопку **ОК**) и выделить их цветом и границами обрамления.
2. В ячейки **C4:F6** ввести числа, соответствующие величине транспортных расходов, связанных с доставкой единицы: **2, 2, 4, 5; 3, 2, 2, 3; 3, 6, 7, 6** и выделить их цветом и границами обрамления.
3. В ячейку **D8** ввести слово **Переменные**, ячейки **C10:F12**, содержимое которых будет соответствовать решению задачи, выделить цветом и границами обрамления.
4. В **H8** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **H10** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для складов: **=СУММ(C10:F10)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **H10** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H12** (тем самым копируя формулы). В ячейки **J10:J12** ввести числа, соответствующие правой части ограничений для складов и отражающие их объемы запасов: **8, 4, 6**, выделить их цветом и границами обрамления.
5. В ячейку **A14** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **C14** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для магазинов: **=СУММ(C10:C12)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **C14** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **F14** (тем самым копируя формулы). В ячейки **C16:F16**

ввести числа, соответствующие правой части ограничений для магазинов и отражающие их объемы заказов: **4, 3, 6, 5**, выделить их цветом и границами оформления.

6. В ячейку **A18** ввести **Целевая функция**, в ячейку **C18** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую выражению целевой функции задачи: **=СУММПРОИЗВ(C4:F6;C10:F12)**, выделить ячейки цветом и границами оформления.
7. В главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения....**
8. В открывшемся диалоговом окне в области **Установить целевую** должна быть указана целевая ячейка **C18** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), в области равной установить флажок **минимальному значению**.
9. Установить курсор в область **Изменяя ячейки:**, затем выделить на листе диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C10:F12**.
10. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C10:F12**, затем в выпадающем списке выбрать знак \geq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и указать число 0, щелкнуть кнопку **Добавить**.
11. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для складов: **H10:H12**, в выпадающем списке выбрать знак: **=**, щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и указать диапазон ячеек, соответствующих правой части ограничения задачи для складов: **J10:J12**, нажать кнопку **Добавить**.
12. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для магазинов: **C14:F14**, в выпадающем списке выбрать знак: **=**, щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и указать диапазон ячеек, соответствующих правой части ограничения задачи для магазинов: **C16:F16**, нажать кнопку **ОК**.
13. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне установить флажок **Линейная модель** и нажать кнопку **ОК**.
14. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Выполнить** (в случае корректной постановки задачи автоматически будет найдено оптимальное решение задачи, о чем появится сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условие оптимальности выполнены**, нажать кнопку **ОК**).

15. Сохранить файл с шаблоном решения задачи в своем подкаталоге.

6. Задача «транспортная-несбалансированная»

Дано: Имеются $n = 3$ склада товаров, имеющие соответствующие значения запасов: $\{w_i\} = \{8, 4, 6\}$ и $m = 4$ магазина, каждый из которых характеризуется ежедневными потребностями в товарах, соответственно: $\{v_j\} = \{5, 4, 7, 6\}$ и штрафами за недопоставку единицы товаров: $\{d_j\} = \{2, 2, 3, 1\}$, известны соответствующие расходы по доставке единицы товара со складов в магазины: с 1-го склада: $c_{1j} = \{2, 2, 4, 5\}$, со 2-го склада: $c_{2j} = \{3, 2, 2, 3\}$, с 3-го склада: $c_{3j} = \{3, 6, 7, 6\}$.

Найти: Оптимальный план перевозки и количество перевозимых товаров со складов в магазины (т.е. с какого склада – в какой магазин сколько товара), с целью минимизации суммарных транспортных расходов по доставке имеющихся товаров и штрафов за их недопоставку в соответствующие магазины.

Решение: Решение задачи представляется множеством переменных $\{x_{ij}\}$, соответствующих количеству единиц перевозимого товара с i -го склада в j -й магазин.

С учетом введенных переменных ограничения могут быть записаны в виде:

- чтобы суммарный объем перевезенного товара был меньше или равен заказанному:

➤ для 1-го магазина: $\sum_{i=1}^3 x_{i1} = x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq v_1,$

➤ для 2-го магазина: $\sum_{i=1}^3 x_{i2} = x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq v_2$ и т.д.

- чтобы суммарный объем вывезенного товара был равен складским запасам:

➤ для 1-го склада: $\sum_{j=1}^4 x_{1j} = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = w_1,$

➤ для 2-го склада: $\sum_{j=1}^4 x_{2j} = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = w_2$ и т.д.

и целевая функция в виде:

$$Y = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} \cdot x_{ij} = c_{11} \cdot x_{11} + c_{12} \cdot x_{12} + \dots + c_{33} \cdot x_{33} + c_{34} \cdot x_{34} +$$

$$+ d_1 \cdot (v_1 - x_{11} - x_{21} - x_{31}) + d_2 \cdot (v_2 - x_{12} - x_{22} - x_{32}) + d_3 \cdot (v_3 - x_{13} - x_{23} - x_{33}) +$$

$$+ d_4 \cdot (v_4 - x_{14} - x_{24} - x_{34}) \rightarrow \min_{\Omega}$$

где Ω - множество допустимых альтернатив, обусловленных ограничениями задачи.

1. Для автоматизированного расчета результатов решения задачи в ячейки **C3:F3** ввести числа: **1, 2, 3, 4**. В ячейку **D2** ввести слово **Магазины**, в ячейки **B4:B6** ввести числа: **1, 2, 3**, в ячейку **A4** ввести слово **Склады** (нажать клавишу **Enter**, щелкнуть на ячейке **A4** и удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть область выделения до ячейки **A6**, выбрать в главном меню **Формат** и щелкнуть на **Ячейки...**, в открывшемся диалоговом окне перейти на вкладку **Выравнивание**, установить флажок **объединение ячеек** и в области **Ориентация** установить **90°**, нажать кнопку **ОК**) и выделить их цветом и границами оформления.
2. В ячейки **C4:F6** ввести числа, соответствующие величине транспортных расходов, связанных с доставкой единицы: **2, 2, 4, 5; 3, 2, 2, 3; 3, 6, 7, 6** и выделить их цветом и границами оформления.
3. В ячейку **A7** ввести слово **Штрафы**, в ячейки **C7:F7** ввести числа, соответствующие величине штрафов за недопоставку единицы товаров в соответствующие магазины: **2, 2, 3, 1** и выделить их цветом и границами оформления.
4. В ячейку **D8** ввести слово **Переменные**, ячейки **C10:F12**, содержимое которых будет соответствовать решению задачи, выделить цветом и границами оформления.
5. В **H8** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **H10** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для складов: **=СУММ(C10:F10)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **H10** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее

- в ячейку **H12** (тем самым копируя формулы). В ячейки **J10:J12** ввести числа, соответствующие правой части ограничений для складов и отражающие их объемы запасов: **8, 4, 6**, выделить их цветом и границами обрамления.
6. В ячейку **A14** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **C14** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для магазинов: **=СУММ(C10:C12)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **C14** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **F14** (тем самым копируя формулы). В ячейки **C16:F16** ввести числа, соответствующие правой части ограничений для магазинов и отражающие их объемы заказов: **5, 4, 7, 6**, выделить их цветом и границами обрамления.
 7. В ячейку **A18** ввести **Целевая функция**, в ячейку **C18** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую выражению целевой функции задачи: **=СУММПРОИЗВ(C4:F6;C10:F12)+C7*(C16-C14)+D7*(D16-D14)+E7*(E16-E14)+F7*(F16-F14)**, выделить ячейки цветом и границами обрамления.
 8. В главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения....**
 9. В открывшемся диалоговом окне в области **Установить целевую** должна быть указана целевая ячейка **C18** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), в области **равной установить флажок минимальному значению**.
 10. Установить курсор в область **Изменяя ячейки:**, затем выделить на листе диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C10:F12**.
 11. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C10:F12**, затем в выпадающем списке выбрать знак \geq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и указать число 0, щелкнуть кнопку **Добавить**.
 12. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для складов: **H10:H12**, в выпадающем списке выбрать знак: $=$, щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и указать диапазон ячеек, соответствующих правой части ограничения задачи для складов: **J10:J12**, нажать кнопку **Добавить**.
 13. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для магазинов: **C14:F14**, в выпадающем списке выбрать знак: \leq , щелкнуть курсором в области

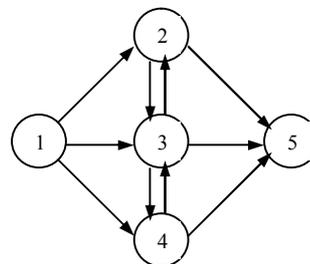
Ограничение: и указать диапазон ячеек, соответствующих правой части ограничения задачи для магазинов: **C16:F16**, нажать кнопку **ОК**.

14. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне установить флажок **Линейная модель** и нажать кнопку **ОК**.
15. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Выполнить** (в случае корректной постановки задачи автоматически будет найдено оптимальное решение задачи, о чем появится сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условие оптимальности выполнены**, нажать кнопку **ОК**).
16. Сохранить файл с шаблоном решения задачи в своем подкаталоге.

7. Задача «поиска кратчайшего пути»

Дано: Имеются $n = 5$ узлов транспортной сети, соединенных между собой дорогами, протяженность которых представлена матрицей $\|d_{ij}\|_{5 \times 5}$ (где символом “_” отражено отсутствие дороги) и соответствующей ей матрицей булевых констант, отражающих возможность наличия потока между узлами:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & - \\ - & 0 & 3 & - & 7 \\ - & 5 & 0 & 1 & 5 \\ - & - & 4 & 0 & 2 \\ - & - & - & - & 0 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$



Найти: Оптимальный маршрут из узла № 1 сети в узел № 5, с целью минимизации суммарной его протяженности.

Решение: Решение задачи представляется множеством переменных $\|x_{ij}\|_{5 \times 5}$, соответствующих величине единичного потока между соответствующими узлами сети.

С учетом введенных переменных ограничения непрерывности маршрута (через величину входящего в узел потока и величину выходящего из узла потока) могут быть записаны в виде:



$$V_i^{BX} - V_i^{BIX} = \begin{cases} -1 & \text{для начального узла маршрута;} \\ 0 & \text{для промежуточных узлов;} \\ 1 & \text{для конечного узла маршрута.} \end{cases}$$

- чтобы из начального узла маршрута выходил поток в один из других узлов сети:

➤ для 1-го узла:

$$\sum_{i=1}^5 x_{i1} - \sum_{j=1}^5 x_{1j} = -x_{12} - x_{13} - x_{14} = -1 \quad (x_{11} = 0),$$

- чтобы величина входящего потока в промежуточный узел сети была равна величине выходящего:

➤ для 2-го узла:

$$\sum_{i=1}^5 x_{i2} - \sum_{j=1}^5 x_{2j} = x_{12} + x_{32} - x_{23} - x_{25} = 0 \quad (x_{22} = 0),$$

➤ для 3-го узла:

$$\sum_{i=1}^5 x_{i3} - \sum_{j=1}^5 x_{3j} = x_{13} + x_{23} + x_{43} - x_{32} - x_{34} - x_{35} = 0 \quad (x_{33} = 0),$$

➤ для 4-го узла:

$$\sum_{i=1}^5 x_{i4} - \sum_{j=1}^5 x_{4j} = x_{14} + x_{34} - x_{43} - x_{45} = 0 \quad (x_{44} = 0),$$

- чтобы в конечный узел маршрута входил поток из какого-нибудь другого узла:

➤ для 5-го узла:

$$\sum_{i=1}^5 x_{i5} - \sum_{j=1}^5 x_{5j} = x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1 \quad (x_{55} = 0)$$

и целевая функция в виде:

$$Y = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 d_{ij} \cdot x_{ij} = d_{11} \cdot x_{11} + d_{12} \cdot x_{12} + d_{13} \cdot x_{13} + d_{14} \cdot x_{14} + d_{15} \cdot x_{15} + \dots \\ \dots + d_{51} \cdot x_{51} + d_{52} \cdot x_{52} + d_{53} \cdot x_{53} + d_{54} \cdot x_{54} + d_{55} \cdot x_{55} \rightarrow \min_{\Omega}$$

где Ω - множество допустимых альтернатив, обусловленных ограничениями задачи.

1. Для автоматизированного расчета результатов решения задачи в ячейку **A2** ввести слово **Расстояния**, в ячейки **C2:G2**, **B3:B7**, **B9:B13** и **B15:B19** ввести числа: **1, 2, 3, 4, 5**. В ячейки **C3:G7** ввести числа, соответствующие протяженности соответствующих дорог (при этом отсутствие дороги будет отражаться большим числом): **0, 2, 6, 8, 100; 100, 0, 3, 100, 7; 100, 5, 0, 1, 5; 100, 100, 4, 0, 2; 100, 100, 100, 100, 0** и выделить их цветом и границами оформления.
2. В ячейку **A9** ввести слово **Константы**, в ячейки **C9:G13** ввести числа, соответствующие значениям булевых констант: **0, 1, 1, 1, 0; 0, 0, 1, 0, 1; 0, 1, 0, 1, 1; 0, 0, 1, 0, 1; 0, 0, 0, 0, 0** и выделить их цветом и границами оформления.
3. В ячейку **A15** ввести слово **Переменные**, ячейки **C15:G19**, содержимое которых будет соответствовать решению задачи, выделить цветом и границами оформления.
4. В ячейку **A21** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **I15** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую отрицательной составляющей левой части ограничений задачи для узлов: **=СУММПРОИЗВ(C9:G9;C15:G15)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **I15** и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **I19** (тем самым копируя формулы). В ячейку **C21** ввести формулу, соответствующую положительной составляющей левой части ограничений задачи для узлов: **=СУММПРОИЗВ(C9:C13;C15:C19)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **C21** и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **G21** (тем самым копируя формулы), выделить их цветом и границами оформления.
5. Внести дополнения в формулы ячеек **C21:G21**, чтобы сформировать в них левую часть ограничений задачи, соответственно:
 - В ячейке **C21**: **=СУММПРОИЗВ(C9:C13;C15:C19)-I15**;
 - В ячейке **D21**: **=СУММПРОИЗВ(D9:D13;D15:D19)-I16**;
 - В ячейке **E21**: **=СУММПРОИЗВ(E9:E13;E15:E19)-I17**;
 - В ячейке **F21**: **=СУММПРОИЗВ(F9:F13;F15:F19)-I18**;
 - В ячейке **G21**: **=СУММПРОИЗВ(G9:G13;G15:G19)-I19**.
6. В ячейку **A23** ввести **Целевая функция**, в ячейку **C23** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую выражению целевой функции задачи:

=СУММПРОИЗВ(С3:G7;С15:G19), выделить ячейки цветом и границами обрaмления.

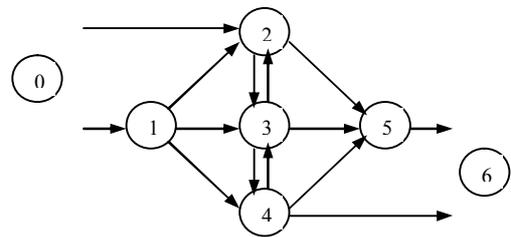
7. В главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения....**
8. В открывшемся диалоговом окне в области **Установить целевую** должна быть указана целевая ячейка **С23** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), в области равной установить флажок **минимальному значению**.
9. Установить курсор в область **Изменяя ячейки:**, затем выделить на листе диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **С15:G19**.
10. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **С15:G19**, затем в выпадающем списке выбрать знак: \geq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **0**, нажать кнопку **Добавить**.
11. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать поочередно (т.е. для каждой отдельно сформировать ограничение) ячейки, соответствующие диагональным элементам матрицы: **С15, D16, E17, F18** и **G19**, в выпадающем списке выбрать знак: $=$, щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **0**, соответствующее правой части ограничения задачи, нажать кнопку **Добавить**.
12. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать ячейку, соответствующую левой части ограничения задачи для 1-го узла: **С21**, в выпадающем списке выбрать знак: $=$, щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **-1**, соответствующее правой части ограничения задачи, нажать кнопку **Добавить**.
13. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для 2-го, 3-го и 4-го узлов: **=D21:F21**, в выпадающем списке выбрать знак: $=$, щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **0**, соответствующее правой части ограничения задачи, нажать кнопку **Добавить**.
14. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать ячейку, соответствующую левой части ограничения задачи для 5-го узла: **G21**, в выпадающем списке выбрать знак: $=$, щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **1**, соответствующее правой части ограничения задачи, нажать кнопку **ОК**.

15. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне установить флажок **Линейная модель** и нажать кнопку **ОК**.
16. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Выполнить** (в случае корректной постановки задачи автоматически будет найдено оптимальное решение задачи, о чем появится сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условие оптимальности выполнены**, нажать кнопку **ОК**).
17. Сохранить файл с шаблоном решения задачи в своем подкаталоге.

8. Задача «о максимальном потоке»

Дано: Имеются $n = 5$ узлов транспортной сети, соединенных между собой дорогами, пропускная способность которых представлена матрицей $\|p_{ij}\|_{5 \times 5}$ (где символом “_” отражено отсутствие дороги) и соответствующей ей матрицей смежности (булевых констант), отражающей возможность наличия потока между узлами:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & _ \\ _ & 0 & 3 & _ & 7 \\ _ & 5 & 0 & 1 & 5 \\ _ & _ & 4 & 0 & 2 \\ _ & _ & _ & _ & 0 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$



Найти: Максимально возможную величину потока, проходящую через сеть из узлов №1 и №2 в узлы №4 и №5.

Решение: Для решения задачи вводятся 0-й и 6-й фиктивные узлы, выходной и соответственно входной поток которых выражается переменной u , отражающей величину входящего в узлы №1 и №2 (или выходящего из узлов №4 и №5) потока, которая взаимосвязана с множеством переменных $\|x_{ij}\|_{5 \times 5}$, соответствующих величине потока между соответствующими узлами сети.

С учетом введенных переменных ограничения непрерывности маршрута (через величину входящего в узел потока и величину выходящего из узла потока) могут быть записаны в виде:

$$V_i^{BX} - V_i^{BYX} = \begin{cases} -y & \text{для начального узла сети;} \\ 0 & \text{для промежуточных узлов;} \\ y & \text{для конечного узла сети.} \end{cases}$$

- для начального узла сети:

➤ для 0-го узла:

$$\sum_{i=0}^6 x_{i0} - \sum_{j=0}^6 x_{0j} = -x_{01} - x_{02} = -y \quad (x_{00} = 0),$$

- чтобы величина входящего потока в промежуточный узел сети была равна величине выходящего:

➤ для 1-го узла:

$$\sum_{i=0}^6 x_{i1} - \sum_{j=0}^6 x_{1j} = x_{01} - x_{12} - x_{13} - x_{14} = 0 \quad (x_{11} = 0),$$

➤ для 2-го узла:

$$\sum_{i=0}^6 x_{i2} - \sum_{j=0}^6 x_{2j} = x_{02} + x_{12} + x_{32} - x_{23} - x_{25} = 0 \quad (x_{22} = 0),$$

➤ для 3-го узла:

$$\sum_{i=0}^6 x_{i3} - \sum_{j=0}^6 x_{3j} = x_{13} + x_{23} + x_{43} - x_{32} - x_{34} - x_{35} = 0 \quad (x_{33} = 0),$$

➤ для 4-го узла:

$$\sum_{i=0}^6 x_{i4} - \sum_{j=0}^6 x_{4j} = x_{14} + x_{34} - x_{43} - x_{45} - x_{46} = 0 \quad (x_{44} = 0),$$

➤ для 5-го узла:

$$\sum_{i=0}^6 x_{i5} - \sum_{j=0}^6 x_{5j} = x_{25} + x_{35} + x_{45} - x_{56} = 0 \quad (x_{55} = 0),$$

- для конечного узла сети:

➤ для конечного узла:

$$\sum_{i=0}^6 x_{i6} - \sum_{j=0}^6 x_{6j} = x_{46} + x_{56} = y \quad (x_{66} = 0),$$

- чтобы величина потока через дуги сети не превышала их пропускных способностей:

➤ для дуги (1, 2): $x_{12} \leq p_{12}$,

➤ для дуги (1, 3): $x_{13} \leq p_{13}$ и т. д.,

➤ для дуги (4, 5): $x_{45} \leq p_{45}$.

и целевая функция в виде:

$$Y = y \rightarrow \max_{\Omega}$$

где Ω - множество допустимых альтернатив, обусловленных ограничениями задачи.

1. Для автоматизированного расчета результатов решения задачи в ячейку **A2** ввести слово **Пропуск**, в ячейки **C2:I2**, **B3:B9**, **B11:B17** и **B19:B25** ввести числа: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6**. В ячейки **C3:I9** ввести числа, соответствующие пропускным способностям соответствующих дуг (при этом ограничения на входной поток с 0-го узла и на 6-й узел нет, что отражается большим числом, а отсутствие дуги будет отражаться нулем): **0, 100, 100, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 2, 6, 8, 0, 0; 0, 0, 0, 3, 0, 7, 0; 0, 0, 5, 0, 1, 5, 0; 0, 0, 0, 4, 0, 2, 100; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 100; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0** и выделить их цветом и границами обрамления.
2. В ячейку **A11** ввести слово **Константы**, в ячейки **C11:I17** ввести числа, соответствующие значениям булевых констант: **0, 1, 1, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0; 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0; 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0** и выделить их цветом и границами обрамления.
3. В ячейку **A19** ввести слово **Переменные**, ячейки **C19:I25** и **A25**, содержимое которых будет соответствовать решению задачи, выделить цветом и границами обрамления.
4. В ячейку **A27** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **K19** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую отрицательной составляющей левой части ограничений задачи для узлов: **=СУММПРОИЗВ(C11:I11;C19:I19)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **K19** и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **K25** (тем самым копируя формулы). В ячейку **C27** ввести формулу, соответствующую положительной составляющей левой части ограничений задачи для узлов:

=СУММПРОИЗВ(C11:C17;C19:C25), подвести курсор в правый нижний угол ячейки **C27** и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **I27** (тем самым копируя формулы), выделить их цветом и границами обрамления.

5. Внести дополнения в формулы ячеек **C27: I27**, чтобы сформировать в них левую часть ограничений задачи для узлов:
 - В ячейке **C27: =СУММПРОИЗВ(C11:C17;C19:C25)-K19;**
 - В ячейке **D27: =СУММПРОИЗВ(D11:D17;D19:D25)-K20;**
 - В ячейке **E27: =СУММПРОИЗВ(E11:E17;E19:E25)-K21;**
 - В ячейке **F27: =СУММПРОИЗВ(F11:F17;F19:F25)-K22;**
 - В ячейке **G27: =СУММПРОИЗВ(G11:G17;G19:G25)-K23;**
 - В ячейке **H27: =СУММПРОИЗВ(H11:H17;H19:H25)-K24;**
 - В ячейке **I27: =СУММПРОИЗВ(I11:I17;I19:I25)-K25.**
6. В ячейку **A29** ввести **Целевая функция**, в ячейку **C29** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую выражению целевой функции задачи: **=A25**, выделить ячейки цветом и границами обрамления.
7. В главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения....**
8. В открывшемся диалоговом окне в области **Установить целевую** должна быть указана целевая ячейка **C29** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), в области **равной установить флажок максимальному значению**.
9. Установить курсор в область **Изменяя ячейки:**, затем выделить на листе диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C19:I25;A25**.
10. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C19: I25**, затем в выпадающем списке выбрать знак: \geq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **0**, нажать кнопку **Добавить**.
11. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать ячейку, соответствующую переменной задачи: **A25**, затем в выпадающем списке выбрать знак: \geq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **0**, нажать кнопку **Добавить**.
12. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать поочередно (т.е. для каждой отдельно сформировать ограничение) ячейки, соответствующие диагональным элементам матрицы: **C19, D20, E21, F22, G23,**

H24 и **I25**, в выпадающем списке выбрать знак: =, щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **0**, соответствующее правой части ограничения задачи, нажать кнопку **Добавить**.

13. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать ячейку, соответствующую левой части ограничения задачи для 0-го узла: **C27**, в выпадающем списке выбрать знак: =, щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести: **-A25**, соответствующее правой части ограничения задачи, нажать кнопку **Добавить**.
14. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для 1-го, 2-го, 3-го, 4-го и 5-го узлов: **D27:H27**, в выпадающем списке выбрать знак: =, щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **0**, соответствующее правой части ограничения задачи, нажать кнопку **Добавить**.
15. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать ячейку, соответствующую левой части ограничения задачи для 6-го узла: **I27**, в выпадающем списке выбрать знак: =, щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **A25**, соответствующее правой части ограничения задачи, нажать кнопку **Добавить**.
16. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих (переменным) левой части ограничений задачи для дуг: **C19:I25**, в выпадающем списке выбрать знак: \leq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести диапазон ячеек: **C3:I9**, соответствующий правой части ограничения задачи, нажать кнопку **ОК**.
17. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне установить флажок **Линейная модель** и нажать кнопку **ОК**.
18. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **ОК**.
19. Сохранить файл с шаблоном решения задачи в своем подкаталоге.

9. Задача «коммивояжера»

Дано: Имеются $n = 5$ пунктов назначения, соединенных (попарно) между собой дорогами, время перехода между ними представлено матрицей $\|t_{ij}\|_{5 \times 5}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 25 & 25 & 10 \\ 1 & 0 & 10 & 15 & 2 \\ 8 & 9 & 0 & 20 & 10 \\ 14 & 10 & 24 & 0 & 15 \\ 10 & 8 & 25 & 27 & 0 \end{bmatrix}$$

где t_{ij} - время перехода из i -го в j -й пункт.

Найти: Оптимальный маршрут, начинающийся и заканчивающийся в одном и том же пункте, с целью минимизации суммарных времени обхода всех пунктов.

Решение: Решение задачи представляется множеством булевых переменных:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{- если осуществляется переход из } i\text{-го в } j\text{-й пункт;} \\ 0 & \text{- если - нет.} \end{cases}$$

С учетом введенных переменных ограничения могут быть записаны в виде:

- чтобы из каждого пункта можно было перейти в любой другой, но лишь в один из них:

➤ для 1-го пункта:

$$\sum_{j=1}^5 \delta_{1j} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} + \delta_{15} = 1 \quad (\delta_{11} = 0),$$

➤ для 2-го пункта:

$$\sum_{j=1}^5 \delta_{2j} = \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{24} + \delta_{25} = 1 \quad (\delta_{22} = 0) \text{ и т.д.}$$

- чтобы в каждый пункт можно было перейти из любого другого, но лишь из одного из них:

➤ для 1-го пункта:

$$\sum_{i=1}^5 \delta_{i1} = \delta_{11} + \delta_{21} + \delta_{31} + \delta_{41} + \delta_{51} = 1 \quad (\delta_{11} = 0),$$

➤ для 2-го пункта:

$$\sum_{i=1}^5 \delta_{i2} = \delta_{12} + \delta_{22} + \delta_{32} + \delta_{42} + \delta_{52} = 1 \quad (\delta_{22} = 0) \text{ и т.д.}$$

- чтобы исключить возможные циклы в маршруте (пример циклов и разорванности маршрута: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ и $3 \rightarrow 4 \rightarrow 3$) необходимо введение дополнительных переменных $\{y_i\}$, принимающих произвольные значения и ограничений, соответствующих δ_{ij} ($i, j = 2 \div n, i \neq j$), вида:

$$y_i - y_j + n \cdot \delta_{ij} \leq n - 1,$$

- для 2-го и 3-го пункта: $y_2 - y_3 + 5 \cdot \delta_{23} \leq 4$,
- для 2-го и 4-го пункта: $y_2 - y_4 + 5 \cdot \delta_{24} \leq 4$ и т.д.
- для 5-го и 4-го пункта: $y_5 - y_4 + 5 \cdot \delta_{54} \leq 4$

и целевая функция в виде:

$$Y = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 t_{ij} \cdot \delta_{ij} = t_{11} \cdot \delta_{11} + t_{12} \cdot \delta_{12} + t_{13} \cdot \delta_{13} + t_{14} \cdot \delta_{14} + \dots$$

$$\dots + t_{51} \cdot \delta_{51} + t_{52} \cdot \delta_{52} + t_{53} \cdot \delta_{53} + t_{54} \cdot \delta_{54} + t_{55} \cdot \delta_{55} \rightarrow \min_{\Omega}$$

где Ω - множество допустимых альтернатив, обусловленных ограничениями задачи.

1. Для автоматизированного расчета результатов решения задачи в ячейку **A2** ввести слово **Времена**, в ячейки **C2:G2** и в ячейки **B3:B7** ввести числа: **1, 2, 3, 4, 5**. В ячейки **C3:G7** ввести числа, соответствующие длительностям перехода: **0, 10, 25, 25, 10; 1, 0, 10, 15, 2; 8, 9, 0, 20, 10; 14, 10, 24, 0, 15; 10, 8, 25, 27, 0**, выделить цветом и границами обрамления.
2. В ячейку **A10** ввести слово **Переменные**, ячейки **C10:G14** и ячейки **C16:G16**, содержимое которых будет соответствовать решению задачи, выделить цветом и границами обрамления.
3. В **I8** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **I10** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для пунктов убытия: **=СУММ(C10:G10)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **I10** и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **I14** (тем самым копируя формулы). В ячейку **C18** ввести формулу,

соответствующую левой части ограничений задачи для пунктов прибытия: **=СУММ(C10:C14)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **C18** и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **G18** (тем самым копируя формулы), выделить их цветом и границами оформления.

4. В ячейку **A18** ввести слово **Ограничения**, в ячейки **B20:B23** ввести числа: **2, 3, 4, 5**. В ячейку **C20** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для циклов: **=\$D\$16-C16+5*C11**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **C20** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **G20** (тем самым копируя формулы), аналогично: записать в ячейку **C21** ввести формулу: **=\$E\$16-C16+5*C12** и скопировать ее в ячейки **D21:G21**; записать в ячейку **C22** ввести формулу: **=\$F\$16-C16+5*C13** и скопировать ее в ячейки **D22:G22**; записать в ячейку **C23** ввести формулу: **=\$G\$16-C16+5*C14** и скопировать ее в ячейки **D23:G23**; выделить их цветом и границами оформления.
5. В ячейку **A25** ввести **Целевая функция**, в ячейку **C25** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую выражению целевой функции задачи: **=СУММПРОИЗВ(C3:G7;C10:G14)**, выделить ячейки цветом и границами оформления.
6. В главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения....**
7. В открывшемся диалоговом окне в области **Установить целевую** должна быть указана целевая ячейка **C25** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), в области **равной установить флажок минимальному значению**.
8. Установить курсор в область **Изменяя ячейки:**, затем выделить на листе диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C10:G14;C16:G16**.
9. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C10:G14**, затем в выпадающем списке выбрать **двоич** и щелкнуть кнопку **Добавить**.
10. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать поочередно (т.е. для каждой отдельно сформировать ограничение) ячейки, соответствующие диагональным элементам матрицы: **C10, D11, E12, F13** и **G14**, в выпадающем списке выбрать знак: **=**, щелкнуть курсором в области **Ограничение:**

и ввести число **0**, соответствующее правой части ограничения задачи, нажать кнопку **Добавить**.

11. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку**: указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для пунктов убытия: **I10:I14**, в выпадающем списке выбрать знак: **=**, щелкнуть курсором в области **Ограничение**: и ввести число **1**, соответствующее правой части ограничения задачи, нажать кнопку **Добавить**.
12. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку**: указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для пунктов прибытия: **C18:G18**, в выпадающем списке выбрать знак: **=**, щелкнуть курсором в области **Ограничение**: и ввести число **1**, соответствующее правой части ограничения задачи, нажать кнопку **Добавить**.
13. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку**: указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для циклов: **C20:G23**, в выпадающем списке выбрать знак: **≤**, щелкнуть курсором в области **Ограничение**: и ввести число **4**, соответствующее правой части ограничения задачи, нажать кнопку **ОК**.
14. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне установить флажок **Линейная модель** и нажать кнопку **ОК**.
15. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Выполнить** (в случае корректной постановки задачи автоматически будет найдено оптимальное решение задачи, о чем появится сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условие оптимальности выполнены**, нажать кнопку **ОК**).
16. Сохранить файл с шаблоном решения задачи в своем подкаталоге.

10. Задача «о раскрое»

Дано: Имеется продукция, в комплектацию которой входят $m = 2$ вида деталей 1-го и 2-го типа в количестве: $\{k_j\} = \{2, 3\}$ штук соответственно, при этом они (детали) изготавливаются из заготовок длиной $D = 6.5$ м и имеют длину соответственно: $\{d_j\} = \{2, 1.25\}$ м, исходное количество заготовок $N = 50$ штук.

Найти: Оптимальный раскрой заготовок (т.е. сколько деталей 1-го и 2-го типа изготавливать из одной заготовки) с целью максимизации суммарного количества продукции (полной комплектации) при соблюдении ограничений на общее число заготовок.

Решение: Решение задачи представляется множеством переменных $\{x_j\}$, соответствующих количеству изготавливаемых деталей 1-го и 2-го типа из заготовки.

С учетом введенных переменных ограничения могут быть записаны в виде:

- чтобы расход материала на изготовление деталей не превышал длину

заготовки:
$$\sum_{j=1}^2 d_j \cdot x_j = d_1 \cdot x_1 + d_2 \cdot x_2 \leq D,$$

Для обозначения числа единиц продукции введем переменную n (целого типа), тогда ограничение

- что количество укомплектованной продукции не должно превышать соответствующего числа деталей необходимого типа:

➤ для 1-го типа детали: $n \leq \frac{x_1}{k_1}$ (для одной заготовки) и $n \leq N \cdot \frac{x_1}{k_1}$ (для N заготовок) или $n \cdot k_1 \leq N \cdot x_1,$

➤ для 2-го типа деталей: $n \leq \frac{x_2}{k_2}$ (для одной заготовки) и $n \leq N \cdot \frac{x_2}{k_2}$ (для N заготовок) или $n \cdot k_2 \leq N \cdot x_2.$

и целевая функция в виде:

$$Y = n \rightarrow \max_{\Omega},$$

где Ω - множество допустимых альтернатив, обусловленных ограничениями задачи.

1. Для автоматизированного расчета результатов решения задачи в ячейки **C2:D2** ввести числа: **1, 2**. В ячейку **A4** ввести слово **Длина**, в ячейки **C4:D4** ввести числа, соответствующие значениям длины деталей: **2, 1.25** и выделить их цветом и границами обрамления.

2. В ячейку **A6** ввести слово **Комплектность**, в ячейки **C6:D6** ввести числа, соответствующие количеству штук соответствующих деталей в комплектации продукции: **2, 3** и выделить их цветом и границами оформления.
3. В ячейку **A8** ввести слово **Переменные**, ячейки **C8:D8** и **F8**, содержимое которых будет соответствовать решению задачи, выделить цветом и границами оформления.
4. В **A10** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **C10** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для заготовки: **=СУММПРОИЗВ(C4:D4;C8:D8)**, в ячейку **E10** ввести число, соответствующее правой части ограничения задачи для заготовки: **6.5**, выделить ячейки цветом и границами оформления.
5. В ячейку **C12** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для продукции: **=C6*\$F\$8**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **C12** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **D12** (тем самым копируя формулы). В ячейку **E12** ввести число, соответствующее правой части ограничения задачи для продукции: **50**, выделить ячейки цветом и границами оформления.
6. В ячейку **A14** ввести **Целевая функция**, в ячейку **C14** ввести формулу, соответствующую выражению целевой функции задачи: **=F8**, выделить ячейки цветом и границами оформления.
7. В главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения....**
8. В открывшемся диалоговом окне в области **Установить целевую** должна быть указана целевая ячейка **C14** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), в области **равной установить флажок максимальному значению**.
9. Установить курсор в область **Изменяя ячейки:**, затем выделить на листе диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C8:D8;F8**.
10. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C8:D8**, затем в выпадающем списке выбрать **цел** и щелкнуть кнопку **Добавить**.
11. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести еще одну ячейку, соответствующую переменной задачи: **F8**, затем в выпадающем списке выбрать **цел** и щелкнуть кнопку **Добавить**.

12. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку**: ввести ячейку, соответствующую левой части ограничения задачи для заготовки: **C10**, в выпадающем списке выбрать знак: \leq , щелкнуть курсором в области **Ограничение**: и указать ячейку, содержащую правую часть ограничения задачи для заготовки: **E10** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши) и щелкнуть кнопку **Добавить**.
13. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку**: ввести ячейку, соответствующую левой части ограничения задачи для продукции: **C12**, в выпадающем списке выбрать знак: \leq , щелкнуть курсором в области **Ограничение**: и указать выражение, содержащую правую часть ограничения задачи для продукции: **C8*E12** и щелкнуть кнопку **Добавить**.
14. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку**: ввести ячейку, соответствующую левой части ограничения задачи для продукции: **D12**, в выпадающем списке выбрать знак: \leq , щелкнуть курсором в области **Ограничение**: и указать выражение, содержащую правую часть ограничения задачи для продукции: **D8*E12**, нажать кнопку **ОК**.
15. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне установить флажок **Линейная модель** и нажать кнопку **ОК**.
16. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Выполнить** (в случае корректной постановки задачи автоматически будет найдено оптимальное решение задачи, о чем появится сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условие оптимальности выполнены**, нажать кнопку **ОК**). Повторить процедуру поиска несколько раз в случае сообщения **Поиск не может найти подходящего решения и оценить на оптимальность текущее повторяющееся решение** (такое сообщение вполне характерно, т.к. задача имеет неявную целевую функцию, выраженную через дополнительную переменную, имеющую связь с основными только через ограничения задачи).
17. Сохранить файл с шаблоном решения задачи в своем подкаталоге.

11. Задача «об альтернативном раскрое»

Дано: Имеется продукция, в комплектацию которой входят $m = 2$ вида деталей 1-го и 2-го типа в количестве: $\{k_j\} = \{2, 3\}$ штук соответственно, при этом

детали изготавливаются из заготовок длиной $D = 6.5$ м и имеют длину соответственно: $\{d_j\} = \{2, 1.25\}$ м,

исходное количество заготовок $N = 50$ штук.

Найти: Оптимальный раскрой заготовок (т.е. сколько деталей 1-го и 2-го типа изготавливать из одной заготовки) с целью максимизации суммарного количества продукции (полной комплектации) при соблюдении ограничений на общее число заготовок.

Решение: Для решения используются 4 варианта (альтернативы) раскроя:

- 1) исходная заготовка длиной 6.5 м раскраивается на 3 детали 1-го типа (длиной 2 м), при этом образуются отходы, равные 0.5 м;
- 2) исходная заготовка длиной 6.5 м раскраивается на 2 детали 1-го типа (длиной 2 м) и 2 детали 2-го типа (длиной 1.25 м);
- 3) исходная заготовка длиной 6.5 м раскраивается на 1 деталь 1-го типа (длиной 2 м) и 3 детали 2-го типа (длиной 1.25 м), с отходами 0.75 м;
- 4) исходная заготовка длиной 6.5 м раскраивается на 5 деталей 2-го типа (длиной 1.25 м), при этом образуются отходы, равные 0.25 м.

Решение задачи представляется множеством переменных $\{y_j\}$, соответствующих количеству исходных заготовок, раскраиваемых по j -у варианту, в качестве дополнительных переменных используются: n_1 и n_2 , соответствующих общему числу деталей 1-го и 2-го типов, получаемых из всех заготовок:

- общее число деталей 1-го типа из всех заготовок равно:

$$n_1 = 3 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4;$$

- общее число деталей 2-го типа из всех заготовок равно:

$$n_2 = 0 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 + 5 \cdot y_4.$$

Для обозначения числа единиц продукции введем переменную n (целого типа), тогда с учетом введенных переменных ограничения могут быть записаны в виде:

- что количество укомплектованной продукции не должно превышать соответствующего числа деталей необходимого типа:

➤ для 1-го типа детали: $n \leq \frac{n_1}{k_1}$ или $n \cdot k_1 \leq n_1$, что равносильно выражению:

$$n \cdot k_1 \leq 3 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3;$$

➤ для 2-го типа деталей: $n \leq \frac{n_2}{k_2}$ или $n \cdot k_2 \leq n_2$, что равносильно выражению:

$$n \cdot k_2 \leq 2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 + 5 \cdot y_4;$$

- чтобы общее число заготовок, раскраиваемых по различным вариантам, было равно исходному: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = N$,

и целевая функция в виде:

$$Y = n \rightarrow \max_{\Omega},$$

где Ω - множество допустимых альтернатив, обусловленных ограничениями задачи.

1. Для автоматизированного расчета результатов решения задачи в ячейки **C2:D2** ввести числа: **1, 2**. В ячейку **A4** ввести слово **Длина**, в ячейки **C4:D4** ввести числа, соответствующие значениям длины деталей: **2, 1.25** и выделить их цветом и границами обрамления.
2. В ячейку **A6** ввести слово **Комплектность**, в ячейки **C6:D6** ввести числа, соответствующие количеству штук соответствующих деталей в комплектации продукции: **2, 3** и выделить их цветом и границами обрамления.
3. В ячейку **A8** ввести слово **Варианты**, в ячейки **C8:D11** ввести соответствующие вариантам числа: **3, 0, 2, 2, 1, 3, 0, 5** и выделить их цветом и границами обрамления.
4. В ячейку **F6** ввести слово **Переменные**, ячейки **F8:F11** и **F13**, содержимое которых будет соответствовать решению задачи, выделить цветом и границами обрамления.
5. В **A13** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **C13** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую правой части ограничений задачи для деталей: **=СУММПРОИЗВ(C8:C11;\$F\$8:\$F\$11)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **C13** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую

кнопку мыши протянуть ее в ячейку **D13** (тем самым копируя формулы), выделить ячейки цветом и границами оформления.

6. В ячейку **C15** ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для деталей: **=C6*\$F\$13**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **C15** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **D15** (тем самым копируя формулы), выделить ячейки цветом и границами оформления.
7. В ячейку **C17** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для продукции: **=СУММ(F8:F11)**. В ячейку **E17** ввести число, соответствующее правой части ограничения задачи для продукции: **50**, выделить ячейки цветом и границами оформления.
8. В ячейку **A19** ввести **Целевая функция**, в ячейку **C19** ввести формулу, соответствующую выражению целевой функции задачи: **=F13** , выделить ячейки цветом и границами оформления.
9. В главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения....**
10. В открывшемся диалоговом окне в области **Установить целевую** должна быть указана целевая ячейка **C19** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), в области **равной установить флажок максимальному значению**.
11. Установить курсор в область **Изменяя ячейки:**, затем выделить на листе диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **F8:F11;F13**.
12. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **F8:F11**, затем в выпадающем списке выбрать **цел** и щелкнуть кнопку **Добавить**.
13. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести еще одну ячейку, соответствующую переменной задачи: **F13**, затем в выпадающем списке выбрать **цел** и щелкнуть кнопку **Добавить**.
14. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **F8:F11**, затем в выпадающем списке выбрать знак: \geq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести **0** , щелкнуть кнопку **Добавить**.
15. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести еще одну ячейку, соответствующую переменной задачи: **F13**, затем в выпадающем списке

выбрать знак: \geq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести 0, щелкнуть кнопку **Добавить**.

16. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести ячейку, соответствующую левой части ограничения задачи для деталей: **C15:D15**, в выпадающем списке выбрать знак: \leq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и указать выражение, содержащую правую часть ограничения задачи для деталей: **C13:D13** и щелкнуть кнопку **Добавить**.
17. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести ячейку, соответствующую левой части ограничения задачи для продукции: **C17**, в выпадающем списке выбрать знак: $=$, щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и указать выражение, содержащую правую часть ограничения задачи для продукции: **E17**, нажать кнопку **ОК**.
18. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне установить флажок **Линейная модель** и нажать кнопку **ОК**.
19. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Выполнить** (в случае корректной постановки задачи автоматически будет найдено оптимальное решение задачи, о чем появится сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условие оптимальности выполнены**, нажать кнопку **ОК**). Повторить процедуру поиска несколько раз в случае сообщения **Поиск не может найти подходящего решения и оценить на оптимальность текущее повторяющееся решение** (такое сообщение вполне характерно, т.к. задача имеет неявную целевую функцию, выраженную через дополнительную переменную, имеющую связь с основными только через ограничения задачи).
20. Сохранить файл с шаблоном решения задачи в своем подкаталоге.

12. Задача «минимизации позднего времени окончания работ»

Дано: Имеются $n = 3$ исполнителя, характеризующиеся различной производительностью (количеством операций в единицу времени) выполнения работ: $\{P_i\} = \{1, 2, 3\}$ и $m = 10$ работ, характеризующиеся трудоемкостью (количеством операций): $\{T_j\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Найти: Оптимальное расписание параллельного выполнения работ исполнителями, с целью минимизации позднего времени окончания выполнения всех работ.

Решение: Решение задачи представляется множеством булевых переменных

$$\{\delta_{ij}\} :$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{- если } i\text{-я работа выполняется } j\text{-м исполнителем;} \\ 0 & \text{- если - нет.} \end{cases}$$

Для решения задачи формируется матрица констант, соответствующих времени выполнения работ исполнителями $\|d_{ij}\|_{m \times n}$, где $d_{ij} = \frac{T_i}{\Pi_j}$ и вводится дополнительная переменная y , отражающая позднее время завершения выполнения всех работ.

С учетом введенных переменных и констант ограничения могут быть записаны в виде:

- чтобы каждая работа кем-то выполнялась:

➤ для 1-й работы: $\sum_{j=1}^3 \delta_{1j} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} = 1,$

➤ для 2-й работы: $\sum_{j=1}^3 \delta_{2j} = \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} = 1$ и т.д.

- чтобы окончание выполнения работ каждым исполнителем не превышало позднее время окончания выполнения всех работ:

- для 1-го исполнителя:

$$\sum_{i=1}^{10} d_{i1} \cdot \delta_{i1} = d_{11} \cdot \delta_{11} + d_{21} \cdot \delta_{21} + d_{31} \cdot \delta_{31} + d_{41} \cdot \delta_{41} + d_{51} \cdot \delta_{51} + \\ + d_{61} \cdot \delta_{61} + d_{71} \cdot \delta_{71} + d_{81} \cdot \delta_{81} + d_{91} \cdot \delta_{91} + d_{10,1} \cdot \delta_{10,1} \leq y,$$

- для 2-го исполнителя:

$$\sum_{i=1}^{10} d_{i2} \cdot \delta_{i2} = d_{12} \cdot \delta_{12} + d_{22} \cdot \delta_{22} + d_{32} \cdot \delta_{32} + d_{42} \cdot \delta_{42} + d_{52} \cdot \delta_{52} + \\ + d_{62} \cdot \delta_{62} + d_{72} \cdot \delta_{72} + d_{82} \cdot \delta_{82} + d_{92} \cdot \delta_{92} + d_{10,2} \cdot \delta_{10,2} \leq y$$

и т.д.

и целевая функция в виде:

$$Y = y \rightarrow \min_{\Omega}$$

где Ω - множество допустимых альтернатив, обусловленных ограничениями задачи.

1. Для автоматизированного расчета результатов решения задачи в ячейку **G2** ввести слово **Исполнители**, в ячейку **G4** ввести слово **производительность**. В ячейки **F3:H3** и **F5:H5** ввести числа: **1, 2, 3**. В ячейки **B7:B16** и **D7:D16** ввести возрастающую последовательность чисел: **1, 2, 3, ..., 10**. В ячейку **A7** ввести слово **Работы** (нажать клавишу **Enter**, щелкнуть на ячейке **A7** и удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть область выделения до ячейки **A16**, выбрать в главном меню **Формат** и щелкнуть на **Ячейки...**, в открывшемся диалоговом окне перейти на вкладку **Выравнивание**, установить флажок **объединение ячеек** и в области **Ориентация** установить **90°**, нажать кнопку **ОК**) и выделить их цветом и границами оформления.
2. В ячейку **F7** ввести формулу расчета времени выполнения 1-й работы 1-м исполнителем: **=D7/\$F\$5**, соответственно для 2-го исполнителя в ячейку **G7** ввести формулу: **=D7/\$G\$5** и для 3-го исполнителя в ячейку **H7** ввести формулу: **=D7/\$H\$5**. Щелкнуть на ячейке **F7** и удерживая нажатой левую кнопку мыши (в области ячейки) протянуть ее в ячейку **H7** (тем самым выделив их). Подвести курсор в ее правый нижний угол ячейки **H7** и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H16** (тем самым копируя формулы) и выделить их цветом и границами оформления.
3. В ячейки **D20:D29** ввести возрастающую последовательность чисел: **1, 2, 3, ..., 10**, в ячейку **G18** ввести слово **Переменные**, ячейки **C20** и **F20:H29**, содержимое которых будет соответствовать решению задачи, выделить цветом и границами оформления.
4. В ячейки **J18** и **A31** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **J20** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для работ: **=СУММ(F20:H20)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **J20** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **J29** (тем самым копируя формулы, выделить их цветом и границами оформления).

5. В ячейку **F31** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для исполнителей: **=СУММПРОИЗВ(F7:F16;F20:F29)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **F31** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H31** (тем самым копируя формулы), выделить их цветом и границами оформления.
6. В ячейку **A33** ввести **Целевая функция**, в ячейку **C33** ввести формулу, соответствующую выражению целевой функции задачи: **=C20**, выделить ячейки цветом и границами оформления.
7. В главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения....**
8. В открывшемся диалоговом окне в области **Установить целевую** должна быть указана целевая ячейка **C33** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), в области **равной** установить флажок **минимальному значению**.
9. Установить курсор в область **Изменяя ячейки:**, затем выделить на листе диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **F20:H29;C20**.
10. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **F20:H29**, затем в выпадающем списке выбрать **двоич**, щелкнуть кнопку **Добавить**.
11. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать ячейку, соответствующую переменной задачи: **C20**, в выпадающем списке выбрать знак: \geq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число: **0**, нажать кнопку **Добавить**.
12. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для работ: **J20:J29**, в выпадающем списке выбрать знак: **=**, щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **1**, нажать кнопку **Добавить**.
13. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для исполнителей: **F31:H31**, в выпадающем списке выбрать знак: \leq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и указать ячейку: **C20**, нажать кнопку **ОК**.
14. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне установить флажок **Линейная модель** и нажать кнопку **ОК**.

15. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Выполнить** (в случае корректной постановки задачи автоматически будет найдено субоптимальное решение задачи, о чем появится сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условие оптимальности выполнены**, нажать кнопку **ОК**). Для поиска других приближенных решений (обусловленных неявной целевой функцией, выраженной через дополнительную переменную, которая связана с основными переменными задачи только через ограничения) необходимо повторно решать задачу (оптимальное значение целевой функции равно 9.33333).
16. Сохранить файл с шаблоном решения задачи в своем подкаталоге.

13. Задача «минимизации числа исполнителей»

Дано: Имеются $n = 3$ исполнителя, характеризующиеся различной производительностью (количеством операций в единицу времени) выполнения работ: $\{P_i\} = \{1, 2, 3\}$ и $m = 10$ работ, характеризующиеся трудоемкостью (количеством операций): $\{T_j\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Причем задан директивный срок окончания всех работ $D = 12$.

Найти: Минимальное число исполнителей, достаточное для завершения выполнения всех работ к заданному сроку.

Решение: Для решения задачи используется множество булевых переменных

$\{\delta_{ij}\}$:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i\text{-я работа выполняется } j\text{-м исполнителем;} \\ 0 & \text{если – нет,} \end{cases}$$

а также множество булевых переменных $\{v_j\}$:

$$v_j = \begin{cases} 1 & \text{если } j\text{-й исполнитель участвует в выполнении работ;} \\ 0 & \text{если – нет,} \end{cases}$$

Для решения задачи формируется матрица констант, соответствующих времени

выполнения работ исполнителями $\|d_{ij}\|_{m \times n}$, где $d_{ij} = \frac{T_i}{P_j}$.

С учетом введенных переменных и констант ограничения могут быть записаны в виде:

- чтобы каждая работа кем-то выполнялась:

➤ для 1-й работы:

$$\sum_{j=1}^3 \delta_{1j} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} = 1,$$

➤ для 2-й работы:

$$\sum_{j=1}^3 \delta_{2j} = \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} = 1 \text{ и т.д.}$$

- чтобы окончание выполнения работ каждым исполнителем не превышало заданное:

➤ для 1-го исполнителя:

$$\sum_{i=1}^{10} d_{i1} \cdot \delta_{i1} = d_{11} \cdot \delta_{11} + d_{21} \cdot \delta_{21} + d_{31} \cdot \delta_{31} + d_{41} \cdot \delta_{41} + d_{51} \cdot \delta_{51} + \\ + d_{61} \cdot \delta_{61} + d_{71} \cdot \delta_{71} + d_{81} \cdot \delta_{81} + d_{91} \cdot \delta_{91} + d_{10,1} \cdot \delta_{10,1} \leq D \cdot v_1$$

➤ для 2-го исполнителя:

$$\sum_{i=1}^{10} d_{i2} \cdot \delta_{i2} = d_{12} \cdot \delta_{12} + d_{22} \cdot \delta_{22} + d_{32} \cdot \delta_{32} + d_{42} \cdot \delta_{42} + d_{52} \cdot \delta_{52} + \\ + d_{62} \cdot \delta_{62} + d_{72} \cdot \delta_{72} + d_{82} \cdot \delta_{82} + d_{92} \cdot \delta_{92} + d_{10,2} \cdot \delta_{10,2} \leq D \cdot v_2 \text{ и т.д.}$$

и целевая функция в виде:

$$Y = \sum_{j=1}^n v_j \rightarrow \min_{\Omega}$$

где Ω - множество допустимых альтернатив, обусловленных ограничениями задачи.

1. Для автоматизированного расчета результатов решения задачи в ячейку **G2** ввести слово **Исполнители**, в ячейку **G4** ввести слово **производительность**. В ячейки **F3:H3** и **F5:H5** ввести числа: **1, 2, 3**. В ячейки **B7:B16** и **D7:D16** ввести возрастающую последовательность чисел: **1, 2, 3, ..., 10**. В ячейку **A7** ввести слово **Работы** (нажать клавишу **Enter**, щелкнуть на ячейке **A7** и удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть область выделения до ячейки **A16**, выбрать в

главном меню **Формат** и щелкнуть на **Ячейки...**, в открывшемся диалоговом окне перейти на вкладку **Выравнивание**, установить флажок **объединение ячеек** и в области **Ориентация** установить **90°**, нажать кнопку **ОК**) и выделить их цветом и границами оформления.

2. В ячейку **F7** ввести формулу расчета времени выполнения 1-й работы 1-м исполнителем: **=D7/\$F\$5**, соответственно для 2-го исполнителя в ячейку **G7** ввести формулу: **=D7/\$G\$5** и для 3-го исполнителя в ячейку **H7** ввести формулу: **=D7/\$H\$5**. Щелкнуть на ячейке **F7** и удерживая нажатой левую кнопку мыши (в области ячейки) протянуть ее в ячейку **H7** (тем самым выделив их). Подвести курсор в ее правый нижний угол ячейки **H7** и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H16** (тем самым копируя формулы) и выделить их цветом и границами оформления.
3. В ячейку **A20** ввести слово **Срок**, в ячейку **C20** ввести значение директивного срока окончания выполнения всех работ: **15**.
4. В ячейки **D20:D29** ввести возрастающую последовательность чисел: **1, 2, 3, ..., 10**, в ячейку **G18** ввести слово **Переменные**, ячейки **F20:H29** и **F31:H31**, содержимое которых будет соответствовать решению задачи, выделить цветом и границами оформления.
5. В ячейки **J18** и **A33** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **J20** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для работ: **=СУММ(F20:H20)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **J20** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **J29** (тем самым копируя формулы, выделить их цветом и границами оформления).
6. В ячейку **F33** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для исполнителей: **=СУММПРОИЗВ(F7:F16;F20:F29)**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **F33** и когда он примет крестообразный вид удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H33** (тем самым копируя формулы), выделить их цветом и границами оформления.
7. В ячейку **F35** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую левой части ограничений задачи для исполнителей: **=\$C\$20*F31**, подвести курсор в правый нижний угол ячейки **F35** и когда он примет крестообразный вид

- удерживая нажатой левую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H35** (тем самым копируя формулы), выделить их цветом и границами обрамления.
8. В ячейку **A37** ввести **Целевая функция**, в ячейку **C37** ввести формулу, соответствующую выражению целевой функции задачи: **=СУММ(F31:H31)**, выделить ячейки цветом и границами обрамления.
 9. В главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения....**
 10. В открывшемся диалоговом окне в области **Установить целевую** должна быть указана целевая ячейка **C37** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), в области **равной установить флажок минимальному значению**.
 11. Установить курсор в область **Изменяя ячейки:**, затем выделить на листе диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **F20:H29; F31:H31**.
 12. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **F20:H29**, затем в выпадающем списке выбрать **двоич**, щелкнуть кнопку **Добавить**.
 13. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **F31:H31**, затем в выпадающем списке выбрать **двоич**, щелкнуть кнопку **Добавить**.
 14. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для работ: **J20:J29**, в выпадающем списке выбрать знак: **=**, щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **1**, нажать кнопку **Добавить**.
 15. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничения задачи для исполнителей: **F33:H33**, в выпадающем списке выбрать знак: **≤**, щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и указать диапазон ячеек: **F35:H35**, нажать кнопку **ОК**.
 16. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне установить флажок **Линейная модель** и нажать кнопку **ОК**.
 17. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Выполнить** (в случае корректной постановки задачи автоматически будет найдено субоптимальное решение задачи, о чем появится сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условие оптимальности выполнены**, нажать кнопку **ОК**).
 18. Сохранить файл с шаблоном решения задачи в своем подкаталоге.

14. Задача «минимизации суммарного штрафа»

Дано: Имеются $n = 6$ работ, характеризующиеся продолжительностью выполнения: $\{d_j\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. При этом заданы директивные сроки окончания выполнения соответствующих работ $D_j = \{2, 6, 3, 5, 4, 5\}$ и штрафы за их нарушение $h_j = \{1, 1, 2, 1, 3, 4\}$.

Найти: Оптимальное расписание (очередность выполнения работ) с целью минимизации суммы штрафов за нарушение директивных сроков завершения выполнения соответствующих работ.

Решение: Для решения задачи используется множество булевых переменных

$\{q_{ij}\}$:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i\text{-я работа выполняется раньше } j\text{-ой } (i \rightarrow j); \\ 0 & \text{если – наоборот } (j \rightarrow i), \end{cases}$$

при этом $i = 1 \div (n - 1)$, $j = (i + 1) \div n$,

а также множества переменных $\{t_j\}$, соответствующих моментам времени начала выполнения работ и $\{y_j\}$, отражающих факт нарушения директивных сроков соответствующих задач:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{если нарушен директивный срок окончания решения} \\ & j\text{-ой работы;} \\ 0 & \text{если – нет,} \end{cases}$$

С учетом введенных переменных ограничения могут быть записаны в виде:

- чтобы переменные $\{y_j\}$ принимали единичное значение при нарушении директивных сроков:

$$t_j + d_j - D_j \leq Q \cdot y_j \quad j = 1 \div n,$$

где Q – константа, значительно превышающая значения параметров задачи:

➤ для 1-й работы:

$$t_1 + d_1 - D_1 \leq Q \cdot y_1,$$

➤ для 2-й работы:

$$t_2 + d_2 - D_2 \leq Q \cdot y_2 \text{ и т.д.}$$

- чтобы из 2-х любых работ выполнение одной из них предшествовало другой:
 - для 1-й и 2-й работ (в системе ограничений в зависимости от значения q_{ij} лишь одно из выражений будет выступать в виде ограничения, а другое будет выполняться всегда):

$$\begin{cases} Q \cdot (1 - q_{12}) + (t_2 - t_1) \geq d_1, \\ Q \cdot q_{12} + (t_1 - t_2) \geq d_2, \end{cases}$$

- для 1-й и 3-й работы:

$$\begin{cases} Q \cdot (1 - q_{13}) + (t_3 - t_1) \geq d_1, \\ Q \cdot q_{13} + (t_1 - t_3) \geq d_3, \end{cases} \text{ и т.д.}$$

- для 4-й и 5-й работы:

$$\begin{cases} Q \cdot (1 - q_{45}) + (t_5 - t_4) \geq d_4, \\ Q \cdot q_{45} + (t_4 - t_5) \geq d_5, \end{cases}$$

и целевая функция в виде:

$$Y = \sum_{j=1}^n h_j \cdot y_j \rightarrow \min_{\Omega},$$

где Ω - множество допустимых альтернатив, обусловленных ограничениями задачи.

1. Для автоматизированного расчета результатов решения задачи в ячейку **A2** ввести слово **Работы**, в ячейки **C2:H2** ввести числа: **1, 2, 3, 4, 5, 6**, соответствующие номерам работ, в ячейку **J2** ввести число: **100**, соответствующее константе Q . В ячейку **A4** ввести слово **Продолжительность**, в ячейки **C4:H4** ввести числа: **1, 2, 3, 4, 5, 6**, соответствующие продолжительностям работ. В ячейку **A6** ввести слово **Сроки**, в ячейки **C6:H6** ввести числа: **2, 6, 3, 5, 4, 5**, соответствующие срокам окончания работ. В ячейку **A8** ввести слово **Штрафы**, в ячейки **C8:H8** ввести числа: **1, 1, 2, 1, 3, 4**, соответствующие штрафам работ. Выделить ячейки цветом и границами обрамления.
2. В ячейку **A10** ввести слово **Переменные**, в ячейки **B12:V16** ввести числа номеров работ: **1, 2, 3, 4, 5**. Ячейки **C10:H10**, **C12:H16** и **C18:H18**, соответствующие переменным задачи, выделить цветом и границами обрамления.

3. В ячейку **A20** ввести слово **Ограничения**, в ячейку **C20** ввести формулу: **=C10+C4-C6**, соответствующую левой части ограничения задачи для нарушения директивных сроков. Подвести курсор в нижний правый угол ячейки **C20** и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой левую кнопку мыши, протянуть ее в ячейку **H20** (тем самым копируя формулу). В ячейку **C22** ввести формулу: **=\$J\$2*C18**, соответствующую правой части ограничения задачи, подвести курсор в нижний правый угол ячейки **C22** и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой левую кнопку мыши, протянуть ее в ячейку **H22** (тем самым копируя формулу). Выделить ячейки цветом и границами оформления.
4. В ячейки **B24:B28** ввести числа номеров работ: **1, 2, 3, 4, 5**. В ячейку **D24** ввести формулу: **=\$J\$2*(1-D12)+(D10-\$C\$10)**, соответствующую левой части 1-го неравенства системы ограничений очередности для 1-й и 2-й работ, подвести курсор в нижний правый угол ячейки **D24** и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой левую кнопку мыши, протянуть ее в ячейку **H24** (тем самым копируя формулу). Аналогично для 2-й и 3-й работ в ячейку **E25** ввести формулу: **=\$J\$2*(1-E13)+(E10-\$D\$10)** и скопировать ее в ячейки **F25:H25**, для 3-й и 4-й работ в ячейку **F26** ввести формулу: **=\$J\$2*(1-F14)+(F10-\$E\$10)** и скопировать ее в ячейки **G26:H26**, для 4-й и 5-й работ в ячейку **G27** ввести формулу: **=\$J\$2*(1-G15)+(G10-\$F\$10)** и скопировать ее в ячейку **H27**, для 5-й и 6-й работ в ячейку **H28** ввести формулу: **=\$J\$2*(1-H16)+(H10-\$G\$10)**. Выделить ячейки цветом и границами оформления.
5. В ячейки **B30:B34** ввести числа номеров работ: **1, 2, 3, 4, 5**. В ячейку **D30** ввести формулу: **=\$J\$2*D12+(\$C\$10-D10)**, соответствующую левой части 2-го неравенства системы ограничений очередности для 1-й и 2-й работ, подвести курсор в нижний правый угол ячейки **D30** и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой левую кнопку мыши, протянуть ее в ячейку **H30** (тем самым копируя формулу). Аналогично для 2-й и 3-й работ в ячейку **E31** ввести формулу: **=\$J\$2*E13+(\$D\$10-E10)** и скопировать ее в ячейки **F31:H31**, для 3-й и 4-й работ в ячейку **F32** ввести формулу: **=\$J\$2*F14+(\$E\$10-F10)** и скопировать ее в ячейки **G32:H32**, для 4-й и 5-й работ в ячейку **G33** ввести формулу: **=\$J\$2*G15+(\$F\$10-G10)** и скопировать ее в ячейку **H33**, для 5-й и 6-й работ в ячейку **H34** ввести формулу: **=\$J\$2*H16+(\$G\$10-H10)**. Выделить ячейки цветом и границами оформления.

6. В ячейку **A36** ввести **Целевая функция**, в ячейку **C36** ввести формулу, соответствующую выражению целевой функции задачи: **=СУММПРОИЗВ(C8:H8;C18:H18)**, выделить ячейки цветом и границами оформления.
7. В главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения....**
8. В открывшемся диалоговом окне в области **Установить целевую** должна быть указана целевая ячейка **C36** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), в области равной установить флажок **минимальному значению**.
9. Установить курсор в область **Изменяя ячейки:**, затем выделить на листе диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **C10:H10; D12:H16; C18:H18**.
10. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в отрывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным времени начала выполнения работ: **C10:H10**, затем в выпадающем списке выбрать знак: \geq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **0**, щелкнуть кнопку **Добавить**.
11. В отрывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным очередности выполнения работ: **D12:H16**, затем в выпадающем списке выбрать **двоич**, щелкнуть кнопку **Добавить**.
12. В отрывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным нарушения директивных сроков окончания работ: **C18:H18**, затем в выпадающем списке выбрать **двоич**, щелкнуть кнопку **Добавить**
13. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничений задачи для директивных сроков работ: **C20:H20**, в выпадающем списке выбрать знак: \leq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести диапазон ячеек, соответствующих правой части ограничений: **C22:H22**, нажать кнопку **Добавить**.
14. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать диапазон ячеек, соответствующих левой части ограничений задачи для 1-го неравенства системы ограничений очередности работ для 1-й работы: **D24:H24**, в выпадающем списке выбрать знак: \geq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и указать ячейку: **C4**, нажать кнопку **Добавить**. Аналогично для 2-й задачи: **E25:H25**, знак: \geq и ячейку: **D4**, нажать кнопку **Добавить**. Аналогично для 3-й задачи: **F26:H26**, знак:

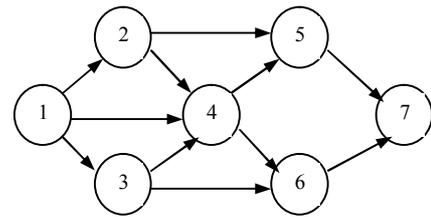
\geq и ячейку: **E4**, нажать кнопку **Добавить**. Аналогично для 4-й задачи: **G27:H27**, знак: \geq и ячейку: **F4**, нажать кнопку **Добавить**. Аналогично для 5-й задачи: **H28**, знак: \geq и ячейку: **G4**, нажать кнопку **Добавить**.

15. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку**: указать ячейку, соответствующих левой части ограничений задачи для 2-го неравенства системы ограничений очередности работ для 2-й работы: **D30**, в выпадающем списке выбрать знак: \geq , щелкнуть курсором в области **Ограничение**: и указать ячейку: **D4**, нажать кнопку **Добавить**. Аналогично для 3-й задачи: **E30:E31**, знак: \geq и ячейку: **E4**, нажать кнопку **Добавить**. Аналогично для 4-й задачи: **F30:F32**, знак: \geq и ячейку: **F4**, нажать кнопку **Добавить**. Аналогично для 5-й задачи: **G30:G33**, знак: \geq и ячейку: **G4**, нажать кнопку **Добавить**. Аналогично для 6-й задачи: **H30:EH34**, знак: \geq и ячейку: **H4**, нажать кнопку **ОК**.
16. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне установить флажок **Линейная модель** и нажать кнопку **ОК**.
17. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Выполнить** (в случае корректной постановки задачи автоматически будет найдено субоптимальное решение задачи, о чем появится сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условие оптимальности выполнены**, нажать кнопку **ОК**).
18. Сохранить файл с шаблоном решения задачи в своем подкаталоге.

15. Задача «распределения ресурсов на сетевом графике проекта»

Дано: Имеются $n = 7$ событий (узлов графа сети), соединенных между собой работами (дугами), продолжительность выполнения которых представлена матрицей $\|d_{ij}\|_{7 \times 7}$ (где символом “_” отражено отсутствие работы) и соответствующей ей матрицей булевых констант $\|\delta_{ij}\|_{7 \times 7}$, отражающих возможность наличия соответствующей работы:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 10 & - & - & - \\ - & 0 & - & 11 & 5 & - & - \\ - & - & 0 & 3 & - & 7 & - \\ - & - & - & 0 & 8 & 7 & - \\ - & - & - & - & 0 & - & 6 \\ - & - & - & - & - & 0 & 9 \\ - & - & - & - & - & - & 0 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$



W – суммарный объем дополнительных ресурсов.

Найти: Оптимальное распределение дополнительных ресурсов, обеспечивающее минимальный срок реализации всего комплекса работ проекта.

Решение: Решение задачи представляется множеством переменных $\|v_{ij}\|_{7 \times 7}$,

соответствующих объему дополнительных ресурсов, выделенных соответствующим работам (дугам сети) и производных переменных $\{r_j\}$, соответствующих раннему моменту времени наступления событий.

Предположим, что продолжительность выполнения работы связана с величиной выделенного дополнительного ресурса следующим

соотношением:
$$\frac{d_{ij}}{1 + v_{ij}}.$$

- с учетом введенных переменных значения моментов времени раннего наступления событий в общем случае определяются следующим образом:

$$r_j = \max_{i \rightarrow j} \left\{ \delta_{ij} \cdot \left(r_i + \frac{d_{ij}}{1 + v_{ij}} \right) \right\};$$

➤ для 1-го, 2-го, 3-го и 4-го событий (узлов графа сети):

$$r_1 = 0, \quad r_2 = r_1 + \frac{d_{12}}{1 + v_{12}}, \quad r_3 = r_1 + \frac{d_{13}}{1 + v_{13}},$$

$$r_4 = \max_{i \rightarrow j} \left\{ r_1 + \frac{d_{14}}{1 + v_{14}}; r_2 + \frac{d_{24}}{1 + v_{24}}; r_3 + \frac{d_{34}}{1 + v_{34}} \right\}$$

➤ для 5-го, 6-го и 7-го событий:

$$r_5 = \max_{i \rightarrow j} \left\{ r_2 + \frac{d_{25}}{1 + v_{25}}; r_4 + \frac{d_{45}}{1 + v_{45}} \right\}, \quad r_6 = \max_{i \rightarrow j} \left\{ r_3 + \frac{d_{36}}{1 + v_{36}}; r_4 + \frac{d_{46}}{1 + v_{46}} \right\},$$

$$r_7 = \max_{i \rightarrow j} \left\{ r_5 + \frac{d_{57}}{1 + v_{57}}; r_6 + \frac{d_{67}}{1 + v_{67}} \right\}$$

- чтобы суммарный объем выделенных ресурсов соответствовал (не превышал) заданному:

$$\sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 \delta_{ij} \cdot v_{ij} = W$$

и целевая функция в виде: $Y = r_7 \rightarrow \min_{\Omega}$,

где Ω - множество допустимых альтернатив, обусловленных ограничениями задачи.

1. Для автоматизированного расчета результатов решения задачи в ячейку **A2** ввести слово **Связи**, в ячейки **B2:H2**, **A3:A9**, **B11:H11**, **A12:A18**, **B20:H20**, **A21:A27**, **B29:H29**, **A30:A36**, **B41:H41**, **A42:A48**, **B50:H50** и **A51:A57** ввести числа: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**. В ячейки **B3:H7** ввести числа, соответствующие наличию в проекте соответствующей работы (при этом отсутствие работы будет отражаться **0**): **0, 1, 1, 1, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0** и выделить их цветом и границами обрамления.
2. В ячейку **A11** ввести слово **Продолжительность**, в ячейки **B12:H18** ввести числа, соответствующие максимальной продолжительности выполнения работ (при этом отсутствие работы будет отражаться **0**): **0, 2, 4, 10, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 11, 5, 0, 0; 0, 0, 0, 3, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 0, 8, 7, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 9; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0** и выделить их цветом и границами обрамления.
3. В ячейку **A20** ввести слово **Переменные**, ячейки **B21:H27**, содержимое которых будет соответствовать решению задачи, выделить цветом и границами обрамления.
4. В ячейку **I27** (используя мастер функций) ввести формулу, соответствующую суммарному объему израсходованных дополнительных ресурсов: **=СУММПРОИЗВ(B3:H9;B21:H27)**. В ячейку **K27** ввести значение объема

выделенного дополнительного ресурса: **5**, выделить их цветом и границами оформления.

5. В ячейку **C30** ввести формулу расчета продолжительности выполнения соответствующей работы: $= (C3 * (\$B\$37 + C12 / (1 + C21)))$. Выделить ячейку щелчком мыши, подвести курсор в правый нижний угол ячейки и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой правую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H30** (тем самым копируя формулы).
6. В ячейку **D31** ввести формулу расчета продолжительности выполнения соответствующей работы: $= (D4 * (\$C\$37 + D13 / (1 + D22)))$. Выделить ячейку щелчком мыши, подвести курсор в правый нижний угол ячейки и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой правую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H31** (тем самым копируя формулы).
7. В ячейку **E32** ввести формулу расчета продолжительности выполнения соответствующей работы: $= (E5 * (\$D\$37 + E14 / (1 + E23)))$. Выделить ячейку щелчком мыши, подвести курсор в правый нижний угол ячейки и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой правую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H32** (тем самым копируя формулы).
8. В ячейку **F33** ввести формулу расчета продолжительности выполнения соответствующей работы: $= (F6 * (\$E\$37 + F15 / (1 + F24)))$. Выделить ячейку щелчком мыши, подвести курсор в правый нижний угол ячейки и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой правую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H33** (тем самым копируя формулы).
9. В ячейку **G34** ввести формулу расчета продолжительности выполнения соответствующей работы: $= (G7 * (\$F\$37 + G16 / (1 + G25)))$. Выделить ячейку щелчком мыши, подвести курсор в правый нижний угол ячейки и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой правую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H34** (тем самым копируя формулы).
10. В ячейку **H35** ввести формулу расчета продолжительности выполнения соответствующей работы: $= (H8 * (\$G\$37 + H17 / (1 + H26)))$.
11. В ячейку **B37** (используя мастер функций) ввести формулу расчета раннего срока наступления соответствующего события: $= \text{МАКС}(B30:B36)$. Выделить ячейку щелчком мыши, подвести курсор в ее правый нижний угол и когда он примет

крестообразный вид, удерживая нажатой правую кнопку мыши протянуть ее до ячейки **H37** (тем самым копируя формулу).

12. В ячейку **A39** ввести **Целевая функция**, в ячейку **B39** ввести формулу, соответствующую выражению целевой функции задачи: $=H37$, выделить ячейки цветом и границами обрамления.
13. В ячейку **C42** ввести формулу расчета резерва времени выполнения соответствующей работы: $=C3*(C37-BS37-C12/(1+C21))$. Выделить ячейку щелчком мыши, подвести курсор в правый нижний угол ячейки и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой правую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H42** (тем самым копируя формулы).
14. В ячейку **D43** ввести формулу расчета резерва времени выполнения соответствующей работы: $=D4*(D37-DS37-D13/(1+D22))$. Выделить ячейку щелчком мыши, подвести курсор в правый нижний угол ячейки и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой правую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H43** (тем самым копируя формулы).
15. В ячейку **E44** ввести формулу расчета резерва времени выполнения соответствующей работы: $=E5*(E37-ES37-E14/(1+E23))$. Выделить ячейку щелчком мыши, подвести курсор в правый нижний угол ячейки и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой правую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H44** (тем самым копируя формулы).
16. В ячейку **F45** ввести формулу расчета резерва времени выполнения соответствующей работы: $=F6*(F37-FE37-F15/(1+F24))$. Выделить ячейку щелчком мыши, подвести курсор в правый нижний угол ячейки и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой правую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H45** (тем самым копируя формулы).
17. В ячейку **G46** ввести формулу расчета резерва времени выполнения соответствующей работы: $=G7*(G37-GF37-G16/(1+G25))$. Выделить ячейку щелчком мыши, подвести курсор в правый нижний угол ячейки и когда он примет крестообразный вид, удерживая нажатой правую кнопку мыши протянуть ее в ячейку **H46** (тем самым копируя формулы).
18. В ячейку **H47** ввести формулу расчета резерва времени выполнения соответствующей работы: $=H8*(H37-HG37-H17/(1+H26))$.

19. В ячейку **B52** ввести формулу расчета позднего срока завершения соответствующей работы: $=C58-C12/(1+C21)$. В ячейку **B53** ввести формулу: $=D58-D12/(1+D21)$. В ячейку **B54** ввести формулу: $=E58-E12/(1+E21)$. В ячейку **B58** ввести формулу расчета позднего момента времени наступления соответствующего события: $=МИН(B52:B57)$.
20. В ячейку **C54** ввести формулу расчета позднего срока завершения соответствующей работы: $=E58-E13/(1+E22)$. В ячейку **C55** ввести формулу: $=F58-F13/(1+F22)$. В ячейку **C58** ввести формулу расчета позднего момента времени наступления соответствующего события: $=МИН(C53:C57)$.
21. В ячейку **D54** ввести формулу расчета позднего срока завершения соответствующей работы: $=E58-E14/(1+E23)$. В ячейку **D56** ввести формулу: $=G58-G14/(1+G23)$. В ячейку **D58** ввести формулу расчета позднего момента времени наступления соответствующего события: $=МИН(D54:D57)$.
22. В ячейку **F57** ввести формулу расчета позднего срока завершения соответствующей работы: $=H58-H16/(1+H25)$. В ячейку **F58** ввести формулу расчета позднего момента времени наступления соответствующего события: $=МИН(F56:F57)$.
23. В ячейку **G57** ввести формулу расчета позднего срока завершения соответствующей работы: $=H58-H17/(1+H26)$. В ячейку **G58** ввести формулу расчета позднего момента времени наступления соответствующего события: $=МИН(G57)$.
24. В ячейку **H58** ввести формулу расчета позднего момента времени наступления соответствующего события: $=H37$.
25. В ячейку **E55** ввести формулу: $=F58-F15/(1+F24)$, в ячейку **E56** ввести формулу: $=G58-G15/(1+G24)$, в ячейку **E58** ввести формулу: $=МИН(E55:E57)$.
26. В главном меню выбрать **Сервис** и щелкнуть на **Поиск решения....**
27. В открывшемся диалоговом окне в области **Установить целевую** должна быть указана целевая ячейка **B39** (для этого щелкнуть на ней левой кнопкой мыши), в области **равной установить флажок минимальному значению**.
28. Установить курсор в область **Изменяя ячейки:**, затем выделить на листе диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **B21:H27**.
29. Щелкнуть на кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи:

- B21:H27**, затем в выпадающем списке выбрать знак: \geq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и ввести число **0**, нажать кнопку **Добавить**.
30. В отрывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** ввести диапазон ячеек, соответствующих переменным задачи: **B21:H27**, затем в выпадающем списке выбрать: **целое**, нажать кнопку **Добавить**.
31. В открывшемся диалоговом окне в области **Ссылка на ячейку:** указать ячейку, соответствующую левой части ограничения задачи: **I27**, в выпадающем списке выбрать знак: \leq , щелкнуть курсором в области **Ограничение:** и указать ячейку **K27** (выделив ее щелчком мыши на рабочем листе).
32. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне убедиться, что отсутствует (не установлен) флажок **Линейная модель** и нажать кнопку **ОК**.
33. В диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку **Выполнить** (в случае корректной постановки задачи автоматически будет найдено оптимальное решение задачи, о чем появится сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условие оптимальности выполнены**, нажать кнопку **ОК**).
34. Сохранить файл с шаблоном решения задачи в своем подкаталоге.

Рекомендуемая литература

1. Петровский А.Б. Теория принятия решений: учебник. М.: Академия ИЦ, 2009. 399 с.
2. Лукичева Л.И., Егорычев Д.Н. Управленческие решения: учебник. М.: Омега-Л, 2009. 383 с.
3. Зайцев М.Г., Варюхин С.Е. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы. М.: Дело, 2007. 668 с.
4. Управленческие решения: учебное пособие / С.В. Петухова. В.В. Радионов, Л.В. Чередникова, П.В. Шеметов. М.: Омега-Л, 2010. 398 с.

Дмитрий Юрьевич Могилко
Татьяна Геннадьевна Максимова
Сергей Иванович Шаныгин

Оптимизационные задачи в принятии управленческих решений

Учебное пособие

Редактор _____

Подписано в печать Заказ № Тираж 50 экз.
Формат 60x84/16. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Гарнитура Прагматика. Усл. печ. л. – 3.81 Усл. кр.-отт..... Уч.-изд. л....

Санкт Петербургский торгово-экономический институт
Издательско-полиграфический центр
194021, Санкт-Петербург, Новороссийская ул., 50