Тема 3 Приближение функций

Задача приближения функций возникает при решении задач обработки экспериментальных данных, обработки статистических данных, а также численном решении дифференциальных и интегральных уравнений.

1 Постановка задачи

Пусть имеется функциональная зависимость **f** между двумя величинами **X** и **Y**, заданная таблично в виде:

X	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	…	$\mathbf{x_i}$	…	$\mathbf{x_n}$
Y	$\mathbf{y_1}$	$\mathbf{y_2}$	…	$\mathbf{y_i}$	…	$\mathbf{y_n}$

Точки ($\mathbf{x_1},\mathbf{y_1}$), ($\mathbf{x_2},\mathbf{y_2}$),...($\mathbf{x_n},\mathbf{y_n}$) называются ***узловыми***. Требуется найти значения функции для аргументах, <u>отличных</u> от узловых.

Например, пусть имеется зависимость плотности материала **P** от влажности **ν** в виде таблицы. Найти плотность материала при влажности ν=5.6.

ν	**4.7**	**5**	**5.2**	**5.4**	**5.9**
P	**3**	**3**	**4**	**7**	**10**

Поскольку аналитический вид зависимости **y** = f(**x**) неизвестен, то отыскивают *“приближающую”* функцию, которую задают в виде $\mathbf{g(x, a_1,a_2,...a_k)}$, где **x** - аргумент функции, $\mathbf{a_1,...a_k}$ – параметры (коэффициенты), k≤n. Чаще всего в качестве приближающей функции выбирают:

– $g(x,a_1,a_2)=a_1x+a_2$ - *линейную зависимость*,

– $g(x,a_1,a_2,a_3)=a_1\cdot e^{a_2x}+a_3$ - *экспоненциальную зависимость*,

– $g(x,a_1,a_2...a_{k+1})=a_1+a_2x+...a_kx^{k-1}+a_{k+1}x^k$ - *полиномиальную зависимость*.

В общем случае при решении задачи приближения функций необходимо выполнить четыре шага:

1. Задать аналитический вид зависимости $\mathbf{g(x, a_1,a_2,...a_k)}$,
2. Найти численные значения коэффициентов $\mathbf{a_1,a_2,...a_k}$,
3. Подставить заданное значение аргумента $\mathbf{x}_{зад}$ в выбранную зависимость и найти искомое значение функции $\mathbf{y}_{иск} = \mathbf{g(x_{зад}, a_1,a_2,...a_k)}$,.
4. Оценить достоверность результата.

<u>Два подхода к решению задачи приближения функций</u>

- ***интерполяция,***
- ***аппроксимация.***

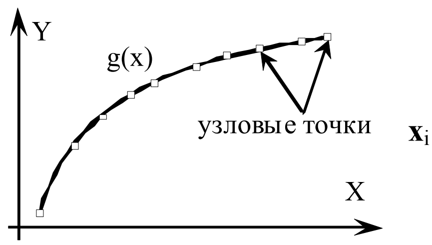


Рисунок 6.1

В задаче ***интерполяции*** подбирают приближающую функцию $\mathbf{g(x,a_1,a_2, ... ,a_k)}$ так, чтобы значения этой функции в узловых точках совпадали с табличными, т.е. $\mathbf{y_i = g(x_i,a_1,a_2, ... ,a_k)}$, при этом функция может быть кусочной.

Геометрическая иллюстрация задачи интерполяции представлена на рисунке 6.1.

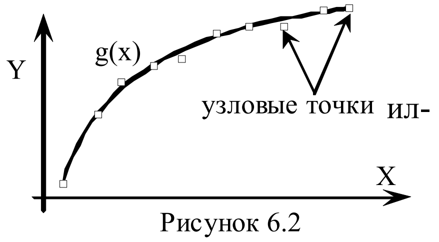


Рисунок 6.2

В задаче ***аппроксимации*** подбирают приближающую функцию так, чтобы отклонения значений функции в узлах таблицы $\mathbf{g(x_i, a_1,a_2,...a_k)}$ от табличных $\mathbf{y_i}$ были минимальными. Геометрическая иллюстрация задачи аппроксимации представлена на рисунке 6.2.

Замечание. Существует понятие «экстраполяция» - нахождение значение функции <u>**вне**</u> заданного интервала, т.е. $x_{зад}\notin[x_1,x_n]$, а не внутри. Она решается те ми же методами: интерполяцией и аппроксимацией.

2 Аппроксимация в Excel

В Excel аппроксимация выполняется линиями тренда. При этом предполагается, что есть исходная табличная зависимость и ее графическое отображение, например, как точечная диаграмма, и на нее добавляется линия тренда. Линиями тренда можно дополнить практически все диаграммы, кроме объемных, круговых, кольцевых.

2.1 Линия тренда

Линия тренда характеризуется следующими параметрами:

1. **уравнением** (функциональной зависимостью),
2. **величиной достоверности аппроксимации R^2**. $R^2 \in [0, 1]$ – число, которое отражает близость значения линии тренда к фактическим данным. Чем ближе к 1 величина этого показателя, тем достовернее линия тренда.

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2},$$

где $\Sigma_1 = \sum_j (y_j - Y_j)^2$;

$$\Sigma_2 = \sum_j Y_j^2 - \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_j Y_j\right)^2.$$

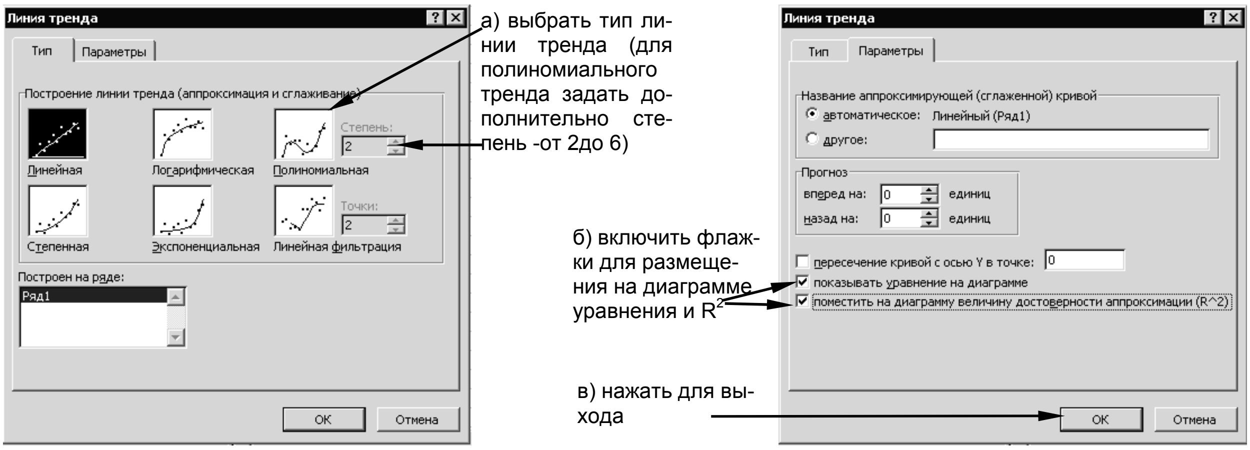
Существует пять различных типов линий тренда (функциональных зависимостей):

1. Линейная $y=ax+b$
2. Полиномиальная $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\quad+a_nx^n$, для $n \le 6$
3. Логарифмическая $y = a \ln x + b$
4. Экспоненциальная $y = ae^{bx}$
5. Степенная $y = ax^b$

Для одних и тех же данных можно построить различные типы линий тренда, а затем выбрать наиболее подходящую функциональную зависимость, анализируя величину достоверности аппроксимации R^2.

Порядок построения линии тренда.

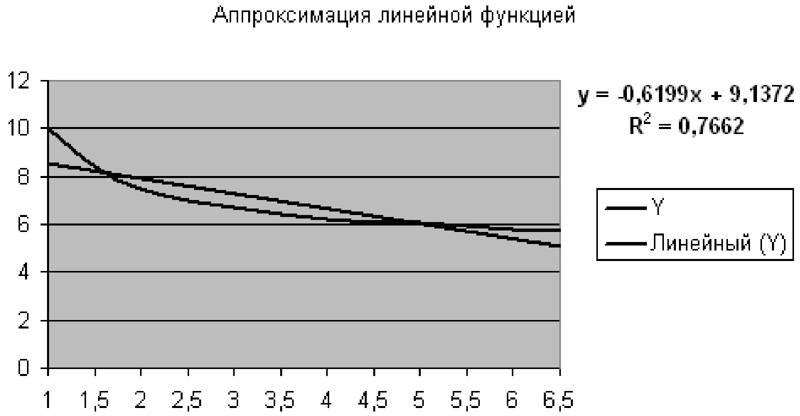
1. Построить диаграмму для заданной таблицы данных (тип диаграммы – точечная).
2. Выделить ряд данных правой кнопкой мыши и в контекстном меню выбрать команду **Добавить линию тренда**.
3. В диалоговом окне **Линия тренда** задать следующие данные:



Пример 1. Имеется табличная зависимость. Добавить линейную линию тренда, отображая уравнение и R^2.

X	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5
Y	10	8.4	7.5	7	6.7	6.4	6.2	6.1	6.05	5.9	5.8	5.7

На рисунке ниже представлена диаграмма с добавленной линией тренда.



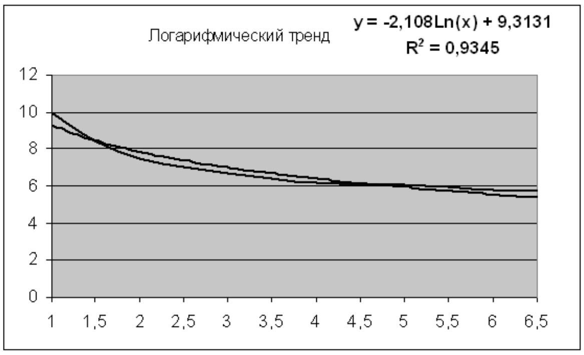
2.2 Использование линии тренда для аппроксимации функции, заданной таблично

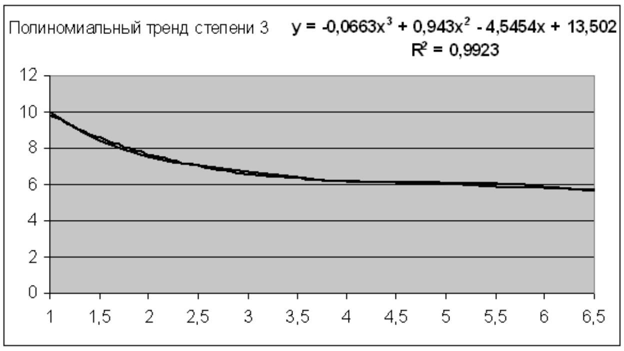
1. Построить по табличным данным диаграмму **точечного** типа.
2. Добавить линию тренда заданного типа или, если тип неизвестен, создать несколько трендов различных типов и выбрать тренд с максимальным R^2 (рекомендуется каждый тренд создавать на отдельной диаграмме).
3. Используя уравнение выбранной линии тренда, можно получать значение функции для аргумента, не заданного в таблице.

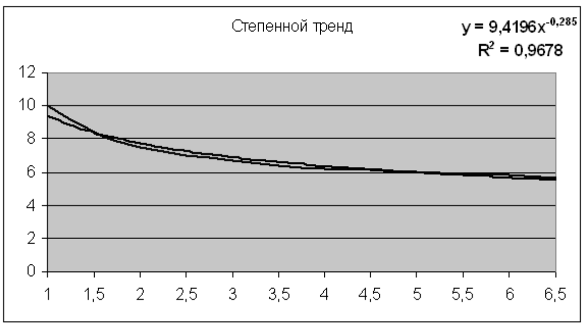
Пример. Для табличных данных из предыдущего примера подобрать наиболее подходящую линию тренда. Вычислить значение функции для x=5.8. Отобразить полученное значение на графике.

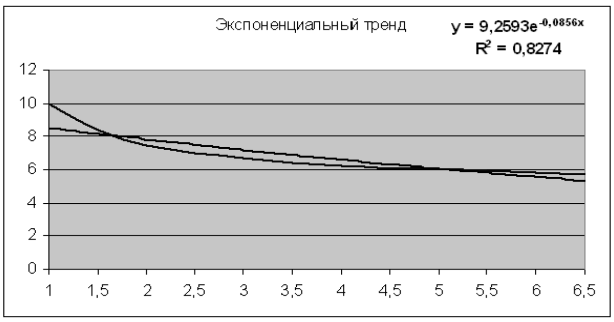
Порядок выполнения:

1. По табличным данным построить точечную диаграмму, скопировать ее три раза и добавить четыре линии тренда: логарифмическую, полиномиальную степени 3, степенную и экспоненциальную.







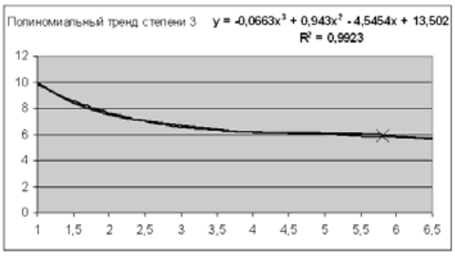


2. Анализируя величину R^2 для каждой линии тренда, можно сделать вывод, что наиболее подходящей аппроксимирующей функцией является полином степени 3 (R^2=0,9923).

3. Для вычисления значения функции по заданному значению аргумента (x=5,8):

a) в отдельную ячейку занести значение аргумента, присвоить ячейке имя **x,**
b) скопировать уравнение линии тренда (начиная со знака "=") в соседнюю ячейку, внося необходимые изменения (в частности, придется вставить знаки * и ^, удалить лишний пробел в начале формулы). В результате получим значение **5,925274.**

4. Для отображения точки на графике выполнить добавление ряда данных, задавая в качестве нового ряда ячейки, заполненные на предыдущем шаге. Отформатировать полученный ряд маркером "х".



Форматирование линий тренда выполняется стандартными средствами форматирования диаграмм. Для редактирования линии ее необходимо выделить и выбрать в контекстном меню **Формат линии тренда**. Для удаления линии тренда ее необходимо выделить и нажать клавишу Delete.

Задания по теме «Аппроксимация»

ЗАДАНИЕ 1 Линейная аппроксимация

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Коэффициент φ *продольного изгиба центрально-сжатых элементов из стали вычисляется по таблице в зависимости от гибкости* λ.

λ	10	20	30	40	50	60	70	80	90
φ	0.988	0.967	0.939	0.906	0.869	0.827	0.782	0.734	0.665

Аппроксимировать зависимость $\varphi(\lambda)$ *линейной функцией* $g(a,b,\lambda)=a\cdot\lambda+b$. *Вычислить коэффициент* φ *при заданном значении* λ.

Найти коэффициенты продольного изгиба **φ1** и **φ2** центрально-сжатых элементов с заданными гибкостями **λ1** и **λ2**, используя линейную аппроксимацию.

Вариант 1	***Вариант 2***
λ1=34 и λ2=86 Ответ: 0.917, 0.71	λ1=17 и λ2=63 Ответ: 0.984, 0.801

Отобразить на графике полученные коэффициенты φ1 и φ2, добавляя точки с координатами (λ1, φ1), (λ2, φ2). Точки отметить символом «+».

ЗАДАНИЕ 2 Квадратичная аппроксимация

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Аппроксимировать зависимость $\varphi(\lambda)$ *из задания 1 квадратичной функцией* $g(a0,a1,a2,\lambda)=a0+a1\cdot\lambda+a2\cdot\lambda^2$. *Вычислить коэффициент* φ *при заданном значении* λ.

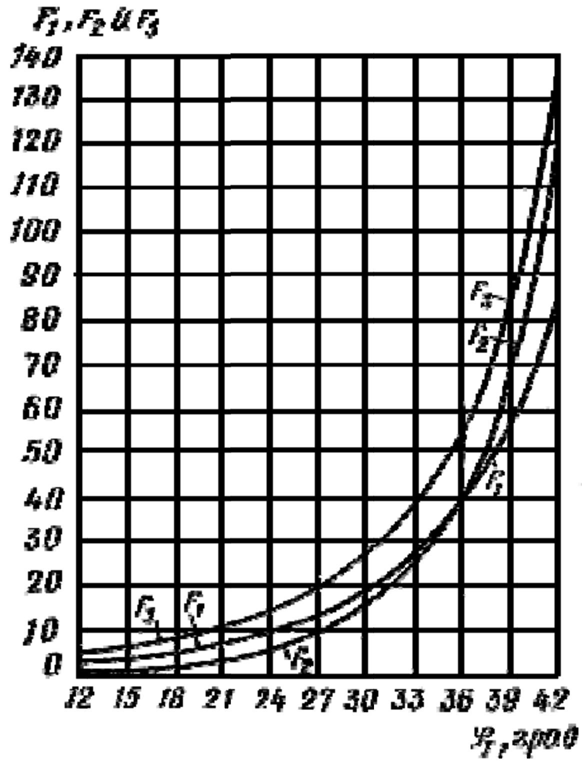
Найти коэффициенты продольного изгиба **φ1** и **φ2** центрально-сжатых элементов с заданными гибкостями **λ1** и **λ2**, используя квадратичную аппроксимацию.

Вариант 1	***Вариант 2***
λ1=34 и λ2=86 Ответ: 0.927, 0.693	λ1=17 и λ2=63 Ответ: 0.973, 0.814

Отобразить на графике полученные коэффициенты φ1 и φ2, добавляя точки с координатами (λ1, φ1), (λ2, φ2). Точки отметить символом «+».

ЗАДАНИЕ 3 Подбор функции с использованием аппроксимации

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ



В пособии по проектированию оснований зданий и сооружений (к СНиП 2.02.01-83) на рисунке 76 отображены графики коэффициентов для расчета несущей способности оснований в условиях сейсмических воздействий. Подобрать наилучшую приближающую функцию для аппроксимации графика.

Порядок выполнения

3.1 Сформировать два вектора: вектор аргументов углов внутреннего трения φT на интервале [12, 42] и вектор значений – коэффициенты Fi (i=1,2,3 по вариантам). Вектор φT должен содержать значения, отложенные на горизонтальной оси графика. Вектор Fi должен содержать соответствующие значения ординат графика (*Замечание*: эти значения определить приближенно по графику).

3.2 Построить график зависимости (какой тип диаграммы выбрать?). Отобразить диаграмму в виде несвязанных точек.

3.3 Скопировать диаграмму 6 раз.

3.4 На первую нанести линейный тренд, выводя **уравнение регрессии** и величину достоверности аппроксимации $\mathbf{R^2}$.

3.5 На вторую – экспоненциальный.

3.6 На третий – логарифмический.

3.7 На четвертый – полиномиальный степени

3.8 На пятый - полиномиальный степени 3.

3.9 На шестой – степенной.

3.10 Из построенных линий тренда выбрать наилучший. Записать комментарий, какая линия тренда является наилучшей и почему.

3.11 Вычислить коэффициенты **f1, f2, f3** для заданных значений **φT1=22**, **φT2=35**, **φT3=40**.

3.12 Добавить на график с лучшим трендом полученные коэффициенты (φT1,f1), (φT2,f2) и (φT3,f3) как отдельные точки и отметить их маркерами **x**.

1