В.В. Соколова

Численные методы решения задач в строительстве.
Решение нелинейных уравнений в Excel.
Решение систем линейных уравнений в Excel.

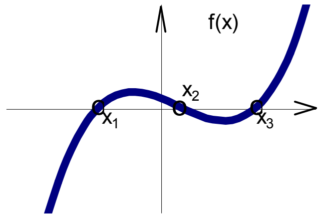
Тема 1 Решение нелинейных уравнений

1.1 Основные понятия

В общем случае уравнение с одним неизвестным имеет вид **f(x)=0**.

Если уравнение от одной неизвестной имеет вид: **f1(x)=f2(x),** его всегда можно преобразовать к виду **f(x)=0**, где **f(x)=f1(x)-f2(x).**

Корень уравнения f(x)=0– это такое значение x^*, при котором выполняется равенство $f(x^*)=0$. Геометрически корень уравнения – это абсцисса точки пересечения графика функции f(x) с осью OX.



В зависимости от входящих в уравнение функций трансцендентное уравнение может иметь:

- бесконечное множество корней. Например, для уравнения **sin(x)=0** корнями являются значения $\mathbf{x^* = k \cdot \pi}$, где **к** – целое число (рисунок 1.1);
- единственный корень. Например, для уравнения $\sqrt{x}-2=0$ корнем является значение $\mathbf{x^* = 4}$ (рисунок 1.2)**.**
- не иметь корней. Например, для уравнения $3^x+5=0$ нет чисел **x***, для которых выполняется равенство 0 (рисунок 1.3).

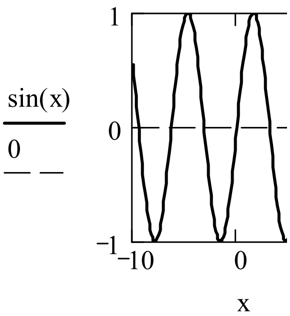


Рисунок 1.1

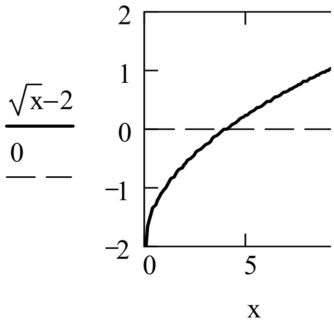


Рисунок 1.2

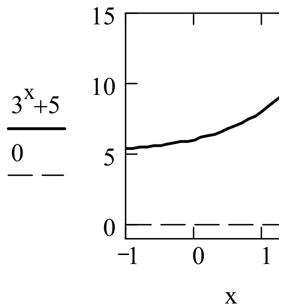


Рисунок 1.3

1.2 Классификация методов решения уравнений

Все методы решения нелинейных уравнений можно разделить на две группы: аналитические и итерационные (приближенные).

Аналитические методы позволяют найти точное решение с помощью формул. Они разработаны для небольшого класса уравнений: квадратных, кубических, биквадратных, специального вида тригонометрических и логарифмических. Например, формула для нахождения корней квадратного уравнения, формула Кардана для решения кубических уравнений.

Итерационные (численные) методы могут быть использованы для любых уравнений, но они позволяют находить приближенное решение с заданной точностью. Точность вычисления показывает, насколько приближенное значение корня может отличаться от точного. В итерационных методах задается некоторый алгоритм решения, который многократно применяется к уравнению.

Если алгебраическое или трансцендентное уравнение достаточно сложно, то его корни очень редко удается найти точно. Кроме того, уравнение, описывающее реальные физические процессы, содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно. В этом случае задача точного определения корней теряет смысл.

Приближенное нахождение изолированных действительных корней уравнения (численное решение уравнения) состоит из двух этапов:

Этап 1. Отделение корней – нахождение достаточно малых интервалов, каждый из которых содержит ровно один корень уравнения. В некоторых методах требуется задать не интервал, содержащий корень, а начальное приближение корня.

Этап 2. Уточнение приближенных значений корней – определение корня с заданной точностью.

1.3 Отделение корней

Процесс отделения корней опирается на следующую теорему математического анализа.

Теорема. Пусть

1) функция f(x) определена, непрерывна и имеет непрерывную производную на интервале [a,b];
2) функция f(x) принимает значения разных знаков на концах интервала [a,b], т.е. f(a)*f(b)<0;
3) производная функции на интервале сохраняет постоянный знак и, значит, f(x) монотонна на [a,b].

Тогда внутри интервала [a,b] содержится ровно один корень $x = x^*$ уравнения f(x) = 0 (рис. 1.4).

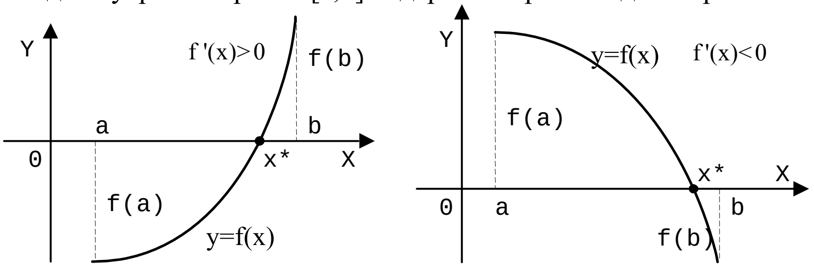
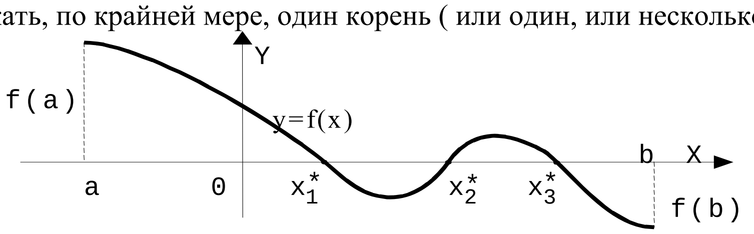


Рис. 1.4

Если в теореме не учитывать требование монотонности первой производной , то интервал [a,b] будет содержать, по крайней мере, один корень (или один, или несколько) (рис. 1.6).



Способы отделения корней уравнения f(x) = 0:

1. Графический
2. Табличный

1.3.1 Графический способ отделения корней

Для отделения корня строят таблицу функции на заданном интервале и график (точечную диаграмму) функции. Приближенные абсциссы точек пересечения графика с осью OX являются начальными приближениями к корням. Можно также по графику определить интервал, внутри которого находится корень.

Если уравнение задано в виде f1(x)=f2 его нужно привести к виду f(x)=0 (где f(x)=f1(x)-f2(x)).

Отделение корней в Excel

При построении графика функции в Excel используется **точечная** диаграмма.

Для отделения корней в **Excel** нужно:

1. Построить таблицу функции на интервале [xn, xk] с шагом h. Таблица может быть расположена горизонтально или вертикально.

Первая строка (столбец) таблицы содержат значения аргумента фунцкии: xn, xn+h … xk . Для задания последовательности значений аргумента используется автозаполнение.

Вторая строка (столбец) таблицы содержит значения функции для соответствующих значений аргументов.

	A	B	C		
1	**x**	xn	xn+h	…	xk
2	**f(x)**	=формула **f(B1)**			

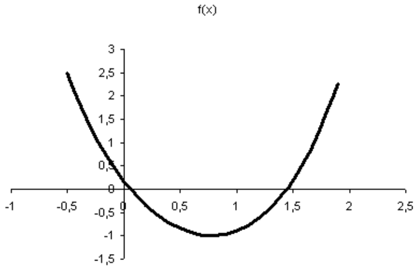
2. Построить **точечную** диаграмму.
3. Определить по графику приближенные значения корней уравнения как координаты точек пересечения графика с осью OX

Пример. Для уравнения $\mathbf{0.8\cdot(x-0.7)^4=sin2x}$ в Excel отделить корни на интервале **[-0.5,1.9].**

1. Привести уравнение к виду **f(x)= 0:** $\mathbf{0.8\cdot(x-0.7)^4-sin2x=0}$, тогда $\mathbf{f(x)=0.8\cdot(x-0.7)^4-sin2x}$.
2. Построить таблицу функции на интервале **[-0.5,1.9].** Шаг равен 0,2 (выбранный шаг должен обеспечивать плавность графика).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	**x**	-0,5	-0,3	-0,1	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
2	**f(x)**	**=0,8*(B1-0,7)^4-SIN(2*B1)**												

3. <u>Построить **точечную** диаграмму:</u>



4. Определяем приближенные значения координат точек пересечения графика с осью ОХ:
   X1 = 0,1 X2 = 1,5

При отделении корней в MathCAD выполняются те же действия, что и в Excel:

1. Определить функцию y = f(x), где f(x) – левая часть уравнения f(x) = 0.
2. Задать с шагом h значения переменной x на интервале **[a, b]**, на котором нужно найти корни уравнения.
   x := a, a + h .. b
3. Получить таблицу значений функции y = f(x)
4. Построить график функции y = f(x) и отобразить ось OX.
5. Визуально найти точки пересечения функции с осью OX

1.3.2 Табличный способ отделения корней

Для табличного способа отделения корней нужно так же, как и для графического способа, построить таблицу значений функции на заданном интервале [a,b], но с большим шагом h.

x	f(x)
a	f(**a**)
a+h	f(**a**+h)
. . . .	. . . .
b	f(**b**)

В колонке f(x) выбрать две соседние строки (с номерами ***i*** и ***i+1***), в которых происходит перемена **знака значения функции** (с "+" на "-" или с "-" на "+"). Тогда соответствующие найденным значениям функции **значения аргумента x** ($\mathbf{x_i}$ и $\mathbf{x_{i+1}}$) и являются концами интервала, содержащего корень уравнения,

Пример. Для уравнения $x^3 = 6 \cdot x - 2$ отделить корни на интервале [-4,3] табличным способом

После преобразования уравнения к виду f(x) = 0 функция левой части уравнения имеет вид

$\mathbf{f(x) := x^3 - 6 \cdot x + 2}$

Таблица значений функции на интервале [=4, 3] с шагом 1 приведена ниже:

x		**f(x) =**	
-4		**-38**	
-3	←	**-7**	Первая смена знака
-2	←	**6**	
-1		**7**	
0	←	**2**	Вторая смена знака
1	←	**-3**	
2	←	**-2**	Третья смена знака
3	←	**11**	

Находим в таблице f(x) два значения, где происходит смена знака с "+" на "-" или с "-" на "+". Первая смена знака значений функции произошла на интервале [-3,-2], вторая – на интервале [0,1], третья – [2,3].

В качестве начальных приближений корней можно взять один из концов, любую точку внутри интервала или середину интервала:

$$\mathbf{x1} := \frac{-3 + (-2)}{2} \qquad \mathbf{x2} := \frac{0+1}{2} \qquad \mathbf{x3} := \frac{2+3}{2}$$

$$\mathbf{x1} = -2.5 \qquad \mathbf{x2} = 0.5 \qquad \mathbf{x3} = 2.5$$

Поскольку уравнение является алгебраическим 3-й степени и имеет ровно 3 корня, то найдены все интервалы, содержащие корни уравнения.

Если в таблицу попало меньше корней, чем ожидается, то нужно уменьшить шаг при построении таблицы или расширить интервал.

Несмотря на то, что для графического способа отделения корней сначала необходимо построить таблицу значений функций, а затем график, он используется чаще, т.к. является более наглядным, а построение графика по имеющейся таблице значений функции для современных программных средств Excel и MathCAD не представляет трудностей.

1.4 Уточнение корня

Для уточнения корня (определения корня с заданной точностью) разработано множество численных методов: метод деления отрезка пополам, метод секущих, метод касательных (метод Ньютона), метод итераций, метод золотого сечения и др.

При уточнении корня любым численным методом строится последовательность приближенных значений корня $\mathbf{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n \ldots}$, которая сходится к точному значению корня x* при $\mathbf{n} \to \infty$.

Последовательность может содержать бесконечно много элементов, причем при возрастании n расстояние между $\mathbf{x_n}$ и корнем x* уменьшается. В какой момент можно остановить процесс уточнения? В численных методах этот процесс прекращается при достижении заданной точности вычисления.

Нахождение корня с заданной точностью означает, что задается некоторое фиксированное число (точность) $\boldsymbol{\varepsilon}$ $\mathbf{(0<\varepsilon<<1)}$ и вычисление элементов последовательности $\mathbf{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n \ldots}$ продолжается до тех пор, пока при некотором значении n абсолютная погрешность вычисления не достигает заданной точности $|\mathbf{x_n} - x^*| < \boldsymbol{\varepsilon}$. Но так как точное значение корня x* неизвестно, то вычисление продолжается до тех пор, пока два соседних элемента последовательности не будут отличаться друг от друга меньше, чем на $|\mathbf{x_n} - \mathbf{x_{n-1}}| < \boldsymbol{\varepsilon}$.

Алгоритм построения последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ зависит от конкретного метода уточнения корня уравнения (поиска решения).

Каждый шаг построения последовательных приближенных значений корня называется итерацией.

Для реализации итерационного процесса нахождения корня должны быть заданы начальное приближение $\mathbf{x_0}$ или интервал, содержащий корень, и точность $\boldsymbol{\varepsilon}$, с которой требуется найти решение уравнения.

1.5 Решение нелинейного уравнения в Excel

В Excel для уточнения корня (определения корня с заданной точностью) используется средство **Подбор параметра** или **Поиск решения**.

Уточнение корня с использованием средства Подбор параметра

Для вызова средства: вкладка **Данные** – панель **Работа с данными** – кнопка **Анализ «что-если»** - команда **Подбор параметра.**

В некоторых случаях система Excel не может найти решение, тогда выдается сообщение "Решение не найдено".

Выполнение подбора параметра система Excel реализует с использованием численных методов, для которых должны быть заданы следующие параметры:

1. *Относительная погрешность* – число, определяющее, на сколько вычисляемое значение может отличаться от требуемого значения. Погрешность должна задаваться десятичной дробью от 0 (нуля) до 1. Чем больше десятичных знаков в задаваемом числе, тем выше точность — например, число 0,0001 представлено с более высокой точностью, чем 0,01. По умолчанию в системе установлена погрешность 0,001. Как правило, для инженерных расчетов такой погрешности достаточно.

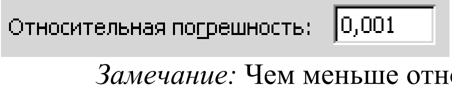
2. *Количество итераций* – число, задающее предельное количество промежуточных вычислений, за которое должно быть получено решение с заданной погрешностью. По умолчанию вычисления прекращаются после 100 итераций. Такое значение подходит для решения большинства простых задач.

Система Excel прекращает вычисления, когда достигнуты либо заданная погрешность, либо предельное число итераций. Параметры вычислений устанавливаются перед выполнением подбора параметра в диалоговом окне **Параметры Excel**.

Для уточнения корня уравнения с использованием средства **Подбор параметра** нужно задать приближенное значение корня.

Для уточнения корня:

1. Установить точность вычисления корня в диалоговом окне **Параметры Excel**, для вызова которого нажать кнопку **Office** и в появившемся окне – кнопу **Параметры Excel**. В окне **Параметры Excel** на вкладке **Формулы** задать погрешность вычисления корня в поле Относительная погрешность



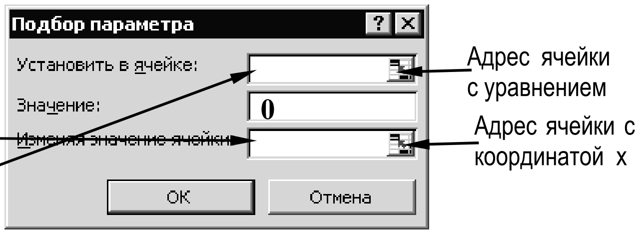
Замечание: Чем меньше относительная погрешность, тем точнее решение.

2. Занести приближенное значение корня в отдельную ячейку. Рядом (слева или ниже) занести формулу вычисления f(x) – левой части уравнения

3. Выполнить команду **Подбор параметра**. В полях диалогового окна задать:

- в поле **Установить в ячейке** - адрес ячейки с формулой для вычисления f(x);
- в поле **Значение** – 0 (значение правой части уравнения);
- в поле **Изменяя значение ячейки** – адрес с приближенным значением корня.

	A	B
3	x	координата x точки пересечения с OX
4	f(x)	=формула **f(B3)**



После подбора параметра корень будет занесен в изменяемую ячейку. Значение функции от корня отобразится в ячейке, содержащей формулу. Это значение должно быть близко к 0.

4. Повторить п. 2-3 для каждого корня.

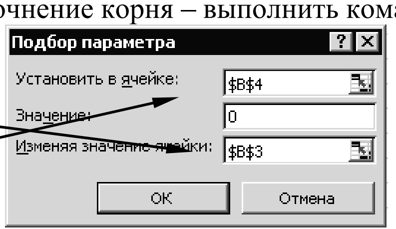
Пример. Решить уравнение $\mathbf{0.8\cdot(x\text{-}0.7)^4=sin2x}$ на интервале **[-0.5,1.9].** Порядок решения.

1. Привести уравнение к виду f(x) = 0: 0.8·(x-0.7)4-sin2x=0, тогда f(x)=0.8·(x-0.7)4-sin2x. Выполнить отделение корней. В результате отделения корней, выполненном в предыдущем примере нашли два приближенных значения корня: X1 = 0,1   X2 = 1,5

2. Занести приближенные значения корней в отдельные ячейки. Для каждого значения корня вычислить значение f(x).

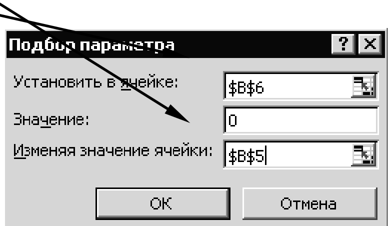
3. Для каждого значения корня выполнить уточнение корня – выполнить команду **Подбор параметра**.

	A	B
3	**x1**	0,1
4	**f(x1)**	**=0,8*(B3-0,7)^4-SIN(2*B3)**
5	**x2**	1,5
6	**f(x2)**	**=0,8*(B5-0,7)^4-SIN(2*B5)**



В результате получим:

	A	B	
3	**x1**	0,065084	Корень 1
4	**f(x1)**	0,000204	
5	**x2**	1,44584	Корень 2
6	**f(x2)**	0,000236	



Задания

ЗАДАНИЕ 1 Решение нелинейного трансцендентного уравнения (по номеру варианта: вариант – последняя цифра номера зачетной книжки)

1.1 Отделить корни уравнения графическим способом на заданном интервале. По графику определить начальное приближение корня (корней).

1.2 Для каждого начального приближения корня найти решение уравнения с точностью **ε=0.001**.

1.3 Изменить точность $\boldsymbol{\varepsilon=10^{-6}}$. Повторно решить уравнение с использованием. Сравнить полученные значения функции для найденных значений корней.

№ вар	Задание 1 (трансцендентное уравнение)	Задание 2 (алгебраическое уравнение)
1	$e^{-x}=0,5+\sqrt{x},$ на интервале [0,1]	$x^5-x=0,2.$ на интервале [-1,1.1], отметить на графике символом "x".
2	$\sqrt{x+1}=cos\big(0,5(x+1)\big),$ на интервале [-1,1]	$x^4+2x^3=x+1$ на интервале [-2,1], отметить на графике символом "+"
3	$5x-8\cdot ln\,x=8;$ на интервале [1,6]	$x^4+0,8x^3-0,4x^2=1,3x+1,2$ на интервале [-2,2], отметить на графике символом "□"
4	$x-\frac{sin\,x}{2}-1.5=0$, на интервале [1.5,2.5]	$x^4-4,1x^3+x^2+4,1=5,1x$ на интервале [-2,5], отметить на графике символом "◊"
5	x+*ln*(x+0,5)-0,2=0, на интервале [0;2]	$x^4+0.2x^3-4x^2=3x+0.5$ на интервале [-

№ вар	**Задание 1 (трансцендентное уравнение)**	**Задание 2 (алгебраическое уравнение)**
		2;2.4], отметить на графике символом "○"
6	$\frac{2\sin^2 x}{3} - \frac{3\cos^2 x}{4} = 0;$ на интервале [0,π/2]	$x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0;$ на интервале [-15,15], отметить на графике символом "x"
7	$x \cdot 2^x - 1 = 0,$ на интервале [0,1]	$x^3 - 6x^2 + 20 = 0$ на интервале [-3,6], отметить на графике символом "+"
8	$\left(4 + x^2\right)\left(e^x - e^{-x}\right) = 18,$ на интервале [0,2]	$2x^3 + 4x^2 - 1 = 0;$ на интервале [-1,1], отметить на графике символом "x"
9	$x^2 - 1{,}3 \cdot ln(x + 0{,}5) - 2{,}8x + 0{,}15 = 0$ на интервале [0,1]	$x^3 + 12x^2 - 2x - 4 = 0;$ на интервале [-2,2], отметить на графике символом "◊"
10	*tg*x-x=0, на интервале [4,4.7]	$x^3 - 10x^2 + x = -100$, на интервале [-5,5], отметить на графике символом "○"
11	$1{,}8(x - 0{,}7)^4 - \sin 10x = 0,$ на интервале [0,0.5]	$x^3 - 8x^2 + 20 = 0;$ на интервале [-2,6], отметить на графике символом "x"
12	$3x^2 - \cos 2x - 1 = 0,$ на интервале [0,2]	$5x^3 + 10x^2 + 5x = -0.5;$ на интервале [-1,0.5], отметить на графике символом "+"
13	x=*cos* x+1, на интервале [0,2]	$5x^3 - x + 0.1 = 0;$ на интервале [-1,1], отметить на графике символом "□"

ЗАДАНИЕ 2 Решение алгебраического уравнения (по номеру варианта: вариант – последняя цифра номера зачетной книжки)

Выполнить аналогично заданию 1

ЗАДАНИЕ 3 Вычисление критической силы

Определить критическую силу для стальной колонны двутаврового сечения, если известны:

- длина колонны **L=10 м**,
- модуль упругости стали **E=2.1·10^{11} Па**,
- коэффициент жесткости упругой опоры **C=6·10^{6}**
- момент инерции **I= 1.735·10^{-5} м^{4}**

Критическая сила вычисляется по формуле $P_{кр} = \frac{\pi \cdot E \cdot I}{(\mu \cdot L)^2}$, где μ - коэффициент приведения длины колонны, который определяется по формуле $\mu = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}$. Параметр ν находится из уравнения $tg(\nu) - \nu + \frac{\nu^3 \cdot E \cdot I}{L^3 \cdot C} = 0$ на интервале $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. Значение π задать как значение функции.

Порядок вычисления

1. Определить ν, решив уравнение
2. Вычислить μ
3. Вычислить Ркр

Ответ: 163616,8

Тема 2 Решение систем линейных алгебраических уравнений

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) из n уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{1,1}x_1 + \mathbf{a}_{1,2}x_2 + \ldots\ldots \mathbf{a}_{1,n}x_n = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{2,1}x_2 + \mathbf{a}_{2,2}x_2 + \ldots\ldots \mathbf{a}_{2,n}x_n = \mathbf{b}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a}_{n,1}x_1 + \mathbf{a}_{n,2}x_2 + \ldots\ldots \mathbf{a}_{n,n}x_n = \mathbf{b}_n \end{cases}$$

В матричной форме система записывается следующим образом: **A*X = B,** где

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,1} & \mathbf{a}_{1,2} & \cdots & \mathbf{a}_{1,n} \\ \mathbf{a}_{2,1} & \mathbf{a}_{2,2} & \cdots & \mathbf{a}_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{n,1} & \mathbf{a}_{n,2} & \cdots & \mathbf{a}_{n,n} \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$
матрица коэффициентов левой части системы,	коэффициенты правой части	вектор неизвестных

Если вектор B≠0, то это система линейных неоднородных уравнений. Она имеет единственное решение тогда, когда определитель матрицы A отличен от нуля.

Численные методы решения СЛАУ подразделяются на точные и приближенные (итерационные).

Точные методы - это методы, которые дают решение задачи за конечное число арифметических операций. Число этих операций зависит только от алгоритма решения СЛАУ и от порядка системы. Решение получается точное, если исходные данные задачи заданы точно и вычисления выполняются точно. Вследствие неизбежных ошибок округления в ЭВМ результаты даже точных методов являются в определенном смысле приближенными. Наиболее распространенным из точных методов решения является метод Гаусса.

Итерационные методы основаны на построении итерационной последовательности значений, сходящейся к искомому решению системы. Вычисляя определенное число итераций и обрывая процесс, можно получить приближенное решение системы с любой наперед заданной точностью. К итерационным методам относятся метод итераций, метод Зейделя и другие.

В MS Excel и системе MathCAD СЛАУ можно решить матричным способом (использованием обратной матрицы). Метод относится к точным методам. К точным методам относится также метод Гаусса.

Система MathCAD для решения СЛАУ также содержит итерационные методы – решение систем уравнений с использованием *блоков уравнений*.

Матричные способы решения СЛАУ

Как было показано выше, в матричной форме система записывается следующим образом: **A*X = B**

Если матрица A системы невырожденная (определитель матрицы отличен от нуля), то система уравнений имеет единственное решение.

В явном виде вектор решения системы $\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$, т.е. вектор решения системы равен произведению обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$для матрицы коэффициентов левой части и вектора правой части **B**.

Нахождение решения использованием обратной матрицы можно выполнить как в Excel, так и в MathCAD.

В MathCAD для решения системы в матричной форме имеются также функции **lsolve** (реализует метод обратной матрицы) и **rref** (реализует метод Гаусса).

Решение системы уравнений в Excel методом обратной матрицы

Для нахождения решения в Excel используются функции категории **Математические**:

1) **МОПРЕД**(*матрица*) - вычисление определителя квадратной матрицы, где в качестве *матрицы* указывается диапазон размещения матрицы, например, ***МОПРЕД(A2:C4)***. Диапазон не должен содержать текст или **пустые значения** ячеек, иначе выдается сообщение об ошибке **#ЗНАЧ!**

2) **МОБР**(*матрица*) – вычисление обратной матрицы A^{-1}, где в качестве *матрицы* указывается диапазон размещения исходной матрицы **A**, например, ***МОБР(A2:C4)***,

3) **МУМНОЖ**(*матрица1, матрица2*) – умножение двух матриц или матрицы и вектора, в качестве аргументов указываются диапазоны размещения матриц. Количество столбцов первой матрицы должно быть равно количеству строк второй.

Две последние функции возвращают в качестве значения не отдельное число (скаляр), как **МОПРЕД**, а массив значений. Для получения результата в качестве массива необходимо:

1. Предварительно выделить интервал, где будет находиться результат – обратная матрица или произведение матриц,
2. Ввести формулу, представляющую обращение к функции с заданными параметрами,
3. Нажать совместно три клавиши **Ctrl+Shift+Enter** вместо кнопки **OK**,
4. Во всех выделенных ячейках будет записано **{=формула}.** Отдельную ячейку (ячейки) в полученном таким образом массиве нельзя изменять или удалять.

Пример 1. Найти решение системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

Порядок выполнения:

1. Задать исходные данные: матрицу **A** и вектор **B**, например, в ячейках **A2:C4** и **E2:E4**,
2. Вычислить определитель, чтобы убедиться в том, что система имеет решение: в ячейку **C5** ввести формулу =**МОПРЕД(A2:C4)**,
3. Вычислить обратную матрицу A^{-1}:

a. выделить ячейки **A8:C10**, в которые будет помещена обратная матрица,

b. ввести формулу =**МОБР(A2:C4),**

c. нажать клавиши **Ctrl+Shift+Enter**

4. Выполнить умножение A^{-1} на B:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Матрица левой части А				Вектор правой части В		
2	1	0	2		7		
3	5	-1	-1		0		
4	-1	3	-1		2		
5	Определитель		32				
6							
7	Обратная матрица				Вектор решения		
8	0,125	0,1875	0,0625		1		
9	0,1875	0,03125	0,34375		2		
10	0,4375	-0,09375	-0,03125		3		
11							

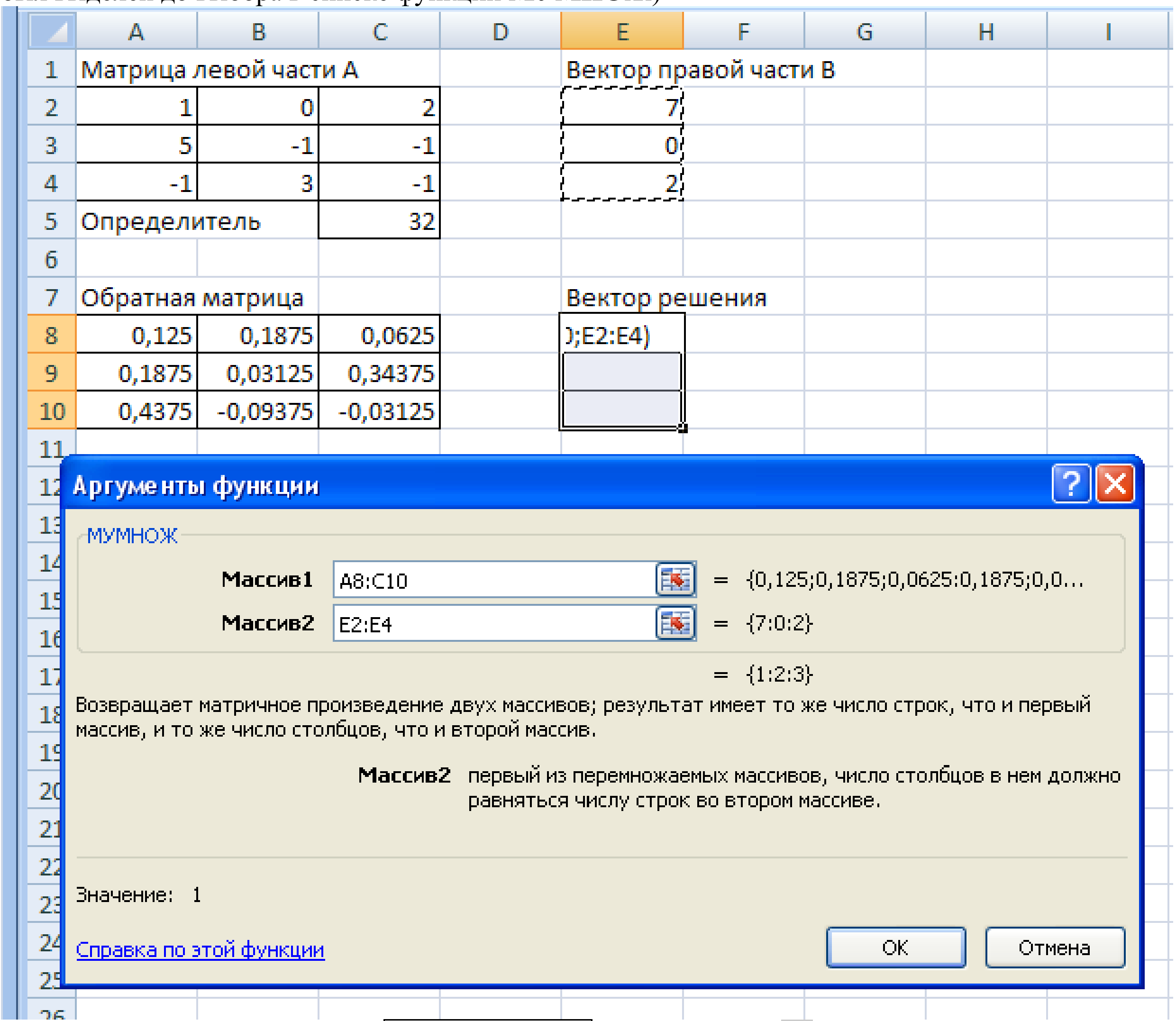
Замечания.

Замечание 1. Обратную матрицу можно не вычислять, а сразу при умножении указать **=МУМНОЖ(МОБР(A2:C4);E2:E10).**

Замечание 2. Для ввода формул в ячейки рекомендуется использовать **Мастер функций**, для чего:

1. Перейти на вкладку **Формулы**,
2. На панели **Библиотека функций** в списке **Математические** выбрать нужную функцию (**МОБР, МУМНОЖ, МОПРЕД**). ! До выбора функций **МОБР, МУМНОЖ** выделить диапазон ячеек, где будет размещаться обратная матрица или произведение матриц.
3. В диалоговом окне **Мастера функций** задать аргументы функции. Для ввода аргумента выделить диапазон ячеек, содержащих матрицу. Ниже приведен пример ввода функции **МУМНОЖ** для умножения обратной матрицы на вектор правой части (диапазон ячеек для размещения произведения матриц E8:E10

был выделен до выбора в списке функции **МУМНОЖ**)



4. Нажать совместно три клавиши **Ctrl+Shift+Enter** вместо кнопки **OK**

Замечание 3: Если диапазону **A2:C4** присвоить имя **A**, а диапазону **E2:F11** – имя **B**, то формулу можно записать =**МУМНОЖ(МОБР(A);B).**

Матричный способ удобен, если нужно решить СЛАУ с несколькими вариантами правых частей. Такая задача в практике инженерных расчетов возникает довольно часто, например, при расчете конструкций с несколькими вариантами приложения внешних нагрузок.

При решении СЛАУ n-го порядка с несколькими вариантами правых частей матрица А является общей для всех систем, а В представляет собой матрицу размерности (n x m), где m – количество вариантов правых частей.

Пример 2. Найти решение системы линейных алгебраических уравнений с двумя вариантами правых частей. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. фактически нужно решить две системы с одинаковой левой частью:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Порядок выполнения:

1. Задать исходные данные: матрицу **A** и матрицу **B**, например, в ячейках **A2:C4** и **E2:F4** (матрица В состоит из двух векторов правых частей решаемых уравнений),
2. Вычислить определитель, чтобы убедиться в том, что система имеет решение: в ячейку **C5** ввести формулу =**МОПРЕД(A2:C4)** (ввод формулы ,
3. Вычислить обратную матрицу A^{-1}:

a. выделить ячейки **A8:C10**, в которые будет помещена обратная матрица,

b. ввести формулу =**МОБР(A2:C4),**

c. нажать клавиши **Ctrl+Shift+Enter**

4. Выполнить умножение A^{-1} на B:

a. выделить ячейки **E8:F10**, в них будет помещен вектор решений,

b. ввести формулу =**МУМНОЖ(A8:C10; E2:F10)**,

c. нажать клавиши **Ctrl+Shift+Enter**

5. Нажать совместно три клавиши **Ctrl+Shift+Enter** вместо кнопки **OK**

Задание 1 Результат выполнения:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Матрица левой части A				Матрица правой части B		
2	1	0	2		7	3	
3	5	-1	-1		0	3	
4	-1	3	-1		2	1	
5	Определитель		32				
6							
7	Обратная матрица				Векторы решения		
8	0,125	0,1875	0,0625		1	1	
9	0,1875	0,03125	0,34375		2	1	
10	0,4375	-0,09375	-0,03125		3	1	
11							

После решения системы диапазон ячеек E8:E10 содержит решение первой системы уравнений, диапазон ячеек F8:F10 – решение второй системы уравнений.

Расчет фермы

Фермой называется геометрически неизменяемая шарнирно-стержневая конструкция.

Точки, в которых сходятся оси стержней, называются узлами фермы, а те узлы, которыми ферма опирается на основание, называются опорными узлами.

Если шарниры, соединяющие стержни фермы, предполагаются идеальными, т.е. без трения, а внешние силы – приложенными к узлам фермы, то все стержни испытывают лишь растяжение или сжатие, так как к каждому стержню приложены силы только на его концах.

Под расчетом фермы подразумевается определение усилий в стержнях фермы.

Рассмотрим определение усилий в стержнях статически-определимой фермы по способу вырезания узлов.

Статически-определимой называется ферма, для которой выполняется равенство

$2M-N-3=0$,

где M – число узлов фермы; N – число стержней фермы (исключая опорные).

Способ вырезания узлов состоит в том, что мысленно вырезаются узлы фермы, прикладываются к ним соответствующие внешние силы и реакции стержней и составляются уравнения равновесия этих сил, приложенных к каждому узлу.

Уравнение равновесия имеет вид

$\sum S=0$, (1)

где $\sum S$ – векторная сумма внешних сил и реакций стержней, сходящихся в узле.

Вместо векторов сил удобнее оперировать их проекциями на оси OX и OY - Sx, Sy:

$\sum Sx=0$, $\qquad$ $\sum Sx=0$. (2)

Так как в начале расчета фермы неизвестно, какие стержни фермы растянуты и какие сжаты, то условно предполагают, что все стержни растянуты (реакции стержней направлены от узлов).

Последовательно составляя уравнения для всех узлов, получим систему линейных алгебраических уравнений, неизвестными в которой являются усилия в стержнях.

Если в результате решения системы получают значение какого-либо усилия со знаком минус, то соответствующий стержень сжат.

При составлении уравнений равновесия опорных узлов следует обратить внимание на опорные стержни. Шарнирно-неподвижную опору следует рассматривать как систему из двух взаимно перпендикулярных стержней, а в шарнирно-подвижной опоре стержень следует располагать в направлении реакции этой опоры.

Рассмотрим на примере формирование системы уравнений для расчета фермы, изображенной на рисунке 1:

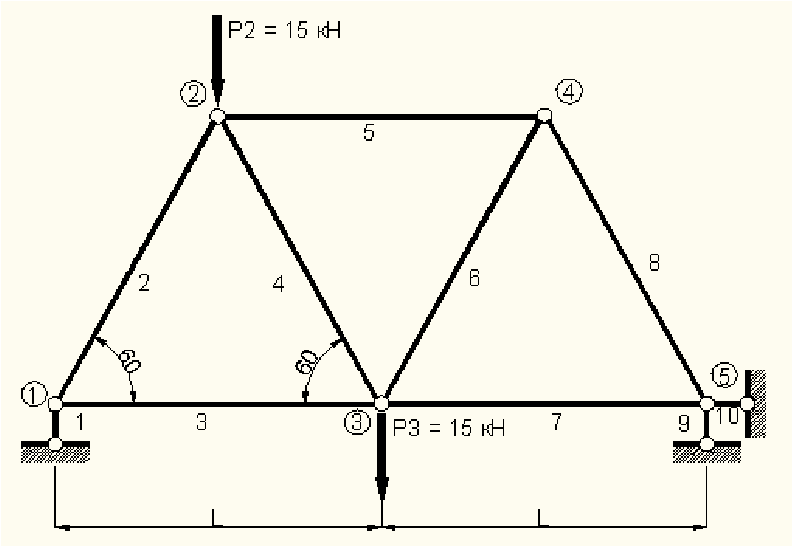
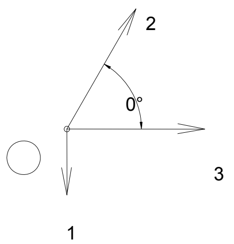
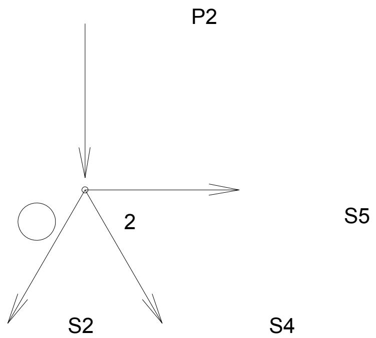
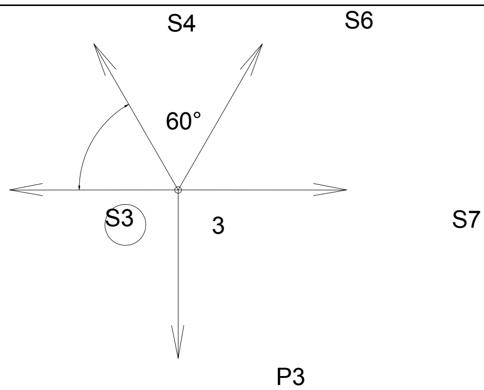
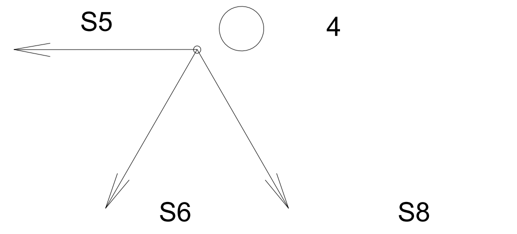
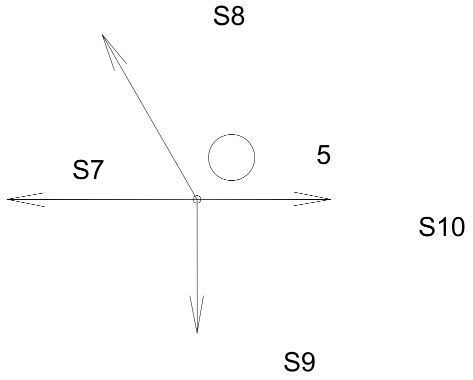


Рис. 1

Для каждого узла составим уравнения равновесия в форме (2).

 Узел 1	$S_2{*}\cos 60°+S_3=0$ $-S_1+S_2\cos 30°=0$
 Узел2	$-S_2\cos 60°+S_4\cos 60°+S_5 = 0$ $-S_2\cos 30°-S_4\cos 30° - P_2 = 0$
 Узел 3	$-S_3-S_4\cos 60°+S_6\cos 60°+S_7 = 0$ $S_4\cos 30°+S_6\cos 30° - P_3 = 0$

 Узел 4	$-S_5-S_6\cos60° + S_8\cos60° = 0$ $-S_6\cos30° - S_8\cos30° = 0$
 Узел 5	$-S_7-S_8\cos60° + S_{10} = 0$ $S_8\cos30° - S_9 = 0$

Полученные уравнения запишем в виде системы уравнений:

Sscos60°+s3 = 0
-S1+S2cos30° = 0
-S2cos60°+S4cos60°+S5 = 0
-S2cos30°-S6cos30° = P2
-S3-S4cos60°+S4cos60°+S7 = 0
S4cos30°+S4cos30° = P3
-S5-S6cos60°+S8cos60° = 0
-S6cos30°-S8cos30° = 0
-S7-S8cos60°+S10 = 0
S8cos30°-S9 = 0

Неизвестными здесь являются усилия Si. Поставив в систему значения направляющих косинусов(cos60° = 0.5, cos30° = 0.866) и нагрузок(P2 = 15 кН, P3 = 15 кН), запишем матрицу левой части и вектора правой части:

Матрица левой части
(коэффициенты при неизвестных)

Вектор правой части (свободные члены)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Вектор правой части (свободные члены)
	0,5									
1	0,866									
	-0,5		0,5							
	-0,866		-0,866							15
		1	-0,5		0,5					
			0,866		0,866					15
				1	-0,5		0,5			
					-0,866		-0,866			
						1	-0,5			
							0,866	1		

Решим в Excel сформированную систему уравнений матричным методом:

1. Вводим значения элементов матрицы левой части А и вектора правой части В
2. Находим обратную матрицу для матрицы А
3. Находим вектор решения

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Матрица левой части А											Вектор правой части
2	0	0,5	1	0	0	0	0	0	0	0		0
3	-1	0,866	0	0	0	0	0	0	0	0		0
4	0	-0,5	0	0,5	1	0	0	0	0	0		0
5	0	-0,866	0	-0,866	0	0	0	0	0	0		15
6	0	0	-1	-0,5	0	0,5	1	0	0	0		0
7	0	0	0	0,866	0	0,866	0	0	0	0		15
8	0	0	0	0	-1	-0,5	0	0,5	0	0		0
9	0	0	0	0	0	-0,866	0	-0,866	0	0		0
10	0	0	0	0	0	0	-1	-0,5	0	1		0
11	0	0	0	0	0	0	0	0,866	-1	0		0
12												
13	Обратная матрица A^{-1}											
14	0	-1	-0,433	-0,75	0	-0,5	-0,433	-0,25	0	0		
15	0	0	-0,5	-0,866	0	-0,577	-0,5	-0,289	0	0		
16	1	0	0,25	0,433	0	0,2887	0,25	0,1443	0	0		
17	0	0	0,5	-0,289	0	0,5774	0,5	0,2887	0	0		
18	0	0	0,5	-0,289	0	-0,577	-0,5	-0,289	0	0		
19	0	0	-0,5	0,2887	0	0,5774	-0,5	-0,289	0	0		
20	1	0	0,75	0,1443	1	0,2887	0,75	0,433	0	0		
21	0	0	0,5	-0,289	0	-0,577	0,5	-0,866	0	0		
22	0	0	0,433	-0,25	0	-0,5	0,433	-0,75	0	-1		
23	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0		
24												
25	Вектор решения											
26	-18,75											
27	-21,65											
28	10,826											
29	4,3303											
30	-12,99											
31	12,991											
32	6,4954											
33	-12,99											
34	-11,25											
35	0											

Как правило, возникает необходимость расчета фермы для нескольких вариантов нагрузки. В этом случае формируется несколько вариантов правых частей уравнений, а левая часть остается неизменной. Например, если для фермы, изображенной на рис. 1, приложить еще один вариант нагрузки (рис. 2), то к существующему вектору правой части добавится еще один. Таким образом, полученная система уравнений является системой уравнений с двумя вариантами правой части, матрица левой и правой частей которой представлена ниже.

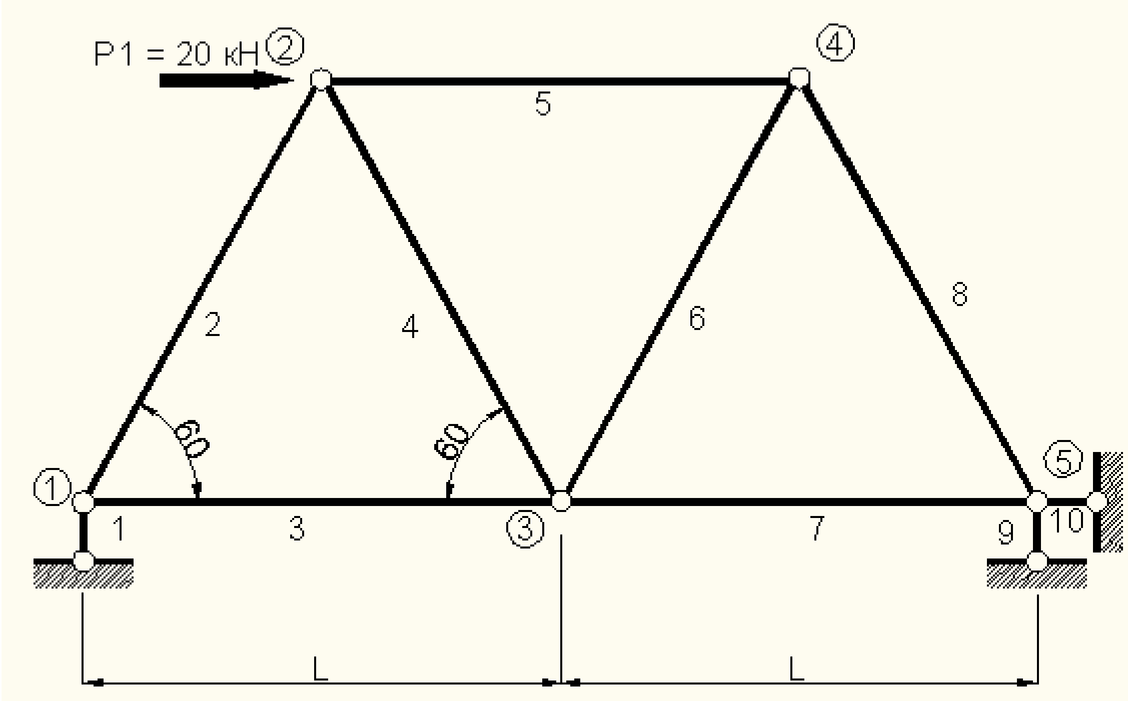


Рис. 2

Матрица левой части
(коэффициенты при неизвестных)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0,5								
1	0,866								
	-0,5		0,5						
	-0,866		-0,866						
		1	-0,5		0,5				
			0,866		0,866				
				1	-0,5		0,5		
					-0,866		-0,866		
						1	-0,5		
							0,866	1	

Матрица правой части (свободные члены)

	-2
15	
15	

Решаем систему уравнений матричным методом в Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Матрица левой части А											Векторы правых частей	
2	0	0,5	1	0	0	0	0	0	0	0		0	0
3	-1	0,866	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0
4	0	-0,5	0	0,5	1	0	0	0	0	0		0	-20
5	0	-0,866	0	-0,866	0	0	0	0	0	0		15	0
6	0	0	-1	-0,5	0	0,5	1	0	0	0		0	0
7	0	0	0	0,866	0	0,866	0	0	0	0		15	0
8	0	0	0	0	-1	-0,5	0	0,5	0	0		0	0
9	0	0	0	0	0	-0,866	0	-0,866	0	0		0	0
10	0	0	0	0	0	0	-1	-0,5	0	1		0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0,866	-1	0		0	0
12													
13	Обратная матрица A^{-1}												
14	0	-1	-0,433	-0,75	0	-0,5	-0,433	-0,25	0	0			
15	0	0	-0,5	-0,866	0	-0,577	-0,5	-0,289	0	0			
16	1	0	0,25	0,433	0	0,2887	0,25	0,1443	0	0			
17	0	0	0,5	-0,289	0	0,5774	0,5	0,2887	0	0			
18	0	0	0,5	-0,289	0	-0,577	-0,5	-0,289	0	0			
19	0	0	-0,5	0,2887	0	0,5774	-0,5	-0,289	0	0			
20	1	0	0,75	0,1443	1	0,2887	0,75	0,433	0	0			
21	0	0	0,5	-0,289	0	-0,577	0,5	-0,866	0	0			
22	0	0	0,433	-0,25	0	-0,5	0,433	-0,75	0	-1			
23	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0			
24													
25	Векторы решения												
26	-18,75	8,66											
27	-21,65	10											
28	10,826	-5											
29	4,3303	-10											
30	-12,99	-10											
31	12,991	10											
32	6,4954	-15											
33	-12,99	-10											
34	-11,25	-8,66											
35	0	-20											
36													

Получили два вектора решения, которые приведены в табл. 1 (для 1-го варианта нагрузки) и в табл. 2 (для 2-го варианта нагрузки).

Таблица 1

Номер стержня	Усилие, кН
1	-18,75
2	-21,65
3	10,826
4	4,330
5	-12,99
6	12,991
7	6,495
8	-12,99
9	-11,25
10	0,000

Таблица 2

Номер стержня	Усилие, кН
1	8,66
2	10
3	-5
4	-10
5	-10
6	10
7	-15
8	-10
9	-8,66
10	-20

Задания

Задание 1.

Решить в Excel систему линейных уравнений матричным способом (по номеру варианта)

Вариант	Система уравнений	Вариант	Система уравнений
1	$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 6x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$	7	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 5x_1 - x_2 = 6 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$	8	$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ -2x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 7 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$	9	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 \\ -2x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$	10	$\begin{cases} -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -4 \\ -2x_2 + x_3 = 8 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$	11	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4 \\ -x_2 - 4x_3 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 7 \\ -6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + -6x_3 = 8 \\ 5x_2 - 4x_3 = -6 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$

Задание 2

Решить в Excel СЛАУ с двумя вариантами правых частей

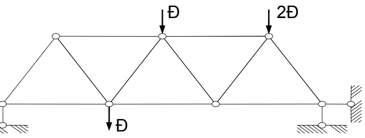
$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -6 \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 2x_4 = 13 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 10x_4 = 14 \end{cases} \left|\begin{matrix} 4 \\ 17 \\ -5 \\ 5 \end{matrix}\right|$$

Задание 3

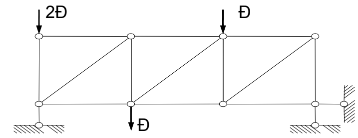
Определить усилия в стержнях статически-определимой фермы по способу вырезания узлов (по вариантам).

P = 20 кН.

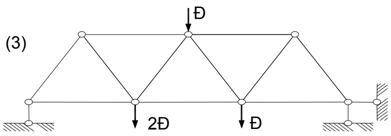
(1)



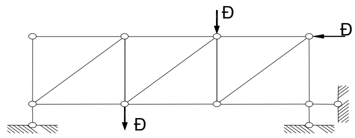
(2)



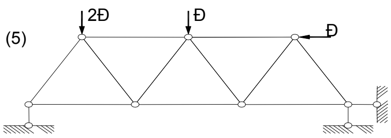
(3)



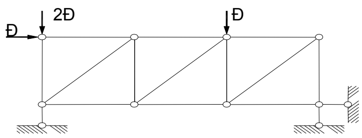
(4)



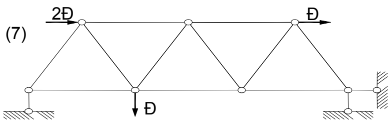
(5)



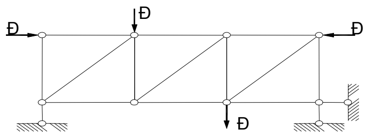
(6)



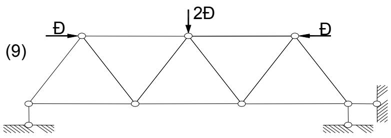
(7)



(8)



(9)



(10)