Контрольная работа № 4

Тема 1. Производная.

Тема 2. Исследование функций.

Задача 1. Вычислить производные следующих функций

1.1 а) $y=\dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$; б) $y=e^{-x^2}\cdot\cos^3(2x+3)$; в) $y=x\cdot arctg^3 5x+\ln tgx$;

г) $\begin{cases} x=2\cdot\cos^3 2t \\ y=\sin^3 2t \end{cases}$.

1.2 а) $y=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$; б) $y=x\cdot\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$; в) $y=e^{-\cos^4 5x}$;

г) $\begin{cases} x=\dfrac{2-t}{2+t^2} \\ y=\dfrac{t^2}{2+t^2} \end{cases}$.

1.3 а) $y=\sqrt[3]{1+x\cdot\sqrt{x+3}}$; б) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$; в) $y=e^{\frac{1}{x^2}}$;

г) $\begin{cases} x=ctgt \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$.

1.4 а) $y=x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2}{1+x}}$; б) $y=\dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$; в) $y=2^{\frac{1-x}{1+x}}$;

г) $\begin{cases} x=t^2+t-1 \\ y=t^3+t \end{cases}$.

1.5 а) $y=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\dfrac{5}{\sqrt[4]{(x^3+2)^3}}$; б) $y=\cos(\ln^2 x)$; в) $y=(e^{\sin x}+1)^2$;

г) $\begin{cases} x=\arcsin(t^2-1) \\ y=\arccos 2t \end{cases}$.

1.6 а) $y=x+\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$; б) $y=\sin\sqrt{1+x^3}$; в) $y=\ln(ctg\sqrt[3]{x})$;

г) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{1}{2}t^2+t \\ y=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{t} \end{cases}$.

1.7 а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x}{1+x^2}}$; б) $y=\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$; в) $y=arctg(e^{x\cdot\sin x})$;

г) $\begin{cases} x = 5\cos^3 x \\ y = 4\sin^3 x \end{cases}$.

1.8 а) $y = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; б) $y = e^{3+\ln^2 x}$; г) $y = arctg\,\dfrac{1}{x}$;

г) $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = 2t - \sin 2t \end{cases}$.

1.9 а) $y = \dfrac{3x}{\sqrt[3]{2+x}} - 6\sqrt[3]{2+x}$; б) $y = \sin^3 2x$; в) $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

г) $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2}\sin 2t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$.

1.10 а) $y = \sqrt[3]{x^4 + 5x} - \sqrt[4]{(5x-1)^3}$; б) $y = \dfrac{1+tgx}{1-tgx}$; в) $y = arctg\sqrt{x} - \sqrt{x}$;

г) $\begin{cases} x = t + \ln\cos t \\ y = t - \ln\sin t \end{cases}$.

Задача 2. Точка движется прямолинейно по закону $s = f(t)$. Найти скорость и ускорение в момент $t = t_0$. Определить в какой момент скорость движения точки будет равна нулю.

2.1 $s = 2t^3 + 3t^2 - 12t, \quad t_0 = 2$.

2.2 $s = 7 + 4t^3 - t^4, \quad t_0 = 1$.

2.3 $s = t - 2\sqrt{t} + 1, \quad t_0 = 4$.

2.4 $s = t + \dfrac{4}{t}, \quad t_0 = 10$.

2.5 $s = 7t^3 + 9t^2 - 3t + 6, \quad t_0 = 2$.

2.6 $s = t^4 - 2t^3 + t^2, \quad t_0 = 3$.

2.7 $s = 4\sqrt{t} - t, \quad t_0 = 1$.

2.8 $s = t + \dfrac{9}{t}, \quad t_0 = 10$.

2.9 $s = 2t^3 - 15t^2 + 36t - 13, \quad t_0 = 5$.

2.10 $s = \dfrac{1}{4}t^4 - 2t^3 + \dfrac{5}{2}t^2, \quad t_0 = 6$.

Задача 3. Провести полное исследование функции и построить ее график.

3.1 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$.

3.2 $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

3.2 $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$.

3.4 $y=\dfrac{x^2-2}{x^2+2}$.

3.5 $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

3.6 $y=\dfrac{x^2-12x+27}{(x-1)^2}$.

3.7 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

3.8 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

3.9 $y=\dfrac{x^2-8x+7}{(x+1)^2}$.

3.10 $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

Задача 4. Приближенно решишь уравнения. Отделить корни уравнения аналитически и уточнить методом Ньютона (методом касательных)

4.1 $x^3-3x^2+9x-8=0$

4.2 $x^3-6x-8=0$.

4.3 $x^3-3x^2+6x+3=0$.

4.4 $x^3-0.1x^2+0.4x-1.5=0$.

4.5 $x^3-3x^2+9x+2=0$.

4.6 $x^3+x-5=0$.

4.7 $x^3+0.2x^2+0.5x-1.2=0$.

4.8 $x^3+3x+1=0$.

4.9 $x^3+0.2x^2+0.5x-2=0$.

4.10 $x^3-3x^2+12x-9=0$

Контрольная работа № 5

Тема 3. Неопределённый интеграл.

Тема 4. Определенный интеграл.

Задача 1. Вычислить неопределенный интеграл.

1.1 а) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x}$; б) $\displaystyle\int (x+2)\cdot e^{2x}\,dx$;

в) $\int \frac{(x^2-6x+8)dx}{x^3+8}$; г) $\int (\cos^2 x+2)\cdot\sin^2 x\,dx$.

1.2 а) $\int 2x\cdot e^{3x^2+1}\,dx$; б) $\int (x-1)\cdot\cos\frac{x}{2}\,dx$;

в) $\int \frac{(3x^2-7x+2)dx}{(x-1)(x^2-x)}$; г) $\int \cos^4 x\cdot\sin^3 x\,dx$.

1.3 а) $\int \frac{(3x+9)dx}{x^2+6x+13}$; б) $\int (2-x)\cdot e^{-3x}\,dx$;

в) $\int \frac{(x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$; г) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

1.4 а) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{(\ln x)^2}}$; б) $\int (x+2)\cdot\cos(x/3)\,dx$;

в) $\int \frac{(x^2+3x+2)dx}{x^3-1}$; г) $\int \cos^2 x\cdot(\sin^2 x-3)\,dx$.

1.5 а) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x}dx}{1+x^2}$; б) $\int \ln(x+2)\,dx$;

в) $\int \frac{(2x^2+1)dx}{x^3-2x^2+x}$; г) $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$.

1.6 а) $\int e^{\cos 2x}\sin 2x\,dx$; б) $\int x\cdot\cos\frac{x}{5}\,dx$;

в) $\int \frac{(x^2-6x+8)dx}{x^3+8}$; г) $\int (\cos^2 x+2)\cdot\sin^2 x\,dx$.

1.7 а) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$; б) $\int x\cdot e^{2x+1}dx$;

в) $\int \frac{(x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$; г) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

1.8 а) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int (2-x)\cdot e^{-3x}\,dx$;

в) $\int \frac{8dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; г) $\int \sin^4 x\,dx$.

1.9 а) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{(\ln x)^2}}$; б) $\int (x+2)\cdot\cos(x/3)\,dx$;

в) $\int \frac{(2x^2+7x-1)dx}{(x+1)(x^2-1)}$; г) $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$.

1.10 а) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x}dx}{1+x^2}$; б) $\int x\cdot e^{-x}dx$;

в) $\int \frac{(5x^2+17x+36)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; г) $\int (\cos x+3)^2 dx$.

Задача 2. Вычислить определенный интеграл.

2.1 а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin\alpha \cdot \cos^3\alpha \ d\alpha$; б) $\int\limits_{1}^{e} x\ln x dx$.

2.2 а) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; г) $\int\limits_{-0,5}^{0} x \cdot e^{2x+1}dx$.

2.3 а) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x}$; б) $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1)dx$.

2.4 а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin\alpha \cdot \cos^4\alpha \ d\alpha$; б) $\int\limits_{1}^{e} x^3\ln x dx$.

2.5 а) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}/4} \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/4} x \cdot \sin 2x dx$.

2.6 а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin\alpha \cdot \cos^3\alpha \ d\alpha$; б) $\int\limits_{1}^{e} x\ln x dx$.

2.7 а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha \ d\alpha$; б) $\int\limits_{1}^{e} x^2\ln x dx$.

2.8 а) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x}$; б) $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1)dx$.

2.9 а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin\alpha \cdot \cos^4\alpha \ d\alpha$; б) $\int\limits_{1}^{e} x^3\ln x dx$.

2.10 а) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos x dx}{\sin x + 2}$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/4} x \cdot \sin 2x dx$.

Задача 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

3.1 $y = x^2$ *и* $y = 2 - x$.

3.2 $xy = 6$ *и* $x + y = 7$.

3.3 $y = x^2 + 4x$ *и* $y = x + 4$.

3.4 $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ и $y = -x^2 + 5x - 4$.

3.5 $y = 3x - x^2$ и $y = -x$.

3.6 $y = x^2$ *и* $y = 2 - x$.

3.7 $xy = 6$ *и* $x + y = 7$.

3.8 $y = x^2 + 4x$ *и* $y = x + 4$.

3.9 $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ и $y = -x^2 + 5x - 4$.

3.10 $y = 3x - x^2$ и $y = -x$.

Задача 4. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

4.1 а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}$; б) $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{x^2-6x+8}$.

4.2 а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(2-x)^5}}$; б) $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{x^2-7x+12}$.

4.3 а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1+2x)^3}}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2+6x-7}$.

4.4 а) $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)^5}}$; б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{x^2-9x+18}$.

4.5 а) $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x-1)^5}}$; б) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^2-8x+7}$.

4.6 а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(4-2x)^3}}$; б) $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{x^2-10x+25}$.

4.7 а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(6-3x)^5}}$; б) $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{x^2-8x+16}$.

4.8а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(7+3x)^3}}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2+6x}$.

4.9 а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+2x)^4}}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+4}$.

4.10 а) $\int\limits_{5}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-2x)^5}}$; б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-3)^2}$.

Контрольная работа № 6.

Тема 5. Функции нескольких переменных.

Задача 1. Вычислить частные производные и полный дифференциал функции $z = f(x;y)$. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x;y)$ в точке $P(x_0;\, y_0;\, z_0)$.

1.1 $z = \ln(x - \mathrm{tg}(2y))$, $x_0 = e,\ y_0 = 0$.

1.2 $z = \cos^2\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{2},\ y_0 = 0$.

1.3 $z = \frac{3x - y}{\cos(x+y)}$, $x_0 = 0,\ y_0 = 0$.

1.4 $z = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$, $x_0 = 1,\ y_0 = 1$.

1.5 $z = \sin^2(2x+5y)$, $x_0 = \frac{\pi}{4},\ y_0 = 0$.

1.6 $z=(x+4y)\cdot e^{xy}$, $x_0=0,\ y_0=1$.

1.7 $z=x\cdot\sin(x\cdot\sqrt{y})$, $x_0=\dfrac{\pi}{4},\ y_0=1$.

1.8 $z=\ln(\mathrm{tg}^2(x-y))$, $x_0=\dfrac{\pi}{2},\ y_0=\dfrac{\pi}{6}$.

1.9 $z=\mathrm{arctg}\dfrac{2y}{x+y}$, $x_0=1,\ y_0=1$.

1.10 $z=e^{-\frac{5x-4y}{x+y}}$, $x_0=1,\ y_0=1$.

Задача 2. Найти линейную зависимость между величинами X, Y где $Y=aX+b$. Параметры a,b вычислить методом наименьших квадратов.

2.1

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	4,2	2,8	5,7	10,5	13,2	20,5	33,4	46,9	60,1	71,2

2.2

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	3	6	9	14	26	38	70	105	180	290

2.3

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	4,2	3,2	2,9	2,5	2,45	2,15	2,00	1,75	1,9	1,6

2.4

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	4,4	5,1	5,4	6,7	6,2	7,5	7,7	9,2	9,9	11,5

2.5

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	4,9	6,5	7,1	7,9	8,1	8,9	8,6	9,1	9,5	9,7

2.6

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	10	26	35	51	60	79	85	105	110	130

2.7

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	15	13	25	30	45	55	82	120	140	200

2.8

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	- 2	- 12	- 15	- 19	- 35	- 35	- 47	- 55	- 60	- 69

2.9

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	7	8	15	20	32	42	60	100	120	220

2.10

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	6,8	5,8	5,0	4,3	3,6	3,6	3,1	2,9	2,5	2,3

Разбор задач контрольной работы № 4

Тема 1. Производная.

Тема 2: Исследование функций.

Задача 1. Вычислить производные следующих функций

а) $y=\sqrt{\dfrac{2+x^3}{1+x}}$; б) $y=\ln \operatorname{tg}(x+3)\cdot\cos^2(2x)$;

в) $y=x\cdot\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$; г) $\begin{cases}x=e^t\cdot\cos 2t\\ y=e^t\sin 2t\end{cases}$.

Решение.

а) Вычислим производную функции $y=\sqrt{\dfrac{2+x^3}{1+x}}$.

$$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{2+x^3}{1+x}}}\cdot\left(\frac{2+x^3}{1+x}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{2+x^3}}\cdot\frac{(2+x^3)'\cdot(1+x)-(1+x)'\cdot(2+x^3)}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{2+x^3}}\cdot\frac{3x^2\cdot(1+x)-(2+x^3)}{(1+x)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{2+x^3}}\cdot\frac{3x^2+3x^3-2-x^3}{(1+x)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{2+x^3}}\cdot\frac{2x^3+3x^2-2}{(1+x)^2}.$$

б) Вычислим производную функции $y=\ln \operatorname{tg}(x+3)\cdot\cos^2(2x)$.

$$y'=\frac{1}{\operatorname{tg}(x+3)}\cdot\frac{1}{\cos^2(x+3)}\cdot\cos^2 2x+\ln \operatorname{tg}(x+3)\cdot 2\cos 2x\cdot\sin 2x\cdot 2$$

$$=\frac{\cos^2 2x}{\sin(x+3)\cdot\cos(x+3)}+\ln \operatorname{tg}(x+3)\cdot 2\sin 4x=\frac{2\cos^2 2x}{\sin(2x+6)}+\ln \operatorname{tg}(x+3)\cdot 2\sin 4x$$

$$=\frac{2\cos^2 2x}{\sin(2x+6)}+\ln \operatorname{tg}(x+3)\cdot 2\sin 4x.$$

в) Вычислим производную функции $y=x\cdot\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$

$$y' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{arctg} x\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$= \operatorname{arctg} x\cdot\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{x^2}{1+x^2}\cdot\operatorname{arctg} x .$$

г) Вычислим производную функции заданной параметрически

$$\begin{cases} x = e^t\cdot\cos 2t \\ y = e^t\sin 2t \end{cases}$$

$y' = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, где

$x'_t = e^t\cdot\sin 2t + e^t\cdot 2\cos 2t = e^t(\sin 2t + 2\cos 2t)$ и

$y'_t = e^t\cdot\cos 2t - e^t\cdot 2\sin 2t = e^t(\cos 2t - 2\sin 2t)$.

Тогда $y' = \dfrac{\cos 2t - 2\sin 2t}{\sin 2t + 2\cos 2t}$.

Задача 2. Точка движется прямолинейно по закону $s = \frac{1}{5}t^5 - t^4 - \frac{5}{3}t^2$ м. Найти скорость и ускорение в момент $t = 10$ сек. Определить в какой момент скорость движения точки будет равна нулю.

Решение.

Скорость движения точки $V = \dfrac{ds}{dt} = t^4 - 4t^3 - 5t^2$. В момент $t = 10$ сек.

$V(10) = 10000 - 4000 - 500 = 5500\ \dfrac{м}{сек}$.

Ускорение $a = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d^2s}{d^2t} = 4t^3 - 12t^2 - 10t$. В момент $t = 10$ сек.

$a(10) = 4000 - 1200 - 100 = 2700\ \dfrac{м}{сек^2}$.

Скорость движения точки равна нулю, если

$V = t^4 - 4t^3 - 5t^2 = 0 \Rightarrow t^2(t^2 - 4t - 5) = 0 \Rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 5$. Корень уравнения $t = -1$ не имеет смысла. Таким образом, скорость движения точки равна нулю в начальный момент и через 5 сек. после начала движения.

Задача 3. Провести полное исследование функции и построить ее график.

$$y = \frac{x^4}{(x+1)^3}.$$

Решение.

1) Область определения функции: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
2) Область значений функции: $y \in (-\infty;\ \infty)$.

3) Свойствами чётности или нечетности функция не обладает т.к.

$$y(-x)=\frac{(-x)^4}{(-x+1)^3}=-\frac{x^4}{(x-1)^3}\neq\begin{cases}y(x)\\ y(-x)\end{cases}.$$

4) График функции проходит через начало координат $y(0)=0$;
$y<0$ при $x\in(-\infty;-1)$ и $y>0$ при $x\in(-1;\infty)$.

5) Исследуем функцию на экстремумы и монотонность.

$$y'=\frac{4x^3\cdot(x+1)^3-x^4\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6}=\frac{(x+1)^2\cdot x^3\cdot(4x+4-3x)}{(x+1)^6}=$$

$$=\frac{x^3\cdot(x+4)}{(x+1)^4}$$

Критическими точками являются точки $x=-4,\ x=-1,\ x=0$.
$y'>0$ т.е. функция возрастает при $x\in(-\infty;-4)\cup(0;\infty)$;
$y'<0$ т.е. функция убывает при $x\in(-4;-1)\cup(-1;0)$.

Таким образом, функция имеет максимум $y=-9\dfrac{13}{27}$ при $x=-4$ и минимум $y=0$ при $x=0$.

6) Исследуем функцию на выпуклость и вогнутость и точки перегиба.

$$y''=\left(\frac{4x^3+x^4}{(x+1)^4}\right)'=\frac{(12x^2+4x^3)\cdot(x+1)^4-(4x^3+x^4)\cdot 4(x+1)^3}{(x+1)^8}$$

$$=\frac{4x^2\cdot(x+1)^3\cdot((3+x)(x+1)-x(x+4))}{(x+1)^8}=\frac{12x^2}{(x+1)^5}.$$

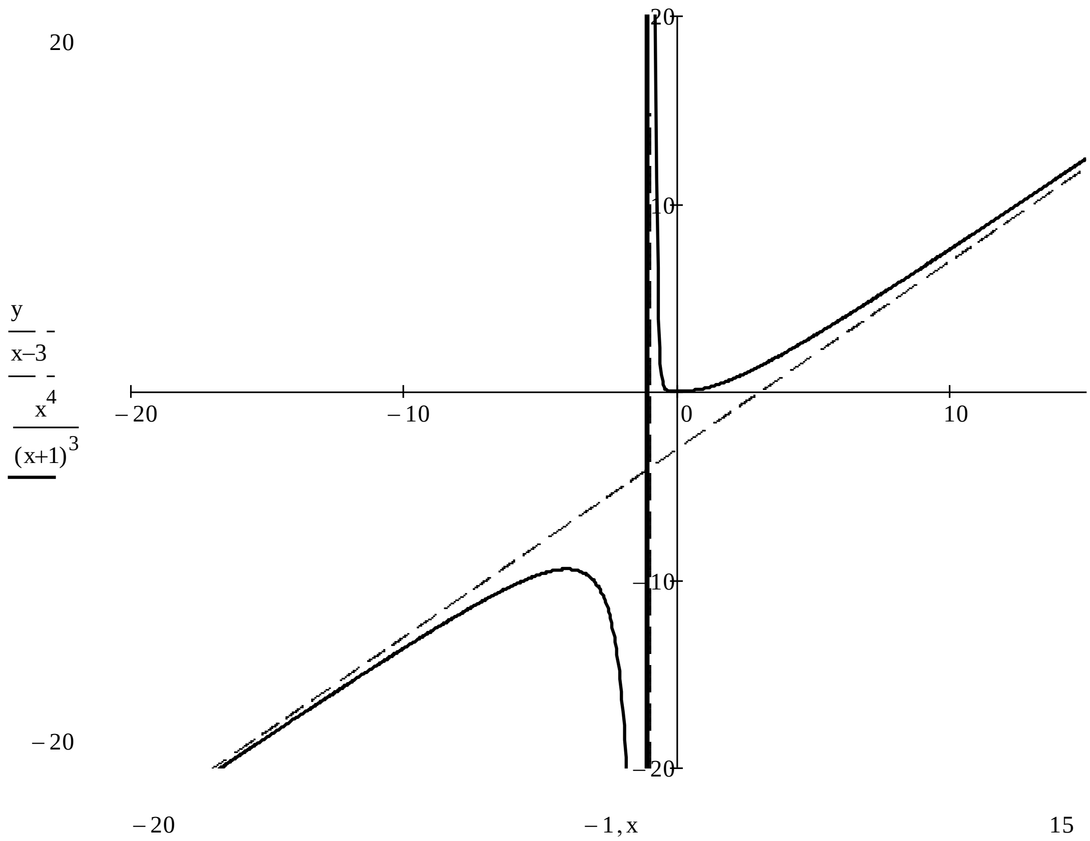
Критическими точками являются точки $x=-1,\ x=0$.
$y''<0$ т.е. график функции является выпуклым при $x\in(-\infty;-1)$ и $y''>0$ т.е. график функции является вогнутым при $x\in(-1;\infty)$. Точки перегиба отсутствуют.

7) Определим асимптоты графика функции.
а) Точкой разрыва функции является точка $x=-1$.
Рассмотрим поведение функции в окрестности точки разрыва.
Так как $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x^4}{(x+1)^3}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x^4}{(x+1)^3}=\infty$, то прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой графика функции.
б) Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{(x+1)^3\cdot x}=1 \text{ и}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{(x+1)^3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-3x^2-3x^3}{(x+1)^3}=-3.$$

Таким образом наклонной асимптотой является прямая $y = x - 3$.
Построим график данной функции.



Задача 4. Приближенно решишь уравнения. Отделить корни уравнения аналитически и уточнить с точностью 0,001 методом Ньютона (методом касательных) $x^3 + 0,4x^2 + 0,6x - 1,6 = 0$.

Решение.

Вычислим производную функции $f(x) = x^3 + 0,4x^2 + 0,6x - 1,6$;
$f'(x) = 3x^2 + 0,8x + 0,6$. $f'(x) \geq 0$ т.к. дискриминант квадратного трехчлена $D = 0,64 - 4 \cdot 3 \cdot 0,6 = -6,56 < 0$, а значит функция $f(x)$ монотонно возрастает при всех $x \in \mathbb{R}$. Таким образом данное уравнение имеет единственный действительный корень. Отделим этот корень аналитически, для этого составим таблицу

x	0	1
$sign\, f(x)$	–	+

Итак уравнение имеет единственный действительный корень $x \in (0; 1)$.
Уточним корень методом Ньютона (методом касательных).

Вычислим вторую производную данной функции $f''(x)=6x+0,8>0$ при $\forall x\in(0;\,1)$, то за начальное приближение примем $x_0=1$, т.к. $f(1)\cdot f''(1)>0$.

Вычисления производим по формуле $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. вычисления проводятся до тех пор, пока $\left|\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right|$ не станет меньше 0,001. Составим таблицу

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x)$	$\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}
0	1	0,4	4,4	0,090909	0,909091
1	0,909091	0,060406	4,054545	0,014898	0,894193
2	0,894193	0,009172	3,997932	0,002294	0,891899
3	0,891899	0,001389	3,989214	0,000348	0,89155
4	0,89155	0,00021	3,987892	5,27E-05	0,891498

Ответ: $x\approx 0,891$.

Разбор задач контрольной работы № 5

Тема 3. Неопределённый интеграл.

Тема 4. Определенный интеграл.

Задача 1. Вычислить неопределенный интеграл.

а) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^{4x}}}$; б) $\displaystyle\int(2x-1)\cdot e^{-x}\,dx$;

в) $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)dx}{x^3+2x^2+3x}$; г) $\displaystyle\int\frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$.

Решение.

а) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^{4x}}}$. Для вычисления данного интеграла выполним замену переменных $e^{2x}=t\Rightarrow 2\cdot e^{2x}dx=dt$ и $e^{4x}=t^2$. Тогда

$$\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\ e^{2x}+\sqrt{1+e^{2x}}\ +C.$$

б) $\int (2x-1)\cdot e^{-x}\,dx$. Для вычисления данного интеграла используем формулу интегрирования по частям $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$. Пусть функция $u(x) = 2x-1$ и дифференциал $dv = e^{-x}dx$. Найдем $du = 2dx,\quad v = -e^{-x}$. Тогда

$$\int (2x-1)\cdot e^{-x}\,dx = (2x-1)\cdot(-e^{-x}) - \int 2\cdot e^{-x}dx =$$
$$= (2x-1)\cdot(-e^{-x}) + 2e^{-x} + C = e^{-x}(3-2x) + C$$.

в) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^3+2x^2+3x}$. Разложим подынтегральную рациональную дробь в сумму простейших дробей с неизвестными коэффициентами $\frac{x^2+1}{x^3+2x^2+3x} = \frac{x^2+1}{x(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}$. Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты выполним преобразования:

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3} = \frac{A(x^2+2x+3)+(Bx+C)x}{x(x^2+2x+3)} =$$
$$= \frac{(A+B)x^2+(2A+C)x+3A}{x(x^2+2x+3)}$$

Сравнивая полученную дробь с исходной, составим и решим систему уравнений $\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+C=0 \\ 3A=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{3},\quad B=\frac{2}{3},\quad C=-\frac{2}{3}$. Тогда

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{x^3+2x^2+3x} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int\frac{2x-1}{x^2+2x+3} =$$
$$\int \frac{(x^2+1)dx}{x^3+2x^2+3x} = \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\int\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{3}{x^2+2x+3}\right)dx$$
$$\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \int\frac{1}{(x+1)^2+2}dx =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$,

г) $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$. Для вычисления этого интеграла используем универсальную тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. При этом

$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dt=\dfrac{2dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int\frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(5+\dfrac{2t}{1+t^2}+3\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}}=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{15}}+C=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{15}}+C.$$

Задача 2. Вычислить определенный интеграл.

2.1 а) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin\alpha+1}}\,d\alpha$; б) $\displaystyle\int_1^e x\ln x dx$.

Решение.

а) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin\alpha+1}}\,d\alpha$. Пусть $t=\sin\alpha+1$, тогда $dt=\cos\alpha\cdot d\alpha$, и $1\le t\le 2$.

Вычислим интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin\alpha+1}}\,d\alpha=\int_1^2\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}\Big|_1^2=2(\sqrt{2}-1)$.

б) $\displaystyle\int_1^e x\ln x dx$. Интегрируя по частям, обозначим

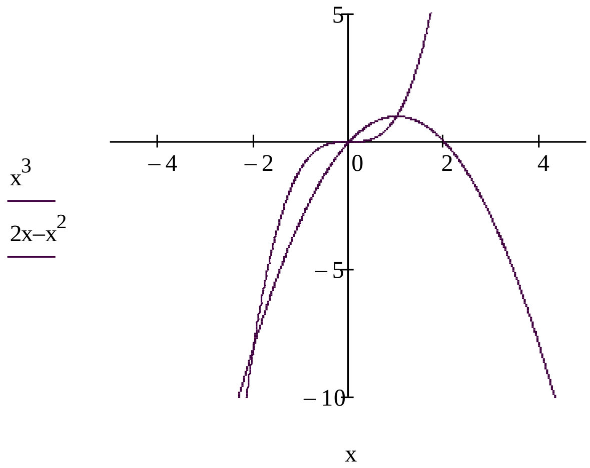
$u=\ln x,\ dv=xdx\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x},\ v=\dfrac{x^2}{2}$. Тогда

$$\int_1^e x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}.$$

Задача 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

$y=x^3,\ y=2x-x^3$ при $x\ge 0$.

Решение. Найдем точки пересечения линий. Для этого решим уравнение $x^3=2x-x^2$. Корни этого уравнения $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=2$.



Вычислим площадь фигуры, расположенной в первой четверти

$$\int_0^1 \left(2x - x^2 - x^3\right)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{x}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \ .$$

Задача 4. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

Решение.

а) $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+4)^4}}$. По определению несобственный интеграл первого рода

$$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+4)^4}} = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+4)^4}} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2x+4}}\right)\Bigg|_2^b =$$

$$= -\frac{3}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2b+4}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

б) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 7x + 6}$. Так как подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x = 1$, то вычислим несобственный интеграл второго рада

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2-7x+6} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{x^2-7x+6} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\frac{5}{2}\cdot 2}\ln\left|\frac{x-\frac{7}{2}-\frac{5}{2}}{x-\frac{7}{2}+\frac{5}{2}}\right|\Bigg|_{1+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-6}{x-1}\right|\Bigg|_{1+\varepsilon}^3 = \frac{1}{5}\left(\ln\frac{3}{2} - \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{\varepsilon-5}{\varepsilon}\right|\right) = \infty.$$

Интеграл расходится.

Разбор задач контрольной работы № 6.

Тема 5. Функции нескольких переменных.

Задача 1. Вычислить частные производные и полный дифференциал функции $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=f(x;y)$ в точке $P(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

$z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right),\quad x_0=0,\ y_0=1.$

Решение. Вычислим частные производные заданной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2y}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}.$$

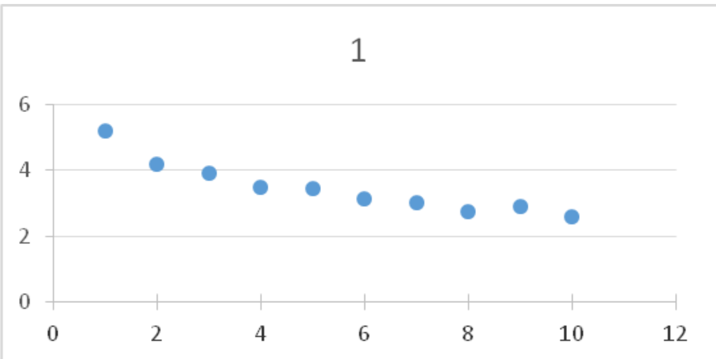
Полный дифференциал: $dz=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{ydy}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$.

Напишем уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке $P(0;1;0)$. Так как $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_P=1,\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_P=1$, то уравнение касательной плоскости имеет вид $1\cdot(x-0)+1\cdot(y-1)-(z-0)=0$ или $x+y-z-1=0$, а уравнение нормали $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

Задача 2. Найти линейную зависимость между величинами X, Y где $Y=aX+b$. Параметры a,b вычислить методом наименьших квадратов.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	5,2	4,2	3,9	3,5	3,45	3,15	3,00	2,75	2,9	2,6

Решение. Изобразим зависимость на рисунке 1.



Для того, чтобы найти коэффициенты линейной зависимости составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot b = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 55a + 10 \cdot b = 34,65 \\ 385a + 55b = 170,55 \end{cases}.$$

Для решения системы используем метод Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 55 & 10 \\ 385 & 55 \end{vmatrix} = -825, \ \Delta_a = \begin{vmatrix} 34,56 & 10 \\ 170,55 & 55 \end{vmatrix} = 200,25, \ \Delta_b = \begin{vmatrix} 55 & 34,56 \\ 385 & 170,55 \end{vmatrix} = -3960.$$

Тогда $a = \dfrac{\Delta_a}{\Delta} = -0,2427, \ \ b = \dfrac{\Delta_b}{\Delta} = 2,8$.

Таким образом заданная линейная зависимость определяется уравнением

$Y = -2,2427X + 2,8$

На рисунке 2 изображено соответствие найденной линейной зависимости и опытных данных.