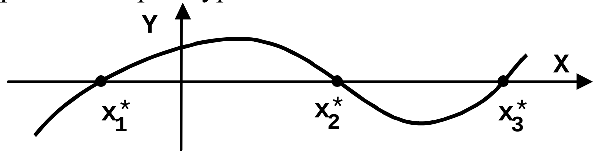
Тема 1 Решение нелинейных уравнений

1.1 Основные понятия

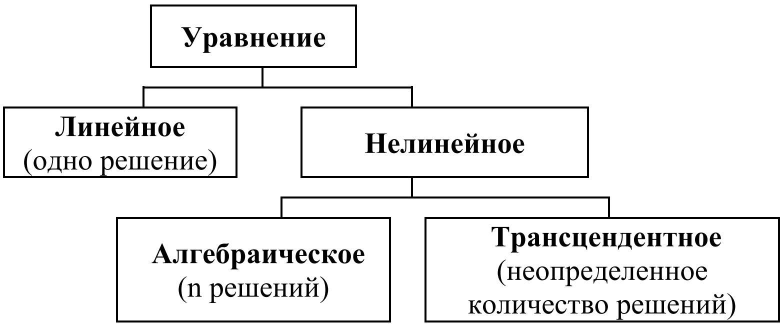
В общем случае уравнение с одним неизвестным имеет вид **f(x)=0**.

Если уравнение от одной неизвестной имеет вид: **f1(x)=f2(x),** его всегда можно преобразовать к виду **f(x)=0**, где **f(x)=f1(x)-f2(x).**

Корень уравнения f(x)=0– это такое значение x^*, при котором выполняется равенство $f(x^*)=0$. Геометрически корень уравнения – это абсцисса точки пересечения графика функции f(x) с осью OX.



Классификация уравнений в зависимости от вида f(x)



Линейное уравнение имеет вид: $\mathbf{a \cdot x + b = 0}$ $(\mathbf{f(x) = a \cdot x + b})$.

Для него существует единственное решение: $\mathbf{x = -\frac{b}{a}}$.

Алгебраическое уравнение содержит суммы целых степеней **x**.

$$\mathbf{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0 = 0}$$

$$\text{или } \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a_i \cdot x^i} = 0 \qquad \left(\mathbf{f(x)} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a_i \cdot x^i}\right) \tag{1}$$

Левая часть уравнения (1) называется полиномом (многочленом) степени n, где $a_0, a_1, \ldots a_n$ – коэффициенты полинома.

Например, $\mathbf{5 \cdot x^4 - 7 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 4 = 0}$ – алгебраическое уравнение 4-й степени.

Алгебраическое уравнение степени **n** имеет n корней (действительных или комплексных).

Трансцендентное уравнение может содержать **x** в нецелой степени и/или тригонометрические, логарифмические, показательные и другие специальные функции от **x**.

Например, $\mathbf{x}^{-2} + 2 - \sqrt{\mathbf{x}} = 0,$ $\quad \mathbf{\sin\ x} + 5 \cdot \mathbf{x} = 7.3,$ $\quad \mathbf{e^x + x - lg}\ 2 \cdot \mathbf{x} = 0$

В зависимости от входящих в уравнение функций трансцендентное уравнение может иметь:

- бесконечное множество корней. Например, для уравнения **sin(x)=0** корнями являются значения **x* = k·π,** где **к** – целое число (рисунок 1.1);
- единственный корень. Например, для уравнения $\sqrt{\mathbf{x}} - \mathbf{2 = 0}$ корнем является значение **x* = 4** (рисунок 1.2).
- не иметь корней. Например, для уравнения $3^{\mathbf{x}} + 5 = 0$ нет чисел **x***, для которых выполняется равенство 0 (рисунок 1.3).

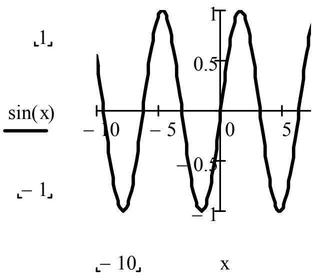


Рисунок 1.1

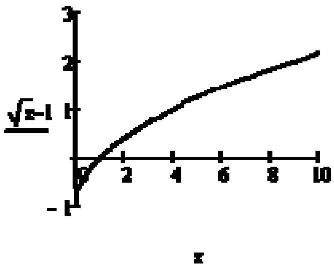


Рисунок 1.2

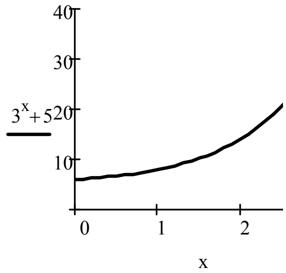


Рисунок 1.3

1.2 Классификация методов решения уравнений

Все методы решения нелинейных уравнений можно разделить на две группы: аналитические и итерационные (приближенные).

Аналитические методы позволяют найти точное решение с помощью формул. Они разработаны для небольшого класса уравнений: квадратных, кубических, биквадратных, специального вида тригонометрических и логарифмических. Например, формула для нахождения корней квадратного уравнения, формула Кардана для решения кубических уравнений.

Итерационные (численные) методы могут быть использованы для любых уравнений, но они позволяют находить приближенное решение с заданной точностью. Точность вычисления показывает, насколько приближенное значение корня может отличаться от точного. В итерационных методах задается некоторый алгоритм решения, который многократно применяется к уравнению.

Если алгебраическое или трансцендентное уравнение достаточно сложно, то его корни очень редко удается найти точно. Кроме того, уравнение, описывающее реальные физические процессы, содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно. В этом случае задача точного определения корней теряет смысл.

Приближенное нахождение изолированных действительных корней уравнения (численное решение уравнения) состоит из двух этапов:

Этап 1. Отделение корней – нахождение достаточно малых интервалов, каждый из которых содержит ровно один корень уравнения. Следовательно, любое значение из такого промежутка является приближенным значением этого корня.

Этап 2. Уточнение приближенных значений корней – определение корня с заданной точностью.

1.3 Отделение корней

Процесс отделения корней уравнения f(x) = 0 опирается на следующую теорему математического анализа.

Теорема. Пусть

1) функция f(x) определена, непрерывна и имеет непрерывную производную на интервале [a,b];
2) функция f(x) принимает значения разных знаков на концах интервала [a,b], т.е. f(a)*f(b)<0;
3) производная функции на интервале сохраняет постоянный знак и, значит, f(x) монотонна на [a,b].

Тогда внутри интервала [a,b] содержится ровно один корень $x = x^*$ уравнения f(x) = 0 (рис. 1.4).

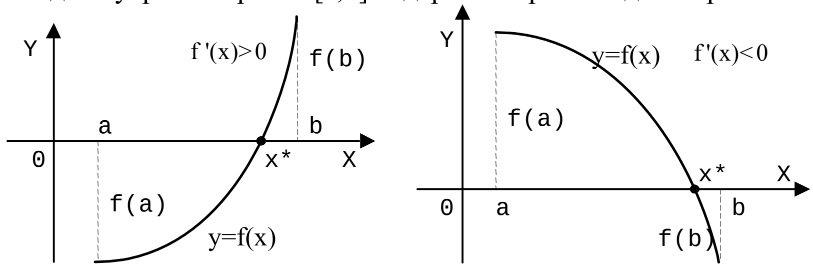


Рис. 1.4

Если в теореме не учитывать требование монотонности первой производной , то интервал [a,b] будет содержать, по крайней мере, один корень (или один, или несколько) (рис. 1.5).

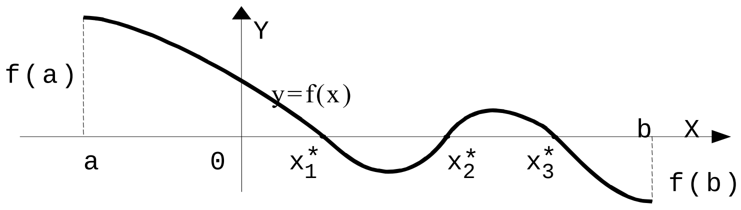


Рис. 1.5

Способы отделения корней уравнения f(x) = 0:

1. Графический
2. Табличный

1.3.1 Графический способ отделения корней

Для отделения корня уравнения f(x) = 0 на заданном интервале строят график функции y = f(x). Приближенные абсциссы точек пересечения графика с осью OX являются начальными приближениями к корням. Можно также по графику определить интервал, внутри которого находится корень.

Если уравнение задано в виде f1(x)=f2 его можно привести к виду f(x)=0 (где f(x)=f1(x)-f2(x)) или построить графики двух функций y1 = f1(x) и y2 = f2(x) и определить координаты точек пересечения построенных графиков.

Отделение корней графическим способом в Excel

При построении графика функции в Excel используется **точечная** диаграмма.

Для отделения корней в Excel нужно:

1. Построить таблицу функции на интервале [xn, xk] с шагом h. Таблица может быть расположена горизонтально или вертикально.

Первая строка (столбец) таблицы содержат значения аргумента фунцкии: xn, xn+h … xk . Для задания последовательности значений аргумента используется автозаполнение.

Вторая строка (столбец) таблицы содержит значения функции для соответствующих значений аргументов.

	A	B	C		
1	**x**	xn	xn+h	…	xk
2	**f(x)**	=формула **f(B1)**			

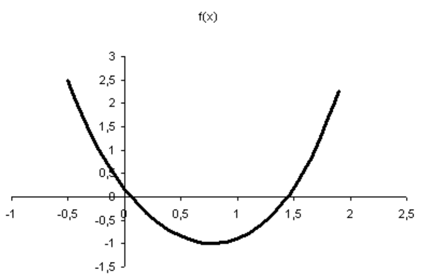
2. Построить **точечную** диаграмму.
3. Определить по графику приближенные значения корней уравнения как координаты точек пересечения графика с осью OX

Пример 2. Для уравнения **$0.8\cdot(x-0.7)^4=\sin 2x$** в Excel отделить корни на интервале **[-0.5,1.9].**

1. Привести уравнение к виду **f(x)= 0: $0.8\cdot(x-0.7)^4-\sin 2x=0$**, тогда **$f(x)=0.8\cdot(x-0.7)^4-\sin 2x$.**
2. Построить таблицу функции на интервале **[-0.5,1.9].** Шаг равен 0,2 (выбранный шаг должен обеспечивать плавность графика).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	**x**	-0,5	-0,3	-0,1	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
2	**f(x)**	**=0,8*(B1-0,7)^4-SIN(2*B1)**												

3. Построить **точечную** диаграмму:



4. Определяем приближенные значения координат точек пересечения графика с осью OX:
   X1 = 0,1 X2 = 1,5

1.4 Уточнение корня

В результате выполнения этапа отделения корней для каждого из искомых корней на заданном интервале будет определено начальное приближенное значение корня $\mathbf{x_0}$. Если определен отрезок, внутри которого находится корень, любое значение из такого отрезка можно считать начальным приближенным значением корня.

При уточнении корня любым численным методом строится последовательность приближенных значений корня $\mathbf{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n \ldots}$, которая сходится к точному значению корня x* при $\mathbf{n} \to \infty$.

Последовательность может содержать бесконечно много элементов, причем при возрастании n расстояние между $\mathbf{x_n}$ и корнем x* уменьшается. В какой момент можно остановить процесс уточнения? В численных методах этот процесс прекращается при достижении заданной точности вычисления.

Нахождение корня с заданной точностью означает, что задается некоторое фиксированное число (точность) $\boldsymbol{\varepsilon}$ **(**$\mathbf{0<\varepsilon<<1}$**)** и вычисление элементов последовательности $\mathbf{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n \ldots}$ продолжается до тех пор, пока при некотором значении n абсолютная погрешность вычисления не достигает заданной точности $|\mathbf{x_n} - x^*| < \boldsymbol{\varepsilon}$. Но так как точное значение корня x* неизвестно, то вычисление продолжается до тех пор, пока два соседних элемента последовательности не будут отличаться друг от друга меньше, чем на $|\mathbf{x_n} - \mathbf{x_{n-1}}| < \boldsymbol{\varepsilon}$.

Алгоритм построения последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ зависит от конкретного метода уточнения корня уравнения (метода поиска решения).

Каждый шаг построения последовательных приближенных значений корня называется итерацией.

Для реализации итерационного процесса нахождения корня должны быть заданы:

- начальное приближение $\mathbf{x_0}$ или интервал, содержащий корень;
- точность $\boldsymbol{\varepsilon}$**,** с которой требуется найти решение уравнения.

Для уточнения корня (определения корня с заданной точностью) разработано множество численных методов: метод деления отрезка пополам, метод секущих (метод линейной интерполяции, метод хорд), метод касательных (метод Ньютона), метод итераций, метод золотого сечения и др.

1.4.1 Решение нелинейного уравнения в Excel

В Excel для уточнения корня (определения корня с заданной точностью) используется средства **Подбор параметра** или **Поиск решения**. Рассмотрим уточнение корня с использованием средства **Подбор параметра.**

Уточнение корня с использованием средства Подбор параметра

Для вызова средства: вкладка **Данные** – панель **Работа с данными** – кнопка **Анализ «что-если»** - команда **Подбор параметра.**

В некоторых случаях система Excel не может найти решение, тогда выдается сообщение "Решение не найдено".

Выполнение подбора параметра система Excel реализует с использованием численных методов, для которых должны быть заданы следующие параметры:

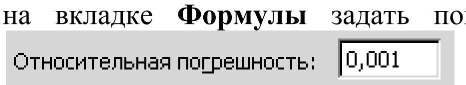
1. *Относительная погрешность* – число, определяющее, на сколько вычисляемое значение может отличаться от требуемого значения. Погрешность должна задаваться десятичной дробью от 0 (нуля) до 1. Чем больше десятичных знаков в задаваемом числе, тем выше точность — например, число 0,0001 представлено с более высокой точностью, чем 0,01. По умолчанию в системе установлена погрешность 0,001. Как правило, для инженерных расчетов такой погрешности достаточно.
2. *Количество итераций* – число, задающее предельное количество промежуточных вычислений, за которое должно быть получено решение с заданной погрешностью. По умолчанию вычисления прекращаются после 100 итераций. Такое значение подходит для решения большинства простых задач.

Система Excel прекращает вычисления, когда достигнуты либо заданная погрешность, либо предельное число итераций. Параметры вычислений устанавливаются перед выполнением подбора параметра в диалоговом окне **Параметры Excel**.

Для уточнения корня уравнения с использованием средства **Подбор параметра** нужно задать приближенное значение корня.

Для уточнения корня:

1. Установить точность вычисления корня в диалоговом окне **Параметры Excel**, для вызова которого нажать кнопку **Office** и в появившемся окне – кнопу **Параметры Excel**. В окне **Параметры Excel** на вкладке **Формулы** задать погрешность вычисления корня в поле Относительная погрешность



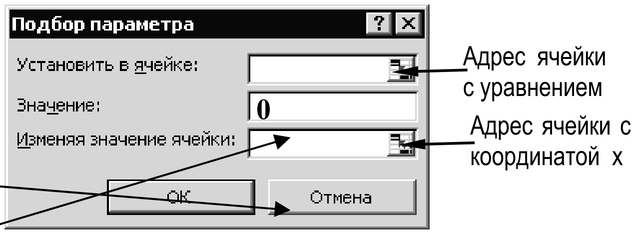
Замечание: Чем меньше относительная погрешность, тем точнее решение.

2. Занести приближенное значение корня в отдельную ячейку. Рядом (слева или ниже) занести формулу вычисления f(x) – левой части уравнения f(x) = 0

3. Выполнить команду **Подбор параметра**. В полях диалогового окна задать:

- в поле **Установить в ячейке -** адрес ячейки с формулой для вычисления f(x);
- в поле **Значение** – 0 (значение правой части уравнения);
- в поле **Изменяя значение ячейки** – адрес с приближенным значением корня.

	A	B
3	**x**	координата x точки пересечения с OX (приближенное значение корня)
4	**f(x)**	=формула **f(B3)**



После подбора параметра корень будет занесен в изменяемую ячейку. Значение функции от корня отобразится в ячейке, содержащей формулу. Это значение должно быть близко к 0.

4. Повторить п. 2-3 для каждого корня.

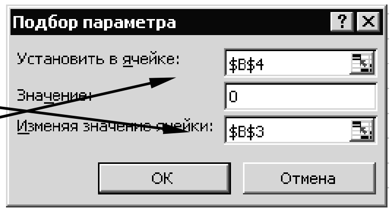
Пример. Решить уравнение $\mathbf{0.8\cdot(x-0.7)^4=sin2x}$ на интервале **[-0.5,1.9].** Порядок решения.

1. Привести уравнение к виду f(x) = 0: $0.8\cdot(x-0.7)^4$-sin2x=0, тогда f(x)=$0.8\cdot(x-0.7)^4$-sin2x. Выполнить отделение корней. В результате отделения корней, выполненном в предыдущем примере нашли два приближенных значения корня: X1 = 0,1 X2 = 1,5

2. Занести приближенные значения корней в отдельные ячейки. Для каждого значения корня вычислить значение f(x).

3. Для каждого значения корня выполнить уточнение корня – выполнить команду **Подбор параметра**.

	A	B
3	**x1**	0,1
4	**f(x1)**	**=0,8*(B3-0,7)^4-SIN(2*B3)**
5	**x2**	1,5
6	**f(x2)**	**=0,8*(B5-0,7)^4-SIN(2*B5)**

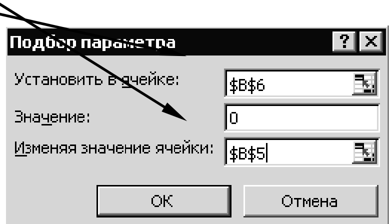


В результате получим:

	A	B
3	**x1**	0,065084
4	**f(x1)**	0,000204
5	**x2**	1,44584
6	**f(x2)**	0,000236

Корень 1

Корень 2



Контрольные вопросы

1. Для каких задач используется подбор параметра?
2. Порядок выполнения подбора параметра. Заполнение элементов диалогового окна **Подбор параметра.**
3. Задание погрешности вычислений.
4. Решение нелинейных уравнений.

Задания

Задание 1 Решить в Excel **нелинейное алгебраическое уравнение (**по номеру варианта)

1. Отделить корни уравнения графическим способом на заданном интервале, для чего построить график функции левой части уравнения f(x)=0

2. Найти с использованием **Подбор параметра** решение уравнения с точностью ε=0.001.

3. Изменить точность $\varepsilon=10^{-6}$. Повторно решить уравнение с использованием **Подбор параметра**. Записать решение в другие ячейки.

4. *Отметить на графике функции левой части уравнения f(x)=0 найденные корни уравнения.

№ вар	Задание 1	Задание 2
1	$x^5 - x = 0{,}2.$ на интервале [-1,1.1], отметить на графике символом "x".	$e^{-x} = 0{,}5 + \sqrt{x},$ на интервале [0,1]
2	$x^4 + 2x^3 = x + 1$ на интервале [-2,1], отметить на графике символом "+"	$\sqrt{x+1} = \cos(0{,}5(x+1))$ на интервале [-1,1]
3	$x^4 + 0{,}8x^3 - 0{,}4x^2 = 1{,}3x + 1{,}2$ на интервале [-2,2], отметить на графике символом "□"	$5x - 8 \cdot \ln x = 8;$ на интервале [1,6]
4	$x^4 - 4{,}1x^3 + x^2 + 4{,}1 = 5{,}1x$ на интервале [-2,5], отметить на графике символом "◊"	$x - \frac{\sin x}{2} - 1.5 = 0$, на интервале [1.5,2.5]
5	$x^4 + 0.2x^3 - 4x^2 = 3x + 0.5$ на интервале [-2;2.4], отметить на графике символом "○"	x+*ln*(x+0,5)-0,2=0, на интервале [0;2]
6	$x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0;$ на интервале [-15,15], отметить на графике символом "x"	$\frac{2\sin^2 x}{3} - \frac{3\cos^2 x}{4} = 0;$ на интервале [0,π/2]
7	$x^3 - 6x^2 + 20 = 0$ на интервале [-3,6], отметить на графике символом "+"	$x \cdot 2^x - 1 = 0,$ на интервале [0,1]
8	$2x^3 + 4x^2 - 1 = 0;$ на интервале [-1,1], отметить на графике символом "x"	$(4 + x^2)(e^x - e^{-x}) = 18,$ на интервале [0,2]
9	$x^3 + 12x^2 - 2x - 4 = 0;$ на интервале [-2,2], отметить на графике символом "◊"	$x^2 - 1{,}3 \cdot \ln(x + 0{,}5) - 2{,}8x +$ на интервале [0,1]
10	$x^3 - 10x^2 + x = -100$, на интервале [-5,5], отметить на графике символом "○"	*tg*x-x=0, на интервале [4,4.7]
11	$x^3 - 8x^2 + 20 = 0;$ на интервале [-2,6], отметить на графике символом "x"	$1{,}8(x - 0{,}7)^4 - \sin 10x$ на интервале [0,0.5]
12	$5x^3 + 10x^2 + 5x = -0.5;$ на интервале [-1,0.5], отметить на графике символом "+"	$3x^2 - \cos 2x - 1 = 0,$ на интервале [0,2]
13	$5x^3 - x + 0.1 = 0;$ на интервале [-1,1], отметить на графике символом "□"	x=*cos* x+1, на интервале [0,2]

Задание 2 Решить в Excel **трансцендентное уравнение** (по номеру варианта)

1. Отделить корни уравнения графическим способом на заданном интервале
2. Найти с использованием **Подбор параметра** решение уравнения с точностью ε=0.001.
3. *Отметить на графике функции левой части уравнения f(x)=0 найденные корни уравнения

.

Задание 3 Вычисление критической силы

Определить критическую силу для стальной колонны двутаврового сечения, если известны:

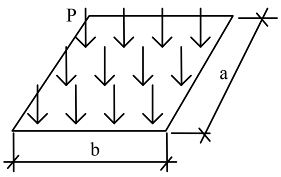
- длина колонны **L=10 м**,
- модуль упругости стали **$E=2.1 \cdot 10^{11}$ Па**,
- коэффициент жесткости упругой опоры **$C=6 \cdot 10^{6}$**
- момент инерции **$I= 1.735 \cdot 10^{-5}$ м^4**

Критическая сила вычисляется по формуле $P_{кр} = \frac{\pi \cdot E \cdot I}{(\mu \cdot L)^2}$, где μ - коэффициент приведения длины колонны, который определяется по формуле $\mu = \sqrt{\frac{\pi}{v}}$. Параметр v находится из уравнения $tg(v) - v + \frac{v^3 \cdot E \cdot I}{L^3 \cdot C} = 0$ на интервале [3,2; 4,6].

Порядок решения.

1. Задать исходные данные.
2. Создать таблицу значений функции $tg(v) - v + \frac{v^3 \cdot E \cdot I}{L^3 \cdot C}$, где v изменяется на интервале от [3.2, 4.6] с шагом 0.2. Построить график функции.
3. Определить по графику начальное значение v.
4. Найти подбором параметра уточненное значение v.
5. Найти по формуле μ, подставляя v в формулу
6. Найти по формуле Ркр. (Ответ: Ркр = 160502 Н = 160,502 кН)

Задание 4 *Вычислить стрелу прогиба ξ прямоугольной пластинки под действием нагрузки P.



Стрела прогиба ξ вычисляется как корень нелинейного уравнения на интервале [0;5]:

$$\left[6.48\left(\frac{1}{\lambda^4}+1\right)+12.18\frac{1}{(1+\lambda)^2}+7.53\left(1+\frac{0.6}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]\xi^3+8.98\left[3\left(\frac{1}{\lambda^4}+1\right)+\frac{2}{\lambda^2}\right]\xi=\mathbf{P}$$

где a=0. 8 м, b=0. 5 м, λ=a/b, P=350 - напряжение в срединной поверхности

Ответ: **ξ = 2.363**

Указания в выполнению. Вычислить в отдельных ячейках значения коэффициентов уравнения, а затем использовать полученные значения при создании таблицы значений функции левой части уравнения.