Тема 2

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) из n уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots\ldots a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_2 + a_{2,2}x_2 + \ldots\ldots a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots\ldots a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

В матричной форме система записывается следующим образом: **A*X = B,** где

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$
матрица коэффициентов левой части системы,	коэффициенты правой части	вектор неизвестных

Если вектор $B \neq 0$, то это система линейных неоднородных уравнений. Она имеет единственное решение тогда, когда определитель матрицы А отличен от нуля.

Численные методы решения СЛАУ подразделяются на точные и приближенные (итерационные).

Точные методы - это методы, которые дают решение задачи за конечное число арифметических операций. Число этих операций зависит только от алгоритма решения СЛАУ и от порядка системы. Решение получается точное, если исходные данные задачи заданы точно и вычисления выполняются точно. Вследствие неизбежных ошибок округления в ЭВМ результаты даже точных методов являются в определенном смысле приближенными. Наиболее распространенным из точных методов решения является метод Гаусса.

Итерационные методы основаны на построении итерационной последовательности значений, сходящейся к искомому решению системы. Вычисляя определенное число итераций и обрывая процесс, можно получить приближенное решение системы с любой наперед заданной точностью. К итерационным методам относятся метод итераций, метод Зейделя и другие.

В MS Excel и системе MathCAD СЛАУ можно решить матричным способом (использованием обратной матрицы). Метод относится к точным методам. К точным методам относится также метод Гаусса.

Система MathCAD для решения СЛАУ также содержит итерационные методы – решение систем уравнений с использованием *блоков уравнений*.

1 Матричные способы решения СЛАУ

Как было показано выше, в матричной форме система записывается следующим образом: **A*X = B**

Если матрица А системы невырожденная (определитель матрицы отличен от нуля), то система уравнений имеет единственное решение.

В явном виде вектор решения системы $\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$**,** т.е. вектор решения системы равен произведению обратной матрицы $\mathbf{A^{-1}}$ для матрицы коэффициентов левой части и вектора правой части **B**.

Нахождение решения использованием обратной матрицы можно выполнить как в Excel, так и в MathCAD.

В MathCAD для решения системы в матричной форме имеются также функции **lsolve** (реализует метод обратной матрицы) и **rref** (реализует метод Гаусса).

Решение системы уравнений в Excel методом обратной матрицы

Для нахождения решения в Excel используются функции категории **Математические**:

1) **МОПРЕД**(*матрица*) - вычисление определителя квадратной матрицы, где в качестве *матрицы* указывается диапазон размещения матрицы, например, ***МОПРЕД(A2:C4)***. Диапазон не должен содержать текст или **пустые значения** ячеек, иначе выдается сообщение об ошибке **#ЗНАЧ!**

2) **МОБР**(*матрица*) – вычисление обратной матрицы A^{-1}, где в качестве *матрицы* указывается диапазон размещения исходной матрицы **А**, например, ***МОБР(A2:C4)***,

3) **МУМНОЖ**(*матрица1, матрица2)* – умножение двух матриц или матрицы и вектора, в качестве аргументов указываются диапазоны размещения матриц. Количество столбцов первой матрицы должно быть равно количеству строк второй.

Две последние функции возвращают в качестве значения не отдельное число (скаляр), как **МОПРЕД**, а массив значений. Для получения результата в качестве массива необходимо:

1. Предварительно выделить интервал, где будет находиться результат – обратная матрица или произведение матриц,
2. Ввести формулу, представляющую обращение к функции с заданными параметрами,
3. Нажать совместно три клавиши Ctrl+Shift+Enter вместо кнопки ОК,
4. Во всех выделенных ячейках будет записано **{=формула}.** Отдельную ячейку (ячейки) в полученном таким образом массиве нельзя изменять или удалять.

Пример 1. Найти решение системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

Порядок выполнения:

1. Задать исходные данные: матрицу **А** и вектор **В**, например, в ячейках **A2:C4** и **E2:E4**,
2. Вычислить определитель, чтобы убедиться в том, что система имеет решение: в ячейку **C5** ввести формулу =**МОПРЕД(A2:C4)**,
3. Вычислить обратную матрицу A^{-1}:

a. выделить ячейки **A8:C10**, в которые будет помещена обратная матрица,

b. ввести формулу =**МОБР(A2:C4),**

c. нажать клавиши Ctrl+Shift+Enter

4. Выполнить умножение A^{-1} на B:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Матрица левой части А				Вектор правой части В		
2	1	0	2		7		
3	5	-1	-1		0		
4	-1	3	-1		2		
5	Определитель		32				
6							
7	Обратная матрица				Вектор решения		
8	0,125	0,1875	0,0625		1		
9	0,1875	0,03125	0,34375		2		
10	0,4375	-0,09375	-0,03125		3		
11							

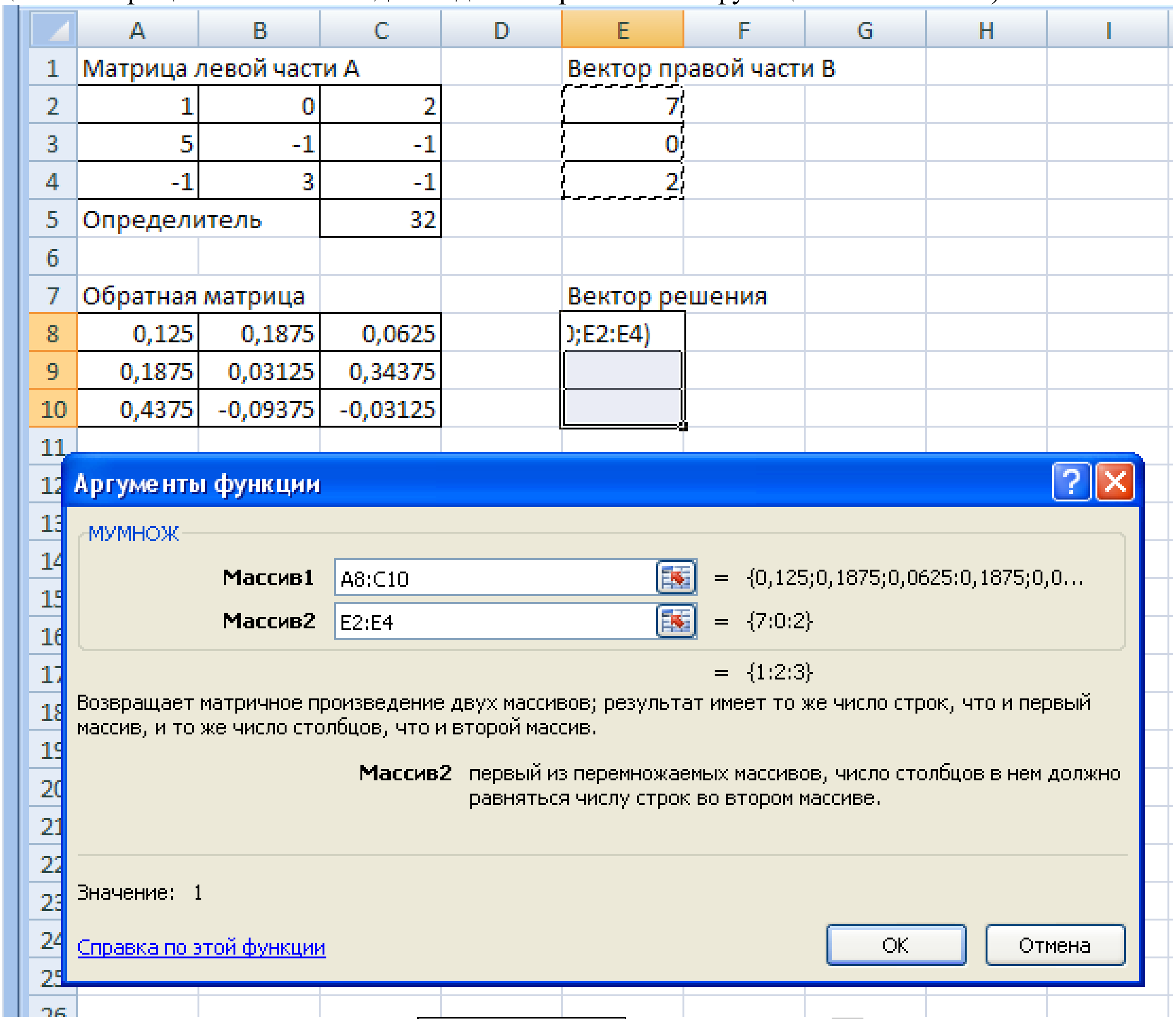
Замечания.

Замечание 1. Обратную матрицу можно не вычислять, а сразу при умножении указать **=МУМНОЖ(МОБР(A2:C4);E2:E10).**

Замечание 2. Для ввода формул в ячейки рекомендуется использовать **Мастер функций**, для чего:

1. Перейти на вкладку **Формулы**,
2. На панели **Библиотека функций** в списке **Математические** выбрать нужную функцию (**МОБР, МУМНОЖ, МОПРЕД**). ! До выбора функций **МОБР, МУМНОЖ** выделить диапазон ячеек, где будет размещаться обратная матрица или произведение матриц.

3. В диалоговом окне **Мастера функций** задать аргументы функции. Для ввода аргумента выделить диапазон ячеек, содержащих матрицу. Ниже приведен пример ввода функции **МУМНОЖ** для умножения обратной матрицы на вектор правой части (диапазон ячеек для размещения произведения матриц E8:E10 был выделен до выбора в списке функции **МУМНОЖ**)



4. Нажать совместно три клавиши Ctrl+Shift+Enter вместо кнопки **OK**

Замечание 3: Если диапазону **A2:C4** присвоить имя **A**, а диапазону **E2:F11** – имя **B**, то формулу можно записать **=МУМНОЖ(МОБР(A);B).**

Матричный способ удобен, если нужно решить СЛАУ с несколькими вариантами правых частей. Такая задача в практике инженерных расчетов возникает довольно часто, например, при расчете конструкций с несколькими вариантами приложения внешних нагрузок.

При решении СЛАУ n-го порядка с несколькими вариантами правых частей матрица A является общей для всех систем, а B представляет собой матрицу размерности (n x m), где m – количество вариантов правых частей.

Пример 2. Найти решение системы линейных алгебраических уравнений с двумя вариантами правых частей. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. фактически нужно решить две системы с одинаковой левой частью:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Порядок выполнения:

1. Задать исходные данные: матрицу **А** и матрицу **В**, например, в ячейках **А2:С4** и **Е2:F4** (матрица В состоит из двух векторов правых частей решаемых уравнений),
2. Вычислить определитель, чтобы убедиться в том, что система имеет решение: в ячейку **С5** ввести формулу **=МОПРЕД(А2:С4)** (ввод формулы ,
3. Вычислить обратную матрицу A^{-1}:

a. выделить ячейки **А8:С10**, в которые будет помещена обратная матрица,

b. ввести формулу **=МОБР(А2:С4),**

c. нажать клавиши Ctrl+Shift+Enter

4. Выполнить умножение A^{-1} на В:

a. выделить ячейки **Е8:F10**, в них будет помещен вектор решений,

b. ввести формулу **=МУМНОЖ(А8:С10; Е2:F10)**,

c. нажать клавиши Ctrl+Shift+Enter

5. Нажать совместно три клавиши Ctrl+Shift+Enter вместо кнопки **ОК**

Результат выполнения:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Матрица левой части А				Матрица правой части В		
2	1	0	2		7	3	
3	5	-1	-1		0	3	
4	-1	3	-1		2	1	
5	Определитель		32				
6							
7	Обратная матрица				Векторы решения		
8	0,125	0,1875	0,0625		1	1	
9	0,1875	0,03125	0,34375		2	1	
10	0,4375	-0,09375	-0,03125		3	1	
11							

После решения системы диапазон ячеек Е8:Е10 содержит решение первой системы уравнений, диапазон ячеек F8:F10 – решение второй системы уравнений.

2 Расчет фермы

Фермой называется геометрически неизменяемая шарнирно-стержневая конструкция.

Точки, в которых сходятся оси стержней, называются узлами фермы, а те узлы, которыми ферма опирается на основание, называются опорными узлами.

Если шарниры, соединяющие стержни фермы, предполагаются идеальными, т.е. без трения, а внешние силы – приложенными к узлам фермы, то все стержни испытывают лишь растяжение или сжатие, так как к каждому стержню приложены силы только на его концах.

Под расчетом фермы подразумевается определение усилий в стержнях фермы.

Рассмотрим определение усилий в стержнях статически-определимой фермы по способу вырезания узлов.

Статически-определимой называется ферма, для которой выполняется равенство

2M-N-3=0,

где M – число узлов фермы; N – число стержней фермы (исключая опорные).

Способ вырезания узлов состоит в том, что мысленно вырезаются узлы фермы, прикладываются к ним соответствующие внешние силы и реакции стержней и составляются уравнения равновесия этих сил, приложенных к каждому узлу.

Уравнение равновесия имеет вид

$\sum S=0$, (1)

где $\sum S$ – векторная сумма внешних сил и реакций стержней, сходящихся в узле.

Вместо векторов сил удобнее оперировать их проекциями на оси OX и OY - S_x, S_y:

$\sum Sx=0$, $\sum Sx=0$. (2)

Так как в начале расчета фермы неизвестно, какие стержни фермы растянуты и какие сжаты, то условно предполагают, что все стержни растянуты (реакции стержней направлены от узлов).

Последовательно составляя уравнения для всех узлов, получим систему линейных алгебраических уравнений, неизвестными в которой являются усилия в стержнях.

Если в результате решения системы получают значение какого-либо усилия со знаком минус, то соответствующий стержень сжат.

При составлении уравнений равновесия опорных узлов следует обратить внимание на опорные стержни. Шарнирно-неподвижную опору следует рассматривать как систему из двух взаимно перпендикулярных стержней, а в шарнирно-подвижной опоре стержень следует располагать в направлении реакции этой опоры.

Рассмотрим на примере формирование системы уравнений для расчета фермы, изображенной на рисунке 1:

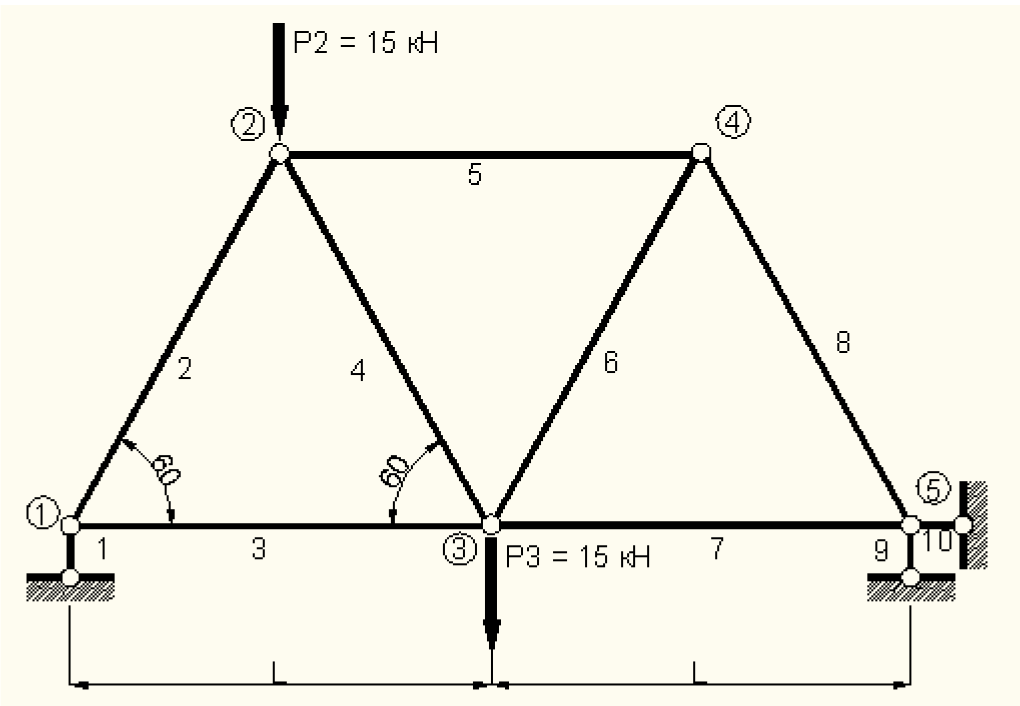
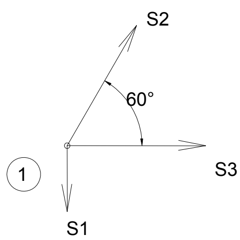
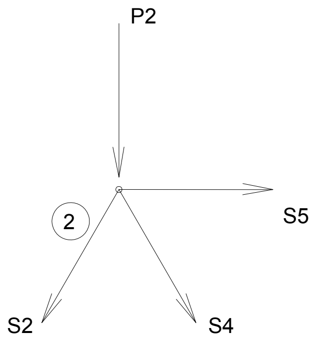
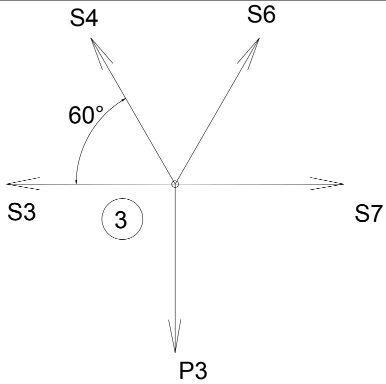
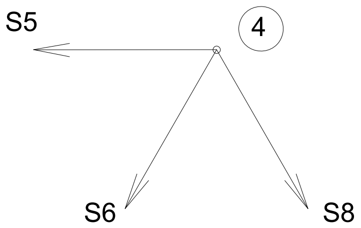
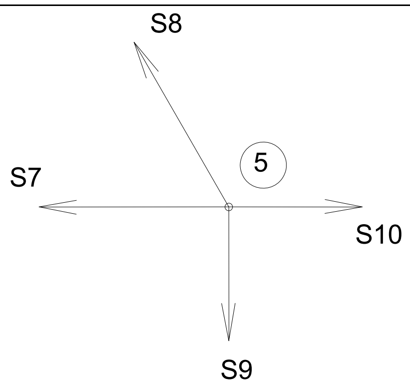


Рис. 1

Для каждого узла составим уравнения равновесия в форме (2).

 Узел 1	$S_2 * \cos 60° + S_3 = 0$ $- S_1 + S_2 \cos 30° = 0$

 Узел2	$-S_2\cos 60° + S_4\cos 60° + S_5 = 0$ $-S_2\cos 30° - S_4\cos 30° - P_2 = 0$
 Узел 3	$-S_3 - S_4\cos 60° + S_6\cos 60° + S_7 = 0$ $S_4\cos 30° + S_6\cos 30° - P_3 = 0$
 Узел 4	$-S_5 - S_6\cos 60° + S_8\cos 60° = 0$ $-S_6\cos 30° - S_8\cos 30° = 0$
 Узел 5	$-S_7 - S_8\cos 60° + S_{10} = 0$ $S_8\cos 30° - S_9 = 0$

Полученные уравнения запишем в виде системы уравнений:

Sscos60°+s3 = 0
-S1+S2cos30° = 0
-S2cos60°+S4cos60°+S5 = 0
-S2cos30°-S6cos30° = P2
-S3-S4cos60°+S4cos60°+S7 = 0
S4cos30°+S4cos30° = P3
-S5-S6cos60°+S8cos60° = 0
-S6cos30°-S8cos30° = 0

-S7-S8cos60°+S10 = 0

S8cos30°-S9 = 0

Неизвестными здесь являются усилия Si. Поставив в систему значения направляющих косинусов(cos60° = 0.5, cos30° = 0.866) и нагрузок(P2 = 15 кН, P3 = 15 кН), запишем матрицу левой части и вектора правой части:

Матрица левой части (коэффициенты при неизвестных)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Вектор правой части (свободные члены)
	0,5	1								
-1	0,866									
	-0,5		0,5	1						
	-0,866		-0,866							15
		-1	-0,5		0,5	1				
			0,866		0,866					15
				-1	-0,5		0,5			
					-0,866		-0,866			
						-1	-0,5		1	
							0,866	-1		

Решим в Excel сформированную систему уравнений матричным методом:

1. Вводим значения элементов матрицы левой части А и вектора правой части В
2. Находим обратную матрицу для матрицы А
3. Находим вектор решения

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Матрица левой части A											Вектор правой части
2	0	0,5	1	0	0	0	0	0	0	0		0
3	-1	0,866	0	0	0	0	0	0	0	0		0
4	0	-0,5	0	0,5	1	0	0	0	0	0		0
5	0	-0,866	0	-0,866	0	0	0	0	0	0		15
6	0	0	-1	-0,5	0	0,5	1	0	0	0		0
7	0	0	0	0,866	0	0,866	0	0	0	0		15
8	0	0	0	0	-1	-0,5	0	0,5	0	0		0
9	0	0	0	0	0	-0,866	0	-0,866	0	0		0
10	0	0	0	0	0	0	-1	-0,5	0	1		0
11	0	0	0	0	0	0	0	0,866	-1	0		0
12												
13	Обратная матрица A^{-1}											
14	0	-1	-0,433	-0,75	0	-0,5	-0,433	-0,25	0	0		
15	0	0	-0,5	-0,866	0	-0,577	-0,5	-0,289	0	0		
16	1	0	0,25	0,433	0	0,2887	0,25	0,1443	0	0		
17	0	0	0,5	-0,289	0	0,5774	0,5	0,2887	0	0		
18	0	0	0,5	-0,289	0	-0,577	-0,5	-0,289	0	0		
19	0	0	-0,5	0,2887	0	0,5774	-0,5	-0,289	0	0		
20	1	0	0,75	0,1443	1	0,2887	0,75	0,433	0	0		
21	0	0	0,5	-0,289	0	-0,577	0,5	-0,866	0	0		
22	0	0	0,433	-0,25	0	-0,5	0,433	-0,75	0	-1		
23	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0		
24												
25	Вектор решения											
26	-18,75											
27	-21,65											
28	10,826											
29	4,3303											
30	-12,99											
31	12,991											
32	6,4954											
33	-12,99											
34	-11,25											
35	0											
36												

Как правило, возникает необходимость расчета фермы для нескольких вариантов нагрузки. В этом случае формируется несколько вариантов правых частей уравнений, а левая часть остается неизменной. Например, если для фермы, изображенной на рис. 1, приложить еще один вариант нагрузки (рис. 2), то к существующему вектору правой части добавится еще один. Таким образом, полученная система уравнений является системой уравнений с двумя вариантами правой части, матрица левой и правой частей которой представлена ниже.

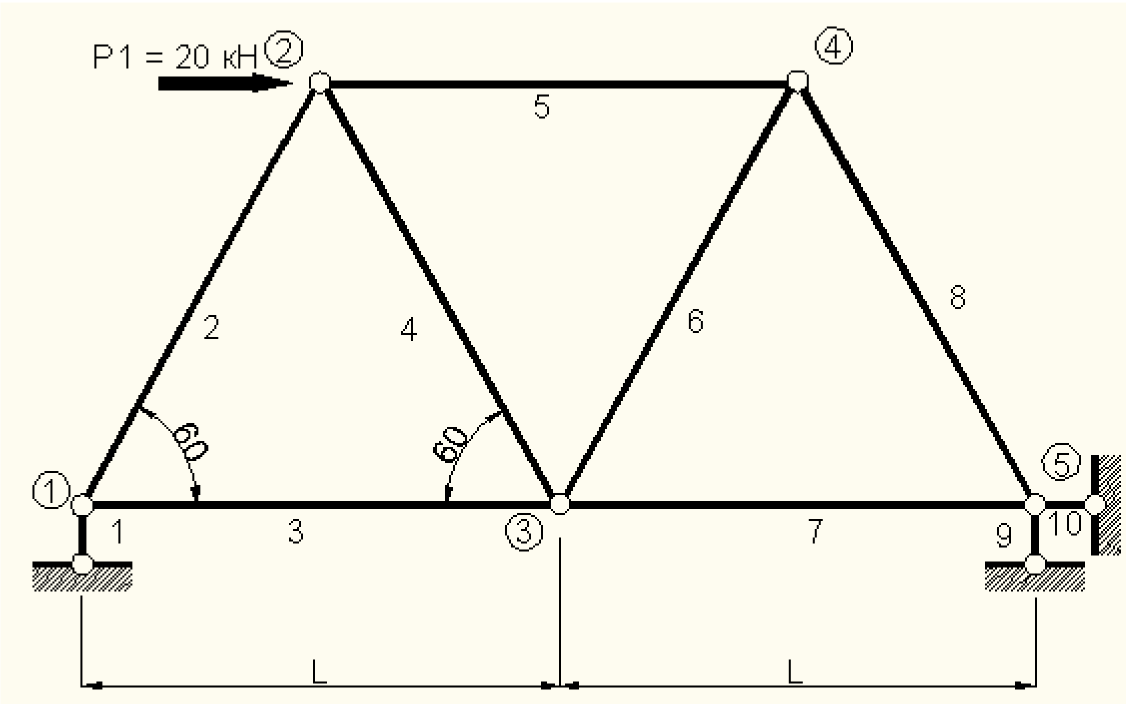


Рис. 2

Матрица левой части
(коэффициенты при неизвестных)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0,5	1							
-1	0,866								
	-0,5		0,5	1					
	-0,866		-0,866						
		-1	-0,5		0,5	1			
			0,866		0,866				
				-1	-0,5		0,5		
					-0,866		-0,866		
						-1	-0,5		1
							0,866	-1	

Матрица правой части (свобод-ные члены)

	-2
15	
15	

Решаем систему уравнений матричным методом в Excel

Матрица левой части A / Векторы правых частей

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M
2	0	0,5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-1	0,866	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	-0,5	0	0,5	1	0	0	0	0	0	0	-20
5	0	-0,866	0	-0,866	0	0	0	0	0	0	15	0
6	0	0	-1	-0,5	0	0,5	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0,866	0	0,866	0	0	0	0	15	0
8	0	0	0	0	-1	-0,5	0	0,5	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	-0,866	0	-0,866	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	-1	-0,5	0	1	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0,866	-1	0	0	0

Обратная матрица A^{-1}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
14	0	-1	-0,433	-0,75	0	-0,5	-0,433	-0,25	0	0
15	0	0	-0,5	-0,866	0	-0,577	-0,5	-0,289	0	0
16	1	0	0,25	0,433	0	0,2887	0,25	0,1443	0	0
17	0	0	0,5	-0,289	0	0,5774	0,5	0,2887	0	0
18	0	0	0,5	-0,289	0	-0,577	-0,5	-0,289	0	0
19	0	0	-0,5	0,2887	0	0,5774	-0,5	-0,289	0	0
20	1	0	0,75	0,1443	1	0,2887	0,75	0,433	0	0
21	0	0	0,5	-0,289	0	-0,577	0,5	-0,866	0	0
22	0	0	0,433	-0,25	0	-0,5	0,433	-0,75	0	-1
23	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Векторы решения

	A	B
26	-18,75	8,66
27	-21,65	10
28	10,826	-5
29	4,3303	-10
30	-12,99	-10
31	12,991	10
32	6,4954	-15
33	-12,99	-10
34	-11,25	-8,66
35	0	-20

Получили два вектора решения, которые приведены в табл. 1 (для 1-го варианта нагрузки) и в табл. 2 (для 2-го варианта нагрузки).

Таблица 1

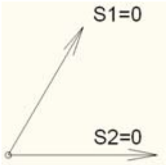
Номер стержня	Усилие, кН
1	-18,75
2	-21,65
3	10,826
4	4,330
5	-12,99
6	12,991
7	6,495
8	-12,99
9	-11,25
10	0,000

Таблица 2

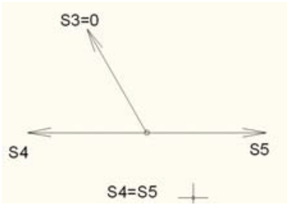
Номер стержня	Усилие, кН
1	8,66
2	10
3	-5
4	-10
5	-10
6	10
7	-15
8	-10
9	-8,66
10	-20

Контроль правильности полученных усилий

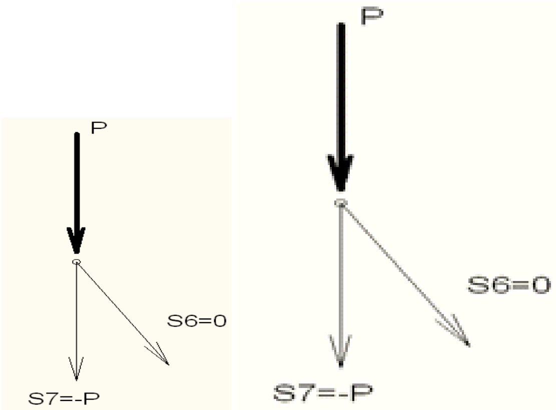
1. Если в незагруженном узле фермы сходятся два стержня, то усилия в этих стержнях равны нулю.



2. Если в незагруженном узле фермы сходятся три стержня, из которых два расположены на одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю. Усилия в первых двух стержнях равны между собой.



3. Если в узле фермы сходятся два стержня и к узлу приложена внешняя сила, линия действия которой совпадает с осью одного из стержней, то усилие в этом стержне равно по модулю приложенной силы, а усилие в другом стержне равно нулю.



4. Если опорные стержни заменить реакциями этих стержней, то сумма проекций всех внешних сил и опорных реакций на оси X и У равна нулю.

Задания

Задание 1.

Решить в Excel систему линейных уравнений матричным способом

Вариант	Система уравнений	Вариант	Система уравнений
1	$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 6x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$	7	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 5x_1 - x_2 = 6 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$	8	$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ -2x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 7 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$	9	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$

4	$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 \\ -2x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$	10	$\begin{cases} -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -4 \\ -2x_2 + x_3 = 8 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$	11	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4 \\ -x_2 - 4x_3 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 7 \\ -6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + -6x_3 = 8 \\ 5x_2 - 4x_3 = -6 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$

Задание 2

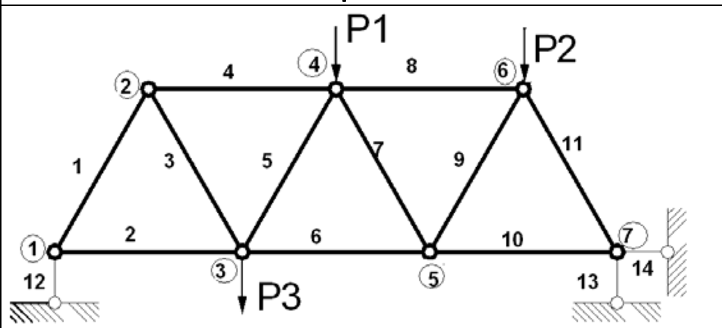
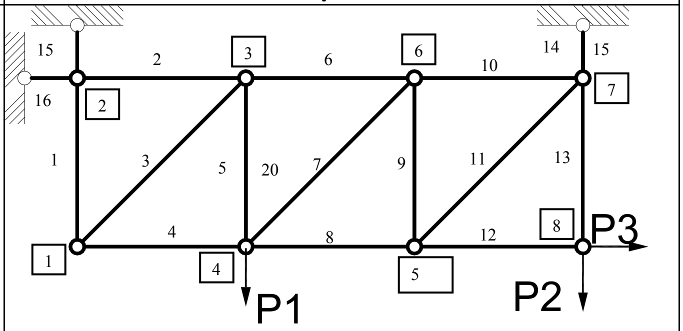
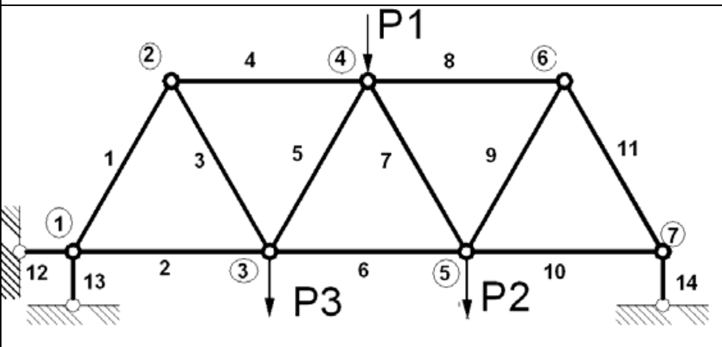
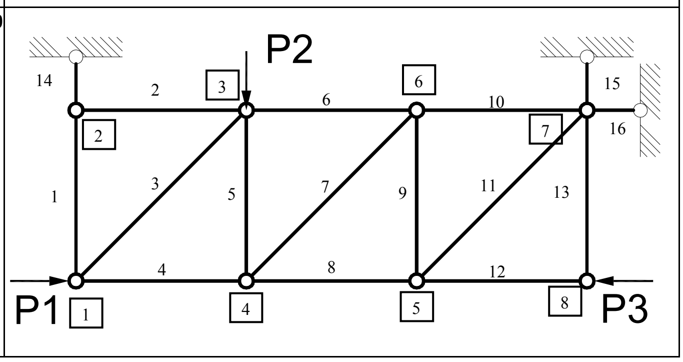
Решить в Excel СЛАУ с двумя вариантами правых частей

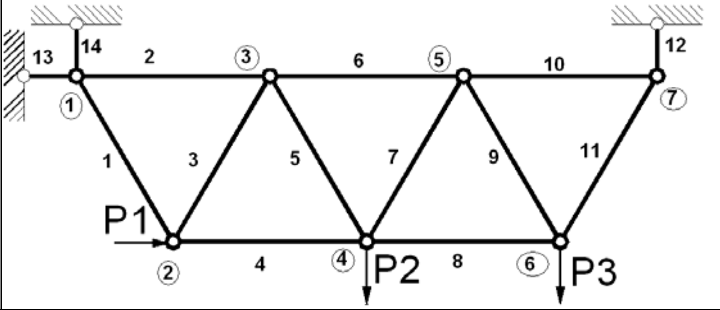
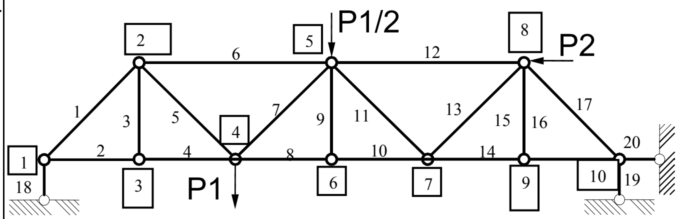
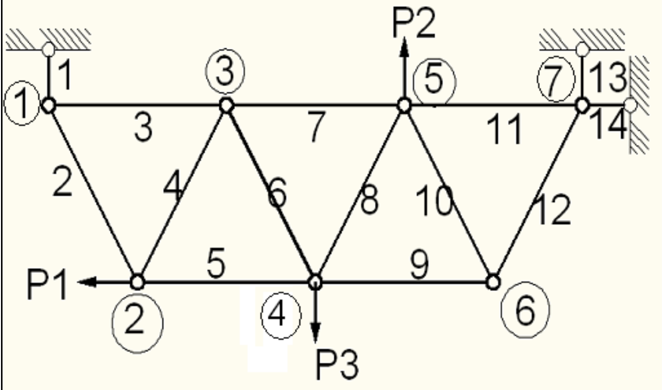
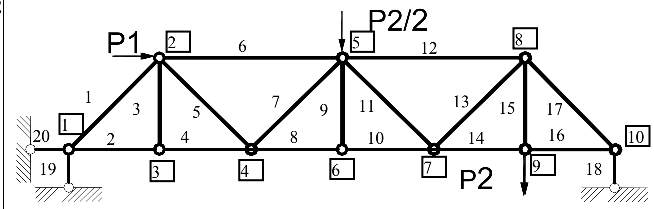
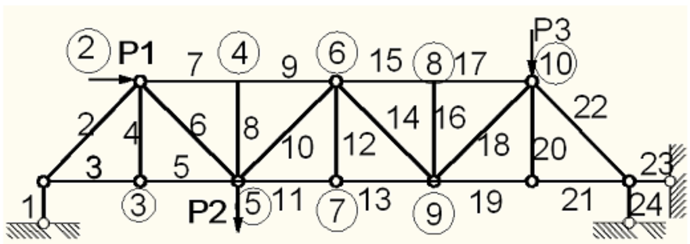
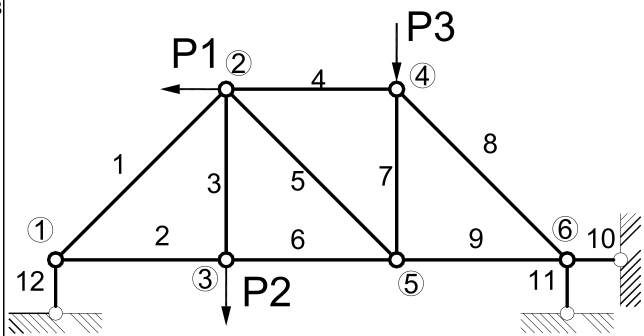
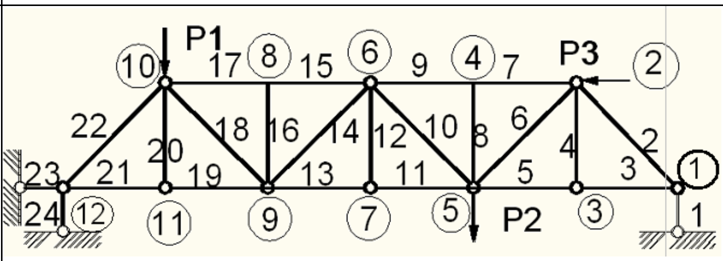
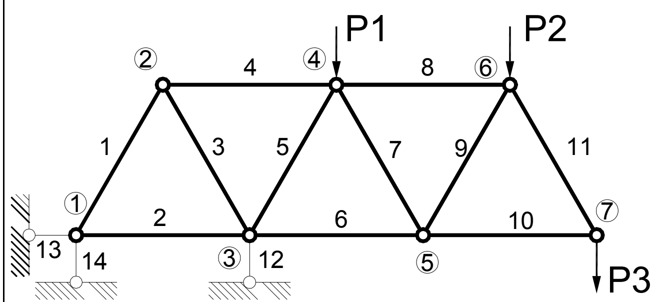
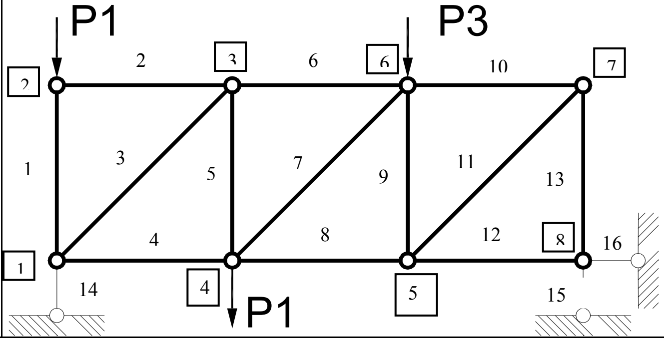
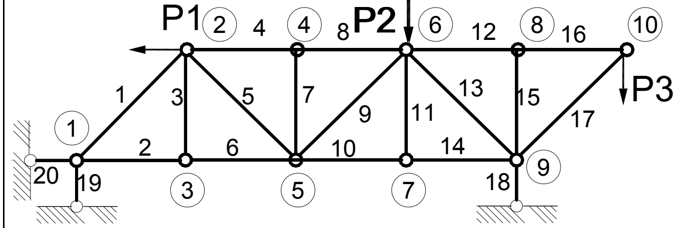
$$\left\{\begin{array}{l|l|} 5x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -6 & 4 \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 8 & 17 \\ 2x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 2x_4 = 13 & -5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 10x_4 = 14 & 5 \end{array}\right.$$

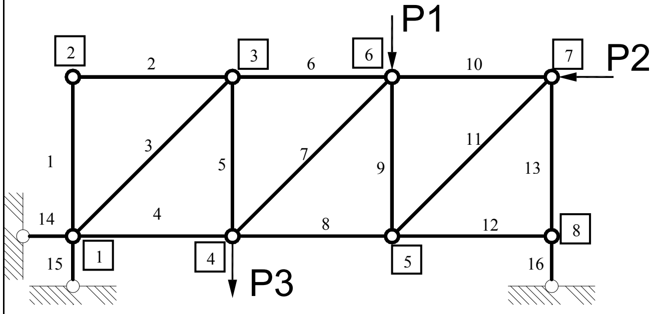
Задание 3

Определить усилия в стержнях статически-определимой фермы по способу вырезания узлов (по вариантам).

P1 = 15 кН P2 = 20кН P3 = 30кН.

№	Вариант	№	Вариант
1		9	
2		10	

№	Вариант	№	Вариант
3		**11**	
4		**12**	
5		**13**	
6		**14**	
7		**15**	

№	Вариант	№	Вариант
8		**16**