

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования
Московский технический университет связи и информатики

Кафедра теории вероятностей и прикладной математики

Методические указания
и контрольные задания
по курсу

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
Часть 2

для студентов-заочников 2 курса
(направление 210700)

Москва 2013

План УМД на 2014/2015 уч.г.

Методические указания
и контрольные задания

по курсу

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Часть 2

Составители: М.С.Лохвицкий, доцент
Е.В.Троицкий, доцент
И.С.Синева, доцент
А.В.Власов, доцент

Издание стереотипное. Утверждено на заседании кафедры.

Отв. редактор Е.В.Троицкий, доцент

Рецензенты: В.В.Меркулов, доцент
Г.Н.Смирнова, ст. преподаватель

ПРЕДИСЛОВИЕ

Раздел "Математическая статистика" является частью материала по курсу "Высшая математика", изучаемого студентами-заочниками технических факультетов на 3 курсе. Настоящие методические указания необходимо изучать и выполнять контрольные работы 7 и 8 т о л ь к о после изучения раздела "Теория вероятностей" (см. методические указания, ч. I).

Настоящие методические указания не заменяют учебника по высшей математике. Эти указания содержат разъяснения о порядке изучения программного материала; в них кратко освещены отдельные вопросы, которые могут встретить затруднения, приведены решения некоторых типовых задач и вопросы для самопроверки. Изучать курс следует по литературе, рекомендованной в настоящих указаниях.

Общие сведения о порядке изучения курса высшей математики и выполнения контрольных работ содержатся в методических указаниях, рассылавшихся ранее студентам первого и второго курсов. Прежде чем приступить к изучению нового программного материала, студенту следует внимательно прочесть еще раз эти общие указания.

Правила нахождения номера своего варианта

Если последние две цифры номера студенческого билета меньше 51, то номер варианта совпадает с этими цифрами.

Если последние две цифры номера студенческого билета больше или равны 51, то из последних цифр нужно отнять 50.

Например:

если номер студенческого билета 390015, то номер варианта 15;

если номер студенческого билета 390068, то номер варианта будет равен $68 - 50 = 18$.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

(разд. I-6 рабочей программы приведены в методических указаниях, ч. I)

7. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Нахождение числовых характеристик случайных величин из опыта. Точечные оценки характеристик. Свойства оценок. Оценки для математического ожидания, дисперсии случайной величины и коэффициента корреляции.

Приемы построения эмпирических законов распределения: гистограмма; эмпирическая функция распределения.

Доверительный интервал. Построение доверительных интервалов для математического ожидания нормально распределенной случайной величины.

Понятие о методах оценок параметров распределения (метод максимального правдоподобия, метод наименьших квадратов). Понятие о проверке гипотез, критериях согласия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1977.

2. Сборник задач по математике для втузов. Теория вероятностей и математическая статистика / Под ред. А.В.Ефимова. - М.: Наука, 1990.

Дополнительная

3. Радунский Б.А. Элементы математической статистики / ВЗЭС. - М., 1975.

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1975.

5. Заманский С.А., Радунский Б.А., Смирнова Г.Н. Задачник по теории вероятностей и элементам математической статистики / ВЗЭС. - М., 1971.

В дальнейшем при ссылках на литературу указанные пособия обозначаются заключенными в квадратные скобки номерами по этому списку.

Содержание лекций и упражнений по разделам "Теория вероятностей" и "Математическая статистика" приведены в методических указаниях ч. I.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ТЕМАМ КУРСА

I. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

Теория: [1, гл. XV, § 1, 6-8; гл. XVI, § 1, 4, 9] или [3, гл. I].

Упражнения: [5, разд. III, § 1, задачи 1, 3, 4]; [2, гл. 15, § 1, задачи 15.7, 15.9, 15.11, 15.24, 15.31].

I. 0 задачах математической статистики. В теории вероятностей предполагается, что все основные характеристики случайного события, случайной величины или случайного процесса известны. В практике это бывает крайне редко, и все характеристики или их часть (функция распределения, плотность вероятности, моменты случайной величины, функция корреляции случайного процесса) нужно находить из эксперимента.

Как оценить неизвестную вероятность события на основании наблюдений? Как оценить неизвестную функцию распределения случайной величины по наблюдаемым из опыта ее значениям? Как оценить параметры $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ распределения с плотностью вероятности $f(x, \theta)$ (θ - вектор с компонентами $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$)? Например, нужно оценить параметры $\theta_1 = m$, $\theta_2 = \sigma^2$ нормального распределения. Как оценить характеристики процесса по наблюдаемым реализациям? Такого рода задачи решаются в теории оценок.

Наряду с упомянутыми вопросами часто возникают другого рода вопросы: из тех или иных соображений выдвигаются некоторые гипотезы - случайное событие обладает данной вероятностью, математическое ожидание наблюдаемой случайной величины равно нулю, наблюдаемая случайная величина подчиняется нормальному закону, данный процесс является пуассоновским с постоянной интенсивностью и т.д.

Проверка такого рода гипотез по наблюдаемым данным составляет содержание специального раздела: проверка статистических гипотез.

Часто необходимо выявить меру и характер зависимости двух или нескольких случайных величин (случайных показателей какого-либо объекта). Такого рода задачи решаются в корреляционной теории и регрессионной теории.

Часто возникает необходимость выявить степень вклада каких-либо факторов в результирующий фактор (или в результирующие факторы). Такие задачи решаются в дисперсионном анализе и факторном анализе.

Кластерный анализ позволяет сгруппировать наблюдаемые объекты в небольшое число классов, а дискриминантный анализ - отнести объект к тому или иному классу. Исследованиям свойств случайных процессов по наблюдаемым данным посвящен раздел статистика случайных процессов.

2. Основные определения. Как правило исходные статистические данные - результат наблюдения некоторой конечной совокупности случайных величин

$$(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

характеризующей исход эксперимента. В этом случае говорят, что эксперимент состоит в проведении n испытаний, причем результат

i -го испытания описывается случайной величиной X_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Совокупность наблюдаемых случайных величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется выборкой, величины X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) - элементами выборки, а их число n - объемом (или размером) выборки. Конкретные значения выборки, полученные в результате испытаний, называют реализацией выборки и обозначают строчными буквами

$$(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Пусть $\mathcal{X}$ - множество всех возможных значений выборки $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Множество $\mathcal{X}$ называется выборочным пространством. $\mathcal{X}$ может быть либо всем n -мерным

пространством R^n , или его частью, или состоять из конечного или счетного числа точек в R^n .

Часто рассматриваются ситуации, когда случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы и одинаково распределены (в соответствии с некоторой функцией распределения $F(x)$). Это соответствует эксперименту, в котором проводятся повторные независимые наблюдения над одной и той же случайной величиной X с функцией распределения $F(x)$. В этом случае функции распределения каждой случайной величины X_i одинаковы:

$$F_{X_i}(x) = F_X(x) = F(x),$$

а функция распределения выборки

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1) \cdot F(x_2) \dots F(x_n).$$

В этом случае говорят, что $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - выборка из распределения случайной величины X с функцией распределения $F(x)$.

Иногда множество возможных значений наблюдаемой случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ называют генеральной совокупностью, а вектор $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - выборкой из этой совокупности.

Статистическая модель для повторных независимых наблюдений определяется классом допустимых функций распределения $\mathcal{F} \{F(x)\}$, т.е. функций распределения, допустимых для описания данного эксперимента.

Часто функция распределения $F(x)$ наблюдаемой случайной величины X (или плотность распределения вероятностей $f(x)$) известна с точностью до параметров, т.е.

$$F(x) = F(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

(или $f(x) = f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$). В этом случае говорят, что задана параметрическая модель

$$\mathcal{F} = \{F(x; \theta); \theta \in \Theta \subset R^k\},$$

где $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$; Θ - подмножество k -мерного евклидова пространства R^k .

Например, нормальная модель $\mathcal{N}\{\theta_1, \theta_2\}$ определяется нормальными распределениями с параметрами

$$\mathcal{Q}_1 = m = MX ; \quad \mathcal{Q}_2 = \sigma^2 = DX .$$

Пусть $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - выборка из распределения случайной величины X и $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - реализация этой выборки. Запишем наблюдаемые значения в порядке возрастания

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(k)} \leq \dots \leq x_{(n)} . \quad (1)$$

Случайная величина $X_{(k)}$, которая для каждой реализации $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выборки принимает значения $x_{(k)}$, называется k -й порядковой статистикой ($k = 1, 2, \dots, n$).

Порядковые статистики по определению удовлетворяют неравенствам

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(k)} \leq \dots \leq X_{(n)} . \quad (2)$$

Последовательность случайных величин (2) называют вариационным рядом.

Для заданной реализации $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выборки $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ реализацией последовательности (2) является последовательность (1). В дальнейшем будем понимать под записью $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ уже упорядоченные значения, т.е. реализацию (1) вариационного ряда (2).

Идея выборочного метода состоит в том, что неизвестные вероятности p_i каких-то событий, входящие в некоторое выражение, заменяются соответствующими частотами y_i . В соответствии с теоремой Бернулли частоты y_i сходятся по вероятности (при $n \rightarrow \infty$) к соответствующим вероятностям p_i . Таким образом, оценка нашего выражения сохлится (по вероятности) к истинному выражению.

3. Статистическое распределение. Полигон частот. Гистограмма.

Пусть дискретная случайная величина имеет распределение

x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

причем вероятности p_i ($i = 1, 2, \dots, k$) неизвестны. Пусть в результате n наблюдений значение x_1 выпало n_1 раз, x_2 - n_2

раз, ..., $x_k - n_k$ раз ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$). Подсчитаем соответствующие частоты

$$\gamma_1 = \frac{n_1}{n}, \quad \gamma_2 = \frac{n_2}{n}, \quad \dots, \quad \gamma_k = \frac{n_k}{n}$$

и составим таблицу

x_1	x_2	...	x_i	...	x_k
γ_1	γ_2	...	γ_i	...	γ_k

З а м е ч а н и е . В некоторых учебниках величины n_i называются частотами, а величины γ_i — относительными частотами.

Эта таблица носит название статистического распределения. Статистическое распределение является оценкой неизвестного распределения. В соответствии с теоремой Бернулли частоты γ_i сходятся по вероятности (при $n \rightarrow \infty$) к соответствующим вероятностям p_i ($i = 1, 2, \dots, k$). Поэтому при больших n статистическое распределение мало отличается от истинного распределения.

Графически статистическое распределение изображается в виде полигона частот. По оси абсцисс откладываются значения $x_1, x_2, \dots, x_k$, и в точках $x_1, x_2, \dots, x_k$ откладываются в направлении оси ОУ величины $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ соответственно. Полученные точки соединяют отрезками прямых. Полигон частот является статистическим аналогом многоугольника распределения (при построении многоугольника распределения по оси ординат откладывают вероятности p_i). Заметим, что $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k = 1$.

П р и м е р I . Наблюдения над дискретной случайной величиной X заданы следующей таблицей:

Возможные значения x_i	3	5	7	9	11
Количества полученных наблюдений n_i	4	10	25	8	3

Построить полигон частот.

Решение. Общее число наблюдений

$$n = 4 + 10 + 25 + 8 + 3 = 50.$$

Подсчитаем частоты

$$\gamma_1 = n_1/n = 4/50 = 0,08;$$

$$\gamma_2 = n_2/n = 10/50 = 0,20;$$

$$\gamma_3 = n_3/n = 25/50 = 0,50;$$

$$\gamma_4 = n_4/n = 8/50 = 0,16;$$

$$\gamma_5 = n_5/n = 3/50 = 0,06.$$

В точках x_i откладываем частоты γ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).
Полученные точки соединяем отрезками прямых (рис. I).

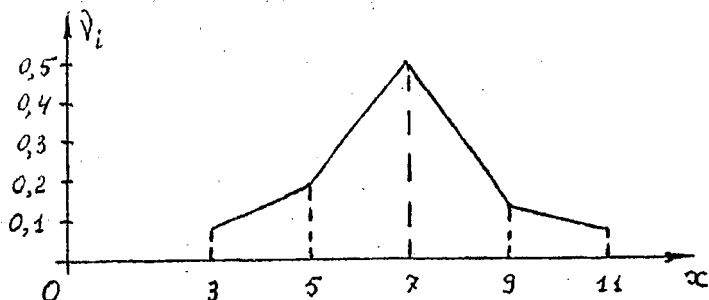


Рис. I

Непрерывная случайная величина X характеризуется некоторой плотностью вероятностей $f(x)$. Эта плотность часто бывает неизвестной. Чтобы получить о ней некоторое представление, строят гистограмму. Пусть в результате n наблюдений над случайной величиной X мы получили выборочные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$. Область значений случайной величины X разбиваем на k интервалов:

$$(-\infty, \gamma_1), (\gamma_1, \gamma_2), \dots, (\gamma_{k-1}, \gamma_k), (\gamma_k, \infty).$$

Вычисляем количества наблюдений n_i ($i = 1, 2, \dots, k$), попавших в каждый интервал. При этом получаем числа $n_1, n_2, \dots, n_k$. По ним подсчитываем частоты $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$. Отрезки $[\gamma_{i-1}, \gamma_i]$ ($i = 2, 3, \dots, k-1$) обычно берут одинаковой длины, так что $(\gamma_i - \gamma_{i-1}) = h$. Первый интервал $(-\infty, \gamma_1)$ заменяем отрез-

ком $[\delta_0, \delta_1]$ длины h (от точки δ_1 отступаем влево на h и получаем точку δ_0), а последний интервал $(\delta_{k-1}; \infty)$ заменяем отрезком $[\delta_{k-1}, \delta_k]$ (от точки δ_{k-1} отступаем вправо на h и получаем точку δ_k). Таким образом, мы получаем k отрезков $[\delta_0, \delta_1], [\delta_1, \delta_2], \dots, [\delta_{i-1}, \delta_i], \dots, [\delta_{k-1}, \delta_k]$ длины h и соответствующие частоты $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i, \dots, \nu_k$. Строим прямоугольники высотой $\delta_i^* = \nu_i / h$, основаниями которых являются отрезки $[\delta_{i-1}, \delta_i]$. Полученная фигура и называется гистограммой. Гистограмма является статистическим аналогом плотности вероятностей. При больших n и малых h гистограмма мало отличается от истинной плотности вероятностей $f(x)$.

Числа n и h должны быть таковы, чтобы для каждого участка выполнялось условие $n_i \geq 10$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

На рис. 2 показана гистограмма и истинная плотность $f(x)$.

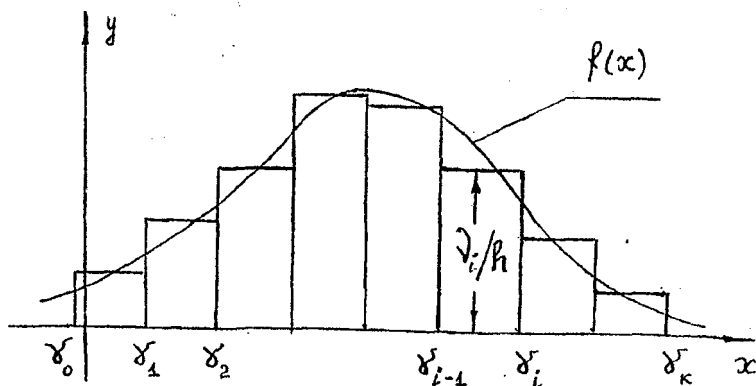


Рис. 2

Сумма площадей прямоугольников равна

$$\frac{\nu_1}{h} h + \frac{\nu_2}{h} h + \dots + \frac{\nu_k}{h} h = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = 1,$$

что соответствует условию $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ для плотности вероятностей $f(x)$.

Пример 2. Произведено n наблюдений над непрерывной случайной величиной X . Диапазон изменений величины X разбит на восемь промежутков. Промежутки и количества наблюдений n_i , попавших в каждый из них, указаны в таблице.

$[x_{i-1}^*, x_i^*]$	$(-\infty; 3]$	$[3; 5]$	$[5; 7]$	$[7; 9]$	$[9; 11]$	$[11; 13]$	$[13; 15]$	$[15; +\infty)$
n_i	5	15	38	80	58	28	18	8

Требуется построить гистограмму.

Р е ш е н и е . Общее число наблюдений n равно

$$n = 5 + 15 + 38 + 80 + 58 + 28 + 18 + 8 = 250.$$

Промежуток $(-\infty; 3]$ заменяем отрезком $[1; 3]$, а промежуток $[15; +\infty)$ - отрезком $[15; 17]$.

Длина отрезков $h = x_i^* - x_{i-1}^* = 2$.

Подсчитаем высоты прямоугольников

$$\delta_i^* = \frac{n_i}{h} = \frac{n_i}{n \cdot 2} = \frac{n_i}{500} :$$

$$\delta_1^* = 5/500 = 0,010; \quad \delta_2^* = 15/500 = 0,030;$$

$$\delta_3^* = 38/500 = 0,076; \quad \delta_4^* = 80/500 = 0,160;$$

$$\delta_5^* = 58/500 = 0,116; \quad \delta_6^* = 28/500 = 0,056;$$

$$\delta_7^* = 18/500 = 0,036; \quad \delta_8^* = 8/500 = 0,016.$$

Строим прямоугольники высотой δ_i^* ($i = 1, 2, \dots, 8$), основаниями которых являются заданные отрезки (см.рис. 3).

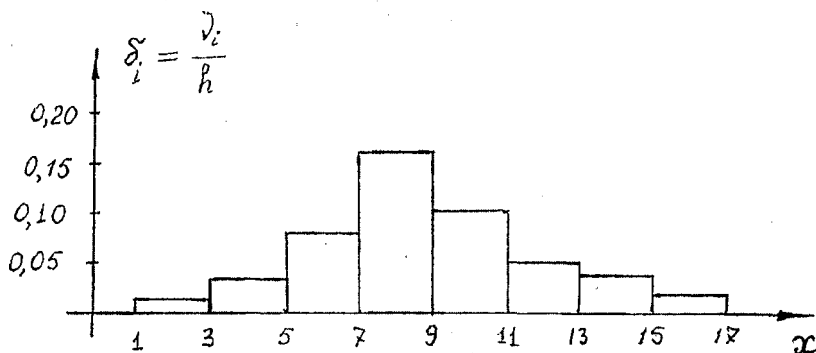


Рис. 3

Если возможные значения $x_1, x_2, \dots, x_k$ дискретной случайной величины X являются равноотстоящими, т.е. $x_{i+1} - x_i = h$ ($i = 1, 2, \dots, (k-1)$), то ее распределение также можно харак-

теризовать гистограммой. При этом серединами оснований прямоугольников выбираются точки x_i , а высотами являются числа $\frac{n_i}{n} = \frac{y_i}{h} = \frac{n_i}{nh}$, где n_i - число наблюдавшихся значений x_i ($i = 1, 2, \dots, k$).

4. Эмпирическая функция распределения. Эмпирической функцией распределения $F^*(x)$ называется функция

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x - число наблюдавшихся значений случайной величины X , меньших числа x ; n - общее число наблюдений.

Очевидно, что $F^*(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и истинная функция распределения $F(x)$, т.е. она является неубывающей функцией и заключена в пределах

$$0 \leq F^*(x) \leq 1,$$

где $F^*(x)$ является статистическим аналогом истинной функции распределения $F(x)$.

Очевидно, что $F^*(x)$ сходится по вероятности (при $n \rightarrow \infty$) к истинной функции распределения $F(x)$ при каждом x , поскольку

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = y_x,$$

где y_x - частота события $\{X < x\}$, которая в соответствии с теоремой Бернулли сходится по вероятности (при $n \rightarrow \infty$) к вероятности

$$P(X < x) = F(x).$$

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ имеет вид ступенчатой функции.

Если наблюдается непрерывная случайная величина X и при этом мы получили реализацию вариационного ряда $x_1, x_2, \dots, x_n$, то скачки происходят в точках x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а величина скачков равна $\frac{1}{n}$ (отметим, что сумма всех скачков равна единице), $F^*(x)$ для непрерывной случайной величины X при $n = 10$ показана на рис. 4. На этом же рисунке показана функция распределения $F(x)$.

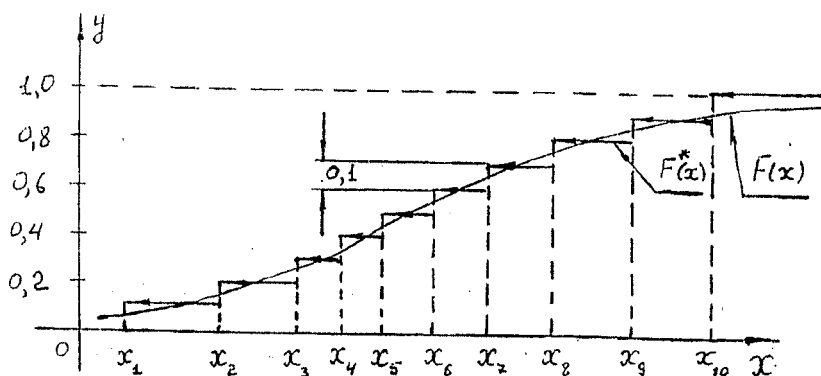


Рис. 4

Если наблюдается дискретная случайная величина и мы получили статистическое распределение

x_1	x_2	...	x_l	...	x_k
γ_1	γ_2	...	γ_l	...	γ_k

то скачки у $F^*(x)$ происходят в точках x_l ($l = 1, 2, \dots, k$), а величины скачков равны γ_l (сумма скачков равна единице).

Пример 3. В условиях примера I построить эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$. Частоты γ_l ($l = 1, 2, 3, 4, 5$) подсчитаны в примере I. Строим ступенчатую функцию. Скачки величины γ_l имеют место в точках x_l ($l = 1, 2, \dots, 5$) (рис. 5).

5. Выборочные оценки параметров. Часто нужно по выборочным данным оценить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X . Математическое ожидание $M(X)$ можно оценить по выборке $X_1, X_2, \dots, X_n$ с помощью выборочного среднего значения $\bar{X}_g$:

$$\bar{X}_g = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (I)$$

Дисперсия $D(X)$ оценивается с помощью выборочной дисперсии

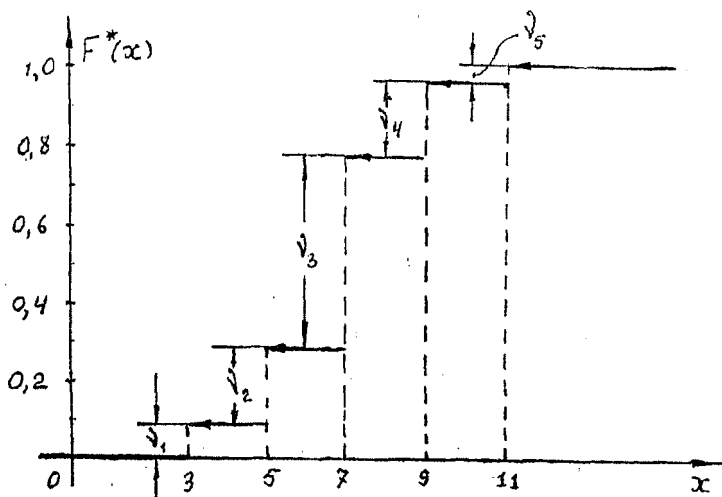


Рис. 5

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_B)^2. \quad (2)$$

Выборочное среднее значение $\bar{X}_B$ есть среднеарифметическое от случайных величин X_i , а выборочная дисперсия D_B - среднеарифметическое от величин $(X_i - \bar{X}_B)^2$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Нетрудно показать, что D_B может быть подсчитана также по следующей формуле:

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_B^2. \quad (3)$$

Пусть X - дискретная случайная величина. Ее математическое ожидание определяется формулой

$$m = M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Заменяя неизвестные вероятности p_i известными из опыта частотами γ_i , получаем выборочное среднее значение для дискретной случайной величины

$$\bar{X}_g = \sum_{i=1}^K x_i \gamma_i = \sum_{i=1}^K \frac{x_i n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^K x_i n_i}{\sum_{i=1}^K n_i} \quad (4)$$

Дисперсия дискретной случайной величины X определяется формулой

$$\sigma^2 = D(X) = \sum_{i=1}^K (x_i - M(X))^2 p_i$$

Заменяя p_i на γ_i , получаем выборочную дисперсию дискретной случайной величины

$$D_g = \sum_{i=1}^K (x_i - \bar{X}_g)^2 \gamma_i = \frac{\sum_{i=1}^K (x_i - \bar{X}_g)^2 n_i}{\sum_{i=1}^K n_i} \quad (5)$$

Это выражение может быть записано следующим образом:

$$D_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K x_i^2 n_i - \bar{X}_g^2, \quad (6)$$

где $n = \sum_{i=1}^K n_i$.

Так как в соответствии с теоремой Бернулли частоты γ_i сходятся к вероятностям p_i , то при достаточно больших n выборочное среднее $\bar{X}_g$ и выборочная дисперсия D_g мало отличаются от математического ожидания m и дисперсии σ^2 . Выборочное среднеквадратичное отклонение $\tilde{\sigma}_g$ определяется следующим образом:

$$\tilde{\sigma}_g = \sqrt{D_g}. \quad (7)$$

Пример 4. В условиях примера I подсчитать выборочное среднее значение, выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратическое отклонение.

Решение. По формуле (4) находим

$$\bar{X}_e = \frac{3 \cdot 4 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 25 + 9 \cdot 8 + 11 \cdot 3}{4 + 10 + 25 + 8 + 3} = \frac{342}{50} = 6,84.$$

Величину D_e находим по формуле (6):

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{1}{50}(3^2 \cdot 4 + 5^2 \cdot 10 + 7^2 \cdot 25 + 9^2 \cdot 8 + 11^2 \cdot 3) - (6,84)^2 = \\ &= \frac{1}{50}(36 + 250 + 1225 + 648 + 363) - (6,84)^2 = \\ &= \frac{2522}{50} - (6,84)^2 \approx 50,440 - 46,786 = 3,654. \end{aligned}$$

Выборочное среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_e = \sqrt{D_e} \approx 1,91.$$

Для непрерывной случайной величины X выборочное среднее значение $\bar{X}_e$ и выборочная дисперсия D_e подсчитываются по формулам (1) и (2), в которых вместо случайных величин X_i подставляются соответствующие наблюдаемые значения x_i .

Если число наблюдений непрерывной случайной величины n велико, то для оценки математического ожидания и дисперсии часто прибегают к группировке данных. Область изменения случайной величины X разбивают на k интервалов и считают X дискретной случайной величиной, которая может принимать лишь значения x_i , равные серединам интервалов. При этом считается, что этим значениям соответствуют частоты ν_i , равные частотам попаданий в соответствующие интервалы. Таким образом, с помощью группировки данных можно приближенно считать непрерывную случайную величину дискретной и использовать формулы (4), (6), соответствующие дискретной случайной величине.

Пример 5. В условиях примера 2 подсчитать выборочное среднее значение и выборочное среднее квадратическое отклонение.

Решение. В качестве возможных значений X_i случайной величины X принимаем середины интервалов

$$X_1 = 2; \quad X_2 = 4; \quad X_3 = 6; \quad X_4 = 8; \quad X_5 = 10; \quad X_6 = 12; \quad X_7 = 14; \quad X_8 = 16.$$

По формуле (3) находим

$$\bar{X}_e = \frac{2 \cdot 5 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot 38 + 8 \cdot 80 + 10 \cdot 58 + 12 \cdot 28 + 14 \cdot 18 + 16 \cdot 8}{5 + 15 + 38 + 80 + 58 + 28 + 18 + 8} =$$

$$= \frac{2234}{250} \approx 8,936.$$

Для определения D_{θ} используем формулу (6):

$$\begin{aligned} D_{\theta} &= \frac{1}{250} (2^2 \cdot 5 + 4^2 \cdot 15 + 6^2 \cdot 38 + 8^2 \cdot 80 + 10^2 \cdot 58 + 12^2 \cdot 28 + \\ &+ 14^2 \cdot 18 + 16^2 \cdot 8) - (8,936)^2 = \frac{1}{250} (20 + 240 + 1368 + 5120 + \\ &+ 5800 + 4032 + 3528 + 2048) - (8,936)^2 = \frac{22156}{250} - (8,936)^2 = \\ &= 88,624 - 79,852 = 8,772. \end{aligned}$$

2. ОЦЕНКА НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Теория: [1, гл. XVI, § 2, 4, 9, 13-16, 22] или [3, гл. II].

Упражнения: [5, разд. III, § 3, задачи 1, 2, 8, 9]; [2, гл. 15, § 2, задачи 15.115, 15.122, 15.136, 15.137, 15.147; § 3, задачи 15.170, 15.172, 15.184].

1. Точечные оценки параметров. Точечной оценкой параметра θ , называется некоторая функция $T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$, зависящая только от выборки и известных величин.

Значения этой статистики $t_n = t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при заданной реализации $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимают за приближенное значение параметра θ . Часто обозначают $T_n = \hat{\theta}_n$.

Например, для оценки математического ожидания m можно взять $T_n = \bar{X}_n$ - выборочное среднее, а для оценки дисперсии σ^2 взять $T_n = D_n$ - выборочную дисперсию (или $T_n = S^2$ - несмещенную оценку дисперсии). Поскольку выборка случайна, то и сама оценка T_n является случайной величиной со своим математическим ожиданием $M(T_n)$ и дисперсией $D(T_n)$. Обычно стремятся, чтобы оценки обладали свойствами несмещенности, состоятельности и эффективности.

1. Оценка $T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ параметра θ называется несмещенной, если выполнено равенство

$$M(T_n) = \theta ,$$

т.е. математическое ожидание оценки совпадает с оцениваемым параметром. Так, выборочное, среднее значение $\bar{X}_g$ является несмещенной оценкой для $m = M(X)$:

$$M(\bar{X}_g) = m .$$

В то же время оценка D_g смещена:

$$M(D_g) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2 .$$

Чтобы получить несмещенную оценку для σ^2 , оценку D_g нужно "исправить":

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_g . \quad (I)$$

Оценка S^2 уже будет несмещенной, так как

$$M(S^2) = \frac{n}{(n-1)} \cdot \frac{(n-1)}{n} \sigma^2 = \sigma^2 .$$

Оценку S^2 иногда называют "исправленной дисперсией". Разница между S^2 и D_g при $n \gg 30$ уже невелика. Поэтому оценку S^2 обычно используют при $n < 30$.

2. Оценка $T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ параметра θ называется **состоятельной**, если при неограниченном увеличении числа наблюдений n оценка T_n сходится к оцениваемому параметру θ по вероятности, т.е. при любом $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$P \{ |T_n - \theta| > \varepsilon \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Если оценка T_n - состоятельна, то у нас есть уверенность в том, что при достаточно больших n ее значение будет мало отличаться от параметра θ . Можно показать, что оценки $\bar{X}_g$, D_g и S^2 - состоятельны.

3. Точность оценки $T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ можно охарактеризовать величиной

$$\sigma^2 = M(T_n - \theta)^2.$$

Величина σ^2 дает среднеквадратический разброс значений оценки T_n относительно оцениваемого параметра θ . Если T_n - несмещенная оценка ($M(T_n) = \theta$), то величина σ^2 совпадает с дисперсией оценки T_n :

$$\sigma^2 = M(T_n - \theta)^2 = M(T_n - M(T_n))^2 = D(T_n).$$

Оценка T_n^* , обладающая наименьшей величиной σ^2 , называется эффективной:

$$M(T_n^* - \theta)^2 = \min_{T_n} M(T_n - \theta)^2.$$

Если оценки T_n несмещенные, то оценка T_n^* будет эффективной, если она имеет наименьшую дисперсию

$$D(T_n^*) = \min_{T_n} D(T_n).$$

2. Оценки максимального правдоподобия. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ - выборка из распределения непрерывной случайной величины X . Допустим, что вид плотности распределения вероятностей $f(x; \theta)$ известен, но значение параметра θ неизвестно. Требуется по выборке оценить параметр θ . Функцией правдоподобия $L_n(\theta)$ непрерывной случайной величины X называется функция от параметра θ вида

$$L_n(\theta) = L(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) = f(X_1; \theta) f(X_2; \theta) \dots f(X_n; \theta).$$

Таким образом, в случае непрерывной случайной величины X функция правдоподобия $L_n(\theta)$ есть совместная плотность распределения вероятностей выборки, в которую вместо аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ подставлены соответствующие случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Если X - дискретная случайная величина, то функция правдоподобия имеет вид

$$L_n(\theta) = L(n_1, n_2, \dots, n_k; \theta) = p_1^{n_1}(\theta) p_2^{n_2}(\theta) \dots p_k^{n_k}(\theta),$$

где

$$p_i(\theta) = P_\theta(X = x_i); \quad \sum_{i=1}^k n_i = n; \quad ;$$

x_i - возможные значения X ; n_i - число наблюдавшихся значений x_i ; $i = 1, 2, \dots, k$.

Метод максимального правдоподобия состоит в том, что в качестве оценки параметра θ принимают такое его значение $\hat{\theta}_n$, при котором функция правдоподобия принимает наибольшее значение. Эта оценка $\hat{\theta}_n$ называется оценкой максимального правдоподобия. Так как функции L_n и $\ln L_n$ достигают максимума при одном и том же значении θ , то вместо отыскания максимума функции L_n ищут максимум функции $\ln L_n$, которую называют логарифмической функцией правдоподобия.

Заметим, что $L_n(\theta)$ - случайная функция, так как она зависит от выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$. Поэтому ее точка максимума $\hat{\theta}_n$ (или точка максимума $\ln L_n(\theta)$) является случайной величиной.

Для нахождения оценки максимального правдоподобия:

1) решают уравнение правдоподобия

$$\frac{d \ln L_n}{d \theta} = 0 \quad (2)$$

и находят критическую точку $\hat{\theta}_n^1$;

2) находят вторую производную $\frac{d^2 \ln L_n}{d \theta^2}$. Если вторая производная при $\theta = \hat{\theta}_n^1$ отрицательна, то $\hat{\theta}_n^1$ - точка максимума и эта точка и есть оценка максимального правдоподобия.

Если θ - многомерный параметр

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k),$$

то решают систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L_n}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial \ln L_n}{\partial \theta_k} = 0 \end{cases}$$

и находят критическую точку $\hat{\theta}_n = (\hat{\theta}_n^1, \hat{\theta}_n^2, \dots, \hat{\theta}_n^k)$. Далее тем или иным способом убеждаются в том, что $\hat{\theta}_n$ - точка максимума.

Пример 1. Непрерывная случайная величина X распределена нормально с параметрами m и σ^2 . Математическое ожидание m неизвестно, а дисперсия σ^2 известна. Требуется по выборке $X_1, X_2, \dots, X_n$ получить оценку максимального правдоподобия для m .

Решение. Запишем плотность вероятностей для нормального закона

$$f(x, m, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}.$$

Функция правдоподобия имеет вид

$$L_n(m; \sigma^2) = f(X_1; m, \sigma^2) \cdot f(X_2; m, \sigma^2) \dots f(X_n; m, \sigma^2).$$

Логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$\ln L_n = \sum_{i=1}^n \ln f(X_i; m, \sigma^2) = \sum_{i=1}^n \left[-\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2} \frac{(X_i - m)^2}{\sigma^2} \right].$$

Найдем $\frac{d(\ln L_n)}{dm}$:

$$\begin{aligned} \frac{d(\ln L_n)}{dm} &= \frac{d}{dm} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[-\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2} \frac{(X_i - m)^2}{\sigma^2} \right] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dm} \left[-\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2} \frac{(X_i - m)^2}{\sigma^2} \right] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \cdot 2(X_i - m) \right] = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - m) = \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n X_i - nm \right).$$

Составляем уравнение правдоподобия

$$\frac{d(\ln L_n)}{dm} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n X_i - nm \right) = 0.$$

Решаем его относительно m :

$$\sum_{i=1}^n X_i = nm;$$

$$m = \hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_g.$$

Поскольку

$$\frac{d^2(\ln L_n)}{dm^2} = \frac{d}{dm} \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n X_i - nm \right) \right] = -\frac{n}{\sigma^2} < 0,$$

то критическая точка $\hat{m} = \bar{X}_g$ есть точка максимума. Итак, выборочное среднее $\bar{X}_g$ есть оценка максимального правдоподобия для математического ожидания m при известной дисперсии σ^2 .

Можно показать, что, если дисперсия σ^2 тоже неизвестна, то оценки $\bar{X}_g$ и $\hat{\sigma}_g^2$ есть совместные оценки максимального правдоподобия для двумерного параметра (m, σ^2) в случае нормального распределения.

3. Доверительный интервал. Мы рассмотрели точечные оценки неизвестных параметров. Кроме точечных, рассматривают еще и интервальные оценки неизвестных параметров.

Доверительным интервалом для параметра θ с доверительной вероятностью γ называется такой интервал (θ_1, θ_2) со случайными концами θ_1, θ_2 , зависящими от выборки, который покрывает неизвестный параметр с вероятностью γ , т.е. выполняется равенство

$$P\{\theta_1 < \theta < \theta_2\} = \gamma.$$

Доверительный интервал может быть построен по точечной оценке $\hat{\theta}_n$ параметра θ . Точечная оценка $\hat{\theta}_n$, полученная по выборке $X_1, X_2, \dots, X_n$ есть случайная величина, которая принимает значения, большие или меньшие истинного значения θ . Разброс оценки $\hat{\theta}_n$ можно охарактеризовать величинами ε и γ такими, что выполняется соотношение

$$P\{|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = P\{\hat{\theta}_n - \varepsilon < \theta < \hat{\theta}_n + \varepsilon\} = \gamma.$$

Исходя из определения, интервал $(\hat{\theta}_n - \varepsilon, \hat{\theta}_n + \varepsilon)$ является доверительным интервалом для параметра θ с доверительной вероятностью γ .

4. Доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины.

А. Случай известной дисперсии. В качестве точечной оценки неизвестного математического ожидания m берем $\bar{X}_n$. Используя тот факт, что случайная величина $\sqrt{n}(\bar{X}_n - m) / \sigma$ распределена в соответствии со стандартным нормальным законом, можно показать [2, гл. XVI, § 15] справедливость равенства.

$$P\left\{\frac{\sqrt{n}|\bar{X}_n - m|}{\sigma} < t\right\} = 2\varphi(t) = \gamma, \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ - функция Лапласа.

При заданном γ с помощью таблиц для $\varphi(t)$ находим t_γ из равенства

$$\varphi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}. \quad (2)$$

Запишем неравенство (1) в виде двойного неравенства при выбранном $t = t_\gamma$:

$$P(-t_\gamma < \frac{(\bar{X}_n - m)}{\sigma} < t_\gamma) = \gamma.$$

Решая неравенство относительно m , получаем:

$$P(\bar{X}_g - t_{\gamma} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{X}_g + t_{\gamma} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \gamma.$$

В соответствии с определением доверительного интервала получаем, что доверительный интервал для m есть

$$(\bar{X}_g - t_{\gamma} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X}_g + t_{\gamma} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}),$$

где t_{γ} определяется формулой (2).

Пример 2. Нормально распределенная случайная величина X имеет среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$. Найти значение доверительного интервала для неизвестного математического ожидания m , если заданы: объем выборки $n = 64$, выборочное среднее значение $\bar{X}_g = 4$, доверительная вероятность $\gamma = 0,95$.

Решение. Из равенства $2\Phi(t) = 0,95$ получим $\Phi(t) = 0,475$.

По таблице для $\Phi(t)$ [2, приложение 2] находим $t_{\gamma} = 1,96$. Величина ε равна

$$\varepsilon = \frac{t_{\gamma} \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 2}{\sqrt{64}} = 0,49.$$

Доверительный интервал для m есть $(\bar{X}_g - 0,49; \bar{X}_g + 0,49)$.

Границы доверительного интервала, соответствующие нашим наблюдениям, равны

$$\bar{X}_g - \varepsilon = 4 - 0,49 = 3,51,$$

$$\bar{X}_g + \varepsilon = 4 + 0,49 = 4,49.$$

Таким образом, значение доверительного интервала есть $(3,51; 4,49)$.

Б. Случай неизвестной дисперсии σ^2 . В этом случае рассматривают новую случайную величину

$$T = \frac{\bar{X}_g - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}},$$

где n - объем выборки; $\bar{X}_g$ - выборочное среднее значение; m - неизвестное математическое ожидание; s - "исправленное" среднее

квадратическое отклонение, $S = \sqrt{s^2}$.

Можно доказать, что эта случайная величина подчинена так называемому распределению Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы с плотностью вероятности

$$s(t, n) = \delta_n \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \quad n > 1$$

(не зависящей от m и σ^2 и зависящей только от объема выборки n).

Но тогда вероятность заданного отклонения t_p определяется так:

$$\begin{aligned} P\{|T| < t_p\} &= P\left\{\left|\frac{\bar{X}_g - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| < t_p\right\} = \\ &= \int_{-t_p}^{t_p} s(t, n) dt = 2 \int_0^{t_p} s(t, n) dt = p. \end{aligned} \quad (3)$$

Значение $t_p = t(p, n)$ можно по заданным p и n найти из соотношения

$$2 \int_0^{t_p} s(t, n) dt = p$$

с помощью таблицы в [2, приложение 3].

Заменив в формуле (3) неравенство в фигурных скобках равносильным ему двойным неравенством, получим:

$$P\left\{\bar{X}_g - t_p \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{X}_g + t_p \frac{s}{\sqrt{n}}\right\} = p.$$

А это и значит, что интервал

$$\left(\bar{X}_g - t_p \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X}_g + t_p \frac{s}{\sqrt{n}}\right) \quad (4)$$

покрывает математическое ожидание m с вероятностью p , т.е. он является доверительным интервалом для m с доверительной ве-

роятностью γ . Очевидно, что

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_0} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \tilde{\sigma}_0,$$

где $\tilde{\sigma}_0 = \sqrt{D_0}$. Подставляя это выражение в формулу (4), получаем

$$\left(\bar{X}_0 - t_{\gamma} \frac{\tilde{\sigma}_0}{\sqrt{n-1}} ; \bar{X}_0 + t_{\gamma} \frac{\tilde{\sigma}_0}{\sqrt{n-1}} \right). \quad (5)$$

З а м е ч а н и е . При $n > 30$ распределение Стьюдента близко к нормальному, а $s \approx \tilde{\sigma}_0$. Поэтому при $n > 30$ даже при неизвестном $\tilde{\sigma}$ можно использовать формулы п. А.

П р и м е р 3 . Количественный признак распределен нормально. По выборке размера $n = 17$ найдено: $\bar{X}_0 = 15,5$ и выборочная дисперсия $D_0 = 11,1$. Найти значение доверительного интервала для математического ожидания μ с доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$.

Р е ш е н и е . Так как $n < 30$, пользуемся распределением Стьюдента. По данным значениям $n = 17$, $\gamma = 0,95$ по таблице в [2, приложение 3], находим значение $t_{\gamma} = t(\gamma, n) = 2,12$. Далее по формуле (5) имеем

$$\left(\bar{X}_0 - 2,12 \frac{\sqrt{11,1}}{\sqrt{16}} ; \bar{X}_0 + 2,12 \frac{\sqrt{11,1}}{\sqrt{16}} \right),$$

откуда после вычислений получаем выражение для доверительного интервала

$$\left(\bar{X}_0 - 1,77 ; \bar{X}_0 + 1,77 \right).$$

Подставляя сюда значение $\bar{X}_0 = 15,5$, получаем значение доверительного интервала

$$(15,5 - 1,77 ; 15,5 + 1,77)$$

или

$$(13,73 ; 17,25).$$

3. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Теория: [1, гл. XIX, § 1-7, 13, 23, 24].

Упражнения: [4, № 525, 528, 564, 566б, в]; [2, гл. 15, § 4, задачи 15.219, 15.227, 15.228, 15.238, 15.240, 15.267; § 6, задачи 15.307, 15.305].

1. Основные понятия. Часто возникает необходимость проверить с помощью выборки $X_1, X_2, \dots, X_n$ то или иное предположение о распределении, из которого взята выборка, или о параметре θ , которым характеризуется это распределение. Такие предположения называются статистическими гипотезами. Будем обозначать выдвигаемую гипотезу как H_0 , а противоположную гипотезу (альтернативу) - H_1 . В таких случаях говорят, что проверяется гипотеза H_0 , против альтернативы H_1 . Например, требуется проверить гипотезу H_0 , что наблюдаемая случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $m = m_0$, против альтернативы H_1 , что эта величина имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $m = m_1$ (дисперсия σ^2 - известна). Другой пример: проверяется гипотеза H_0 , состоящая в том, что наблюдаемая случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m = 0$ и $\sigma^2 = 1$, против альтернативы, что это распределение - любое другое.

Гипотеза, содержащая только одно предположение, называется простой. Гипотеза, которая состоит из конечного или бесконечного числа гипотез, называется сложной. Так, в первом приведенном примере проверяется простая гипотеза против простой альтернативы. Во втором примере проверяется простая гипотеза против сложной альтернативы.

Правило, с помощью которого принимают или отвергают гипотезу, называется решающим правилом. Идея образования решающих правил проверки гипотез состоит в том, что выбирается некоторая функция от выборки $T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ (эта функция называется статистикой), которую сравнивают с порогом c . Если окажется, что $T_n \geq c$ - гипотезу H_0 отвергают (принимают гипотезу H_1), если окажется, что $T_n < c$ - принимают гипотезу H_0 .

Приняв или отвергнув гипотезу H_0 , мы можем совершить ошибку двух типов:

а) отклонить гипотезу H_0 (т.е. принять гипотезу H_1), когда на самом деле верна гипотеза H_0 . Эта ошибка называется ошибкой первого рода;

б) принять гипотезу H_0 , когда на самом деле верна гипотеза H_1 . Эта ошибка называется ошибкой второго рода. Вероятность ошибки первого рода обозначается через α . Вероятность ошибки второго рода обозначается через β . Величину $(1 - \beta)$ (вероятность правильно отвергнуть гипотезу H_0 , т.е. правильно принять гипотезу H_1) называют мощностью решающего правила.

Как выбрать статистику T_n , с помощью которой выносится решение? Как выбрать порог c после того, как выбрана статистика T_n ? Естественно, их нужно выбирать так, чтобы каким-то образом контролировать величины α и β .

Отметим, что статистика T_n - случайная величина, поскольку она зависит от результатов случайных наблюдений. Она подбирается таким образом, чтобы ее плотность вероятности $g_0(t)$ при условии, что справедлива гипотеза H_0 , имела стандартный вид, то есть не зависела от неизвестных параметров. По известной плотности $g_0(t)$ выбирается порог c так, чтобы вероятность превышения этого порога величиной T_n (вероятность ошибки первого рода) была равна заданной величине α_0 . Величину α_0 называют уровнем значимости. На рис. 6 заштрихованная площадь соответствует величине α_0 . Значение c называется критической точкой уровня α_0 .

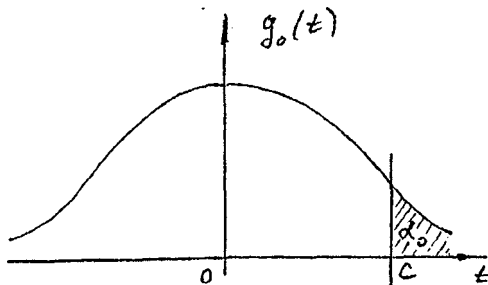


Рис. 6

Обычно значения α_0 берут достаточно малыми: $\alpha_0 = 0,05$; $\alpha_0 = 0,01$; $\alpha_0 = 0,001$.

Пример 1. Произведена выборка объема $n = 16$ из нормального распределения с дисперсией $\sigma^2 = 0,25$. По выборке получена величина $\bar{X}_g = 2$. Проверить гипотезу H_0 , состоящую в том, что математическое ожидание $\mu = 0$, против альтернативы H_1 , состоящей в том, что $\mu > 0$. Уровень значимости $\alpha_0 = 0,05$.

Решение. Здесь удобно рассмотреть статистику

$$T_n = \frac{\sqrt{n} \bar{X}_g}{\sigma}$$

поскольку, как нетрудно показать, она нормальна с параметрами $M(T_n) = 0$ и $D(T_n) = 1$. Таким образом, в нашем случае $g_0(t)$ есть плотность вероятности, соответствующая нормальному распределению с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$. Порог c выбран из условия

$$P \{ T_n \geq c \} = \alpha_0.$$

Через функцию распределения стандартного нормального распределения $F(t)$ это можно записать так:

$$P \{ t_n \geq c \} = 1 - P \{ T_n < c \} = 1 - F(c) = \alpha_0.$$

Тогда

$$F(c) = 1 - \alpha_0.$$

Поскольку функция $F(t)$ связана с функцией Лапласа $\varphi(t)$ соотношением

$$F(t) = \frac{1}{2} + \varphi(t),$$

получаем

$$\frac{1}{2} + \varphi(c) = 1 - \alpha_0;$$

$$\varphi(c) = \frac{1}{2} - \alpha_0 = \frac{1 - 2\alpha_0}{2} = \frac{1 - 2 \cdot 0,05}{2} = \frac{1 - 0,1}{2} = 0,45.$$

По таблице для $\varphi(t)$ [2, приложение 2] по значению $\varphi(c) = 0,45$ находим соответствующее значение $c_{\alpha_0} \approx 1,645$. Значение

статистики t_n , полученное из опыта, есть

$$t_n = \frac{\sqrt{n} \bar{x}_g}{\sigma} = \frac{\sqrt{16} \cdot 2}{\sqrt{0,25}} = \frac{4 \cdot 2}{0,5} = 16.$$

Мы получили, что $t_n = 16 > c_{\alpha_0} = 1,645$. Таким образом, данные эксперимента не согласуются с гипотезой H_0 , поэтому гипотезу H_0 мы отвергаем.

З а м е ч а н и е . Часто, когда оказывается, что $t_n < c$, не говорят, что гипотеза H_0 принимается, а делают более осторожный вывод: данные эксперимента не дают оснований для того, чтобы отвергнуть гипотезу H_0 .

2. Критерии согласия. К р и т е р и я м и с о г л а с и я называют решающие правила, которые позволяют проверить гипотезу H_0 , состоящую в том, что наблюдаемая случайная величина X имеет данное распределение с плотностью вероятностей $f(x)$ (или принадлежит данному классу распределений), против альтернативы H_1 , что это распределение – какое-то другое. Чаще всего выдвигается гипотеза H_0 , что распределение величины X есть нормальное распределение. Один из таких критериев мы здесь приведем.

Критерий согласия хи-квадрат. По наблюдаемым данным $x_1, x_2, \dots, x_n$ проверяется гипотеза H_0 , состоящая в том, что распределение наблюдаемой случайной величины X является стандартным нормальным распределением $N\{0,1\}$, против альтернативной гипотезы H_1 , состоящей в том, что распределение – любое другое. Для проверки H_0 поступают следующим образом:

1) разбивают область возможных значений случайной величины X на k интервалов:

$$(-\infty; \tau_1), (\tau_1; \tau_2), \dots, (\tau_{k-1}; \tau_k), (\tau_k; +\infty);$$

2) вычисляют количества наблюдений n_i ($i = 1, 2, 3, \dots, k$), попавших в каждый интервал;

3) в предположении, что верна гипотеза H_0 , вычисляют вероятности p_i ($i = 1, 2, \dots, k$) попадания наблюдения в данный интервал по формулам:

$$p_1 = P(-\infty < X < j_1^*) = \Phi(j_1^*) + \frac{1}{2},$$

$$p_i = P(j_{i-1}^* < X < j_i^*) = \Phi(j_i^*) - \Phi(j_{i-1}^*) \quad (i=2, 3, \dots, k-1),$$

$$p_k = P(j_{k-1}^* < X < +\infty) = \frac{1}{2} - \Phi(j_{k-1}^*),$$

где $\Phi(j)$ - функция Лапласа, значения которой подсчитываются по таблицам в [2];

4) составляется величина χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{n p_i} - n;$$

5) величина χ^2 сравнивается с порогом C_{α_0} . Если окажется, что $\chi^2 \geq C_{\alpha_0}$, то гипотеза H_0 отвергается; если $\chi^2 < C_{\alpha_0}$ - говорят, что экспериментальные данные не дают основания отвергнуть гипотезу H_0 . При этом порог C_{α_0} выбирается следующим образом. Известно, что при больших n случайная величина χ^2 при справедливости гипотезы H_0 приближенно распределена в соответствии с законом "хи-квадрат" с $k-1$ степенью свободы. По таблицам этого распределения [2, приложение 5] находят такое значение C_{α_0} , чтобы выполнялось условие

$$P\{\chi^2 \geq C_{\alpha_0}\} = \alpha_0,$$

где α_0 - заданный уровень значимости.

Очевидно, что при таком выборе C_{α_0} решающее правило, соответствующее п. 5, дает при больших n вероятность ошибки первого рода (вероятность неправильно отвергнуть гипотезу H_0) равную α_0 .

З а м е ч а н и е . При вычислении статистики χ^2 должно выполняться условие: $n p_i \geq 8$ для $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Если это условие не выполняется, следует уменьшить число интервалов путем объединения соседних интервалов.

П р и м е р 2 . При уровне значимости $\alpha_0 = 0,05$ проверить гипотезу H_0 , состоящую в том, что наблюдаемая случайная величина X имеет нормальное распределение $N\{0,1\}$. Диапазон изменения

случайной величины X разбит на семь интервалов. Интервалы и количества наблюдений n_i , попавших в каждый интервал, заданы следующей таблицей.

$(x_{i-1}, x_i]$	$(-\infty; -1,5]$	$(-1,5; -0,9]$	$(-0,9; -0,3]$	$(-0,3; 0,3]$	$(0,3; 0,9]$	$(0,9; 1,5]$	$(1,5; +\infty)$
n_i	25	25	30	40	35	25	20

Р е ш е н и е . Число интервалов $K = 7$, общее число наблюдений $n = \sum_{i=1}^7 n_i = 200$.

Находим вероятности p_i (значения $\varphi(x)$ находим по таблицам).

$$p_1 = \varphi(-1,5) + 0,5 = -\varphi(1,5) + 0,5 = -0,4332 + 0,5 = 0,0668;$$

$$p_2 = \varphi(-0,9) - \varphi(-1,5) = -\varphi(0,9) + \varphi(1,5) = -0,3159 + 0,4332 = 0,1173;$$

$$p_3 = \varphi(-0,3) - \varphi(-0,9) = 0,1980;$$

$$p_4 = \varphi(0,3) - \varphi(-0,3) = 2\varphi(0,3) = 0,2358;$$

$$p_5 = \varphi(0,9) - \varphi(0,3) = 0,1980;$$

$$p_6 = \varphi(1,5) - \varphi(0,9) = 0,1173;$$

$$p_7 = 0,5 - \varphi(1,5) = 0,0668.$$

Проверка: $\sum_{i=1}^7 p_i = 1.$

Проверяем условие: $np_i \geq 8$. Для самой малой вероятности p_1 (или p_7) имеем:

$$np_i = 200 \cdot 0,0668 = 13,36 > 8.$$

Вычисляем значение χ^2 :

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=1}^K \frac{n_i^2}{np_i} - n = \left(\frac{25^2}{200 \cdot 0,0668} + \dots + \frac{20^2}{200 \cdot 0,0668} \right) - 200 = \\ &= 217,59 - 200 = 17,59. \end{aligned}$$

Для уровня значимости $\alpha_0 = 0,05$ и числа степеней свободы $m = K - 1 = 6$ по таблице в [2, приложение 5] находим $C_{\alpha_0} = 12,6$. Поскольку $17,59 > 12,6$, гипотеза H_0 отвергается.

Если проверяется гипотеза H_0 о том, что распределение наблюдаемой случайной величины есть равномерное распределение $\mathcal{R}[0;1]$ на отрезке $[0;1]$, то вероятности p_i определяются формулами

$p_i = h_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$),
 где h_i - длина i -го отрезка Δ_i ($\sum_{i=1}^k h_i = 1$).
 Для произвольного распределения:

$$p_i = P(X \in \Delta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Напишите формулы для вычисления выборочного среднего значения и выборочной дисперсии.
2. Как построить гистограмму?
3. Дайте определение несмещенной, эффективной и состоятельной оценок.
4. Является ли выборочная дисперсия несмещенной оценкой дисперсии? Что такое исправленная дисперсия?
5. Как найти доверительные интервалы для математического ожидания нормального распределения?
6. Какую зависимость называют корреляционной?
7. Какую корреляцию называют линейной?
8. Перечислите свойства выборочного коэффициента корреляции. Как найти этот коэффициент?
9. Напишите выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X .
10. Дайте определение статистической гипотезы.
11. Приведите примеры простой и сложной статистических гипотез.
12. Что называют ошибкой первого (второго) рода?
13. Что такое уровень значимости? Приведите значения уровней значимости, наиболее употребительных на практике.
14. Что называют критерием согласия? Как пользоваться критерием Пирсона для проверки гипотезы о нормальном распределении наблюдаемой случайной величины?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Вариант 0

Задача I. Три детектора следят за появлением цели. Вероятности обнаружения цели каждым из них соответственно равны

P_1, P_2, P_3 .

Найти вероятность того, что:

- цель будет обнаружена двумя из этих локоаторов;
- цель будет обнаружена хотя бы одним из них.

Вариант	00	10	20	30	40
P_1	0,9	0,8	0,9	0,7	0,8
P_2	0,75	0,85	0,65	0,75	0,95
P_3	0,6	0,7	0,7	0,85	0,7

Задача 2. Некоторое сообщение передается многократно до первого правильного приема. Найти вероятности:

- сообщение будет передано ровно n раз;
- сообщение будет передано больше, чем n раз.

Вероятности правильного приема сообщения при каждой передаче одинаковы и равны p .

Вариант	00	10	20	30	40
n	3	4	2	3	4
p	0,9	0,8	0,7	0,8	0,9

Задача 3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a; \\ m & \text{при } a < x < b; \\ 0 & \text{при } x \geq b. \end{cases}$$

Найти число m , функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X и построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Вариант	00	10	20	30	40
a	-6	-3	-4	-2	1
b	-2	1	2	3	7

Задача 4. Заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случай-

ной величины ξ . Найти вероятность того, что:

1) случайная величина ξ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) ;

2) абсолютная величина отклонения случайной величины ξ от ее математического ожидания окажется меньше δ : $|\xi - a| < \delta$.

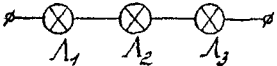
Вариант	00	10	20	30	40
a	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8
b	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
α	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8
β	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8
δ	3,5	3,7	3,9	4,1	4,3

Вариант I

Задача I. Имеются три элемента: Λ_1 , Λ_2 и Λ_3 . Вероятности проработать заданное число часов для них соответственно равны p_1, p_2, p_3 .

Найти вероятность того, что:

а) только один из них проработает заданное число часов;

б) при соединении по схеме  цепь разорвется ранее указанного срока.

Отказы элементов можно рассматривать как совместные, независимые события.

Вариант	0I	1I	2I	3I	4I
p_1	0,95	0,75	0,7	0,9	0,75
p_2	0,8	0,9	0,85	0,95	0,95
p_3	0,7	0,85	0,9	0,6	0,8

Задача 2. Стрелок производит n выстрелов. Вероятность попадания при каждом из них равна p .

Найти вероятность того, что:

а) стрелок попадет k раз;

б) стрелок попадет не менее k раз.

Вариант	0I	II	2I	3I	4I
ρ	0,87	0,89	0,76	0,83	0,92
n	5	4	5	4	5
k	4	3	3	2	4

Задача 3. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент a , функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X и построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

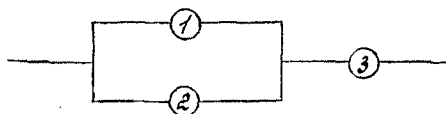
Вариант	Данные по вариантам
0I, II, 2I	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ a \sin x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi; \\ 0 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$
3I, 4I	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > \pi/4; \\ a \cos x & \text{при } x \leq \pi/4. \end{cases}$

Задача 4. Определить дисперсию нормально распределенной случайной величины, если известно ее математическое ожидание a и вероятность ρ попадания в интервал (α, β) .

Вариант	0I	II	2I	3I	4I
a	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0
ρ	0,77	0,79	0,81	0,83	0,85
α	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0
β	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0

Вариант 2

Задача I. Три прибора соединены по схеме:



Вероятности выхода указанных приборов из строя в течение заданного промежутка времени соответственно равны ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 . Определить вероятность обрыва цепи в течение заданного промежутка времени. Выходы из строя приборов – независимые события.

Вариант	02	12	22	32	42
ρ_1	0,05	0,1	0,1	0,2	0,1
ρ_2	0,2	0,05	0,2	0,15	0,1
ρ_3	0,1	0,1	0,1	0,05	0,2

Задача 2. При передаче сообщений сигналами "точка" и "тире" эти сигналы встречаются в среднем в отношении $m:n$. Статистические свойства помех таковы, что в среднем искажаются k сообщений "точка" и ℓ сообщений "тире".

Найти вероятность того, что:

- произвольный из принятых сигналов не искажен;
- принят сигнал "точка", если известно, что он принят без искажений.

Вариант	02	12	22	32	42
m	6	3	5	3	3
n	4	7	3	2	5
k	1/4	1/5	3/10	1/4	3/5
ℓ	1/3	1/3	2/5	2/5	1/4

Задача 3. Случайная величина X задана непрерывной функцией распределения $F(x)$. Найти коэффициент k , плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X и построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ kx^2 & \text{при } 0 < x \leq a; \\ 1 & \text{при } x > a. \end{cases}$$

Величина a задана по вариантам.

Вариант	02	12	22	32	42
a	9	7	5	4	6

Задача 4. Определить дисперсию нормально распределенной случайной величины, если известно ее математическое ожидание a и вероятность p попадания в интервал (a, b) .

Вариант	02	12	22	32	42
a	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8
p	0,60	0,62	0,64	0,66	0,68
b	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8
b	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8

Вариант 3

Задача 1. Некоторое сообщение передается многократно до первого правильного приема. Найти вероятности:

- 1) сообщение будет передано ровно n раз;
- 2) сообщение будет передано больше, чем n раз.

Вероятности правильного приема сообщения при каждой передаче одинаковы и равны p .

Вариант	03	13	23	33	43
n	2	4	3	2	4
p	0,9	0,8	0,7	0,8	0,7

Задача 2. Вероятность потери каждого вызова равна 0,1. Найти вероятность того, что из n вызовов:

- а) m вызовов закончатся разговором;
- б) хотя бы k вызовов окончатся разговором.

Вариант	03	13	23	33	43
n	6	5	5	4	4
m	3	4	4	3	2
k	5	4	2	1	3

Задача 3. Случайная величина X задана непрерывной функцией распределения $F(x)$. Найти коэффициент a , плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание, дис-

персию и среднее квадратическое отклонение величины X и построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Вариант	Данные по вариантам	
03, 23, 43	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1; \\ a(x-1) & \text{при } 1 \leq x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$	
13, 33	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ a \sin^2 x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi/2; \\ 1 & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$	

Задача 4. Определить дисперсию нормально распределенной случайной величины, если известно ее математическое ожидание a и вероятность p попадания в интервал $(a, a + \sigma)$.

Вариант	03	13	23	33	43
a	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8
p	0,6	0,62	0,64	0,66	0,68
σ	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8
σ^2	6,0	6,2	6,4	6,6	6,8

Вариант 4

Задача I. Три станции независимо друг от друга передают по одному сообщению. Вероятности приема этих сообщений четвертой станцией равны соответственно p_1, p_2, p_3 .

Найти вероятность того, что:

- будет принято одно сообщение;
- будет принято хотя бы одно сообщение.

Вариант	04	14	24	34	44
p_1	0,8	0,7	0,8	0,6	0,8
p_2	0,6	0,8	0,5	0,8	0,7
p_3	0,9	0,9	0,7	0,7	0,6

Задача 2. $л$ % кинескопов, имеющихся на складе телеателье, изготовлены заводом № 1, $м$ % - заводом № 2 и остальные - заводом № 3. Вероятности того, что кинескопы выдержат некоторый срок работы, соответственно равны p_1, p_2, p_3 .

Найти вероятность того, что:

- 1) взятый наудачу кинескоп выдержит указанный срок службы;
- 2) взятый наудачу кинескоп изготовлен заводом № 3, если известно, что он выдержал указанный срок работы.

Вариант	Данные по вариантам				
	$л$	$м$	p_1	p_2	p_3
04	40	35	0,9	0,8	0,7
14	30	40	0,7	0,9	0,8
24	30	25	0,9	0,6	0,8
34	50	25	0,8	0,9	0,7
54	35	20	0,7	0,8	0,9

Задача 3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a; \\ k & \text{при } a < x < b; \\ 0 & \text{при } x \geq b. \end{cases}$$

Найти число k , функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X и построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Вариант	04	14	24	34	44
a	-5	2	-3	1	-2
b	0	6	2	5	3

Задача 4. Определить дисперсию нормально распределенной случайной величины, если известно ее математическое ожидание a и вероятность p попадания в интервал (a, b) .

Вариант	04	14	24	34	44
a	3,1	3,3	3,5	3,7	3,9
p	0,65	0,67	0,69	0,71	0,73
α	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9
β	4,1	4,3	4,5	4,7	4,9

Вариант 5

Задача 1. В соревновании участвуют три спортсмена. Вероятности p_1, p_2, p_3 - улучшения каждого из них своего лучшего результата - заданы. Найти вероятность того, что:

- хотя бы один из спортсменов улучшит свой личный результат;
- только один из них улучшит свой личный результат.

Вариант	05	15	25	35	45
p_1	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1
p_2	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2
p_3	0,3	0,2	0,4	0,2	0,05

Задача 2. Завод телефонных аппаратов дает в среднем n % брака. На испытание взято m аппаратов (не проверявшихся). Найти вероятность того, что среди них будет:

- один испорченный;
- ни одного испорченного.

Вариант	05	15	25	35	45
n	3	5	4	7	6
m	6	4	3	5	6

Задача 3. Случайная величина X задана непрерывной функцией распределения $F(x)$. Найти коэффициент a , плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X и построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Вариант	Данные по вариантам	
05, 25, 45	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\pi/4; \\ \frac{a}{2}(1 + \sin 2x) & \text{при } -\pi/4 < x \leq \pi/4; \\ 1 & \text{при } x > \pi/4. \end{cases}$	
15, 35	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ a(1 - \cos x) & \text{при } 0 < x \leq \pi; \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$	

Задача 4. Заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины ξ . Найти вероятность того, что:

1) случайная величина ξ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) ;

2) абсолютная величина отклонения случайной величины ξ от ее математического ожидания окажется меньше δ : $|\xi - a| < \delta$.

Вариант	05	15	25	35	45
a	3,5	3,7	3,9	4,1	4,3
σ	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
α	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3
β	4,5	4,7	4,9	5,1	5,3
δ	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3

Вариант 6

Задача I. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятности своевременной доставки в них соответственно равны p_1, p_2, p_3 .

Найти вероятность того, что:

а) два отделения из трех получают газеты вовремя;

б) хотя бы одно из отделений получит газеты с опозданием.

Вариант	06	16	26	36	46
p_1	0,6	0,8	0,8	0,6	0,9
p_2	0,8	0,9	0,7	0,8	0,7
p_3	0,7	0,8	0,8	0,9	0,8

З а д а ч а 2 . Вероятность приема радиосигнала при каждой передаче равна ρ .

Найти вероятность того, что при n -кратной передаче сигнал будет принят:

- а) m раз;
б) не менее m раз.

Вариант	06	16	26	36	46
ρ	0,88	0,82	0,78	0,83	0,87
n	4	5	4	4	5
m	3	3	2	3	2

З а д а ч а 3 . Случайная величина X задана непрерывной функцией распределения $F(x)$. Найти коэффициент K , плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X и построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ Kx^2 & \text{при } 0 < x \leq m; \\ 1 & \text{при } x > m. \end{cases}$$

Величина m задана по вариантам.

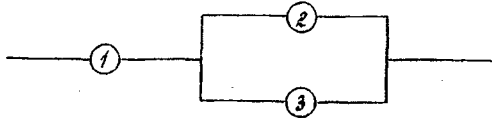
Вариант	06	16	26	36	46
m	9	4	7	5	6

З а д а ч а 4 . Определить дисперсию нормально распределенной случайной величины, если известно ее математическое ожидание a и вероятность ρ попадания в интервал (α, β) .

Вариант	06	16	26	36	46
a	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8
ρ	0,60	0,62	0,64	0,66	0,68
α	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8
β	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8

Вариант 7

Задача 1. Три прибора соединены по схеме:



Вероятности выхода указанных приборов из строя в течение заданного промежутка времени соответственно равны P_1, P_2, P_3 . Определить вероятность обрыва цепи в течение заданного промежутка времени. Выходы из строя приборов – независимые события.

Вариант	07	17	27	37	47
P_1	0,1	0,2	0,15	0,2	0,1
P_2	0,2	0,15	0,1	0,2	0,15
P_3	0,05	0,1	0,2	0,05	0,2

Задача 2. Радиолампы берутся для постановки в телевизор из ящика, в котором находится n ламп первой серии и m ламп второй. Вероятность того, что лампа проработает заданное число часов, для ламп первой серии равна P_1 , а второй P_2 .

Найти вероятность того, что:

а) лампа, взятая из ящика наудачу, проработает заданное число часов;

б) взятая наудачу лампа оказалась из второй серии, если известно, что она проработала заданное число часов.

Вариант	Данные по вариантам			
	n	m	P_1	P_2
07	20	70	0,91	0,83
17	40	30	0,82	0,89
27	25	50	0,94	0,87
37	35	65	0,93	0,79
47	30	70	0,88	0,91

З а д а ч а 3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \pi x & \text{при } 0 < x < a; \\ 1 & \text{при } x \geq a. \end{cases}$$

Найти коэффициент π , функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X и построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Величина a задана по вариантам.

Вариант	07	17	27	37	47
a	7	5	9	6	10

З а д а ч а 4. Определить дисперсию нормально распределенной случайной величины, если известно ее математическое ожидание a и вероятность ρ попадания в интервал (a, β) .

Вариант	07	17	27	37	47
a	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
ρ	0,70	0,72	0,74	0,76	0,78
a	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
β	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8

Вариант 8

З а д а ч а I. Три радиостанции независимо друг от друга передают по одному разу одно и то же сообщение. Вероятности приема этих сообщений четвертой станцией равны соответственно ρ_1, ρ_2, ρ_3 .

Найти вероятность того, что:

- будет принято хотя бы одно сообщение;
- будет принято только одно из переданных сообщений.

Вариант	08	18	28	38	48
ρ_1	0,7	0,8	0,9	0,7	0,8
ρ_2	0,6	0,8	0,7	0,9	0,9
ρ_3	0,8	0,9	0,6	0,8	0,9

Задача 2. Две радиостанции передают сигналы, первая вдвое чаще, чем вторая. Вероятности приема их сигналов соответственно равны ρ_1 и ρ_2 .

Найти вероятность того, что:

- произвольный из переданных сигналов будет принят;
- сигнал передан станцией № 2, если известно, что он принят.

Вариант	08	18	28	38	48
ρ_1	0,9	0,8	0,7	0,8	0,6
ρ_2	0,7	0,9	0,8	0,6	0,9

Задача 3. Случайная величина X задана непрерывной функцией распределения $F(x)$. Найти коэффициент a , плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X и построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Вариант	Данные по вариантам
08, 28, 48	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ (1 - \cos 2x) & \text{при } 0 < x \leq \pi/2; \\ 1 & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$
18, 38	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ ax & \text{при } 0 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$

Задача 4. Заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины ξ . Найти вероятность того, что:

- случайная величина ξ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) ;
- абсолютная величина отклонения случайной величины ξ от ее математического ожидания окажется меньше δ : $|\xi - a| < \delta$.

Вариант	08	18	28	38	48
a	4,8	4,6	4,4	4,2	4,0
σ	3,0	2,8	2,6	2,4	2,2

Окончание таблицы

Вариант	08	18	28	38	48
x	3,8	3,6	3,4	3,2	3,0
ρ	5,8	5,6	5,4	5,2	5,0
σ	4,3	4,1	3,9	3,7	3,5

Вариант 9

Задача I. Три стрелка производят залпы по цели. Вероятности попадания в цель для них соответственно равны ρ_1, ρ_2, ρ_3 .

Найти вероятность того, что:

- только один из стрелков попадает в цель;
- хотя бы один стрелок попадает в цель.

Вариант	09	19	29	39	49
ρ_1	0,9	0,8	0,9	0,8	0,7
ρ_2	0,8	0,6	0,6	0,8	0,9
ρ_3	0,7	0,7	0,7	0,9	0,9

Задача 2. Экспедиция издательства отправляет журналы в n почтовых отделений. Вероятность своевременной доставки в каждое из них равна ρ .

Найти вероятность того, что:

- m почтовых отделений получают журналы вовремя;
- не менее, чем m почтовых отделений получают журналы вовремя.

Вариант	09	19	29	39	49
n	6	4	5	6	5
m	5	3	2	4	3
ρ	0,92	0,97	0,91	0,87	0,96

Задача 3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ ax & \text{при } 0 < x < m; \\ 0 & \text{при } x \geq m. \end{cases}$$

Найти коэффициент a , функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X и построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Величина m задана по вариантам.

Вариант	09	19	29	39	49
m	10	3	6	7	4

Задача 4. Заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение b нормально распределенной случайной величины ξ . Найти вероятность того, что:

1) случайная величина ξ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) ;

2) абсолютная величина отклонения случайной величины ξ от ее математического ожидания окажется меньше δ : $|\xi - a| < \delta$.

Вариант	09	19	29	39	49
a	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8
b	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
α	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
β	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8
δ	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Вариант 0

Задача I. Наблюдения над дискретной случайной величиной заданы в виде таблицы. В первой строчке указаны выборочные значения X_i случайной величины, во второй - числа появлений n_i соответствующих значений X_i .

Требуется:

- а) построить полигон частот;
 б) вычислить выборочное среднее значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

Вариант	Данные по вариантам								
00	x_i	10	15	20	25	30	35	40	45
	n_i	15	15	30	80	50	35	15	10
10	x_i	5,1	5,4	5,7	6,0	6,3	6,6	6,9	7,2
	n_i	10	20	40	65	60	20	20	15
20	x_i	8	10	12	14	16	18	20	22
	n_i	10	20	40	70	50	30	20	10
30	x_i	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	9,1
	n_i	15	15	35	75	55	25	20	10
40	x_i	20	22	24	26	28	30	32	34
	n_i	10	10	40	70	60	30	20	10

Задача 2. Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины, выборочное среднее $\bar{x}_g$ и объем выборки n . Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью γ .

Вариант	00	10	20	30	40
$\bar{x}_g$	20	21	22	23	24
σ	5,5	5,0	6,5	6,0	7,0
n	100	64	81	49	36
γ	0,81	0,83	0,85	0,87	0,89

Задача 3. Диапазон изменения случайной величины X разбит на семь интервалов. Интервалы и количество наблюдений n_i , попавших в каждый интервал, заданы следующей таблицей.

$(x_{i-1}; x_i)$	$(-\infty; -2,0)$	$(-2,0; -1,2)$	$(-1,2; -0,4)$	$(-0,4; 0,4)$	$(0,4; 1,2)$	$(1,2; 2,0)$	$(2,0; +\infty)$
n_i	20	30	30	40	35	25	20

При уровне значимости $\alpha_0 = 0,05$ проверить гипотезу H_0 , состоящую в том, что случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение $N\{0; 1\}$.

Вариант I

Задача I. Произведено n наблюдений над непрерывной случайной величиной X . Диапазон изменения величины X разбит на восемь отрезков. Отрезки и число наблюдений n_i , попавших в каждый из них, указаны в следующей таблице.

Требуется:

а) построить гистограмму;

б) вычислить выборочное среднее значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

Вариант	0I	1I	2I	3I	4I
Данные по вариантам $[x_{i-1}; x_i]$ n_i	[1; 3] 10	[-9; -7] 15	[5; 7] 10	[4,5; 6,5] 15	[-3,5; -1,5] 10
	[3; 5] 20	[-7; -5] 15	[7; 9] 10	[6,5; 8,5] 15	[-1,5; 0,5] 20
	[5; 7] 40	[-5; -3] 35	[9; 11] 40	[8,5; 10,5] 30	[0,5; 2,5] 40
	[7; 9] 70	[-3; -1] 75	[11; 13] 70	[10,5; 12,5] 80	[2,5; 4,5] 65
	[9; 11] 50	[-1; 1] 55	[13; 15] 60	[12,5; 14,5] 50	[4,5; 6,5] 60
	[11; 13] 30	[1; 3] 25	[15; 17] 30	[14,5; 16,5] 35	[6,5; 8,5] 20
	[13; 15] 20	[3; 5] 20	[17; 19] 20	[16,5; 18,5] 15	[8,5; 10,5] 20
	[15; 17] 10	[5; 7] 10	[19; 21] 10	[18,5; 20,5] 10	[10,5; 12,5] 15

Задача 2. Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины, выборочное среднее $\bar{x}$ и объем выборки n . Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью γ .

Вариант	0I	II	2I	3I	4I
$\bar{x}_g$	2I	22	23	24	25
σ_g	5,5	5,0	4,5	4,0	3,5
n	100	64	49	36	81
f	0,81	0,83	0,85	0,87	0,89

Задача 3. Диапазон изменения случайной величины X разбит на шесть интервалов. Интервалы и количество наблюдений n_i , попавших в каждый интервал, заданы следующей таблицей.

$(\bar{x}_{i-1}; \bar{x}_i)$	$(-\infty; -1,0)$	$(-1,0; -0,5)$	$(-0,5; 0)$	$(0; +0,5)$	$(0,5; 1,0)$	$(1,0; +\infty)$
n_i	30	30	40	40	30	30

При уровне значимости $\alpha_0 = 0,1$ проверить гипотезу H_0 , состоящую в том, что случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение $N\{0; 1\}$.

Вариант 2

Задача I. Произведено n наблюдений над непрерывной случайной величиной X . Диапазон изменения величины X разбит на шесть отрезков. Отрезки и число наблюдений n_i , попавших в каждый из них, указаны в следующей таблице.

Требуется:

- построить гистограмму;
- вычислить выборочное среднее значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

Вариант	02	12	22	32	42
Данные по вариантам	[1; 3]	[-7; -5]	[4,5; 6,5]	[-5,5; -3,5]	[8,5; 10,5]
	15	10	10	15	10
$[\bar{x}_{i-1}; \bar{x}_i]$	[3; 5]	[-5; -3]	[6; 5; 8,5]	[-3,5; -1,5]	[10,5; 12,5]
	15	20	20	15	10
n_i	[5; 7]	[-3; -1]	[8,5; 10,5]	[-1,5; 0,5]	[12,5; 14,5]
	30	40	40	35	40
	[7; 9]	[-1; 1]	[10,5; 12,5]	[0,5; 2,5]	[14,5; 16,5]
	80	65	70	75	70

Окончание таблицы

Вариант	02	12	22	32	42
	$[9; 11]$ 50	$[1; 3]$ 60	$[12,5; 14,5]$ 50	$[2,5; 4,5]$ 55	$[16,5; 18,5]$ 60
	$[11; 13]$ 10	$[3; 5]$ 5	$[14,5; 16,5]$ 10	$[4,5; 6,5]$ 5	$[18,5; 20,5]$ 10

З а д а ч а 2 . Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины, выборочное среднее $\bar{x}$, и объем выборки n . Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью γ .

Вариант	02	12	22	32	42
$\bar{x}$	10	12	14	16	18
σ	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5
n	100	64	81	49	36
γ	0,99	0,97	0,95	0,93	0,91

З а д а ч а 3 . Диапазон изменения случайной величины X разбит на восемь интервалов. Интервалы и количество наблюдений n_i , попавших в каждый интервал, заданы следующей таблицей.

$(\frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_i}{x_{i+1}})$	$(-\infty; -1,5)$	$(-1,5; -1,0)$	$(-1,0; -0,5)$	$(-0,5; 0)$	$(0; +0,5)$	$(0,5; 1,0)$	$(1,0; 1,5)$	$(1,5; +\infty)$
n_i	15	20	30	35	35	30	20	15

При уровне значимости $\alpha_0 = 0,01$ проверить гипотезу H_0 , состоящую в том, что случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение $N\{0; 1\}$.

Вариант 3

З а д а ч а I . Произведено n наблюдений над непрерывной случайной величиной X . Диапазон изменения величины X разбит на пять отрезков. Отрезки и число наблюдений n_i , попавших в каждый из них, указаны в следующей таблице.

Требуется:

- а) построить полигон частот;
 б) вычислить выборочное среднее значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

Вариант	03	13	23	33	43
Данные по вариантам $[R_{i-1}; R_i]$ n_i	[7,5; 9,5] 80	[-0,5; 1,5] 65	[10; 12] 70	[0; 2] 75	[14; 16] 70
	[9,5; 11,5] 50	[1,5; 3,5] 60	[12; 14] 50	[2; 4] 55	[16; 18] 60
	[11,5; 13,5] 35	[3,5; 5,5] 20	[14; 16] 30	[4; 6] 25	[18; 20] 30
	[13,5; 15,5] 15	[5,5; 7,5] 20	[16; 18] 20	[6; 8] 20	[20; 22] 20
	[15,5; 17,5] 10	[7,5; 9,5] 15	[18; 20] 10	[8; 10] 10	[22; 24] 10

Задача 2. Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины, выборочное среднее $\bar{x}$ и объем выборки n . Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью γ .

Вариант	03	13	23	33	43
σ	20	22	24	26	28
$\bar{x}$	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5
n	100	49	64	81	36
γ	0,99	0,97	0,95	0,93	0,91

Задача 3. Диапазон изменения случайной величины X разбит на семь интервалов. Интервалы и количество наблюдений n_i , попавших в каждый интервал, заданы следующей таблицей.

$(R_{i-1}; R_i]$	$(-\infty; -2,5)$	$(-2,5; -1,5)$	$(-1,5; -0,5)$	$(-0,5; 0,5)$	$(0,5; 1,5)$	$(1,5; 2,5)$	$(2,5; +\infty)$
n_i	20	25	35	40	35	25	20

При уровне значимости $\alpha_0 = 0,05$ проверить гипотезу H_0 , состоящую в том, что случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение $N\{0; 1\}$.

Вариант 4

З а д а ч а 1. Наблюдения над дискретной случайной величиной заданы в виде таблицы. В первой строчке указаны выборочные значения x_i случайной величины, во второй - числа появлений n_i соответствующих значений x_i .

Требуется:

- построить полигон частот;
- вычислить выборочное среднее значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

Вариант	Данные по вариантам								
04	x_i	12,3	14,3	16,3	18,3	20,3	22,3	24,3	26,3
	n_i	10	20	40	70	50	30	20	10
14	x_i	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6
	n_i	15	15	35	75	55	25	20	10
24	x_i	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	6,2	6,4
	n_i	10	10	40	70	60	30	20	10
34	x_i	8,0	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4
	n_i	15	15	30	80	50	35	15	10
44	x_i	7,0	7,3	7,6	7,9	8,2	8,5	8,8	9,1
	n_i	10	20	40	65	60	20	20	15

З а д а ч а 2. Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины, выборочное среднее $\bar{x}$, и объем выборки n . Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью γ .

Вариант	04	14	24	34	44
$\bar{x}$	20	19	18	17	16
σ	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
n	100	81	64	49	36
γ	0,83	0,85	0,87	0,89	0,91

Задача 3. Диапазон изменения случайной величины X разбит на восемь интервалов. Интервалы и количество наблюдений n_i , попавших в каждый интервал, заданы следующей таблицей.

$(x_{i-1}; x_i)$	$(-\infty; -3)$	$(-3; -2)$	$(-2; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(2; 3)$	$(3; +\infty)$
n_i	20	40	85	100	100	75	50	30

При уровне значимости $\alpha_0 = 0,01$ проверить гипотезу H_0 , состоящую в том, что случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение $N\{0; 1\}$.

Вариант 5

Задача I. Произведено n наблюдений над непрерывной случайной величиной X . Диапазон изменения величины X разбит на восемь отрезков. Отрезки и число наблюдений n_i , попавших в каждый из них, указаны в следующей таблице.

Требуется:

а) построить гистограмму;

б) вычислить выборочное среднее значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

Вариант	05	15	25	35	45
Данные по вариантам	$[2; 4]$	$[-8; -6]$	$[6; 8]$	$[3,5; 5,5]$	$[-4,5; -2,5]$
	10	15	10	15	10
	$[4; 6]$	$[-6; -4]$	$[8; 10]$	$[5,5; 7,5]$	$[-2,5; -0,5]$
	20	15	10	15	20
	$[6; 8]$	$[-4; -2]$	$[10; 12]$	$[7,5; 9,5]$	$[-0,5; 1,5]$
	40	35	40	30	40
	$[8; 10]$	$[-2; 0]$	$[12; 14]$	$[9,5; 11,5]$	$[1,5; 3,5]$
	70	75	70	80	65
	$[10; 12]$	$[0; 2]$	$[14; 16]$	$[11,5; 13,5]$	$[3,5; 5,5]$
	50	55	60	50	60
$[x_{i-1}; x_i]$ n_i	$[12; 14]$	$[2; 4]$	$[16; 18]$	$[13,5; 15,5]$	$[5,5; 7,5]$
	30	25	30	35	20
	$[14; 16]$	$[4; 6]$	$[18; 20]$	$[15,5; 17,5]$	$[7,5; 9,5]$
	20	20	20	15	20

Окончание таблицы

Вариант	05	15	25	35	45
	$\frac{[16; 18]}{10}$	$\frac{[6; 8]}{10}$	$\frac{[20; 22]}{10}$	$\frac{[17,5; 19,5]}{10}$	$\frac{[9,5; 11,5]}{15}$

З а д а ч а 2. Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины, выборочное среднее $\bar{x}$ и объем выборки n . Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью μ .

Вариант	05	15	25	35	45
$\bar{x}$	20	22	24	26	28
σ	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
n	49	81	100	36	64
μ	0,81	0,83	0,85	0,87	0,89

З а д а ч а 3. Диапазон изменения случайной величины X разбит на шесть интервалов. Интервалы и количество наблюдений n_i , попавших в каждый интервал, заданы следующей таблицей.

$(x_{i-1}; x_i)$	(0;0,16)	(0,16;0,33)	(0,33;0,49)	(0,49;0,66)	(0,66;0,83)	(0,83;1,00)
n_i	30	35	32	33	35	35

При уровне значимости $\alpha_0 = 0,05$ проверить гипотезу H_0 , состоящую в том, что случайная величина n_i имеет равномерное распределение R на отрезке $[0; 1]$.

Вариант 6

З а д а ч а 1. Произведено n наблюдений над непрерывной случайной величиной X . Диапазон изменения величины X разбит на 8 отрезков. Отрезки и число наблюдений n_i , попавших в каждый из них, указаны в следующей таблице.

Требуется:

а) построить гистограмму;

б) вычислить выборочное среднее значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

Вариант	06	16	26	36	46
Данные по вариантам	[2,5; 4,5]	[-5,5; -3,5]	[3; 5]	[-7; -5]	[7; 9]
	15	10	10	15	10
	[4,5; 6,5]	[-3,5; -1,5]	[5; 7]	[-5; -3]	[9; 11]
	15	20	20	15	10
	[6,5; 8,5]	[-1,5; 0,5]	[7; 9]	[-3; -1]	[11; 13]
	30	40	40	35	40
$\frac{[x_{i-1}; x_i]}{n_i}$	[8,5; 10,5]	[0,5; 2,5]	[9; 11]	[-1; 1]	[13; 15]
	80	65	70	75	70
	[10,5; 12,5]	[2,5; 4,5]	[11; 13]	[1; 3]	[15; 17]
	50	60	50	55	60
	[12,5; 14,5]	[4,5; 6,5]	[13; 15]	[3; 5]	[17; 19]
	35	20	30	25	30
	[14,5; 16,5]	[6,5; 8,5]	[15; 17]	[5; 7]	[19; 21]
	15	20	20	20	20
	[16,5; 18,5]	[8,5; 10,5]	[17; 19]	[7; 9]	[21; 23]
	10	15	10	10	10

Задача 2. Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины, выборочное среднее $\bar{x}$ и объем выборки n . Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью γ .

Вариант	06	16	26	36	46
$\bar{x}$	30	31	32	33	34
σ	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
n	36	49	64	81	100
γ	0,87	0,89	0,91	0,93	0,95

Задача 3. Диапазон изменения случайной величины X разбит на восемь интервалов. Интервалы и количество наблюдений n_i , попавших в каждый интервал, заданы следующей таблицей.

$(x_{i-1}; x_i)$	(0; 0,125)	(0,125; 0,25)	(0,25; 0,375)	(0,375; 0,5)	(0,5; 0,625)	(0,625; 0,75)	(0,75; 0,875)	(0,875; 1,0)
n_i	120	130	125	128	122	120	130	125

При уровне значимости $\alpha_0 = 0,01$ проверить гипотезу H_0 , состоящую в том, что случайная величина X имеет равномерное распределение $\mathcal{U}$ на отрезке $[0; 1]$.

Вариант 7

Задача 1. Наблюдения над дискретной случайной величиной заданы в виде таблицы. В первой строчке указаны выборочные значения x_i случайной величины, во второй - числа появлений n_i соответствующих значений x_i .

Требуется:

- построить полигон частот;
- вычислить выборочное среднее значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

Вариант	Данные по вариантам								
07	x_i	12,5	15	17,5	20	22,5	25	27,5	30
	n_i	15	15	30	80	50	35	15	10
17	x_i	7,6	7,9	8,2	8,5	8,8	9,1	9,4	9,7
	n_i	10	20	40	65	60	20	20	15
27	x_i	10,5	12,5	14,5	16,5	18,5	20,5	22,5	24,5
	n_i	10	20	40	70	50	30	20	10
37	x_i	10,9	11,0	11,1	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6
	n_i	15	15	35	75	55	25	20	10
47	x_i	22,5	24,5	26,5	28,5	30,5	32,5	34,5	36,5
	n_i	10	10	40	70	60	30	20	10

Задача 2. Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины, выборочное среднее $\bar{x}$ и объем выборки n . Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью γ .

Вариант	07	17	27	37	47
$\bar{x}$	25	24	23	22	21
σ	7,0	6,5	6,4	6,3	6,2
n	100	81	64	49	36
r	0,99	0,97	0,95	0,93	0,91

Задача 3. Диапазон изменения случайной величины X разбит на десять интервалов. Интервалы и количество наблюдений n_i , попавших в каждый интервал, заданы следующей таблицей.

$(x_{i-1}; x_i)$	[0;0,1)	[0,1;0,2)	[0,2;0,3)	[0,3;0,4)	[0,4;0,5)	[0,5;0,6)	[0,6;0,7)	[0,7;0,8)	[0,8;0,9)	[0,9;1,0)
n_i	105	95	100	100	102	98	104	96	105	95

При уровне значимости $\alpha_0 = 0,01$, проверить гипотезу H_0 , состоящую в том, что случайная величина X имеет равномерное распределение R на отрезке $[0; 1]$.

Вариант 8

Задача I. Наблюдения над дискретной случайной величиной заданы в виде таблицы. В первой строчке указаны выборочные значения x_i случайной величины, во второй - числа появлений n_i соответствующих значений x_i .

Требуется:

- построить полигон частот;
- вычислить выборочное среднее значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

Вариант	Данные по вариантам								
08	x_i	14,7	16,7	18,7	20,7	22,7	24,7	26,7	28,7
	n_i	10	20	40	70	50	30	20	10
18	x_i	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0
	n_i	15	15	35	75	55	25	20	10
28	x_i	7,4	7,6	7,8	8,0	8,2	8,4	8,6	8,8
	n_i	10	10	40	70	60	30	20	10

Окончание таблицы

Вариант	Данные по вариантам								
38	X_i	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8
	n_i	15	15	30	80	50	35	15	10
48	X_i	9,4	9,7	10,0	10,3	10,6	10,9	11,2	11,5
	n_i	10	20	40	65	60	20	20	15

З а д а ч а 2. Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины, выборочное среднее $\bar{x}$ и объем выборки n . Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью γ .

Вариант	08	18	28	38	48
$\bar{x}$	20	21	22	23	24
σ	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0
n	100	81	36	49	64
γ	0,81	0,83	0,85	0,87	0,89

З а д а ч а 3. Диапазон изменения случайной величины X разбит на десять интервалов. Интервалы и количество наблюдений n_i , попавших в каждый интервал, заданы следующей таблицей.

$(x_{i-1}, x_i]$	$(0,0,1]$	$(0,1,0,2]$	$(0,2,0,3]$	$(0,3,0,4]$	$(0,4,0,5]$	$(0,5,0,6]$	$(0,6,0,7]$	$(0,7,0,8]$	$(0,8,0,9]$	$(0,9,1,0]$
n_i	52	48	50	50	51	49	52	48	53	47

При уровне значимости $\alpha_0 = 0,05$ проверить гипотезу H_0 , состоящую в том, что случайная величина X имеет равномерное распределение R на отрезке $[0; 1]$.

Вариант 9

З а д а ч а 1. Произведено X наблюдений над непрерывной случайной величиной X . Диапазон изменения случайной величины разбит на 8 отрезков. Отрезки и число наблюдений n_i , попавших в каждый из них, указаны в следующей таблице.

Требуется:

а) построить гистограмму;

б) вычислить выборочное среднее значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое значение.

Вариант	09	19	29	39	49
Данные по вариантам	[2,5; 4,5]	[-5,5; -3,5]	[3; 5]	[-7; -5]	[7; 9]
	15	10	10	15	10
	[4,5; 6,5]	[-3,5; -1,5]	[5; 7]	[-5; -3]	[9; 11]
	15	20	20	15	10
	[6,5; 8,5]	[-1,5; 0,5]	[7; 9]	[-3; -1]	[11; 13]
	30	40	40	35	40
	[8,5; 10,5]	[0,5; 2,5]	[9; 11]	[-1; 1]	[13; 15]
	80	55	70	75	70
	[10,5; 12,5]	[2,5; 4,5]	[11; 13]	[1; 3]	[15; 17]
	50	60	50	55	60
$\left[\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right]$ n_i	[12,5; 14,5]	[4,5; 6,5]	[13; 15]	[3; 5]	[17; 19]
	35	20	30	25	30
	[14,5; 16,5]	[6,5; 8,5]	[15; 17]	[5; 7]	[19; 21]
	15	20	20	20	20
	[16,5; 18,5]	[8,5; 10,5]	[17; 19]	[7; 9]	[21; 23]
	10	15	10	10	10

Задача 2. Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины, выборочное среднее $\bar{x}$ и объем выборки n . Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью γ .

Вариант	09	19	29	39	49
σ	20	21	22	23	24
$\bar{x}$	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5
n	100	49	64	36	81
γ	0,83	0,85	0,87	0,89	0,91

Задача 3. Диапазон изменения случайной величины X разбит на десять интервалов. Интервалы и количество наблюдений n_i , попавших в каждый интервал, заданы следующей таблицей.

$(\mathcal{R}_{i-1}^1; \mathcal{R}_i^1)$	(0,0,1)	(0,1;0,2)	(0,2;0,3)	(0,3;0,4)	(0,4;0,5)	(0,5;0,6)	(0,6;0,7)	(0,7;0,8)	(0,8;0,9)	(0,9;1,0)
n_i	102	98	104	96	100	100	98	102	104	96

При уровне значимости $\alpha_0 = 0,05$, проверить гипотезу H_0 , состоящую в том, что случайная величина X имеет равномерное распределение R на отрезке $[0; 1]$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Рабочая программа.....	4
Список литературы.....	4
Методические указания по темам курса.....	5
Вопросы для самопроверки.....	34
Контрольная работа № 1.....	34
Контрольная работа № 2.....	49

Методические указания
и контрольные задания

по курсу

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Часть 2

для студентов-заочников 2 курса
(направление 210700)

Подписано в печать 06.11.2013г. Формат 60х90 1/16.

Объём 4,0 усл.п.л. Тираж 200 экз. Заказ 178.

ООО «ТРП». Москва, ул. Правды, д. 24, стр. 5.