МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА

ФГБОУ ВПО

Виноградова М.В., Якобюк Л.И.

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

ТЮМЕНЬ 2012

УДК

ББК

В

Авторы: Виноградова М.В., Якобюк Л.И.

Математика: Учебное пособие/ ГАУ Северного Зауралья; Авторы: Виноградова М.В., Якобюк Л.И. – Тюмень, 2012. – 200 с.

Учебное пособие предназначено для слушателей ИДО направления подготовки 120700 «Землеустройство и кадастры».

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие составлено в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математика» и предназначено для слушателей I и II курса Института Дистанционного Обучения (ИДО), обучающихся по направлению подготовки 120700 «Землеустройство и кадастры» сельскохозяйственных высших учебных заведений, для которых учебным планом предусмотрено изучение общего курса математики в объеме 432 учебных часов.

Пособие содержит теоретические сведения по основным разделам курса и подробное решение типовых задач для самостоятельной подготовки к выполнению трех контрольных работ для студентов полной формы обучения и двух работ для студентов ускоренной формы обучения. Контрольные тесты, содержащиеся в пособии для самопроверки, более подробно расшифровывают программу курса и позволяют слушателям ИДО проверить уровень своей подготовленности по каждой теме программы курса математики.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

Общекультурных:

- владением культурой мышления, способностью к восприятию информации, обобщению, анализу, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК–1);

- готовностью к кооперации с коллегами, работе в коллективе (ОК-3);

- умение критически оценивать свои достоинства и недостатки, намечать пути и выбрать средства развития достоинств и устранения недостатков (ОК-7);

- способностью использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-10).

Профессиональных:

- способностью и готовностью к участию во внедрении результатов исследований и новых разработок (ПК-21).

Перечисленные компетенции должны быть сформированы слушателями в процессе самостоятельной работы и на обязательных аудиторных занятиях при изучении следующих разделов:

- Линейная алгебра.
- Векторная алгебра.
- Элементы аналитической геометрии на плоскости.
- Комплексные числа.
- Введение в математический анализ.
- Дифференциальное исчисление одной переменной.
- Функции нескольких переменных.
- Интегральное исчисление.
- Дифференциальные уравнения.
- Ряды.

Выполнение и оформление контрольных работ

1. Слушатели выполняют контрольную работу в соответствии с учебным планом в сроки, установленные ИДО.

2. Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради в клеточку, ручкой любого цвета, кроме зеленого и красного, аккуратно и разборчивым почерком, чертежи выполняются простым карандашом с использованием инструмента.

3. На титульном листе следует указать фамилию, имя, отчество слушателя, его адрес с указанием почтового индекса, номер зачетной книжки, номер варианта.

4. Задания в контрольной работе выполняются по порядку, согласно расположению их в варианте.

5. На заключительном листе контрольной работы следует указать список литературы, которым Вы пользовались при ее выполнении.

6. Если контрольная работа выполнена с нарушением всех вышеперечисленных указаний или не полностью, то она возвращается слушателю для доработки без проверки.

7. Если работа не зачтена, внимательно изучите все замечания рецензента и внесите исправления в соответствии с рекомендациями рецензента.

8. Исправленная работа предоставляются на проверку вместе с не зачтенной работой.

9. Слушатель выполняет тот вариант контрольных работ, который совпадает с последней цифрой номера его зачетной книжки.

Правило выбора варианта для студентов, обучающихся по программе ***полного курса (5 лет***): *предпоследняя цифра зачетной книжки – нечетное число (1,3,5,7,9),то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице № 1; если же предпоследняя цифра зачетной книжки – четное число или ноль (2,4,6,8,0), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице № 2.*

Правило выбора варианта для студентов, обучающихся по ***ускоренной программе (3 года***): *предпоследняя цифра зачетной книжки – нечетное число (1,3,5,7,9),то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице № 3; если же предпоследняя цифра зачетной книжки – четное число или ноль (2,4,6,8,0), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице № 4.*

Варианты заданий для студентов, обучающихся по программе полного курса (5 лет)

Таблица № 1

№ варианта	Номера заданий для контрольной работы № 1						
1	1	21	41	61	81	101	121
2	2	22	42	62	82	102	122
3	3	23	43	63	83	103	123
4	4	24	44	64	84	104	124
5	5	25	45	65	85	105	125
6	6	26	46	66	86	106	126
7	7	27	47	67	87	107	127
8	8	28	48	68	88	108	128
9	9	29	49	69	89	109	129
0	10	30	50	70	90	110	130

№ варианта	Номера заданий для контрольной работы № 2				
1	114	161	181	201	221
2	142	162	182	202	222
3	143	163	183	203	223
4	144	164	184	204	224
5	145	165	185	205	225
6	146	166	186	206	226
7	147	167	187	207	227
8	148	168	188	208	228
9	149	169	189	209	229
0	150	170	190	210	230

№ варианта	Номера заданий для контрольной работы № 3						
1	241	261	281	301	321	341	361
2	242	262	282	302	322	342	362
3	243	263	283	303	323	343	363
4	244	264	284	304	324	344	364
5	245	265	285	305	325	345	365
6	246	266	286	306	326	345	366
7	247	267	287	307	327	347	367
8	248	268	288	308	328	348	368
9	249	269	289	309	329	349	369
0	250	270	290	310	330	350	370

Таблица № 2

№ варианта	Номера заданий для контрольной работы № 1						
1	11	31	51	71	91	111	131
2	12	32	52	72	92	112	132
3	13	33	53	73	93	113	133
4	14	34	54	74	94	114	134
5	15	35	55	75	95	115	135
6	16	36	56	76	96	116	136
7	17	37	57	77	97	117	137
8	18	38	58	78	98	118	138
9	19	39	59	79	99	119	139
0	20	40	60	80	100	120	140

№ варианта	Номера заданий для контрольной работы № 2				
1	151	171	191	211	231
2	152	172	192	212	232
3	153	173	193	213	233
4	154	174	194	214	234
5	155	175	195	215	235
6	156	176	193	216	236
7	157	177	197	217	237
8	158	178	198	218	238
9	159	179	199	219	239
0	160	180	200	220	240

№ варианта	Номера заданий для контрольной работы № 3						
1	251	271	291	311	331	351	371
2	252	272	292	312	332	352	372
3	253	273	293	313	333	353	373
4	254	274	294	314	334	354	374
5	255	275	295	315	335	355	375
6	256	276	296	316	336	356	376
7	257	277	297	317	337	357	377
8	258	278	298	318	338	358	378
9	259	279	299	319	339	359	379
0	260	280	300	320	340	360	380

Варианты заданий для студентов, обучающихся по ускоренной программе (3 года)

Таблица № 3

№ варианта	Номера заданий для контрольной работы № 1							
1	1	21	41	61	81	101	121	141
2	2	22	42	62	82	102	122	142
3	3	23	43	63	83	103	123	143
4	4	24	44	64	84	104	124	144
5	5	25	45	65	85	105	125	145
6	6	26	46	66	86	106	126	146
7	7	27	47	67	87	107	127	147
8	8	28	48	68	88	108	128	148
9	9	29	49	69	89	109	129	149
0	10	30	50	70	90	110	130	150

№ варианта	Номера заданий для контрольной работы № 2							
1	161	181	201	221	241	261	281	301
2	162	182	202	222	242	262	282	302
3	163	183	203	223	243	263	283	303
4	164	184	204	224	244	264	284	304
5	165	185	205	225	245	265	285	305
6	166	186	206	226	246	266	286	306
7	167	187	207	227	247	267	287	307
8	168	188	208	228	248	268	288	308
9	169	189	209	229	249	269	289	309
0	170	190	210	230	250	270	290	310

Таблица № 4

№ варианта	Номера заданий для контрольной работы № 1							
1	11	31	51	71	91	111	131	151
2	12	32	52	72	92	112	132	152
3	13	33	53	73	93	113	133	153
4	14	34	54	74	94	114	134	154
5	15	35	55	75	95	115	135	155
6	16	36	56	76	96	116	136	156
7	17	37	57	77	97	117	137	157
8	18	38	58	78	98	118	138	158
9	19	39	59	79	99	119	139	159
0	20	40	60	80	100	120	140	160

№ варианта	Номера заданий для контрольной работы № 2							
1	171	191	211	231	251	271	291	311
2	172	192	212	232	252	272	292	312
3	173	193	213	233	253	273	293	313
4	174	197	214	234	254	274	294	314
5	175	195	215	235	255	275	295	315
6	176	196	216	236	256	276	296	316
7	177	197	217	237	257	277	297	317
8	178	18	218	238	258	278	298	318
9	179	199	219	239	259	279	299	319
0	180	200	220	240	260	280	300	320

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература

1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М, Фридман М.Н.; под ред. Проф. Н.Ш.Кремера. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов.– М.: ЮНИТИ, 2001 г.

2. Шипачёв В.С; под ред. А Н. Тихонова. Курс высшей математики – М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2004 г.

3. Рудаков Б.П. Школьная и вузовская математика в формулах и графиках – справочное пособие. – Тюмень: Издательство «Вектор Бук», 2005 – 272с.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для втузов. – 15-е изд. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2010.

7. Соколов, Г.А., Гладких. Математическая статистика для вузов/ Г.А. Соколов, И.М. Гладких. – 2-е изд., исправл.- М.: Издательство «Экзамен», 2007.

б) дополнительная литература

1. Баврин И.И. Высшая математика: учебник для студентов естественнонаучных специальностей педагогических вузов. – М.: Изд-во Центр «Академия», 2004

2. Данко, П.Е., Попов, А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах в 2-х частях: учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов – 5-е изд., исправленные. М.: Высшая школа, 2003 г.

3. Математика для гуманитариев: Учебник/Под общ. Ред. К.В. Балдина. –М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2008.

4. Баврин И.И. Высшая математика: учебник для студентов естественнонаучных специальностей педагогических вузов. – М.: Изд-во Центр «Академия», 2004 г.

Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов по заочной форме	Заочная форма обучения			Всего часов по заочной ускоренной форме	Заочная ускоренная форма обучения	
		семестры				семестры	
		1	2	3		1	2
1	2	3	4	5	7	8	9
Аудиторные занятия (всего)	**54**	**18**	**18**	**18**	**68**	28	26
В том числе:	-	-	-				
Лекции	28	8	10	10	28	14	14
Практические занятия (ПЗ)	26	10	8	8	26	14	12
Семинары (С)							
Лабораторные работы (ЛР)							
Самостоятельная работа (всего)	**378**	**126**	**126**	**126**	**378**	188	190
В том числе:	-	-	-	-			
Курсовой проект (работа)							
Расчетно-графические работы	**96**	**32**	**32**	**32**	**95**	47	48
Реферат							
Другие виды самостоятельной работы	**282**	**94**	**94**	**94**	**283**	141	142
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)		Зач.	Зач.	Экз.		Зач.	Экз.
Общая трудоемкость час	**432**	**144**	**144**	**144**	**432**	**216**	**216**

РАЗДЕЛ I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

§1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1 Матрицы: основные понятия, действия над матрицами

Определение. *Матрицей размера $m \times n$*, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке, то есть таблица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы, где i- номер строки, а j- номер столбца. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится.

Матрицы обозначаются большими буквами латинского алфавита *A, B, C, D*,... При обозначении может быть указана размерность матрицы, например $A_{2\times 3,}$ то есть матрица A имеет 2 строки и 3 столбца.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой*, а матрица состоящая из одного столбца, называется *матрицей-столбцом*.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m=n$), то матрица называется *квадратной,* то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если число строк матрицы не равно числу столбцов, то матрица называется *прямоугольной*.

Если все элементы матрицы равны нулю, то матрица называется *нулевой* или *нуль - матрицей*.

Определение. Квадратная матрица называется *диагональной матрицей*, если все элементы этой матрицы, кроме элементов стоящих на диагонали, равны 0, то есть

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{11},\ a_{22},...,\ a_{nn}$ образуют главную диагональ матрицы.

Определение. Диагональная матрица называется *единичной матрицей*, если все элементы, стоящие на диагонали равны 1, то есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = E \cdot$$

Основные действия над матрицами

1. *Сложение и вычитание матриц.*

Эти операции сводятся к соответствующим операциям над элементами матриц. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Определение. *Суммой (разностью) матриц* является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц: $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

$$C = A+B = B+A.$$

2. *Умножение матрицы на число*.

Операция умножения (деления) матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & ... & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & ... & \alpha a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & ... & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\alpha\,(A+B) = \alpha A \pm \alpha B; \qquad A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A.$$

3. *Умножение матриц*

Определение. Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C \text{, где } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Рассмотрим умножение двух квадратных матриц второго порядка. Пусть даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}.$$

Это правило сохраняется для умножения квадратных матриц третьего и более высоких порядков, а так же для умножения прямоугольных матриц, у которых число столбцов первой матрицы, равно числу строк второй**.**

Замечание 1: Произведение двух матриц не подчиняется переместительному закону, то есть $AB \neq BA$. Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются перестановочными.

Замечание 2: При умножении матрицы A на единичную матрицу E, получаем матрицу A.

Замечание 3: При умножении не нулевых матриц A и B может быть получена матрица C – нулевая.

4. <u>*Транспонирование матрицы*</u>

Определение. Матрицу A^T называют *транспонированной к матрицей* A, а переход от A к A^T *транспонированием*, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы A^T, то есть,

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{, то } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

1.2 Определители и их свойства

Определение. Под <u>*определителем*</u> (<u>*детерминантом*</u>) понимают число, соответствующее квадратной матрице любого порядка и вычисленное по определенным правилам.

Для обозначения определителя матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

используют следующую символику:

$$\Delta = \Delta(A) = |A| = det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Определение. <u>*Определителем первого порядка*</u> называют число, соответствующее матрице 1-го порядка и равное: $A = |a| = a$.

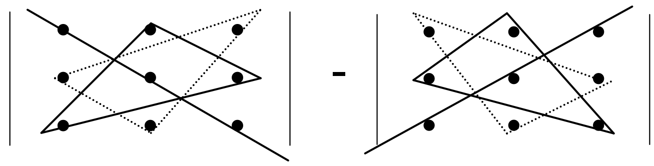
Определение. <u>*Определителем второго порядка*</u>, соответствующего матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, называется число равное $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Элементы матрицы A называются элементами определителя $|A|$, элементы $a_{11,}$ a_{22} образуют главную диагональ, а элементы $a_{12,}$ a_{21} - побочную диагональ определителя. Таким образом, из определения следует, что для вычисления определителя второго порядка необходимо из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Определение. <u>*Определителем третьего порядка*</u>, соответствующего матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, называется число

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

При вычислении определителя третьего порядка можно так же использовать «**метод треугольника**», при использовании которого вычисления производят по следующей схеме:



Таким образом, определитель третьего порядка будет равен

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} -$$

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}.$$

Пример 1. Вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 5 \cdot 5 \cdot 4 - 4 \cdot 6 \cdot 0 - 5 \cdot 1 \cdot 3 - 5 \cdot 1 \cdot (-2) = -36 + 100 - 15 + 10 = 59$$

Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Ответ. $\Delta = 59$.

Определение. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} некоторого определителя, называется определитель, полученный из данного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Пример 2. Пусть задан определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$. Тогда минором для элемента a_{23} будет являться определитель $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$, а для элемента a_{12}

минор имеет вид $M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$.

Определение. __*Алгебраическим дополнением*__ A_{ij} элемента a_{ij} какого-либо определителя называется произведение минора M_{ij} на число $(-1)^{i+j}$, то есть

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Пример 3. Найти алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 - 7 \cdot 1 = 48 - 7 = 41;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 8 - 7 \cdot 1) = -(40 - 7) = -33;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = 5 - 6 = -1.$$

Определение. __*Определителем n-го порядка*__ называется число, равное сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения, то есть

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \ldots + a_{1n} \cdot A_{1n}.$$

Последнее равенство называется разложением определителя $|A|$ по элементам первой строки. Аналогично можно получить разложение определителя по элементам других строк и столбцов.

Свойства определителей

1°. Определитель матрицы A равен определителю транспонированной матрицы

$$|A| = |A^T|$$

Таким образом, строки и столбцы определителя равноправны, все дальнейшие свойства справедливы как для строк, так и для столбцов определителя.

2°. Перестановка двух соседних строк (столбцов) изменит знак определителя на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & k \end{vmatrix}.$$

3°. Если две строки (столбца) определителя одинаковы, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} . & . & ... & . \\ a & b & ... & c \\ . & . & ... & . \\ a & b & ... & c \\ . & . & ... & . \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

4°. Если элементы некоторой строки (столбца) умножить на одно и то же число *k,* то определитель умножится на это число. Другими словами, общий множитель элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} . & . & ... & . \\ ka_{i1} & ka_{i2} & ... & ka_{in} \\ . & . & ... & . \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} . & . & ... & . \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ . & . & ... & . \end{vmatrix}.$$

5°. Если элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то он равен нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} . & . & ... & . \\ a & b & ... & c \\ ka & kb & ... & kc \\ . & . & ... & . \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

6°. Если элементы некоторой строки (столбца) являются суммой двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, соответствующие строки которых состоят из этих слагаемых:

$$\Delta = \begin{vmatrix} . & . & ... & . \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & ... & a_{in}+b_{in} \\ . & . & ... & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} . & . & ... & . \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ . & . & ... & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} . & . & ... & . \\ b_{i1} & b_{i2} & ... & b_{in} \\ . & . & ... & . \end{vmatrix}.$$

7°. Если элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

8°. Алгебраическая сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{sk} = 0, \quad \text{если } i \neq s$$

9°. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на число k.

Пример 4. Вычислить:

а) $\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

Решение.

а) $\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -5 \cdot 8 - (-6) \cdot 7 = -40 + 42 = 2$.

б) $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix} = \sin^2 a - \left(-\cos^2 a\right) = \sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0 \cdot \left(-1\right)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot \left(-1\right)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \left(-1\right)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 0 + \left(-1\right)\left(40 - 7\right) + 3\left(5 - 6\right) = -33 - 3 = -36$.

1.3 Обратная матрица

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Введем обозначение $\Delta = |A|$.

Определение. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля, и *вырожденной*, если определитель равен нулю.

Определение. Квадратная матрица A^{-1} называется *обратной* для квадратной матрицы A того же порядка, если выполняется условие $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица того же порядка, что и матрицы A и A^{-1}.

Теорема. Для того, чтобы матрица А имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.2)$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ - алгебраические дополнения элементов определителя.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Найдем определитель Δ исходной матрицы. Если $\Delta \neq 0$, то матрица A вырожденная и обратная матрица не существует. Если $\Delta = 0$, то матрица A невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы.

3. Составляем обратную матрицу по формуле (1.2).

4. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы исходя из определения: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$.

Примеры решения типовых задач

Задача 1. Найти матрицу $D = -2C - A\cdot B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Находим произведение матриц A и B

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 0+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 1 & 1\cdot 2+(-1)\cdot 2+0\cdot 4 & 1\cdot 1+(-1)\cdot(-2)+0\cdot(-1) \\ 2\cdot 0+3\cdot(-1)+1\cdot 1 & 2\cdot 2+3\cdot 2+1\cdot 4 & 2\cdot 1+3\cdot(-2)+1\cdot(-1) \\ 0\cdot 0+2\cdot(-1)+3\cdot 1 & 0\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 4 & 0\cdot 1+2\cdot(-2)+3\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 14 & -5 \\ 1 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

Находим матрицу *-2C*, для этого умножим все элементы матрицы *C* на число *-2*. Получим

$$-2C=\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 2 & -8 & -6 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Произведем вычитание матриц *-2C* и *A·B* (поэлементно).

$$C=-2C-A\cdot B=\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 2 & -8 & -6 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 14 & -5 \\ 1 & 16 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 4 & -22 & -1 \\ -3 & -16 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ найти обратную.

Решение.

Найдем определитель матрицы *A*, получим $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ =27. Так как $\Delta\neq 0$, то обратная матрица существует, и мы ее можем найти по формуле (1.2).

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы и составляем из них обратную матрицу:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2-(-2)=2+4=6,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-(4-(-2))=-(4+2)=-6,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-(-4-2)=6,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-1=3,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(4-(-2))=-(4+2)=-6,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4-1=3,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-(-4-2)=6,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2-(-4)=2+4=6.$$

Составим из полученных алгебраических дополнений обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}6 & 6 & 3\\ -6 & 3 & 6\\ 3 & -6 & 6\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\cdot 3\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

<u>Проверка.</u>

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\cdot 2+2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot(-2)+2\cdot 1+1\cdot 2 & 2\cdot 1+2\cdot(-2)+1\cdot 2\\ -2\cdot 2+1\cdot 2+2\cdot 1 & -2\cdot(-2)+1\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 1+(-2)\cdot(-2)+2\cdot 2\\ 1\cdot 2+(-2)\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 1+(-2)\cdot -2+2\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $A^{-1}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$

§2. РЕШИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1 Основные понятия и определения

Определение. <u>*Система m линейных уравнений с n неизвестными*</u> это система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.1)$$

где $x_1,\ \ x_2,\ \ \ldots\ \ x_m$ - это неизвестные, a_{ij} ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$) – произвольные числа, называемые коэффициентами при переменных, b_i - свободные члены.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все её свободные члены равны нулю, то есть $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, иначе — *неоднородной*.

Определение. Система (2.1.) называется *совместной*, или разрешимой, если она имеет по крайней мере одно решение. Система называется *несовместной*, или неразрешимой, если она не имеет решений.

Совместная система может иметь только одно или более одного решения.

Определение. *Решением системы уравнений* называется совокупность чисел $x_1,\ \ x_2,\ \ \ldots\ \ x_m$, при подстановке которых в данную систему, будет получено верное тождество.

Если число уравнений системы равно числу неизвестных, то есть $n = m$, то систему называют *квадратной*.

2.2 Матричный метод решения систем линейных уравнений (с помощью обратной матрицы)

Матричный метод применим к решению систем линейных уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных. Этот метод удобен для решения систем невысокого порядка и основан на применении свойств умножения матриц.

Рассмотрим систему *n* линейных уравнений с *n* неизвестными, то есть квадратную систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.2}$$

Используя понятие произведения матриц, перепишем систему (2.2) в виде:

$$A \cdot X = B, \tag{2.3}$$

где A - матрица, состоящая из коэффициентов при неизвестных системы; X - матрица-столбец, состоящая из неизвестных; B – матрица–столбец, состоящая из свободных членов, то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1\,\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2\,\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots \quad \dots \\ a_{\mathrm{n}\,1} & a_{\mathrm{n}\,2} & \dots a_{\mathrm{nn}} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \mathrm{x_n} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{\mathrm{n}} \end{pmatrix}.$$

Пусть дана система уравнений (2.2). Как сказано выше, эту систему уравнений можно записать в виде $A \cdot X = B$. Умножим это равенство слева на право на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Так как $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то получим

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{2.4}$$

Таким образом, для решения систем линейных уравнений матричным методом (с помощью обратной матрицы), необходимо найти обратную матрицу A^{-1} и умножить ее на матрицу–столбец свободных членов.

Пример 1. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными матричным методом

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}.$$

Решение. Для решения данной системы матричным способом, перепишем ее в матричной форма, введя матрицы A, B, X:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & 0\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\ 4\\ 1\end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений примет вид $A\cdot X=B$. Найдем матрицу X по формуле (2.4). Для ее применения найдем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель Δ по правилу треугольника, получим

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & 0\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=1\cdot 4\cdot(-1)+(-2)\cdot 0\cdot 1+1\cdot 3\cdot(-2)-1\cdot 4\cdot 1-1\cdot 3\cdot 0-(-1)\cdot(-2)\cdot(-2)$$

$$\Delta=-4-0-6-4+0+4=-10.$$

Так как $\Delta\neq 0$, то обратная матрица существует.

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A по формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$. Получим,

$$\mathrm{A}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-4-0=-4,$$

$$\mathrm{A}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-(2-0)=-2,$$

$$\mathrm{A}_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-6-4=-10,$$

$$\mathrm{A}_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-(2-3)=1,$$

$$\mathrm{A}_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1-1=-2,$$

$$\mathrm{A}_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(3-(-2))=-(3+2)=-5,$$

$$\mathrm{A}_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=0-4=-4,$$

$$\mathrm{A}_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-(0-(-2))=-(0+2)=-2,$$

$$\mathrm{A}_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=4-4=0.$$

Составим обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{-10}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 1 & -4\\ -2 & -2 & -2\\ -10 & -5 & 0\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу X по формуле (2.4), получим

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{-10}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 1 & -4\\ -2 & -2 & -2\\ -10 & -5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 4\\ 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}(-4)\cdot 0+1\cdot 4+(-4)\cdot 1\\ (-2)\cdot 0+(-2)\cdot 4+(-2)\cdot 1\\ (-10)\cdot 0+(-5)\cdot 4+0\cdot 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}0\\ -10\\ -20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$, или $x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_3=2$.

Проверка. В данную систему уравнений вместо неизвестных подставим найденные значения.

$$\begin{cases}0-2\cdot 1+2=0\\ -2\cdot 0+4\cdot 1=4\\ 0+3\cdot 1-2=1\end{cases}\text{ или }\begin{cases}0=0\\ 4=4\\ 1=1\end{cases}.$$

Так как получены верные тождества, то решение системы найдено верно.

Ответ. $x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_3=2$.

2.3 Метод Крамера

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных. Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными (2.2). Составим определитель Δ из коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема (Правило Крамера): Если Δ - это определитель системы, Δ_{x_j} - это определитель, полученный из определителя Δ, заменой *j*-го столбца, столбцом свободных членов, то есть

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots a_{1\,n} \\ b_2 & a_{22} & \dots a_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n\,2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & \mathrm{b}_1 & \dots a_{1\,n} \\ a_{21} & \mathrm{b}_2 & \dots a_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\,1} & \mathrm{b}_n & \dots a_{nn} \end{vmatrix},\ \dots, \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \mathrm{b}_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots\ \mathrm{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \dots\ \mathrm{b}_n \end{vmatrix},$$

то неизвестные $x_1,\ \ x_2,\ \ \dots,\ \ x_n$ вычисляют по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\quad \dots,\quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

При использовании метода Крамера возможны следующие случаи:

- Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.
- Если $\Delta = 0$ и $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \dots = \Delta_{x_n} = 0$, то система имеет бесконечное множество решений.
- Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей $\Delta_{x_1},\ \Delta_{x_2},\ \dots,\ \Delta_{x_n}$ не равен нулю, то система не имеет решений.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}.$$

Решение. Вычислим определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 5 + 3\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot 4\cdot(-4) - 3\cdot(-2)\cdot 3 - 2\cdot 4\cdot(-1) - 5\cdot 1\cdot(-4) = -25.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Вычислим определители $\Delta_{x_1},\ \Delta_{x_2},\ \Delta_{x_3}$ путем замены в определителе Δ соответственно 1-го, 2-го или 3-го столбца, столбцом свободных членов.

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}1&-4&3\\3&-2&4\\2&-1&5\end{vmatrix}=1\cdot(-2)\cdot5+3\cdot3\cdot(-1)+2\cdot4\cdot(-4)-3\cdot(-2)\cdot2-1\cdot4\cdot(-1)-5\cdot3\cdot(-4)=25;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&3&4\\3&2&5\end{vmatrix}=2\cdot3\cdot5+3\cdot1\cdot2+3\cdot4\cdot1-3\cdot3\cdot3-2\cdot4\cdot2-5\cdot1\cdot1=0;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-2&3\\3&-1&2\end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot2+3\cdot3\cdot(-4)+1\cdot1\cdot(-1)-1\cdot(-2)\cdot3-2\cdot3\cdot(-1)-2\cdot1\cdot(-4)=-25.$$

Найдем неизвестные:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{25}{-25}=-1,\qquad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\frac{0}{-25}=0,\qquad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=\frac{-25}{-25}=1.$$

Таким образом, $x_1=-1,\quad x_2=0,\quad x_3=1$.

Проверка. В данную систему уравнений вместо неизвестных подставим найденные значения.

$$\begin{cases}2\cdot(-1)-4\cdot0+3\cdot1=1\\ -1-2\cdot0+4\cdot1=3\\ 3\cdot(-1)-0+5\cdot1=2\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}1=1\\3=3\\2=2\end{cases}.$$

Так как получены верные тождества, то решение системы найдено верно.

Ответ. $x_1=-1,\quad x_2=0,\quad x_3=1$.

2.4 Метод Гаусса

Правило Крамера для решения систем линейных уравнений оказывается довольно громоздким, если число уравнений более трех. В этом случае пользуются методом Гаусса, то есть методом последовательного исключения неизвестных.

Метод Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система приводится к равносильной системе ступенчатого вида (треугольного), из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся и все остальные переменные.

Определение. *Элементарными преобразованиями матрицы* назовем следующие преобразования:

1) Умножение строки на число, отличное от нуля;

2) Прибавление к одной строке другой строки;

3) Перестановка строк;

4) Вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);

5) Транспонирование.

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Рассмотрим систему *n* линейных уравнений с *n* неизвестными (2.2). Для решения этой системы методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой.

Определение. Матрица, образованная путем приписывания справа к матрице А столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей системы* и обозначается в виде

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1\,n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2\,n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n\,3} & \ldots & a_{n\,n} & b_n \end{array}\right).$$

Пусть в первой строке элемент $a_{11} \neq 0$ и $a_{11} \neq 1$. Примем первую строку за ведущую с разрешающим элементом a_{11}. Исключим неизвестную переменную x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Для этого ко второй строке расширенной матрицы прибавим первую, умноженную на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, к третьей строке прибавим первую, умноженную на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, и так далее, к n-ой строке прибавим первую, умноженную на $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$. Расширенная матрица после таких преобразований примет вид

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\,\mathrm{n}} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2\,\mathrm{n}} & b'_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \\ 0 & a'_{\mathrm{n}2} & a'_{\mathrm{n}3} & \dots & a'_{\mathrm{n\,n}} & b'_n \end{array} \right).$$

Далее действуем аналогично, но лишь с частью расширенной матрицы, находящейся под первой строкой. Будем считать, что $a'_{22} \neq 0$ (в противном случае мы переставим местами вторую строку с *k-ой*, где $a'_{\mathrm{k}2} \neq 0$). Приступаем к исключению неизвестной переменной x_2 из всех строк расширенной матрицы, начиная с третьей. Для этого к третьей строке системы прибавим вторую, умноженную на $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$, к четвертой строке прибавим вторую, умноженную на $-\frac{a'_{42}}{a'_{22}}$, и так далее, к n-ой строке прибавим вторую, умноженную на $-\frac{a'_{n2}}{a'_{22}}$. Расширенная матрица после таких преобразований примет вид

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\,\mathrm{n}} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{2\,3} & \dots & a'_{2\,\mathrm{n}} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots\dots\dots\dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \dots\dots\dots & a''_{nn} & b''_n \end{array} \right)$$

Аналогично последовательно исключаем следующие переменные до приведения расширенной матрицы к виду треугольной матрицы, то есть к виду, где все элементы, располагающиеся под элементами a_{11}, a'_{22}, ..., $a_{nn}^{(n-1)}$, образующими главную диагональ матрицы, равны 0, то есть

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\,\mathrm{n}} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{2\,3} & \dots & a'_{2\,\mathrm{n}} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots\dots\dots\dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array} \right)$$

Для нахождения неизвестных $x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n$, выполним обратный ход метода Гаусса, то есть запишем систему линейных уравнений, используя коэффициенты, полученные после преобразований расширенной матрицы

$$\begin{cases} a_{nn}^{(n-1)}\cdot x_n = b_n^{(n-1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a''_{23}\cdot x_3+\dots+a''_{2n}\cdot x_n = b''_3 \\ a'_{22}\cdot x_2+a'_{23}\cdot x_3+\dots+a'_{2n}\cdot x_n = b'_2 \\ a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3+\dots+a_{1n}\cdot x_n = b_1. \end{cases}$$

Из полученный системы находят неизвестные $x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n$.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 \\ 3x_1+2x_2-2x_3=1 \\ x_1-x_2+2x_3=5. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$.

Преобразуем матрицу так, чтобы все элементы в первом столбце, начиная со второго, стали нулевыми. Для этого к элементам второй и третьей строк прибавим соответствующие элементы первой строки умноженные на (-2) и на (-3) соответственно. Получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2+1\cdot(-2) & 1+(-1)\cdot(-2) & -1+2\cdot(-2) & 1+5\cdot(-2) \\ 3+1\cdot(-3) & 2+(-1)\cdot(-3) & -2+2\cdot(-3) & 1+5\cdot(-3) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \end{array}\right).$$

Далее полученную матрицу преобразуем так, чтобы во втором столбце все элементы, начиная с третьего стали нулевыми. Это будет соответствовать исключению неизвестной переменной x_2. Для этого к элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы второй строки матрицы, умноженные на $\left(-\frac{5}{3}\right)$. Получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 5+3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) & -8+(-5)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) & -14+(-9)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, все элементы под главной диагональю равны 0. Выполняем обратный ход метода Гаусса, то есть составляем систему уравнений, с полученными после преобразований в расширенной матрице коэффициентами, получим

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_3 = 1 \\ 3x_2 - 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x_3 = 1 \div \frac{1}{3} = 3 \\ 3x_2 - 5\cdot 3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 2\cdot 3 = 5 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x_3 = 3 \\ 3x_2 = -9 + 15 \\ x_1 - x_2 = 5 - 6 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x_3 = 3 \\ 3x_2 = 6 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases},$$

$$\text{или } \begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = 6 \div 3 = 2 \\ x_1 = -1 + x_2 = -1 + 2 = 1 \end{cases}.$$

Итак, $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$.

Проверка. В данную систему уравнений вместо неизвестных подставим найденные значения.

$$\begin{cases} 2\cdot 1 + 2 - 3 = 1 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 2 - 2\cdot 3 = 1 \\ 1 - 2 + 2\cdot 3 = 5. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 = 1 \\ 1 = 1 \\ 5 = 5. \end{cases}$$. Следовательно, система решена верно.

Ответ. $x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$

Примеры решения типовых задач

Задача. Решить систему линейных уравнений: 1) матричным способом; 2) используя правило Крамера; 3) методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}.$$

Решение.

1) Решим систему <u>матричным способом</u>, для этого вычислим обратную матрицу $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$, где A_{ij} - алгебраические дополнения к элементам матрицы.

Составим матрицу A из коэффициентов при неизвестных

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы A:

$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=6-2+5-1+10-6=12\neq 0$ - матрица невырожденная, следовательно обратная матрица существует.

Найдем алгебраические дополнения

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-(10-2)=-8;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=5-1=4;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-(-2-1)=3;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=6-1=5;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-(3+1)=-4;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2-1=-3;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=-(6-5)=-1;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=3+5=8.$$

Составим обратную матрицу обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ -8 & 5 & -1\\ 4 & -4 & 8\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу *X*:

$$X=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ -8 & 5 & -1\\ 4 & -4 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\ 3\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\cdot 12 & 3\cdot 3 & (-3)\cdot 3\\ -8\cdot 12 & 5\cdot 3 & (-1)\cdot 3\\ 4*12 & (-4)\cdot 3 & 8\cdot 3\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\\ -84\\ 60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -7\\ 5\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1=,\quad x_2=-7,\quad x_3=5$.

2) Решим систему <u>методом Крамера</u>.

Составим и вычислим определитель Δ:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 5 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 1\cdot 2+5\cdot 1\cdot 1+(-1)\cdot 2\cdot 1-(1\cdot 1\cdot 1+1\cdot 2\cdot 3-1\cdot 5\cdot 2)=12\,.$$

Так как $\Delta\neq 0$, система имеет единственное решение. Вычислим определители Δ_{x_1}, $\Delta_{x_2,}$ Δ_{x_3} путем замены в определителе Δ соответственно 1-го, 2-го или 3-го столбца, столбцом свободных членов.

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix}12 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=12\cdot 1\cdot 2+3\cdot 1\cdot 1+(-1)\cdot 2\cdot 3-(3\cdot 1\cdot 1+1\cdot 2\cdot 12-3\cdot 2\cdot 1)=0\,;$$

$$\Delta x_2=\begin{vmatrix}3 & 12 & 1\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 3\cdot 2+5\cdot 3\cdot 1+12\cdot 2\cdot 1-(1\cdot 3\cdot 1+3\cdot 2\cdot 3-2\cdot 5\cdot 12)=-84\,;$$

$$\Delta x_3=\begin{vmatrix}3 & -1 & 12\\ 5 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 1\cdot 3+5\cdot 1\cdot 12+(-1)\cdot 3\cdot 1-(1\cdot 1\cdot 12+1\cdot 3\cdot 3-1\cdot 5\cdot 3)=60\,.$$

Тогда $x_1=\dfrac{\Delta x_1}{\Delta}=\dfrac{0}{12}=0$; $\quad x_2=\dfrac{\Delta x_2}{\Delta}=-\dfrac{84}{12}=-7$; $\quad x_3=\dfrac{\Delta x_3}{\Delta}=\dfrac{60}{12}=5$.

3) Решим систему <u>методом Гаусса</u>**,** для этого составим расширенную матрицу системы и упростим ее приведением к треугольному виду.

Расширенная матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 1 & 12\\ 5 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{array}\right).$$

Поменяем местами строки, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Выберем первую строку за ведущую и первый элемент в ней за разрешающий. Умножим элементы первой строки на (-3) и сложим с соответствующими элементами второй строкой. Аналогично, умножим элементы первой строки на (-5) и сложим с элементами третьей строки. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{array}\right).$$

Далее будем работать только со второй и третьей строкой, а именно, умножим элементы второй строки на (-1) и сложим с элементами второй строки. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right).$$

Таким образом, получили треугольную расширенную матрицу, которой будет равносильна система

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ -4x_2 - 5x_3 = 3 \\ -3x_3 = -15 \end{array}\right. .$$

Находим неизвестные:

$$x_3 = \frac{-15}{-3} = 5;$$

$$x_2 = \frac{3+5x_3}{-4} = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot 5 = -\frac{28}{4} = -7;$$

$$x_1 = 3 - x_2 - 2x_3 = 3 - (-7) - 2 \cdot 5 = 0.$$

Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = -7$, $x_3 = 5$.

Таким образом, при решении данной системы линейных уравнений тремя способами, получен один результат.

Контрольный тест после изучения раздела I «Линейная алгебра»

1. Определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ равен:

а) $a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}$; б) $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$; в) $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}$; г) $a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}$.

2. A и B - квадратные матрицы второго порядка, A - невырожденная. Решение X, уравнения $A\times X=B$ имеет вид:

а) $X=B\times A^{-1}$; б) Есть некоторое число; в) $X=A^{-1}\times B$; г) $X=B-A$.

3. Система $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

а) Является несовместной; б) Имеет множество решений;

в) Имеет только нулевое решение; г) Не имеет решений.

4. Умножение двух матриц определено только, если:

а) Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй;

б) Число строк первой матрицы равно числу столбцов второй;

в) Матрицы имеют одинаковое число строк;

г) Матрицы имеют одну и ту же размерность.

5. Матрица A^{-1} является обратной для невырожденной матрицы A, если:

а) $A - A^{-1} = 0$; б) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$;

в) $A \cdot A^{-1} = 1$; г) $A \cdot A^{-1} = E$ (E – единичная матрица).

6. Система линейных уравнений является несовместной, если:

а) Она имеет хотя бы одно решение;

б) Имеет два решения;

в) Имеет три решения;

г) Имеет бесконечно много решений.

7. Найти неверное утверждение. Система линейных уравнений является совместной, если:

а) Она имеет хотя бы одно решение;

б) Она имеет бесконечное множество решений;

в) Ранг матрицы системы не превышает числа неизвестных;

г) Она не имеет ни одного решения.

8. Формулы Крамера применимы:

а) Для системы линейных уравнений, у которой число неизвестных равно числу уравнений;

б) Для системы линейных уравнений, у которой число неизвестных больше числа уравнений;

в) Для любой системы линейных уравнений;

г) Только для системы линейных уравнений, имеющей единственное решение.

9. Для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ транспонированной матрицей будет матрица:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда, матрица $4 \cdot A$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} 16 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 16 & -20 & 12 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

РАЗДЕЛ II. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА

3.1 Основные понятия и определения

При изучении различных разделов физики, механики и т.д., встречаются величины, которые полностью определяются при помощи числа, полученного в результате их измерения однородной величиной, принятой за единицу, такие величины называются *скалярными*. Например: длина, площадь, объем, масса, температура и т.д.

Величины, для определения которых, кроме числового значения, необходимо знать так же их направление, называют *векторными величинами*.

Определение. *Вектором* называют направленный отрезок, имеющий определенную длину, то есть отрезок AB определенной длины, где A - начало отрезка, B - конец отрезка.

Вектор принято обозначать символом $\vec{AB}$ или $\overline{AB}$. Векторы также записывают маленькими латинскими буквами: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$,... В частности, наш вектор $\overline{AB}$ можно для краткости обозначить маленькой латинской буквой $\bar{a} = \overline{AB}$.

Начало вектора называют точкой приложения вектора.

Определение. Длина вектора $\vec{AB}$ называется его *модулем* и обозначается символом $|\overline{AB}|$.

Пусть даны точки $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$. Тогда координаты вектора $\bar{a} = \overline{AB}$ находятся по формуле: $\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Длина вектора вычисляется по формуле:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \qquad (3.1)$$

Определение. Вектор называется <u>*единичным*</u>, если его длина равна единице масштаба, то есть $|\overline{a}| = 1$.

Определение. Вектор называется <u>*нулевым*</u>, если его начало и конец совпадают и обозначается $\overline{0}$.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину равную нулю.

Определение. Векторы называются <u>*коллинеарными*</u>, если они, либо лежат на одной и той же прямой, либо на параллельных прямых $\left(\overline{AB} \parallel \overline{CD}\right)$.

Определение. Два вектора называются <u>*противоположными*</u>, если они имеют равные модули, коллинеарные, но направлены в противоположные стороны и обозначается $\left(-\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}\right)$.

Если векторы имеют одинаковую направленность, то они называются *сонаправленными* $\left(-\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}\right)$.

Определение. Три вектора называются <u>*компланарными*</u>, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Определение. Векторы называются <u>*равными*</u>, если они сонаправленные и модули их равны, то есть $\overline{a} = \overline{b}$, если $\left(\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}\right)$ и $|\overline{a}| = |\overline{b}|$.

Определение. <u>*Углом*</u> между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется наименьший угол φ, на который нужно повернуть один из векторов до его совпадения со вторым после приведения этих векторов к общему началу.

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, называется ортом вектора $\overline{a}$ и обозначается $\overline{a^0}$.

Любой вектор $\overline{a}$ может быть представлен в виде произведения единичного вектора $\overline{a}^0$ на модуль вектора $\overline{a}$, т.е. $\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \overline{a}^0$ следовательно

$$\overline{a}^0 = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}.$$

Единичные векторы (орты) координатных осей *x, y, z*, принято обозначать буквами *i,j,k* .

В системе орт вектор $\overline{a}$ задается формулой:

$$\overline{a} = a_x i + a_y j + a_z k. \qquad (3.2)$$

Такое представление вектора $\overline{a}$ называется его разложением по осям координат или разложением по ортам. Тогда длина вектора $\overline{a}$ определяется по формуле $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Направление вектора $\overline{a}$ определяется углами α, β, γ, образованными им с осями координат *Ox*, *Oy* и *Oz*. Косинусы этих углов (так называемые *направляющие косинусы* вектора) определяются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|};\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}.$$

3.2 Действия над векторами, заданными своими координатами

Пусть даны два вектора: $\overline{a} = a_x i + a_y j + a_z k$ и $\overline{b} = b_x i + b_y j + b_z k$.

Определение. *Суммой* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}$, а конец – с концом вектора $\overline{b}$, при условии, что начало вектора $\overline{b}$ приложено к концу вектора $\overline{a}$, то есть

$$c = \overline{a} + \overline{b} = (a_x + b_x)i + (a_y + b_y)j + (a_z + b_z)k.$$

Таким образом, при сложении векторов одноименные координаты складываются.

Определение. *Разностью* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$, для которого $\overline{a} = \overline{c} + \overline{b}$.

Определение. *Произведением* вектора $\overline{a}$ на число λ, называют вектор $\overline{c} = \lambda \cdot \overline{a}$, параллельный вектору $\overline{a}$, сонаправлен с вектором $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлен, если $\lambda < 0$, и имеющий длину $|\lambda| \cdot |\overline{a}|$.

По определению получим получаем $\lambda\overline{a} = \lambda a_x i + \lambda a_y j + \lambda a_z k$.

Если векторы заданы в координатной форме $\overline{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{b}(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overline{a} + \overline{b} = \left((x_1 + x_2);(y_1 + y_2);(z_1 + z_2)\right),$$

$$\overline{a}-\overline{b}=\left((x_1-x_2);(y_1-y_2);(z_1-z_2)\right),$$
$$\lambda\overline{a}=\left(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\right).$$

3.3 Скалярное произведение двух векторов и его основные свойства

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение обозначается символом: $\overline{a}\cdot\overline{b}$. По определению имеем равенство

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\varphi,$$

где φ- угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Если два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны, то скалярное произведение равно 0.

Скалярное произведение ортов.

1. Скалярное произведение одноименных ортов равно 1, то есть $i\times i=1$ $j\times j=1$ $k\times k=1$, так как модули ортов равны единице;

2. Скалярное произведение разноименных ортов равно 0, то есть $i\times j=0$ $j\times i=0$, $k\times j=0$, $i\times k=0$, $j\times k=0$, так как орты попарно перпендикулярны и их произведение равно 0.

Свойства скалярного произведения

1°. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$;

2°. $(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b}=\lambda\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)=\overline{a}\cdot\left(\lambda\overline{b}\right)$;

3°. $\overline{a}\cdot\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$;

4°. $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, если $\overline{a}=0$, либо $\overline{b}=0$, либо $\overline{a}$ ортогонален $\overline{b}$ $\left(\overline{a}\perp\overline{b}\right)$.

Скалярное произведение между координатами

Пусть векторы заданы в координатной форме $\overline{a}(x_1,y_1,z_1)$ и $\overline{b}(x_2,y_2,z_2)$. Тогда скалярное произведение двух векторов можно вычислить по формуле:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2 \qquad (3.3)$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Пример 1. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}(3,8,2)$ и $\overline{b}(3,1,0)$.

Решение.

$\overline{a}\cdot\overline{b}=3\cdot 3+8\cdot 1+2\cdot 0=17$.

Ответ. $\overline{a}\cdot\overline{b}=17$.

Угол между двумя векторами. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла межу векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|} \qquad (3.4)$$

Таким образом, косинус угла между векторами равен отношению их скалярного произведения на произведение модулей этих векторов.

Если скалярное произведение заменить формулой (3.3), а модули в знаменателе выразить через формулы $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^2+z_1^2}$ и $\left|\overline{b}\right|=\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^2+z_2^2}$, то получим:

$$\cos\varphi=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^2+z_2^2}}.$$

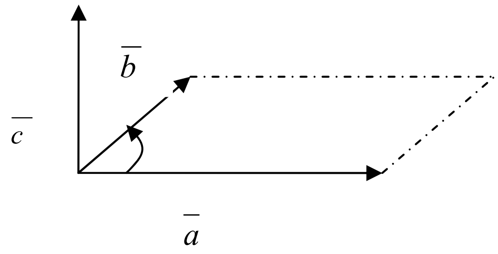
3.4 Векторное и смешанное произведение векторов

Определение. <u>*Векторным произведением*</u> двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется новый вектор $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$, удовлетворяющий трем условиям:

1. Длина вектора $\overline{c}$ числено равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то есть $\left|\overline{c}\right|=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\sin\alpha$ где α - угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

2. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то есть $\bar{c} \perp \bar{b}$, $\bar{c} \perp \bar{a}$.

3. Кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ вокруг вектора $\bar{c}$ совершается против часовой стрелки.



<u>Свойства векторного произведения</u>

1°. $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$;

2°. $\bar{a} \times \bar{b} = 0$, если $\bar{a} = 0$, либо $\bar{b} = 0$, либо $\bar{a} \| \bar{b}$ (коллинеарность ненулевых векторов);

3°. $(k\bar{a}) \times \bar{b} = k(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times (k\bar{b})$ для любого числа k;

4°. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$.

Необходимым и *достаточным условием коллинеарности* двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = 0.$$

Векторное произведение ортов. Векторное произведение одноименных ортов равно 0, то есть $i \times i = 0 \quad j \times j = 0 \quad k \times k = 0$, так как одноименные орты коллинеарны.

Если написать последовательность единичных векторов *i,j,k,i,j,* то векторное произведение двух любых смежных ортов дает следующий единичный орт со знаком плюс; если же порядок сомножителей изменен, т.е. последовательность рассматривается справа налево, то третий единичный вектор берется со знаком минус

$$k \times i = j \quad i \times j = k \quad j \times k = i, \text{ и } k \times j = -i \quad i \times k = -j \quad j \times i = -k.$$

Векторное произведение между координатами

Пусть даны два вектора $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$. Тогда векторное произведение двух векторов определяется формулой

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}$$

или $\bar{a}\times\bar{b}=\left\{\left(y_1z_2-y_2z_1\right),\left(z_1x_2-z_2x_1\right),\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\right\}$.

Длина векторного произведения определяется по формуле

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{\left(y_1z_2-y_2z_1\right)^2+\left(z_1x_2-z_2x_1\right)^2+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2}.$$

Пример 2. Даны векторы $\bar{a}(2,5,7)$ и $\bar{b}(1,2,4)$. Найти координаты и длину векторного произведения.

Решение.

Найдем координаты векторного произведения:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left\{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right\}=\left\{\left(5\cdot4-7\cdot2\right),\left(7\cdot1-2\cdot4\right),\left(2\cdot2-5\cdot1\right)\right\}=\left\{6,-1,-1\right\}.$$

Найдем длину векторного произведения:

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{6^2+\left(-1\right)^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{38}.$$

Ответ. $\bar{a}\times\bar{b}=\left\{6,-1,-1\right\}$, $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{38}$.

Из определения векторного произведения следует, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна модулю векторного произведения

$$S=|\bar{a}\times\bar{b}|,$$

в частности, площадь треугольника $S_\Delta=\frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|$.

Одним из физических приложений векторного произведения является нахождение момента силы $\overline{M}$, возникающего при вращении твердого тела, закрепленного в некоторой точке *A*, под действием силы $\overline{F}$, приложенной в точке *B,* то есть

$$\overline{M}=\overline{AB}\times\overline{F}.$$

Пример 3. Найти площадь треугольника *ABC*, где $\overline{\mathrm{A}}(-2, 1, 0)$, $\overline{B}(3,4, 8)$, $\overline{C}(-1,3,6)$.

Решение.

Площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, равна

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\, \overline{AB} \times \overline{AC} \,| .$$

Найдем координаты векторов, получим

$$\overline{AC} = (-1+2;\ 3-1;1-0)=(1,2,6), \qquad \overline{AB}=((3-(-2);\ 4-1;\ 8-0)=(5,\ 3,\ 8)\ .$$

Их векторное произведение равно

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \left\{ \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{(3\cdot 6 - 2\cdot 8), (5\cdot 6 - 1\cdot 8), (5\cdot 2 - 1\cdot 3)\} = \{2, 22, 7\}.$$

Итак, $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\, \overline{AB} \times \overline{AC} \,|$ или

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 22^2 + 7^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 484 + 49} = \frac{\sqrt{537}}{2} (кв.ед.) .$$

Ответ. $S_{\Delta} = \frac{\sqrt{537}}{2} (кв.ед.)$

Определение. <u>*Смешанным произведением*</u> трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется число, равное их векторно-скалярному произведению, то есть

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} .$$

<u>*Свойства смешанного произведения*</u>

1^0. Модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, то есть

$$V_{пар-да} = \left| \overline{a}\overline{b}\overline{c} \right| .$$

В частности, *объем пирамиды***,** построенной на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ равен

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left| \overline{a}\overline{b}\overline{c} \right| .$$

2^0. Смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ равно 0, тогда и только тогда когда эти векторы компланарны, то есть на этих векторах нельзя построить параллелепипед.

3^0. Смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ не меняется при круговой (циклической) перестановке его сомножителей. Перестановка двух соседних сомножителей меняет знак произведения на противоположный, то есть

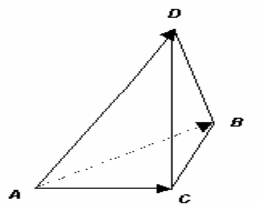
$$\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right)=\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{a}\right)=\left(\bar{c}\cdot\bar{b}\cdot\bar{a}\right)=-\left(\bar{b}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c}\right)=-\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot\bar{b}\right)=-\left(\bar{c}\cdot\bar{b}\cdot\bar{a}\right).$$

Смешанное произведение между координатами

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ заданы своими координатами $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_{2,}y_2, z_2)$, $\bar{c}(x_{3,}y_3, z_3)$, то смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ определяется по формулой

$$\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример. Найти объем пирамиды *ABCD*, где *A(2, 0, 1)*; *B(3, -1, 4)*; *C(0,-5,1)*; *D(0,0,4*).



Решение.

Объем пирамиды равен: $V_{пир}=\dfrac{1}{6}|\,\overline{a}\overline{b}\overline{c}\,|$.

Найдем координаты векторов:

$$\bar{a}=\overline{AB}=(1,-1,3);\quad \bar{b}=\overline{AC}=(-2,-5,0);\quad \bar{c}=\overline{AD}=(-2,0,3).$$

Тогда смешанное произведение:

$$\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|=\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{matrix}\right\| =\left|-15-30-6\right|=51.$$

Следовательно, объем пирамиды:

$$V_{пир}=\frac{1}{6}|\,\overline{a}\overline{b}\overline{c}\,|=\frac{1}{6}\cdot 51=\frac{51}{6}=8,5(кв.ед.).$$

Ответ. $V_{пир}=8,5(кв.ед.)$.

3.5 Линейно зависимые и независимые векторы. Ранг и базис системы векторов. Разложение вектора по единичному и произвольному базису

Рассмотрим n – мерные векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, ..., \overline{a_n}$. Эти векторы будем называть совокупностью или системой векторов, если некоторый вектор $\overline{b}$ равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа, не равные нулю ($\lambda_i \neq 0$). Вектор $\overline{b}$ при этом будем называть линейной комбинацией векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, ..., \overline{a_n}$, то есть

$$\overline{b} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} + ... + \lambda_n \overline{a_n}.$$

Определение. Система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, ..., \overline{a_n}$ *линейно зависима*, если равенство $\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} + ... + \lambda_n \overline{a_n} = \overline{0}$ выполняется при условии, что хотя бы один из коэффициентов разложения $\lambda_i \neq 0 \; (i = 1,2,...,n)$. Если же это равенство выполняется при условии, когда все $\lambda_i = 0$, то *векторы линейно независимы*.

Теорема. Векторы

$$\begin{aligned}
&\overline{a_1}\left(a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{1n}\right) \\
&\overline{a_2}\left(a_{21}, a_{22}, a_{23}, ..., a_{2n}\right) \\
&\overline{a_3}\left(a_{31}, a_{32}, a_{33}, ..., a_{3n}\right) \\
&.................................. \\
&\overline{a_n}\left(a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ..., a_{nn}\right)
\end{aligned}$$

линейно-независимы, если определитель, составленный из координат этих векторов не равен нулю, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1\,\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2\,\mathrm{n}} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{\mathrm{n}\,1} & a_{\mathrm{n}\,2} & ... & a_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Определение. *Рангом n мерного пространства* называется максимальное число линейно независимых векторов этого пространства.

Определение. Любая система n линейно-независимых векторов n–мерного пространства называется *базисом* этого пространства.

Из этого определения и теоремы о линейной независимости n векторов n – мерного пространства следует, что любая система n – мерных векторов образует базис n – мерного пространства, если определитель, составленный из координат этих векторов, не равен нулю.

Например, единичные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \ \dots \ \bar{e}_n$ n – мерного пространства образуют единичный базис.

<u>Замечание</u>. Ранг n – мерного пространства совпадает с размерностью пространства.

Теорема. Всякий вектор n – мерного пространства может быть разложен по векторам любого базиса этого пространства и притом единственным образом.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$

$$A(2;1;0), B(3;-1;2), C(13;3;10), D(0;1;4).$$

Требуется:

1) Найти координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ и модули этих векторов.
2) Найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.
3) Найти площадь грани ABC.
4) Найти объем пирамиды $ABCD$.

Решение.

1. Найдем координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, получим

$$\overline{AB}(3-2;-1-1;2-0) \Rightarrow \overline{AB}(1;-2;2);$$

$$\overline{AC}(13-2;3-1;10-0) \Rightarrow \overline{AC}(11;2;10);$$

$$\overline{AD}(0-2;1-1;4-0) \Rightarrow \overline{AD}(-2;0;4).$$

По формуле (2.1) вычислим модули векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3; \qquad \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = \sqrt{225} = 15;$$

$$\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

2. Для нахождения косинуса угла между векторами воспользуемся формулой (3.4.), для этого найдем скалярное произведение векторов $\overline{AB}, \overline{AC}$ по формуле (3.3.).

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1 \cdot 11 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 10 = 27,$$

$$\cos A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{27}{3 \cdot 5} = 0,6 .$$

Из таблицы (например, Брадиса) видно, что такое значение косинуса соответствует углу $A = 53^\circ 0,8'$.

3.Площадь грани ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}$. Так как модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах сомножителей, найдем векторное произведение:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{-20-4; \quad 22-10; \quad 2+22\} = \{-24;12;24\} .$$

Найдем модуль векторного произведения:

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-24)^2 + 12^2 + 24^2} = 36 ,$$

тогда $S_{пара-мма} = 36 кв.ед.$ и $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18 кв.ед.$

4. Объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, равен абсолютной величине их смешанного произведения. Вычислим смешанное произведение $\overline{AB}(\overline{AC} \times \overline{AD})$.

$$\overline{AB}(\overline{AC} \times \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 144 .$$

Следовательно, объем параллелепипеда равен 144 куб.ед., а объем заданной пирамиды $ABCD$ равен:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} V_{парал-да} = \frac{1}{6} \cdot 144 = 24 куб.ед.$$

Задача 2. Даны векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$, $\overline{b}$. Показать, что векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе, если

$$\overline{a_1}(1;-3;4); \quad \overline{a_2}(2;1;3;); \quad \overline{a_3}(3;-2;1); \quad \overline{b}(7;0;7) .$$

Решение.

1. Векторы образуют базис, если они линейно независимы. Три вектора в трехмерном пространстве линейно независимы, если определитель, составленный из координат этих векторов не равен нулю.

Составим и вычислим определитель третьего порядка и вычислим его по правилу треугольника.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1 + (-3)\cdot 3\cdot 3 + 2(-2)\cdot 4 - (4\cdot 1\cdot 3 + 3(-2)\cdot 1 + 2(-3)\cdot 1) =$$

$$= 1 - 27 - 16 - 12 + 6 + 6 = -42 \neq 0.$$

Так как определитель $\Delta \neq 0$, то векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ образуют базис.

2. Запишем разложение вектора $\overline{b}$ по этому базису (или представим вектор $\overline{b}$ в виде линейной комбинации векторов базиса):

$$\overline{b} = x_1\overline{a_1} + x_2\overline{a_2} + x_3\overline{a_3} \qquad (3.5)$$

где x_1, x_2, x_3 - неизвестные коэффициенты разложения, подлежащие определению.

Запишем векторное уравнение (3.5) в координатной форме:

$$(7;0;7) = x_1(1;-3;4) + x_2(2;1;3) + x_3(3;-2;1)\,. \qquad (3.6)$$

От уравнения (3.6) перейдем к системе трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Для этого используем правило умножения числа на вектор, правило сложения векторов и условие равенства векторов в координатной форме. Имеем

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \end{cases}.$$

Будем решать систему уравнений методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 21 \\ 0 & -5 & -11 & -21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -11 & -21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right).$$

Таким образом, система равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ \quad x_2 + x_3 = 3 \\ \quad -6x_3 = -6. \end{cases}$$

Находим $x_3 = 1$; $x_2 = 3 - 1 = 2$; $x_1 = 7 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 0$. Окончательно имеем

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Найденные значения коэффициентов разложения подставим в равенство (3.5) и получим разложение вектора $\overline{b}$ по базису векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$.

$$\overline{b} = 0 \cdot \overline{a_1} + 2 \cdot \overline{a_2} + 1 \cdot \overline{a_3}, \text{ или } \overline{b} = 2 \cdot \overline{a_2} + \overline{a_3}.$$

Координаты вектора $\overline{b}$ в новом базисе: $\overline{b}(0;2;1;)$.

Ответ. $\overline{b}(0;2;1;)$.

Контрольный тест после изучения раздела II «Векторная алгебра»

1. Даны векторы $\overline{a} = (3;4)$ и $\overline{b} = (5;6)$. Найти координаты вектора $\overline{a} - \overline{b}$.

1) $(2;2)$; 3) 4;

2) $(4;6)$; 4) -2; 5) $(-2;-2)$.

2. Длина вектора $\overline{a} = (1;2)$ равна:

1) 1; 3) 2;

2) 2) $\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{13}$; 5) $\sqrt{5}$.

3. Скалярное произведение векторов $\overline{a} = (2;2)$ и $\overline{b} = (3;4)$ равно:

1) 14; 3) 11;

2) $(3;8)$; 4) $(2;2;3;4)$; 5) $(2;2)$.

4. Даны точки $A(0;-1)$ и $B(3;1)$. Координаты вектора $\overline{AB}$:

1) $(-2;1)$; 3) $(3;4)$;

2) $(3;2)$; 4) $(0;-1;3;1)$; 5) $(2;-1)$.

5. Дан вектор $\overline{a} = (2;0)$. Координаты вектора $2\overline{a}$:

1) $(2;4)$; 3) $(2;2)$;

2) 6; 4) $(1;4)$; 5) $(4;0)$.

6. Площадь треугольника с вершинами в точках $A(3;-4;1)$, $B(2;2;2)$, $C(-5;2;3)$ равна

1) $4\sqrt{51}$; 3) $\sqrt{51}$;

2) $2\sqrt{51}$; 4) $6\sqrt{51}$ 5) $3\sqrt{51}$.

7. Известно, что $|\overline{a}\times\overline{b}|=3$, $|\overline{a}|=4$, а угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $\frac{\pi}{3}$. Тогда $|\overline{b}|$ равна

1) 0; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\sqrt{3}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 1.

8. Определить β, при котором компланарны векторы $\overline{a}=(2;3;4)$, $\overline{b}=(0;\beta;2)$, $\overline{c}=(3;4;0)$.

1) $-\frac{1}{3}$; 3) 1;

2) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{3}$.

9. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(1;0;0)$, $B(3;-1;4)$, $C(-5;1;0)$, $D(1;3;2)$.

1) $\frac{40}{3}$; 3) $\frac{80}{3}$;

2) 80; 4) 40; 5) $\frac{20}{3}$.

10. Даны векторы $\overline{a}=(-2;-3;2)$, $\overline{b}=(2;2;-3)$. Найти $\cos(\overline{a},\overline{b})$.

1) $-\frac{14}{17}$; 3) $\frac{1}{17}$;

2) $-\frac{16}{17}$; 4) 0; 5) $\frac{13}{17}$.

РАЗДЕЛ III. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

§4. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

4.1 Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

Длина отрезка между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ находится по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Координаты точки $C(x, y)$, делящей отрезок между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ в заданном отношении λ, определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, при $\lambda = 1$ получаются формулы для координат середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

4.2 Линии первого порядка

1. Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом имеет вид

$$y = kx + b \tag{4.1}$$

где k – это угловой коэффициент наклона прямой к оси Ox ($k = tg\alpha$), b – величина отрезка отсекаемого прямой на оси Oy.

2. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ **и** $M_2(x_2, y_2)$ имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{4.2}$$

3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ ***с данным угловым коэффициентом*** k имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{4.3}$$

4. Общее уравнение прямой - уравнение первой степени с двумя неизвестными имеет вид

$$Ax + By + C = 0 \tag{4.4}$$

где *A, B, C* - произвольные коэффициенты (*A* и *B* не равны нулю одновременно).

5. Угол между двумя прямыми. Если прямые заданы уравнениями вида $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, то угол φ между этими прямыми определяется по формуле:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{4.5}$$

Для того чтобы прямые были параллельны, необходимо, чтобы выполнялось равенство $k_1 = k_2$, а для их перпендикулярности необходимо и достаточно, чтобы $k_1 \cdot k_2 = -1$, то есть $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

6. Уравнение прямой, проходящей через т. $M_0(x_0, y_0)$***, перпендикулярно вектору*** $\overline{n} = A \cdot \overline{i} + B \cdot \overline{j}$ определяется по формуле:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{4.6}$$

4.3 Линии второго порядка

Определение. <u>*Линией второго порядка*</u> называется множество точек плоскости, декартовы координаты *x* и *y* которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{4.7}$$

где A, B, C, D, E, F - это действительные числа, такие что $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Уравнение (4.7) называется *общим уравнением линии второго порядка*. Оно определяет на плоскости *xOy*, в зависимости от значений коэффициентов A, B, C, одну из кривых второго порядка:

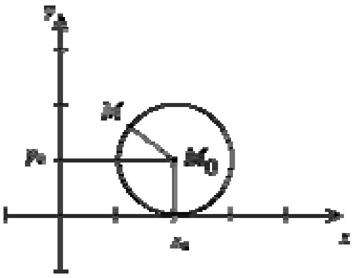
1) Если $AC - B^2 > 0$, то уравнение определяет эллипс;

2) Если $AC - B^2 > 0$, $A = C$, то уравнение определяет окружность;

3) Если $AC - B^2 < 0$, то уравнение определяет гиперболу;

4) Если $AC - B^2 = 0$, то уравнение определяет параболу.

Определение. *Окружностью* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки, называемой центром окружности.



Окружность радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет уравнение:

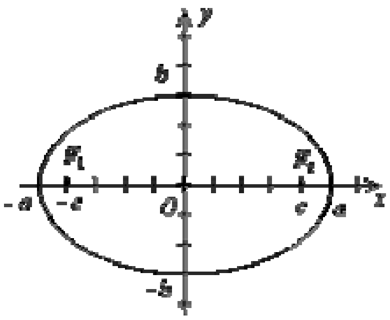
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \qquad (4.8)$$

Уравнение окружности с центром в т. O (0;0) и радиусом r имеет вид:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Определение. *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная.

Фокусы эллипса обозначаются буквами $F_1(-c;0)_1$ и $F_2(c;0)$, расстояние между ними $|F_1F_2|$ через *2c*.



Каноническое (простейшее) уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4.9)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$, то есть $b = \sqrt{a^2 - c^2}, a > b$.

Если эллипс задан каноническим уравнением, то его *осями симметрии* служат оси *Ox* и *Oy*, а начало координат - *центр симметрии*.

Точки пересечения эллипса с его осями симметрии называются *вершинами* эллипса. Центр симметрии - *центром* эллипса. Отрезок между двумя вершинами, содержащий фокусы, называется *большой осью* эллипса и обозначается *2a*, половина его длины - *большой полуосью* эллипса и обозначается *a*. Отрезок между вершинами на оси симметрии, не содержащей фокусов, называется *малой осью* эллипса и обозначается *2b*, половина его длины - *малой полуосью* и обозначается *b*.

Величина *c*, являющаяся половиной расстояния между фокусами, определяется из формулы:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}\ .$$

Величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, (0< ε <1) называется *эксцентриситетом* эллипса.

Эксцентриситет ε эллипса характеризует степень вытянутости эллипса. Чем ближе эксцентриситет к нулю, тем больше эллипс похож на окружность. Чем ближе эксцентриситет к 1, тем сильнее вытянут эллипс.

Если центром эллипса является точка $M_0(x_0, y_0)$, то каноническое уравнение будет иметь вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\ .$$

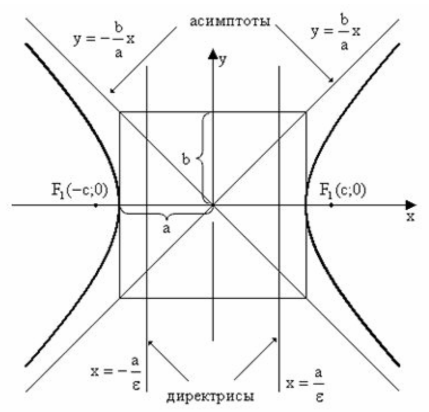
Определение. *Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек $F_1(-c;0)$ 1 и $F_2(c;0)$ той же плоскости, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4.10)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$, то есть $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Уравнение гиперболы с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\ .$$

Прямые $y = \pm \dfrac{b}{a} x$ называются *асимптотами гиперболы.*

Точки пересечения гиперболы с осью *Ox*, заданной каноническим уравнением, называются *вершинами* гиперболы, отрезок между ними называется *действительной осью* гиперболы.

Отрезок оси ординат между точками (0; -*b*) и (0; *b*) называется *мнимой осью*.

Числа *a* и *b* называются соответственно *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы. Начало координат называется ее *центром*.

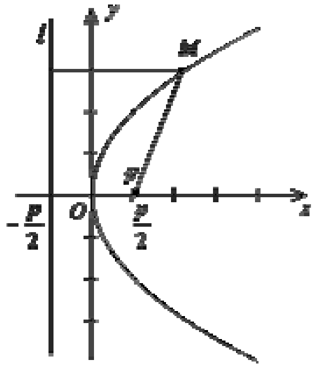
Величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, (ε >1) называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Определение. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки этой плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до фиксированной прямой, лежащей в той же плоскости и называемой директрисой параболы

Каноническое уравнение параболы с вершиной в т. $O(0,0)$ имеет вид:

$$y^2 = 2Px, \qquad (4.11)$$

где *p* - *параметр параболы*.



Точка пересечения оси симметрии с параболой называется *вершиной* параболы, и находится в начале координат. Парабола (4.11) симметрична относительно оси *Ox*, имеет фокус $F(p/2;0)$ и директрису $x = -p/2$.

Парабола $x^2 = 2Py$ симметрична относительно оси *Oy*.

Если вершиной параболы является точка $M_0(x_0, y_0)$, то каноническое уравнение будет иметь вид

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \text{ или } (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$

Примеры решения типовых задач

Задача 1. Даны координаты вершин треугольника А*BC*

$$A(4;3), \quad B(16;-6), \quad C(20;16).$$

Найти: 1) длину стороны *AB;* 2) уравнения сторон *AB* и *BC* и их угловые коэффициенты; 3) угол *B* в радианах с точностью до двух знаков; 4) уравнение высоты *CD* и ее длину; 5) уравнение медианы *AE* и координаты точки *K* пересечения этой медианы с высотой *CD;* 6) уравнение прямой, проходящей через точку К параллельно стороне *AB*.

Решение.

1. Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Подставляя координаты точек *A* и *B*, находим длину стороны *AB:*

$$\underline{AB = \sqrt{(16-4)^2 + (-6-3)^2} = \sqrt{144+81} = 15\,.}$$

2. Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, вычисляется по формуле (4.2):

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Подставляя в (4.2) координаты точек *A* и *B*, получим уравнение стороны *AB:*

$$\frac{y-3}{-6-3} = \frac{x-4}{16-4}; \qquad \frac{y-3}{-9} = \frac{x-4}{12}; \qquad \frac{y-3}{-3} = \frac{x-4}{4};$$

$$4y - 12 = -3x + 12\,;$$

$$\underline{3x + 4y - 24 = 0}\ (AB).$$

Решив последнее уравнение относительно *y,* находим уравнение стороны *AB* в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$$4y = -3x + 24\,;\quad y = -\frac{3}{4}x + 6,$$

откуда $k_{AB} = -\dfrac{3}{4}$.

Подставив в (4.2) координаты точек *B* и *C*, получим уравнение прямой *BC*:

$$\frac{y+6}{16+6}=\frac{x-16}{20-16}; \qquad \frac{y+6}{22}=\frac{x-16}{4}; \qquad \frac{y+6}{11}=\frac{x-16}{2};$$

$$\underline{11x-2y-188=0} \quad (BC),$$

$$y=5{,}5x-94,$$

откуда $k_{BC}=5{,}5$.

3. Известно, что тангенс угла φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых соответственно равны k_1 и k_2 вычисляется по формуле (4.5):

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Искомый угол *B* образован прямыми *AB* и *BC,* угловые коэффициенты которых найдены: $k_{AB}=-\frac{3}{4}$; $k_{BC}=5{,}5$. Применяя (4.5), получим

$$tgB=\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}\cdot k_{BC}}=\frac{-\frac{3}{4}-5{,}5}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 5{,}5}=\frac{-25}{4-16{,}5}=2;$$

$\underline{B=63°26'}$ или $\underline{B\approx 1{,}11\ рад}$.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, имеет вид (4.3):

$$y—y_1=k(x—x_1).$$

Высота *CD* перпендикулярна стороне *AB*. Чтобы найти угловой коэффициент высоты *CD*, воспользуемся условием перпендикулярности прямых. Так как, $k_{BC}=-\frac{3}{4}$, то $k_{CD}=\frac{4}{3}$. Подставив в (4.3) координаты точки C и найденный угловой коэффициент высоты, получим:

$$y-16=\frac{4}{3}(x-20); \quad 3y-48=4x-80;$$

$$\underline{4x-3y-32=0} \ (CD).$$

Чтобы найти длину высоты *CD,* определим сперва координаты точки *D* - точки пересечения прямых *AB* и *CD.* Решая совместно систему:

$$\begin{cases} 3x+4y-24=0 \\ 4x-3y-32=0 \end{cases},$$

находим $x=8$, $y=0$, то есть $D(8;0)$.

Находим длину высоты CD:

$$\underline{CD=\sqrt{(20-8)^2+(16-0)^2}=20.}$$

5. Чтобы найти уравнение медианы AE, определим координаты точки E, которая является серединой стороны BC, применяя формулы деления отрезка на две равные части:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}; \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Следовательно, $x_E=\dfrac{16+20}{2}=18;$ $\quad y_E=\dfrac{-6+16}{2}=5;$ $\quad E\,(18;5)$.

Подставив в (4.2) координаты точек A и E, находим уравнение медианы:

$$\frac{y-3}{5-3}=\frac{x-4}{18-4}; \qquad \frac{y-3}{2}=\frac{x-4}{14};$$

$$\underline{x-7y+17=0}\,(AE).$$

Чтобы найти координаты точки пересечения высоты CD и медианы AE, решим совместно систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x-3y-32=0 \\ x-7y+17=0. \end{cases}$$

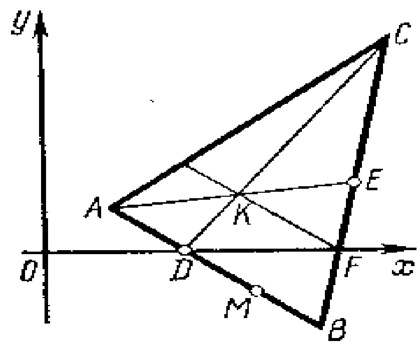
Получим <u>$x=11$, $y=4$; $K\,(11;4)$.</u>

6. Так как искомая прямая параллельна стороне AB, то ее угловой коэффициент будет равен угловому коэффициенту прямой AB. Подставив в (4.3) координаты найденной точки K и угловой коэффициент $k=-\dfrac{3}{4}$ получим:

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-11); \qquad 4y-16=-3x+33;$$

$$\underline{3x+4y-49=0}\ (KF).$$

Треугольник ABC, высота CD, медиана AE, прямая KF построены в системе координат xOy на рис.



Задача 2. По уравнению кривой второго порядка определить тип кривой, привести уравнение кривой к каноническому виду. Изобразить данную линию на чертеже, охарактеризовав ее.

а) $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 15 = 0$, б) $x^2 - 4x + 4y^2 = 0$.

Решение.

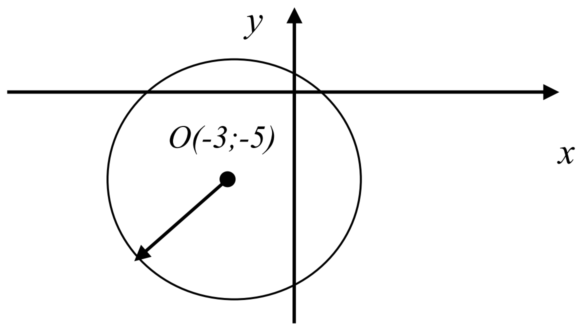
а) $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 15 = 0$.

Преобразуем данное уравнение, для этого выделим полный квадрат:

$$\underbrace{x^2 + 6x + 9} + \underbrace{y^2 + 10y + 25} - 15 - 9 - 25 = 0;$$

$$(x+3)^2 + (y+5)^2 - 49 = 0 \text{ или } (x+3)^2 + (y+5)^2 = 49.$$

Получим уравнение окружности с центром в точке (- 3; - 5), радиусом 7.



б) $x^2 - 4x + 4y^2 = 0$.

Найдем каноническое уравнение кривой, для этого сделаем преобразования:

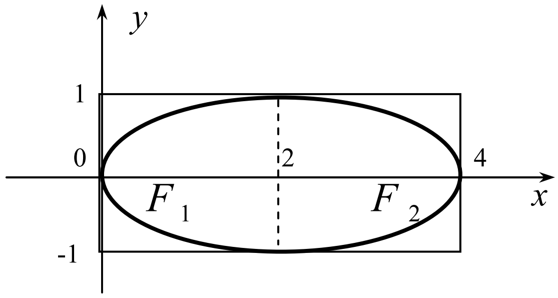
$$x^2 - 4x + 4 - 4 + 4y^2 = 0,$$

$$(x-2)^2 + 4y^2 = 4.$$

Окончательно $\dfrac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$.

Полученное уравнение есть каноническое уравнение эллипса, где a=2; b=1;

центр эллипса в точке (2,0).



Найдем фокусы, для этого вычислим параметр c: $c^2 = a^2 - b^2; c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

Тогда $F_1(2-\sqrt{3};0)$; $F_2(2+\sqrt{3};0)$,

и эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

§5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Определение. *Комплексным числом* z называется выражение

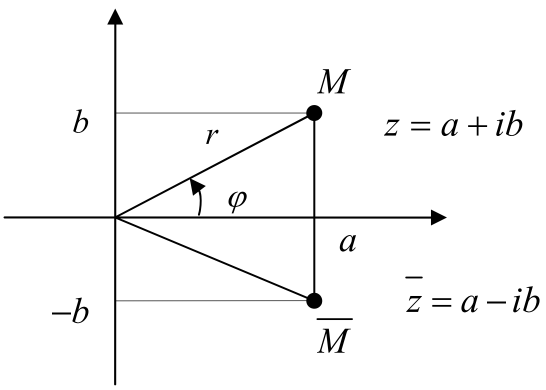
$$z = a + ib, \tag{5.1}$$

где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1$; $i = \sqrt{-1}$.

При этом число a называется *действительной частью* числа z ($a=Rez$), а b- *мнимой частью* ($b = Im\, z$).

Определение. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются *комплексно–сопряженными*.

Определение. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются *равными*, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$; $b_1 = b_2$.



Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.

Таким образом, на оси *Ox* располагаются действительные числа, а на оси *Oy* – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма числа.

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi;\quad b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,. \qquad (5.2)$$

Такая форма записи называется *тригонометрической формой записи комплексного числа*.

При этом величина *r* называется *модулем комплексного числа*, а угол наклона φ - *аргументом комплексного числа*.

$$r = |z|; \qquad \varphi = Arg\, z\,.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = Arg\, z = arctg\frac{b}{a}. \qquad (5.3)$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \qquad Arg\, z = -Arg\,\bar{z}.$$

Действия с комплексными числами.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) Сложение и вычитание.

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2) \Rightarrow \qquad (5.4)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}\ .$$

2) Умножение.

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 \qquad (5.5)$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)\ .$$

В тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,,\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\ . \qquad (5.6)$$

3) Деление.

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\ . \qquad (5.7)$$

В тригонометрической форме:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))\ . \qquad (5.8)$$

4) Возведение в степень.

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,, \qquad (5.9)$$

где n – целое положительное число. Это выражение называется **формулой Муавра.**

5) Извлечение корня из комплексного числа.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right). \qquad (5.10)$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Кроме алгебраической и геометрической, существует показательная форма записи комплексного числа.

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z$; $\quad z = x + iy.$

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)\ . \qquad (5.11)$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера.**

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Для комплексно – сопряженного числа получаем:

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y.$$

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

и воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$z = re^{i\varphi}.$$

Полученное равенство и есть **показательная форма комплексного числа.**

Примеры решения типовых задач

Задача 1. а) Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел. б) Записать комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной форме, если

$$Z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = -1 - i.$$

Решение.

а) Найдем сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел, используя соответствующие формулы (5.4-5.7)

$z_1 + z_2 = (2 - 1) + i\,(2 - 1) = 1 + i;$

$z_1 - z_2 = (2 + 1) + i\,(2 + 1) = 3 + 3\,i;$

$z_1 \cdot z_2 = (-2 + 2) + i\,(-2 - 2) = -4\,i;$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+2i)\cdot(-1+i)}{(-1-i)\cdot(-1+i)} = \frac{-4}{1+1} = \frac{-4}{2} = -2;$$

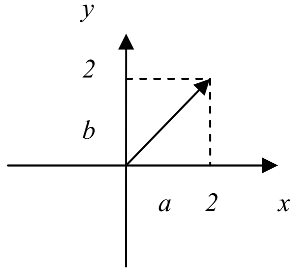
$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{(-1-i)\cdot(2-2i)}{(2+2i)\cdot(2-2i)} = \frac{-4}{4+4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

б) Запишем комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной форме.

Для того чтобы перейти от алгебраической формы к тригонометрической и показательной необходимо найти:

- модуль комплексного числа $r = \sqrt{x^2 + y^2}$;

- аргумент комплексного числа $Arg\, z$ или φ:



Рассмотрим число $z_1 = 2 + 2i$. Тогда

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

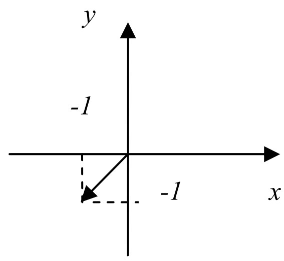
Комплексное число z_1 находится в первой четверти, следовательно аргумент комплексного числа будет равен $arg\ z_1 = arctg\frac{y}{x} = arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

<u>Тригонометрическая форма записи комплексного числа:</u>

$$z_1 = 2\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

<u>Показательная форма записи комплексного числа:</u>

$$z_1 = 2\sqrt{2}\ e^{\frac{\pi}{4}i}.$$



Рассмотрим число $z_2 = -1 - i$. Тогда

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Комплексное число z_2 находится в четвертой четверти, значит аргумент комплексного числа будет равен $arg\ z_2 = arctg\frac{y}{x} = arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

<u>Тригонометрическая форма записи комплексного числа:</u>

$$z_2 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

<u>Показательная форма записи комплексного числа:</u>

$$z_2 = \sqrt{2}\ e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Контрольный тест после изучения раздела III «Элементы аналитической геометрии на плоскости»

1. Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ находится по формуле:

а) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; *б)* $d = \sqrt{(y_2 - x_1)^2 + (x_2 - y_1)^2}$; *в)* $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}$.

2. Если точка $M(x;y)$ делит отрезок в отношении λ, то координаты этой точки находятся по формулам:

а) $x_c = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_c = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$; *б)* $x_c = \dfrac{y_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_c = \dfrac{x_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$;

в) $x_c = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $y_c = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$.

3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом имеет вид:

а) $y - y_0 = k\left(x - x_0\right)$; *б)* $y + y_0 = k\left(x - x_0\right)$; *в)* $y - y_0 = 1/k\left(x + x_0\right)$.

4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

а) $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$; *б)* $\dfrac{y+y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2+x_1}$; *в)* $\dfrac{y-y_1}{y_2+y_1} = \dfrac{x+x_1}{x_2-x_1}$.

5. Условие параллельности двух прямых:

а) $k_1 = k_2$; *б)* $\dfrac{1}{k_1} = {}^{1}\!/_{k_2}$; *в)* $k_1 = -k_2$.

6. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

а) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; *б)* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$; *в)* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = c$.

7. Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

а) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; *б)* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; *в)* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = c$.

8. Условие перпендикулярности двух прямых:

а) $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$; *б)* $k_2 = \dfrac{1}{k_1}$; *в)* $k_2 = k_1$.

9. Комплексным числом z называется выражение:

а) $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица;

б) $z = a - ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица;

в) $z = b + ia$, где a и b – натуральные числа, i – мнимая единица;

г) $z = a + ib$, где a и b – иррациональные числа, i – мнимая единица.

10. Дополнить предложение: «Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются …»

а) равными;

б) противоположными;

в) сопряженными.

11. Тригонометрической формой записи комплексного числа является:

а) $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

б) $z = r\cos\varphi - ir\sin\varphi = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$;

в) $z = r\sin\varphi + ir\cos\varphi = r(\sin\varphi + i\cos\varphi)$;

г) $z = r\sin\varphi - ir\cos\varphi = r(\sin\varphi - i\cos\varphi)$.

12. Дополнить предложение: «Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если…»

а) соответственно равны их действительные и мнимые части, то есть $a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2$;

б) выполняется условие $a_1 = -a_2; \quad b_1 = -b_2$;

в) выполняется условие $-a_1 = a_2; \quad -b_1 = b_2$;

г) равны их действительные части.

13. Показательная форма комплексного числа имеет вид:

а) $z = re^{i\varphi}$; б) $z = -re^{i\varphi}$; в) $z = -e^{i\varphi}$; г) $z = ae^{i\varphi}$.

14. Формулой Муавра является:

а) $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$; б) $z^n = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$;

в) $z^n = r^n(\sin n\varphi + i\cos n\varphi)$; г) $z^n = r(\sin n\varphi + i\cos n\varphi)$.

15. В тригонометрической форме комплексное число – 1 + $\sqrt{3}\,i$ имеет вид

а) $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$; б) $2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$;

в) $2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$; г) $2(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3}))$.

РАЗДЕЛ IV. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§ 6. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1 Предел функции. Бесконечно большие и бесконечно малые величины и их свойства

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором числовом множестве $X = \{x\}$ и точка *a* является предельной точкой для множества X, то есть в любой малой окрестности точки *a* содержатся значения $x \in X$, отличные от *a*. Точка *a* может принадлежать множеству X, или не принадлежать ему, следовательно, функция $y = f(x)$ либо определена в точке *a*, либо не определена.

Определение. Функция $f(x)$ имеет <u>*предел*</u> A (конечный или бесконечный), при стремлении x к *a* (или в точке *a*), если для любой, стремящейся к *a* последовательности значений аргумента $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$, входящих в область определения функции, но отличных от a, соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n), ...$, всегда стремиться к A.

Этот факт символически записывается в виде

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to a.$$

Определение. Число A называется <u>*пределом функции*</u> $f(x)$ <u>*при стремлении x к a*</u> (или в точке *a*), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, что $\forall x \neq a$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение. Число A называется <u>*пределом функции*</u> $f(x)$ <u>*при стремлении x к бесконечности*</u>, если $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N > 0$, такое что, для любых *x,* удовлетворяющих условию $|x| > N$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, то есть если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$, такое что $\forall x > N(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Пример. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{1}{x}$. Эта функция является бесконечно малой, так как $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

Доказательство: выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем число *N,* такое что при всех n>N будет выполняться неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon,$ т.к. $\alpha(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon$ или $\dfrac{1}{x} < \varepsilon \quad \Rightarrow x > \dfrac{1}{\varepsilon}$, т.е. $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Что и требовалось доказать.

Свойства бесконечно малых функций

1. Если функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ - бесконечно малые функции, то их сумма $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ - есть функция бесконечно малая функция.
2. Произведение ограниченной при $x \to a$ функции на бесконечно малую, есть функция бесконечно малая.
3. Произведение постоянной на бесконечно малую функцию, есть функция бесконечно малая.
4. Произведение двух бесконечно малых функций, есть функция бесконечно малая.

Определение. Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой*, если для любого наперёд заданного сколь угодно малого положительного числа ε, найдётся такой номер N, зависящий от ε, что для всех $x > \mathrm{N}(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\beta(x)| > \varepsilon$.

Свойства бесконечно больших функций

1. Если $\beta(x)$ - бесконечно большая функция, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - функция бесконечно малая.

2. Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция не обращается в нуль, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая.

3. Если $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ - бесконечно большая функции, то их сумма $\beta(x)+\gamma(x)$ - есть функция бесконечно большая.

4. Если $\beta(x)$ - бесконечно большая функция и $\gamma(x)$ - ограничена, то $\beta(x)+\gamma(x)$ - есть функция бесконечно большая.

5. Произведение двух бесконечно больших функций, есть функция бесконечно большая.

6.2 Теоремы о пределах

Теорема 1. Для того чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представима в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция.

Теореме 2. Предел постоянной величины равен самой этой постоянной, то есть $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

Теорема 3. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют пределы при $x \to a$, то при $x \to a$ имеют пределы также их сумма $f_1(x)+f_2(x)$, произведение $f_1(x)\cdot f_2(x)$ и, при условии $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$, частное $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, причём

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}.$$

Теорема 4. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, то есть $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где *c=const*.

Теорема 5. Если для функций $f(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в некоторой окрестности точки а выполняется неравенство $f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Следствие. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x\to a$, то будет справедливо равенство

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n.$$

Теоремы о пределах позволяют находить пределы функций, определяемых алгебраическими действиями над переменной, предел которой задан. В простейших случаях достаточно в выражение функции вместо переменной *x* подставить её предельное значение.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2}$.

Решение. Используя приведенные теоремы, имеем

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}3x+\lim\limits_{x\to 1}2}{\lim\limits_{x\to 1}x^2}=\frac{1^2-3\cdot 1+2}{1^2}=\frac{0}{1}=0.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2}=0$.

6.3 Способы раскрытия неопределённостей

Иногда, при вычислении пределов, получают выражения

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ (0\cdot\infty),\ (1^\infty),\ (\infty-\infty),\ (0^0),\ (\infty^0),$$

по которым нельзя судить о том, существуют или нет искомые пределы. Такие выражения называют неопределенными (или неопределенностями). В этих случаях решают вопрос о раскрытии неопределенностей. Рассмотрим несколько случаев.

1. Если непосредственная подстановка в дробную функцию предельного значения обращает числитель и знаменатель дроби в нуль, то получаем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, это значит, что предельное значение в выражение функции можно подставлять только после предварительного сокращения данной дроби.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^2+14\cdot 2-32}{2^2-6\cdot 2+8}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Получили неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, сократим данную дробь, предварительно разложив числитель и знаменатель дроби на множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ - это корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, $D=b^2-4ac$ - дискриминант. Получим:

$$x^2+14x-32=(x-2)(x+16) \text{ и } x^2-6x+8=(x-2)(x-4).$$

Тогда исходный предел перепишем в виде:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+16)}{(x-2)\cdot(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+16)}{(x-4)}=\frac{2+16}{2-4}=-9.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=-9$.

2. Рассмотрим предел дроби, в знаменателе (числителе) которой содержится иррациональная функция. Если, при непосредственной подстановке в такую дробь предельного значения, числитель и знаменатель обращаются в нуль, то для того чтобы раскрыть полученную неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, нужно числитель и знаменатель данной дроби умножить на выражение сопряжённое знаменателю (числителю).

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\dfrac{\sqrt{1+8}-3}{1-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Помножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю (избавляемся от иррациональности в числителе). В данном примере выражением, сопряжённым знаменателю $\sqrt{x+8}-3$, является выражение вида $\sqrt{x+8}+3$. Получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+8}\right)^2-3^2}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+8-9}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+8}+3\right)}=\frac{1}{6}.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\dfrac{1}{6}$.

Замечание: Если делимое при $x\to a$, конечно (равно *c=const*), а делитель стремится к нулю, то предел частного бесконечен, то есть $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{c}{0}=\infty$.

3. Рассмотрим частное двух функций $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$. Если при $x\to a$ или $x\to\infty$, числитель дроби $f(x)\to\infty$ и знаменатель дроби $\varphi(x)\to\infty$, то имеем неопределённость вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Пусть в числителе и знаменателе некоторые многочлены. Тогда для раскрытия неопределённости необходимо каждое слагаемое числителя и знаменателя разделить на x в наивысшей степени из числа слагаемых числителя и знаменателя, а затем перейти к пределу.

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+x+1}{2x^2+3x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+x+1}{2x^2+3x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Для того чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, необходимо под знаком предела числитель и знаменатель дроби разделить на переменную x с наивысшим показателем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+x+1}{2x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2/x^2+x/x^2+1/x^2}{2x^2/x^2+3x/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+1/x+1/x^2}{2+3/x}=\frac{-1+1/\infty+1/\infty}{2+3/\infty}=\frac{-1+0+0}{2+0}=-\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2+x+1}{2x^2+3x}=-\frac{1}{2}$.

Также при раскрытии неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ можно пользоваться следующей теоремой.

Теорема. Предел отношения двух многочленов (при условии, что аргумент стремиться к бесконечности) равен пределу отношения их старших членов, то есть

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^k+b_1x^{k-1}+\ldots+b_n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^k}=\begin{cases}0, & (n<k)\\ \frac{a_0}{b_0}, & (n=k).\\ \infty, & (n>k)\end{cases}$$

6.4 Первый и второй замечательные пределы

Рассмотрим предел вида $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$. Этот предел называют *первым замечательным пределом* и используется для раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ различных функций, содержащих тригонометрические выражения и степени x.

Следствия: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Решение. Подставим в выражение функции вместо x предельное значение, получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$. Для избавления от неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, помножим числитель и знаменатель дроби на «3» и получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3sin3x}{3x}$.

Используя теоремы о пределах и первый замечательный предел, получаем:

$$3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3$.

Рассмотрим предел функции $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$. Если, при $x\to a$ $(x\to\infty)$, функция $f(x)\to 1$, а функция $\varphi(x)\to\infty$, то говорят, что имеем неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Для раскрытия этой неопределённости пользуются *вторым замечательным пределом*, который имеет вид

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\text{, где } e\approx 2{,}7.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$.

Решение. В данном случае, при подстановке предельного значения, получим неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Для ее раскрытия сделаем замену $y=\frac{x}{2}$. Тогда $y\to\infty$ при $x\to\infty$ и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{2}=e^{2}.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=e^{2}$.

Следствия: При вычислении пределов полезно иметь в виду следующие равенства:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln x}.$$

Замечание. Неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ можно выражать одну через другую. Неопределенности вида $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$ сводятся к неопределенностям вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ следующим образом:

1) $\left[0=\frac{1}{\infty},\quad \infty=\frac{1}{0}\right]$, следовательно $[0\cdot\infty]=\left[\frac{1}{\infty}\cdot\infty\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ или $[0\cdot\infty]=\left[0\cdot\frac{1}{0}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]$.

2) $[\infty-\infty]=\ln e^{\infty-\infty}=\ln\frac{e^\infty}{e^\infty}\sim\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

3) $[\infty^0]=e^{\ln\infty^0}=e^{0\cdot\ln\infty}\sim[0\cdot\infty]$.

4) $[0^0]=e^{\ln 0^0}e^{0\cdot\ln 0}\sim[0\cdot\infty]$.

5) $[1^\infty]=e^{\ln 1^\infty}=e^{\infty\cdot\ln 1}=e^{\infty\cdot 0}$.

6.5 Непрерывность функции. Точки разрыва

Определение. Функция $f(x)$ называется <u>*непрерывной в точке*</u> x_0, если она удовлетворяет следующим трём требованиям:

1) Определена в некоторой окрестности точки x_0;

2) Имеет конечный предел функции при $x\to x_0$;

3) Предел функции при $x\to x_0$ равен значению функции в точке x_0, то есть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что в этой точке функция $f(x)$ <u>*разрывна,*</u> а точка x_0 называется <u>*точкой разрыва*</u> функции $f(x)$.

Пределом функции $f(x)$ в точке x_0 *слева (справа)*, называется предел, вычисляемый в предположение, что $x\to x_0$, оставаясь всегда меньше (больше) значения x_0. Пределы справа и слева называются <u>*односторонними пределами*</u> и обозначаются следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \text{ (для левостороннего)},$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \text{ (для правостороннего)}.$$

Определение. <u>*Точкой разрыва первого рода*</u> называют точку, в которой существуют конечные односторонние пределы функции слева и справа при $x \to x_0$, не равные друг другу, то есть $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Определение. <u>*Точкой разрыва второго рода*</u> называют точку, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции слева и справа при $x \to x_0$ бесконечен или не существует.

Определение. <u>*Точкой устранимого разрыва*</u> называют точку, в которой существует конечный предел функции, но он не равен значению функции в этой точке.

Определение. Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области, то она называется <u>*непрерывной в этой области*</u>.

Примеры решения типовых задач

Задача 1. Вычислить пределы следующих функций:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^4+x-1}{2x^2-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x+1}{2x^4-x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin2x}{sin5x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^x$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Разложим квадратный трехчлен в числителе на множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. В знаменателе вынесем общий множитель $3x$ за скобки.

Получим $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ и $3x^2-9x=3x(x-3)$.

Подставим полученные выражения в числитель и знаменатель данной дроби и сократим дробь на $x-3$. Получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{3x}=\frac{1}{9}.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\frac{1}{9}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны нулю. Умножив числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель $\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)$ и затем сократив дробь на x, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x})(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2}=\frac{2\sqrt{5}}{-2}=-\sqrt{5}.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=-\sqrt{5}$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^4+x-1}{2x^2-x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^2, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x^4}{x^4}+\frac{x}{x^4}-\frac{1}{x^4}}{\frac{2x^2}{x^4}-\frac{x}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{-1+0-0}{0+0}=\infty.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^4+x-1}{2x^2-x}=\infty$.

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x+1}{2x^4-x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^4, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4}-\frac{x}{x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{2-\frac{1}{x^3}} = \frac{-0+0}{2-0} = \frac{0}{2}=0.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x+1}{2x^4-x}=0$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Поделим числитель дроби под знаком предела на $2x$ и умножим на $2x$, а знаменатель поделим на $5x$ и умножим на $5x$. После чего воспользуемся формулой первого замечательного предела, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\left(\sin 2x/2x\right)}{5x\cdot\left(\sin 5x/5x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 1}{5x\cdot 1}=\frac{2}{5}.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\frac{2}{5}$.

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\left[1^\infty\right]$.

Сделаем замену $y=\frac{x}{2}$. Тогда $y\to\infty$ при $x\to\infty$ и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y} = \left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^2 = e^2.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=e^2$.

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^x$.

Очевидно, что $\frac{x-2}{x-1}=1+\frac{x-2}{x-1}-1=1+\frac{x-2-x+1}{x-1}=1+\frac{-1}{x-1}$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x-1}\right)^{x}=(1)^{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{-1}}\right]^{\frac{-1}{x-1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x/x}{x/x-1/x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1}{1-\frac{1}{x}}}=e^{-1}.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^{x}=e^{-1}$.

Задача 2. Задана функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x<0\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{x-1}, & x>1\end{cases}$.

1) Исследовать функцию на непрерывность на всей числовой оси.

2) Найти и классифицировать точки разрыва, если они существуют.

3) Построить график функции.

Решение.

1) Функция непрерывна на каждом из интервалов $(-\infty;0)$, $[0;1)$ и $(1;+\infty)$.

2) Рассмотрим поведение функции в точках x=0 и x=1, так как при переходе через эти точки функция меняет свое аналитическое выражение.

Найдем правосторонний и левосторонний пределы функции в точке x=0:

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}=-1 \text{ и } \lim_{x\to 0+0}\sqrt{1-x^2}=1.$$

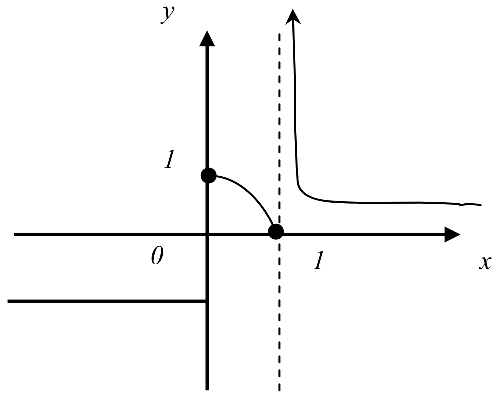
Так как односторонние пределы конечны, но не равны между собой, то x=0 – точка разрыва первого рода.

Найдем правосторонний и левосторонний пределы функции в точке x=1:

$$\lim_{x\to 1-0}\sqrt{1-x^2}=0 \text{ и } \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=+\infty.$$

Так как один из односторонних пределов равен бесконечности, то x=1 – точка разрыва второго рода.

3) Построим график функции.



Контрольный тест по после изучения раздела IV «Введение в математический анализ»

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{10-x}-3}{2-\sqrt{x+3}}$

а) 1/2; б) -1/3; в) 2/3; г) -1; д) 0.

2. Функция $y=f(x)$, определенная на интервале $(a;b)$, называется непрерывной в точке $x_0\in(a;b)$, если:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$; б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$; в) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$; г) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$.

3. Используя свойства пределов функций, найти предел

$$\lim_{x\to 1}\left(x^3+4x^2+5x-4\right).$$

а) 2; б) 3; в) 21; г)6; д) 5.

4. Используя свойства пределов функций, найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-2}{3x^2-7}$

а) $\frac{14}{17}$; б) $\frac{6}{5}$; в) $-\frac{15}{19}$; г) $\frac{12}{7}$; д) $\frac{1}{4}$.

5. Указать первый замечательный предел.

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}=0$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{tg\,2x}=1$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x}=1$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

6. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ равен:

а) 0; б) 2; в) $\frac{\pi}{2}$; г) 1.

7. Если $y = f(t)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$, причем ее значения принадлежат отрезку $[c;d]$; $z = \varphi(y)$ — функция, непрерывная на отрезке $[c;d]$, то сложная функция $z = \varphi(f(t))$ непрерывна на промежутке:

а) $[a;b]$; б) $[c;d]$; в) $[a;d]$; г) $[d;b]$; д) $[c;b]$.

8. Указать второй замечательный предел.

а) $\lim\limits_{x\to 2}(x+1)^2 = 9$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(2+x)^x = 3$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(x+2)^x = 1$.

9. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ равен:

а) -1; б) 0; в) e; г) 2.

10. Предел функции $f(x)$ в точке a существует и равен числу b ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$), если:

а) существует предел справа $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$;

б) существует предел слева $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$;

в) существуют левосторонний и правосторонний пределы.

г) существуют односторонние пределы, равные между собой, то есть $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$.

11. Точкой разрыва функции $y = \dfrac{x-5}{x+3}$ является точка:

а) $x = 3$; б) $x = 2$; в) $x = -2$; г) $x = -3$.

РАЗДЕЛ V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§7. ПРОИЗВОДНАЯ

7.1 Задачи, приводящиеся к понятию производной

Переходим к изложению основ дифференциального исчисления. В качестве введения в дифференциальное исчисление рассмотрим задачу о скорости и задачу о касательной. Обе задачи исторически оказались связанными с формированием основного понятия дифференциального исчисления, получившего название ***производной***.

Задача о скорости. Материальная точка движется прямолинейно так, что в каждый момент времени t она находится на расстоянии $S = f(t)$ от некоторой выбранной в качестве начальной точки **О** (говорят, что задан закон движения $S = f(t)$). Найти скорость *v* движения точки в момент t_0.

В момент времени t_0 пройденное расстояние равно $f(t_0) = S_0$, а в момент времени $t_0 + \Delta t$ расстояние равно $f(t_0 + \Delta t) = S_1$. Таким образом, за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ точка пройдет путь $\Delta S = S_1 - S_0 = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. При этом значение Δt называют приращением аргумента, а значение ΔS приращением функции.

Средняя скорость движения материальной точки за указанный промежуток времени равна $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

Средняя скорость движения зависит не только от выбранного момента времени t_0, но и от длительности рассматриваемого промежутка времени Δt. Чем меньше величина Δt, тем точнее средняя скорость «характеризует» это движение в момент времени t_0. Поэтому предел средней скорости движения при стремлении Δt к нулю называют *скоростью движения точки в данный момент времени t_0 (мгновенной скоростью):*

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

Задача о касательной. Пусть имеется кривая и лежащая на ней некоторая точка M. Возьмём на этой кривой любую другую точку N и будем перемещать её по кривой, неограниченно приближая к точке M (то есть, чтобы расстояние между ними стремилось к нулю). При этих условиях секущая MN, вообще говоря, меняет своё положение, вращаясь вокруг точки M (рис. 7.1). Если существует прямая MT, являющаяся предельным положением секущей MN при неограниченном приближении точки N по кривой к точке M, то эта прямая называется ***касательной*** к кривой в точке M. Следует иметь в виду, что кривая в её точке M может и не иметь касательной.

Рассмотрим некоторую плоскую кривую с уравнением $y=f(x)$ и точку $M\left(x_0,f(x_0)\right)$ этой кривой (рис. 7.2). Пусть кривая в точке M имеет невертикальную касательную MT. Напишем уравнение этой касательной.

Значению аргумента $x_0+\Delta x$ соответствует значение функции $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta y$ и, значит, точка $N(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ кривой. Здесь Δx – произвольное приращение аргумента, а $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – приращение функции при $x=x_0$.

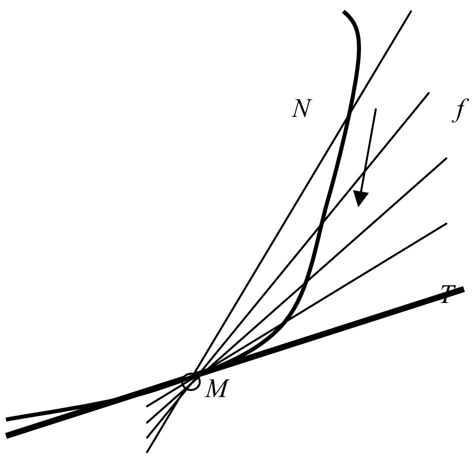


Рис.7.1.

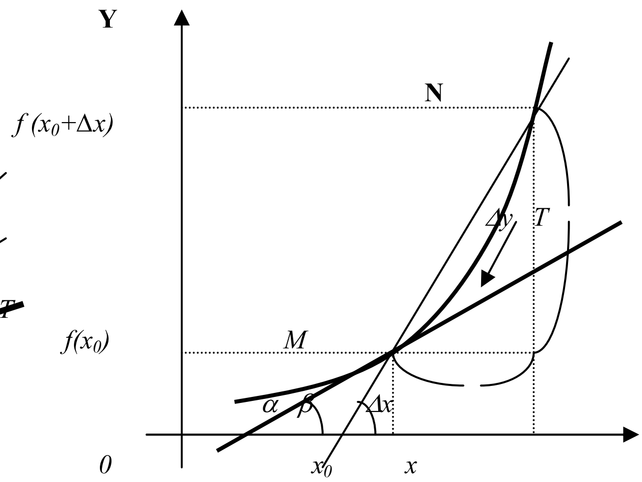


Рис.7.2.

Пусть теперь $\Delta x \to 0$, тогда точка N по кривой стремится к точке М, секущая MN, меняя своё положение, будет стремиться занять положение касательной MT к кривой в точке M. Обозначим через β угол наклона к оси OX секущей MN, а через α – угол наклона касательной к кривой в точке M. Если $\Delta x \to 0$, то $\beta \to \alpha$ и, значит, $tg\beta \to tg\alpha$. Но $tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, следовательно, $tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Уравнение касательной MT – прямой, проходящей через точку $M(x_0, f(x_0))$ с угловым коэффициентом $k = tg\alpha$, запишется в виде

$$y - f(x_0) = k(x - x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot (x - x_0).$$

Итак, если сопоставить операции, которые осуществлялись при решении рассмотренных задач, то легко заметить, что в обоих случаях по существу делалось одно и то же: приращение функции делилось на приращение независимой переменной и затем вычислялся предел их отношения. Таким путём приходим к основному понятию дифференциального исчисления — к понятию производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x. Дадим аргументу x приращение Δx (при этом предполагается, что точка $x + \Delta x$ принадлежит области определения функции). Тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

7.2 Определение производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если этот предел существует и конечен.

Производная функции $y = f(x)$ в точке x обозначается символами: y', $f'(x)$ или $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Итак, по определению

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (7.1)$$

Производная $f'(x)$ является функцией аргумента ***x*,** поскольку, если для данного значения аргумента x существует предел отношения (7.1), то только один. При конкретных числовых значениях аргумента x производная – число. В случаях, когда может возникнуть сомнение относительно переменной, по которой взята производная, эта переменная указывается в виде значка внизу: y'_x, $f'_x(x_0)$.

Рассматривая задачу о скорости, мы получили, что $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$, то есть $v = \frac{dS}{dt}$. Отсюда следует ***механический смысл производной***: скорость v есть производная от пройденного пути S по времени t.

Если слово «скорость» понимать в более широком смысле, то можно производную функции $y = f(x)$ по x считать скоростью изменения переменной y в точке x. Поэтому понятие производной находит широкое применение при изучении скорости течения различных процессов (например, скорость охлаждения нагретого тела; скорость осуществления работы – мощность; скорость обесценивания оборудования и т.п.).

Из рассмотренной задачи о касательной следует, что $tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то есть $tg\alpha = y'$. Отсюда следует ***геометрический смысл производной***: производная функции $y = f(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту $k = tg\alpha$ касательной в точке $M(x, f(x))$ графика функции.

На основании ранее приведённых рассуждений получаем, что уравнение невертикальной касательной к кривой $y = f(x)$ в её точке $M(x_0, f(x_0))$ можно записать в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Пример. Найти производную функции $y = x^3$ по определению.

Дадим аргументу x приращение Δx, получим $x + \Delta x$. Найдем значение данной функции в точке $x + \Delta x$, получим $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$. Найдем приращение функции

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x.$$

Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Тогда, производная функции будет равна $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$.

Ответ. $y' = \left(x^3\right)' = 3x^2$.

7.3 Основные правила дифференцирования. Таблица производных

Дифференцирование функции (отыскание производных) непосредственно на основе определения производной оказывается практически неудобной процедурой. Нахождение производных значительно упрощается, если использовать общие правила дифференцирования, к рассмотрению которых мы переходим.

Правила дифференцирования

1. Производная постоянной величины равна нулю.

$$(C)' = 0.$$

2. Производная суммы функций (имеющих производные) равна сумме производных этих функций.

$$y' = (u + v)' = u' + v'.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$$(Cu)' = Cu', \quad (C - \textit{Постоянная}).$$

4. Производная произведения двух функций равняется сумме произведений производной первого множителя на второй и производной второго множителя на первый.

$$y' = (u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

5. Производная частного или дроби (при условии, что числитель и знаменатель дроби имеют производные и знаменатель в нуль не равен нулю) равняется разности произведений производной числителя на её знаменатель и производной знаменателя на числитель, делённую на квадрат знаменателя.

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Таблица производных элементарных функций

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Производная $y' = f'(x)$ является в общем случае новой функцией от переменной *x*, и ее называют *производной первого порядка* (*первая производная*). От найденной первой производной можно при необходимости еще взять производную.

Определение. Производная от производной первого порядка называется *производной второго порядка* и обозначается следующим образом

$$y'' = (y')' = (f'(x))' = f''(x).$$

Зная производную второго порядка, можно вычислить производную третьего порядка следующим образом $y''' = (y'')' = (f''(x))' = f'''(x)$. Продолжая рассуждения далее, можно найти производную *n*-го порядка, то есть

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x).$$

Пример 1. Вычислить производную функции $y = x^4 \cdot \ln x$.

Решение. Так как данная функция представляет собой произведение двух функций, то для вычисления производной применяем правило дифференцирования $y' = (u \cdot v)' = u'v + uv'$, где $u = x^4$, а $v = \ln x$. Получим

$$y' = \left(x^4 \cdot \ln x\right)' = \left(x^4\right)' \ln x + x^4 (\ln x)'.$$

Так как, по таблице производных $\left(x^4\right)' = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3$ и $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, то имеем

$$y' = \left(x^4 \cdot \ln x\right)' = 4x^3 \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} = 4x^3 \cdot \ln x + x^3 = x^3(4\ln x + 1).$$

Ответ. $y' = x^3(4\ln x + 1)$.

Пример 2. Вычислить производную третьего порядка от функции $y = \dfrac{1}{x}$.

Решение. Найдем производную первого порядка. Для этого приведем данную функцию к табличному виду, а именно представим в виде степенной функции. Получим $y = x^{-1}$. Тогда, по формуле $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$, имеем

$$y' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2}.$$

Полученная первая производная является степенной функцией, поэтому для нахождения производной второго порядка, снова пользуемся формулой $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$.

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3}.$$

Аналогично находим производную третьего порядка.

$$y''' = \left(y''\right)' = \left(-2 \cdot x^{-3}\right)' = -2 \cdot \left(x^{-3}\right)' = -2 \cdot (-3)x^{--3-1} = 6x^{-4}.$$

Ответ. $y''' = 6x^{-4}$.

7. 4 Дифференцирование сложной функции

Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, причем $f(u)$ и $\varphi(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда y будет сложной функцией $y = f[\varphi(x)]$, дифференцируемой по переменной x.

Теорема. Если существуют производные функций $f'(u_0)$ и $\varphi'(x_0)$, где $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ имеет производную в точке x_0, которая вычисляется по формуле: $y' = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0)$.

Здесь x - независимая переменная, а u - промежуточная переменная. Таким образом производная по независимой переменной равна произведению производной функции по промежуточной переменной и производной промежуточной переменной по независимой переменной.

Таблица производных сложных функций

1. $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

3. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$

4. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

5. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

6. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$

7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

9. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

10. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

11. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

12. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

13. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

14. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Пример. Вычислить производную функции**:** $y = \sqrt[5]{(1+3x^2)^3}$.

Решение. Записываем данную функцию в виде степенной, получим

$$y = (1+3x^2)^{\frac{3}{5}}.$$

Воспользуемся формулой $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, где $u = 1+3x^2$. Получим

$$y' = \frac{3}{5}(1+3x^2)^{-\frac{2}{5}} \cdot (1+3x^2)' = \frac{3}{5}(1+3x^2)^{-\frac{2}{5}} \cdot 6x = \frac{18}{5\sqrt[5]{(1+3x^2)^2}}.$$

Ответ. $y' = \left(\sqrt[5]{(1+3x^2)^3}\right)' = \frac{18}{\sqrt[5]{(1+3x^2)^2}}$.

7.5 Дифференцирование степенно-показательной функции

Для того чтобы найти производную степенно-показательной функции, достаточно дифференцировать ее вначале как степенную, а затем как показательную и полученный результаты сложить.

Пусть $y = f(x)^{\varphi(x)}$. Прологарифмируем обе части последнего равенства и найдем производную от каждой части, считая при этом y сложной функцией. Получим,

$$\ln y = \varphi(x)\ln f(x) \Rightarrow \quad \left(\ln y\right)' = \left(\varphi(x)\ln(x)\right)' \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\left(\ln f(x)\right)' = \varphi'(x)\ln f(x) + \frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}.$$

Учитывая что $y = f(x)^{\varphi(x)}$**,** получим после преобразований:

$$y' = f(x)^{\varphi(x)}\left[\varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\left(\ln f(x)\right)' = \varphi'(x)\ln f(x) + \frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}\right]$$

Пример. Вычислить производную функции $y = (7x)^{\cos x}$.

Решение.

$$\ln y = \cos x \cdot \ln 7x \Rightarrow \quad \left(\ln y\right)' = \left(\cos x \cdot \ln 7x\right)' \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = (\cos x)' \cdot \ln 7x + \cos x \cdot \left(\ln 7x\right)' = \cos x \cdot \ln 7x + \frac{\cos x \cdot (7x)'}{7x} \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln 7x + \cdot\frac{\cos x \cdot 7}{7x} \Rightarrow \quad \frac{y'}{(7x)^{\cos x}} = -\sin x \cdot \ln 7x + \cdot\frac{\cos x \cdot 7}{7x} \Rightarrow$$

$$y' = (7x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln 7x + \cdot\frac{\cos x \cdot 7}{7x}\right).$$

7.6 Дифференциал функции

Определение. _Дифференциалом функции_ $y = f(x)$ называется главная часть приращения функции, линейная относительно Δx.

Дифференциал функции принято обозначать символом dy. Таким образом, из определения имеем:

$$dy = y' \cdot \Delta x, \qquad (7.2)$$

$$dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x \;\Rightarrow\; dx = \Delta x.$$

Тогда равенство (7.2) примет вид

$$dy = y' \cdot dx. \tag{7.3}$$

то есть дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал аргумента.

Пример 1. Вычислить дифференциал функции $y = \sin(6x - 4)$.

Решение. Найдем производную данной функции используя формулу $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, где $u = 6x - 4$, получим

$$y' = (\sin(6x-4))' = \cos(6x-4) \cdot (6x-4)' = 6 \cdot \cos(6x-4).$$

Тогда $dy = 6 \cdot \cos(6x-4) \cdot dx$ - дифференциал данной функции.

Ответ. $dy = 6 \cdot \cos(6x-4) \cdot dx$.

Используя понятие дифференциала функции, можно вывести формулу для вычисления приближённых значений, которая имеет вид

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Примеры решения типовых задач

Задача 1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \sqrt[4]{3x} + 5x^2 + \frac{7}{x^3}$, б) $y = 2^{\sqrt{\sin x}}$, в) $y = x^2 \arcsin x$,

г) $y = \ln \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + x)$, д) $y = \frac{x^3}{x-3}$, е) $y = e^{\frac{x}{3}} \cdot \cos^2 2x$.

Решение.

а) $y = \sqrt[4]{3x} + 5x^2 + \frac{7}{x^3}$.

Перепишем данную функцию, записав слагаемые в виде степени

$$y = \sqrt[4]{3} \cdot x^{\frac{1}{4}} + 5x^2 + 7x^{-3}.$$

Используя правила дифференцирования и формулу $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, получим

$$y' = (\sqrt[4]{3} \cdot x^{\frac{1}{4}})' + (5x^2)' + (7x^{-3})' = \sqrt[4]{3} \cdot \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{4}} + 2 \cdot 5x + 7(-3)x^{-4} = \frac{\sqrt[4]{3}}{4\sqrt[4]{x}} + 10x - \frac{21}{x^4}.$$

б) $y = 2^{\sqrt{\sin x}}$.

Данная функция является сложной показательной, следовательно, производную будем вычислять по формуле $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, где $u = \sqrt{\sin\ x}$. Получим

$$y' = 2^{\sqrt{\sin x}} \cdot \ln 2 \cdot (\sqrt{\sin x})'.$$

Так как функция $\sqrt{\sin x}$ является сложной, то ее производную найдем по формуле $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, где $u = \sin x$. Получим

$$y' = 2^{\sqrt{\sin x}} \cdot \ln 2 \cdot (\sqrt{\sin x})' = 2^{\sqrt{\sin x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = 2^{\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}.$$

в) $y = x^2 \arcsin x$.

Применив формулу $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, получим

$$y' = (x^2)' \cdot \arcsin x + x^2 \cdot (\arcsin x)'.$$

Используя табличные формулы нахождения производной, получим

$$y' = (x^2)' \cdot \arcsin x + x^2 \cdot (\arcsin x)' = 2x \cdot \arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

г) $y = \ln\left(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x)\right)$.

Дифференцируя функцию $y = \ln\left(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x)\right)$ как сложную, воспользуемся формулой $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$, где $u = tg(\frac{\pi}{4} + x)$. Получим

$$y' = \left(\ln tg(\frac{\pi}{4} + x)\right)' = \frac{\left(tg(\frac{\pi}{4} + x)\right)'}{tg(\frac{\pi}{4} + x)}.$$

Производную функции $tg(\frac{\pi}{4} + x)$ найдем по формуле $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$, где $u = \frac{\pi}{4} + x$. Получим

$$y' = \frac{(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x))'}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x)} \cdot \frac{(\frac{\pi}{4}+x)'}{\cos^2(\frac{\pi}{4}+x)} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4}+x) \cdot \cos(\frac{\pi}{4}+x)} = \frac{2}{\sin(\frac{\pi}{2}+2x)} = \frac{2}{\cos 2x}.$$

д) $y = \dfrac{x^3}{x-3}$.

В соответствии с формулой $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ получаем

$$y' = \frac{(x^3)'(x-3) - x^3 \cdot (x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{3x^2(x-3) - x^3}{(x-3)^2} = \frac{2x^3 - 9x^2}{(x-3)^2}.$$

е) $y = e^{\frac{x}{3}} \cdot \cos^2 2x$.

По аналогии с примером в) пользуемся правилом $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, получаем

$$y' = \left(e^{\frac{x}{3}}\right)' \cdot \cos^2 2x + e^{\frac{x}{3}} \cdot (\cos^2 2x)' = \tfrac{1}{3} e^{\frac{x}{3}} \cdot \cos^2 2x + e^{\frac{x}{3}} \cdot 2\cos 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 =$$

$$= \tfrac{1}{3} e^{\frac{x}{3}} \cdot \cos^2 2x - 2e^{\frac{x}{3}} \sin 4x.$$

Задача 2. Вычислить приближённо значение $\sqrt{1{,}03}$.

Решение.

1. Пусть $1{,}03 = x$, тогда получим функцию $f(x) = \sqrt{x}$. Представим x в следующем виде: $x = x_0 + \Delta x = 1 + 0{,}03$, тогда $x_0 = 1$ и $\Delta x = 0{,}03$.

2. Найдём $f(x_0)$ и $f'(x_0)$:

$$f(x_0) = f(1) = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

3. Используя формулу $\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x$, получим

$$\sqrt{1{,}03} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot 0{,}03 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}03 = 1 + 0{,}015 = 1{,}015.$$

Ответ. $\sqrt{1{,}03} \approx 1{,}015$.

§8. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

8.1 Признаки возрастания и убывания функции

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и x_1, x_2 – любые две точки этого отрезка, для которых выполнено условие $x_1 < x_2$. Тогда, функцию $f(x)$ называют на $[a,b]$:

1) <u>*возрастающей*</u>, если $f(x_1) < f(x_2)$;

2) <u>*неубывающей*</u>, если $f(x_1) \le f(x_2)$;

3) <u>*убывающей*</u>, если $f(x_1) > f(x_2)$;

4) <u>*невозрастающей*</u>, если $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Во всех четырех случаях функцию называют монотонной на $[a,b]$, причем в случаях 1) и 3) говорят, что функция строго монотонна, а в случаях 2) и 4) – просто монотонна.

Замечание. Для возрастающей функции приращение аргумента Δx и соответствующее приращение функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ имеют одинаковый знак, поэтому $\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$. Для убывающей функции Δx и Δf имеют разные знаки, поэтому $\frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$.

Теорема (*признак монотонности функции*). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и $f'(x) \ge 0\; (f'(x) \le 0),\quad \forall x \in [a,b]$. Тогда функция $f(x)$ - неубывающая (невозрастающая) на отрезке $[a,b]$.

Теорема *(необходимый и достаточный признак возрастания (убывания) функции).* Для того чтобы функция $y = f(x)$ возрастала (убывала) на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы производная первого порядка функции была положительной (отрицательной), т.е. $y' > 0$ или $f'(x) > 0$, ($y' < 0$ или $f'(x) < 0$).

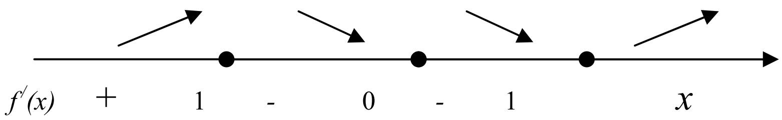
Схема исследование дифференцируемой функции на возрастание и убывание функции

1) Находим точки из области определения функции $f(x)$, в которых производная функции равна нулю или не существует. Эти точки называют ***критическими точками 1-го рода***, они разбивают область определения функции $f(x)$ на интервале монотонности (так как на каждом из них производная $f'(x)$ сохраняет знак).

2) Исследуем знак $f'(x)$ на каждом из этих интервалов. Если на рассматриваемом интервале $f'(x) > 0,$ то на этом интервале график функции возрастает, если же $f'(x) < 0$, то на этом интервале график функции убывает.

Пример. Найти интервалы монотонности функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Решение. Область определения функции: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Её производная $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ существует в области определения функции *f(x)* и $f'(x) = 0$ при $x = \pm 1$. Отметим на числовой оси *Ox* точки этом интервале график функции этом интервале график функции $x = -1,\ \ x = 0,\ \ x = 1$. Эти точки разбивают числовую ось на четыре интервала: $(-\infty;-1),\ \ (-1;0),\ \ (0;1),\ \ (1;+\infty)$.



Нетрудно исследовать знак производной, вычислив ее значение в «удобных» контрольных точках внутри каждого интервала.

$$f'(-2) = 1 - \frac{1}{(-2)^2} = 0{,}75 > 0, \qquad f'(-0{,}5) = 1 - \frac{1}{(-0{,}5)^2} = -3 < 0,$$

$$f'(0{,}5) = 1 - \frac{1}{(0{,}5)^2} = -3 < 0, \qquad f'(2) = 1 - \frac{1}{2^2} = 0{,}75 > 0.$$

Так как, на интервалах $(-\infty,-1), (1,+\infty)$ первая производная положительная ($f'(x) > 0$), то график функции на этих интервалах возрастает. Так как на интервалах $(-1,0)$ и $(0,1)$ первая производная отрицательная ($f'(x) < 0$), то на этих интервалах график функции убывает.

8.2 Экстремум функции

Определение. Точка x_0 называется <u>*точкой максимума*</u> (<u>*минимума*</u>) функции, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется условие

$$f(x) \le f(x_0),(f(x) \ge f(x_0)).$$

Максимум и минимум функции называют экстремумами функции, а точка x_0 - точкой экстремума.

Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции меняет знак с «+» на «-», то x_0 является точкой максимум. Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции меняет знак с «-» на «+», то x_0 является точкой минимума. Если производная не меняет знак, то точка x_0 не является точкой экстремума.

Теорема. (*Необходимое условие существования экстремума*) Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в некоторой точке, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Значения аргумента, при которых производная равна нулю или не существует, называется критическими. Таким образом, если функция имеет экстремум, то он может быть только в критических точках.

Схема исследование дифференцируемой функции на экстремум

1. Найти производную функции первого порядка.

2. Найти те значения x, при которых первая производная обращается в нуль. Для этого нужно приравнять найденную производную к нулю и решить уравнение с одной неизвестной.

3. Установить знак производной вблизи критических точек и определить характер экстремума.

4. Вычислить значение функции в точках максимума и минимума.

Пример. Исследовать функцию $f(x) = 2x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ на экстремум.

Решение. Используем для решения приведенную схему.

1. Данная функция определена и непрерывна при всех x. Найдем производную функции первого порядка, получим

$$f'(x) = 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = 2\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}.$$

2. Найдем точки, подозрительные на экстремум.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} \neq 0;\ 1+\sqrt[3]{x} = 0.$$

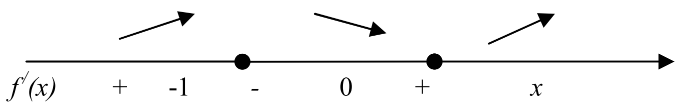
Следовательно, производная не существует в точке $x_1=0$ и обращается в нуль, если $1+\sqrt[3]{x} = 0$, то есть при $x_2= -1$.

3. Отметим точки $x = 0$ и $x = -1$ на числовой оси и разобьем числовую ось на три числовых промежутка $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;\infty)$. Определим знак производной функции на полученных промежутках.

$$f'(-8) = 2\frac{1+\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{-8}} = 1 > 0; \qquad f'(-\frac{1}{8}) = 2\frac{1+\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}}{\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}} = -1 < 0;$$

$$f'(1) = 2\frac{1+\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{1}} = 4 > 0.$$

Так как на промежутках $(-\infty;-1)$ и $(0;\infty)$ первая производная положительная, то на этих промежутках график функции возрастает. Так как на промежутке $(-1;0)$ первая производная отрицательная, то на этом промежутке график функции убывает.



Так как, при переходе через точку $x = -1$, производная дифференцируемой функции меняет знак с «+» на «–», то $x = -1$ –абсцисса точки максимума. При переходе через точку $x = 0$, производная дифференцируемой функции меняет знак с «-» на «+», но $x = 0$ – не является абсциссой точки минимума, так как при $x = 0$ первая производная не существует.

4. Вычислим значение функции в точке $x = -1$, получим

$$f(-1) = 2\cdot(-1) + 3\sqrt[3]{(-1)^2} = -2+3=1.$$

Таким образом, точка $(-1;1)$ - точка максимума графика функции $f(x) = 2x + 3\cdot\sqrt[3]{x^2}$.

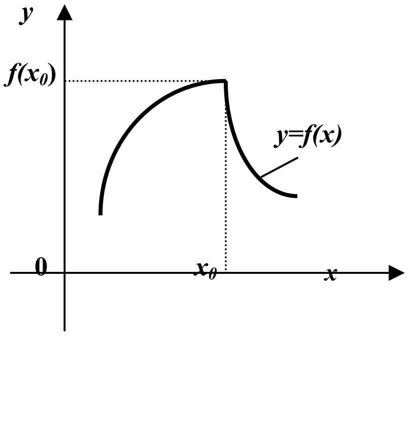
8.3 Выпуклость функции. Точки перегиба

Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется <u>*выпуклым*</u> (*выпуклым вверх*) на интервале (a,b), если график на этом промежутке расположен ниже касательной, проведённой к графику этой функции в любой точке $x\in(a,b)$. Если же на интервале (a,b) график функции $y = f(x)$ располагается выше любой касательной, проведённой к графику этой функции, то его называют <u>*вогнутым*</u> (*выпуклым вниз*).

Определение. <u>*Точкой перегиба графика*</u> непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы выпуклости и вогнутости.

Теорема (*необходимый и достаточный признак выпуклости и вогнутости).* Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна $f''(x)\ge 0$ (отрицательна $f''(x)\le 0$) внутри некоторого промежутка *X*, то график функции $f(x)$ выпуклый (вогнутый) на этом промежутке.

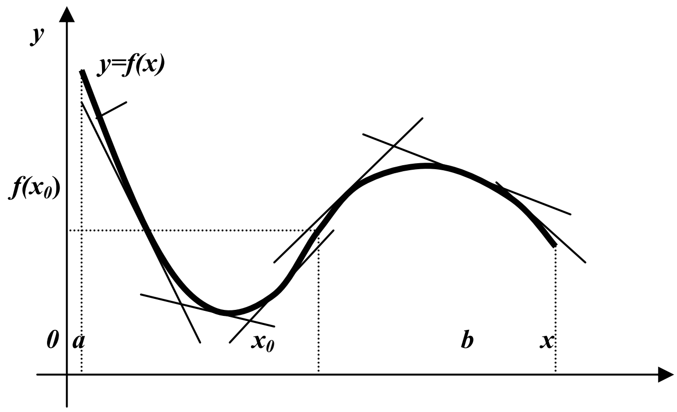
Теорема (*необходимый признак существования точки перегиба*). Пусть точка $(x_0, f(x_0))$– точка перегиба графика дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, тогда производная дважды дифференцируемой функции равна 0, то есть $f''(x)=0$.



Замечание. График функции может иметь точку перегиба и при $x = x_0$ таком, что вторая производная не существует. Поэтому возможными точками перегиба («подозрительными на перегиб») являются точки, где вторая производная или равна нулю, или не существует. Такие точки называют ***критическими точками 2-го рода***. Заметим, что не всякая такая точка является точкой перегиба.

Например, для функций $y = x^3$ и $y = x^4$ вторые производные $y^{//} = 6x$ и $y^{//} = 12x^2$ при $x = 0$ обращаются в нуль. При этом точка О*(0;0)* для графика функции $y = x^3$ является точкой перегиба, а для графика функции $y = x^4$ не является. Выясним, в каком случае критическая точка 2-го рода будет точкой перегиба.

Теорема (*достаточный признак существования точки перегиба).* Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности критической точки 2-го рода $x = x_0$ и дважды непрерывно дифференцируема (хотя бы в проколотой окрестности точки x_0). Если вторая производная меняет знак при переходе через x_0, то $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба.



На приведенном рисунке график функции $y = f(x)$ является вогнутым на интервале (a, x_0) и выпуклым на интервале (x_0, b). Точка $(x_0, f(x_0))$ является ***точкой перегиба***.

Схема исследования функции на выпуклость (вогнутость) и точки перегиба

1. Найти вторую производную функции.

2. Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.

3. Исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах вогнутости (выпуклости) и точек перегиба.

4. Найти значение функции в точках перегиба.

Пример. Исследовать на выпуклость и вогнутость, найти точки перегиба графика функции $f(x) = 2 - |x^5 - 1|$.

Решение.

1. Используя определение модуля, данную функцию можно записать в виде:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^5, & x \le 1 \\ 3 - x^5, & x > 1 \end{cases}.$$

Заметим, что функция непрерывна $\forall x \in R$. Вычислим производную первого порядка, получим

$$f'(x) = \begin{cases} 5x^4, & x \le 1 \\ -5x^4, & x > 1 \end{cases}.$$

При $x = 1$ производная $f'(x)$ не существует $\left(f'(1-0) = 5 \ne f'(1+0) = -5\right)$, поэтому $f''(1)$ также не существует. При $x \ne 1$ имеем:

$$f''(x) = \begin{cases} 20x^3, & x \le 1 \\ -20x^3, & x > 1 \end{cases}.$$

2. Критические точки 2-го рода:

- $x_1 = 0$, так как $f''(0) = 0$,
- $x_2 = 1$, так как $f''(1)$ не существует.

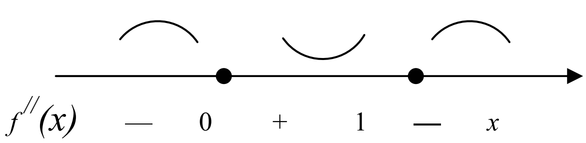
Отметим эти точки на числовой оси.

3. В каждом из полученных интервалов определим знак второй производной:

$f''(-1) = -20 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \ \forall x \in (-\infty, 0)$;

$f''(0{,}5) = 2{,}5 > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \ \forall x \in (0{,}1)$;

$f''(2) = -160 \Rightarrow f''(x) < 0 \ \forall x \in (1, +\infty)$).



Согласно вышеизложенным теоремам делаем вывод: на интервале $(-\infty, 0)$ график выпуклый, на $(0,1)$ – вогнутый, на $(1,+\infty)$ – выпуклый.

Так как при переходе через точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ вторая производная меняет знак на противоположный, то они являются абсциссами точек перегиба.

4. Найдем значение функции в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Получим

$$f(0) = 2 - |0^5 - 1| = 1,\ f(1) = 2 - |1^5 - 1| = 2.$$

Таким образом, точки $(0,1)$ и $(1,2)$ - точки перегиба графика функции $f(x) = 2 - |x^5 - 1|$.

8.4 Асимптоты графика функции

При исследовании поведения функции на бесконечности, то есть при $x \to \pm\infty$ или вблизи точек разрыва второго рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называют асимптотами.

Определение. *Асимптотой графика функции* называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Теорема *(необходимый и достаточный признак существования вертикальной асимптоты).* Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и хотя бы один из пределов функции при $x \to x_0 - 0$ (слева) или при $x \to x_0 + 0$ (справа) равен бесконечности, то есть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$. Тогда прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке x_0 так как в этом случае $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Следовательно вертикальные асимптоты $x = x_0$ следует искать в точках разрыва функции

$y = f(x)$ или на концах ее области определения (a, b), если a и b – конечные числа.

Пример. Найти вертикальные асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение. Данная функция имеет единственную точку разрыва $x_1 = -1$ (значение $f(-1)$ не определено).

Так как $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3}{2(x+1)^2} = \left(\dfrac{-1}{+0}\right) = -\infty$, то прямая $x = -1$ – единственная вертикальная асимптота.

Займёмся нахождением наклонных асимптот, уравнения которых можно записать в виде

$$y = kx + b.$$

Теорема *(необходимый и достаточный признак существования наклонной асимптоты).* Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx] = b$. Тогда прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$. Тогда прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

8.5 Схема полного исследование функции методами дифференциального исчисления и построение её графика

Исследование функции и построение её графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.

2. Выяснить, является ли функция чётной, нечётной, периодической. При наличии какого–либо из этих свойств можно использовать симметрию при построении графика.

3. Исследовать функцию на непрерывность. Найти точки разрыва функции и её односторонние пределы в этих точках.

4. Определить асимптоты графика и поведение функции на границе области определения.

5. С помощью производной первого порядка найти промежутки возрастания и убывания, экстремумы функции.

6. С помощью производной второго порядка найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба.

7. Используя результаты исследования, построить график функции. При необходимости можно дополнительно найти значения функции в некоторых точках из тех промежутков, для которых предыдущие пункты исследования дали недостаточно информации.

Пример решения типовой задачи

Задача. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ и построить ее график.

Решение.

1. Область определения функции является множество всех вещественных чисел, кроме $x=1$ (в этом случае знаменатель обращается в нуль, то есть $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$).

2. Выясним, является ли данная функция четной, нечетной или общего вида:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{(-x)-1}=\frac{x^2+1}{-x-1}\neq -f(x)\neq f(x) \text{ - функция общего вида.}$$

3. Выясним характер разрыва функции при $x=1$. Для этого рассмотрим односторонние пределы функции в точке $x\to 1$:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+1}{x-1}=\left(\frac{2}{+0}\right)=\infty\ ,\ \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+1}{x-1}=\left(\frac{2}{+0}\right)=\infty\ .$$

Полученный результат говорит о том, что точка $x=1$ является точкой разрыва 2-го рода для данной функции, а прямая с уравнением $x=1$ – вертикальной асимптотой графика функции.

4.Найдем наклонные асимптоты графика функции.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x-1}\div x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x}=1.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1.$$

Следовательно, график функции имеет наклонную асимптоту $y=x+1$.

5. Найдем точки экстремума функции и определим интервалы возрастания и убывания функции.

Для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную функции, приравняем ее к нулю, найдем критические точки, и интервалы возрастания и убывания.

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)'=\frac{(x^2+1)'(x-1)-(x^2+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \begin{array}{l} x-1\neq 0\Rightarrow x\neq 1 \\ x^2-2x-1=0\Rightarrow x_1=1-\sqrt{2};x_2=1+\sqrt{2}. \end{array}$$

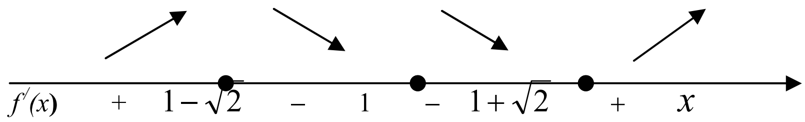
Таким образом, получили две точки, подозрительные на экстремум $x_1=1-\sqrt{2},\quad x_2=1+\sqrt{2}$. Отметим эти точки, а так же точку $x=1$ на числовой оси и разобьем числовую ось на четыре промежутка $\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right)$, $\left(1-\sqrt{2};1\right)$, $\left(1;1+\sqrt{2}\right)$, $\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$. На каждом из промежутков определим знак первой производной.

$$f'(-1)=\frac{(-1)^2-2\cdot(-1)-1}{(-1-1)^2}=\frac{2}{4}=0{,}5>0;$$

$$f'(0)=\frac{(0)^2-2\cdot 0-1}{(0-1)^2}=\frac{-1}{1}=-1<0;$$

$$f'(2)=\frac{(2)^2-2\cdot 2-1}{(2-1)^2}=\frac{-1}{1}=-1<0;$$

$$f'(3) = \frac{(3)^2 - 2 \cdot 3 - 1}{(3-1)^2} = \frac{2}{4} = 0{,}5 > 0 \,.$$



Получаем, что функция возрастает на интервалах $(-\infty; 1-\sqrt{2}]$, $[1+\sqrt{2}; \infty)$ и убывает $[1-\sqrt{2}; 1)$, $(1; 1+\sqrt{2})$.

Так как при переходе через точку $x_1 = 1-\sqrt{2}$ первая производная меняет знак с «+» на «-», то она является абсциссой точки максимума. Так как при переходе через точку $x_2 = 1+\sqrt{2}$ первая производная меняет знак с «-» на «+», то она является абсциссой точки минимума. Найдем значение функции в этих точках.

$$x_{\max} = 1-\sqrt{2} \Rightarrow \quad f_{\max}(1-\sqrt{2}) = \frac{(1-\sqrt{2})^2 + 1}{1-\sqrt{2}-1} = 2 - 2\sqrt{2}$$

$$x_{\min} = 1+\sqrt{2} \Rightarrow \quad f_{\min}(1+\sqrt{2}) = \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 1}{1+\sqrt{2}-1} = 2 + 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, $A(1-\sqrt{2}; 2-2\sqrt{2})$ - точка максимума, $B(1+\sqrt{2}; 2+2\sqrt{2})$ - точка минимума.

6. Найдем точки перегиба графика функции и определим интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Для этого найдем производную второго порядка, прировняем ее к нулю.

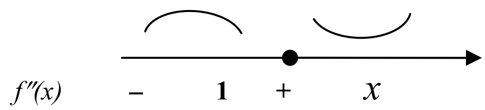
$$f''(x) = \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x - 1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3} \,.$$

$$f''(x) = 0 \,, \quad \frac{4}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq 1 \,.$$

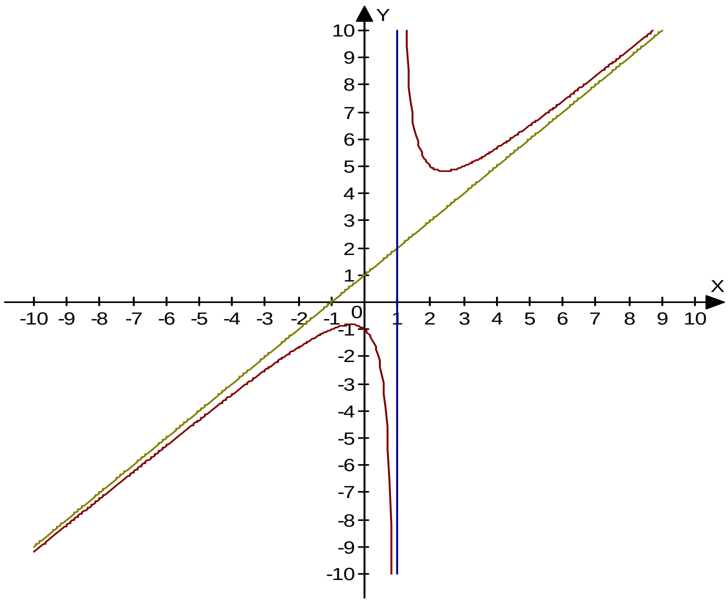
Таким образом, вторая производная в нуль не обращается, следовательно, точек перегиба нет. Отметим на числовой оси точку $x = 1$, разобьем числовую ось на два промежутка $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$. Определим знак второй производной на каждом из промежутков, тем самым определим интервалы выпуклости и вогнутости.

$$f''(0)=\frac{4}{(0-1)^3}=\frac{4}{-1}=-4<0,$$

$$f''(2)=\frac{4}{(2-1)^3}=\frac{4}{1}=4>0.$$



7. Используя полученные результаты, строим график функции



Контрольный тест после изучения раздела V «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

1. Какое из ниже перечисленных предложений определяет производную функции (когда приращение аргумента стремится к нулю)?

а) Отношение приращения функции к приращению аргумента;

б) Предел отношения функции к приращению аргумента;

в) Отношение предела функции к аргументу;

г) Предел отношения приращения функции к приращению аргумента.

2. Первая производная функции показывает:

а) скорость изменения функции; б) направление функции;

в) приращение функции; г) приращение аргумента функции.

3. Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в некоторой точке, равен:

а) отношению значения функции к значению аргумента в этой точке;

б) значению производной функции в этой точке;

в) значению функции в этой точке;

г) значению тангенса производной функции в этой точке.

4. Укажите все верные утверждения: «Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке …»

а) можно провести касательную к графику функции;

б) нельзя провести касательную к графику функции;

в) функция непрерывна;

г) функция имеет экстремум.

5. Дифференциал функции равен:

а) отношению приращения функции к приращению аргумента;

б) произведению приращения функции на приращение аргумента;

в) произведению производной на приращение аргумента;

г) приращению аргумента.

6. Дифференциал постоянной равен…

а) этой постоянной;

б) произведению данной постоянной на величину dx;

в) бесконечно большой величине;

г) нулю.

7. Укажите функции, для которых существует конечная производная в каждой точке числовой оси:

а) $y = lnx$; б) $y = x^3$; *в*) $y = 3x.$;

8. Если функция $y(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$ и $y(a) = y(b)$, то на ($a;b$) можно найти хотя бы одну точку, в которой:

а) функция не определена;

б) производная функции не существует;

в) нельзя провести касательную к графику функции;

г) производная функции обращается в ноль.

9. Какое из следующих утверждений верно для любой линейной функции?

а) дифференциал функции равен приращению функции;

б) дифференциал функции равен приращению аргумента;

в) дифференциал функции – это постоянная величина;

г) дифференциал функции равен производной этой функции.

10. Сколько точек перегиба имеет функция $y = x^4 + 4x$?

а) не имеет; б) одну;

в) две; г) три.

11. Функция $y = x^3 + x$ …

а) на интервале $(-\infty; 0)$ возрастает, $(0; +\infty)$ убывает;

б) на интервале $(-\infty; 0)$ убывает, $(0; +\infty)$ возрастает;

в) всюду убывает;

г) всюду возрастает.

12. Функция $y = x^3 - 3x$ возрастает на интервале:

а) $(3; +\infty)$; б) $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$;

в) $(-\infty; +\infty)$; г) не убывает на всей числовой оси.

13. Укажите точки экстремума функции $y = (x+1)^2 \cdot (x-2)$, непрерывной на всей числовой прямой.

а) $x = 2$ – абсцисса точки max; б) $x = 2$ – абсцисса точки min;

в) $x = -1$ –абсцисса точки max; г) точек экстремума нет.

14. Для дифференцируемой функции $y = f(x)$ из приведенных условий выберите достаточное условие убывания:

а) $f'(x) < 0$; б) $f''(x) < 0$;

в) $f''(x) > 0$; г) $f''(x) = 0$.

15. Для дифференцируемой функции $y = f(x)$ из приведенных условий выберите достаточное условие выпуклости (выпуклости вверх).

а) $f'(x) < 0$; б) $f''(x) < 0$;

в) $f''(x) > 0$; г) $f''(x) = 0$.

16. Для дифференцируемой функции $y = f(x)$ из приведенных условий выберите необходимое условие существования точки перегиба:

а) $f'(x) < 0$; б) $f''(x) < 0$;

в) $f''(x) > 0$;　　　　г) $f''(x) = 0$.

РАЗДЕЛ VI. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§9. ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

9.1 Основные определения

Определение. *Переменная величина* z называется *функцией двух переменных величин* x и y, если каждой паре допустимых значений x и y соответствует единственное значение z.

Функция двух переменных обозначается символом:

$$z = f(x, y) \text{ или } z = z(x, y).$$

Систему значений x и y называют точкой $M(x, y)$, а функцию двух переменных – функцией точки $z = f(M)$.

Геометрическим изображением функции двух переменных является некоторая поверхность в пространстве.

Значение функции $z = f(x, y)$ при $x = a,\quad y = b$ обозначается через $f(a,b)$.

Определение. Совокупностью всех точек, в которых определена функция двух переменных, называется *областью существования* или *областью определения функции* и является некоторая часть координатной плоскости, ограниченная одной или несколькими линиями (или вся плоскость).

9.2 Предел и непрерывность функции двух переменных

Определение. *Число* A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или в точке (x_0, y_0)), если для любой последовательности точек $\{(x_n, y_n)\}$ из области определения функции, отличных от точки (x_0, y_0) и сходящихся к этой точке, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n, y_n)\}$ сходится к числу A, и обозначается следующим образом

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение.

Обозначим $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. Условие $x\to 0$, $y\to 0$ равносильно тому, что $\rho\to 0$. Запишем предел в виде

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln\left(1-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\ln\left(1-\rho^2\right)}{\rho}=\frac{0}{0}=$$

$$\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\right]=\lim_{\rho\to 0}\rho\cdot\frac{\ln\left(1-\rho^2\right)}{\rho^2}=\left(\lim_{\rho\to 0}\rho\right)\cdot\left(\lim_{\rho\to 0}\frac{\ln(1-\rho^2)}{\rho^2}\right)=0\cdot 1=0.$$

Определение. Функция $z=f(x,y)$ называется *непрерывной в точке* (x_0,y_0), если она удовлетворяет трем условиям:

1. Определена в точке (x_0,y_0), то есть существует значение функции в этой точке.

2. Имеет конечный предел при $x\to x_0$ и $y\to y_0$.

3. Предел функции в точке (x_0,y_0) равен значению функции в этой точке, то есть $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

9.3 Частные производные и полный дифференциал функции двух переменных

Пусть $z=f(x,y)$ есть функция от двух переменных *x* и *y*.

Дадим переменной x приращение Δx, оставляя переменную y неизменной. Найдем новое значение функции $f(x+\Delta x,y)$.

Определение. *Частным приращением функции* $z=f(x,y)$ по переменной x называется разность между новым значением функции $f(x+\Delta x,y)$ и старым значением $f(x,y)$ и обозначается следующим образом

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично определяется и частное приращение функции $z = f(x, y)$ по переменной y:

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Дадим приращение и переменной x и переменной y. Найдем новое значение функции $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

Определение. _Полным приращением функции_ $z = f(x, y)$ называется разность между новым значением функции $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ и старым значением $f(x, y)$ и обозначается следующим образом

$$\Delta z = \Delta f(x, y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Замечание. Полное приращение функции не равно сумме частных приращений, то есть

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Определение. _Частной производной функции_ двух переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции $z = f(x, y)$ по определению имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$ (частная производная по x),

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$ (частная производная по y).

При нахождении частной производной пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, считая другой аргумент постоянным.

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Функция, имеющая полный дифференциал, называется *дифференцируемой.*

Пример. Найти частные производные по переменным x и y для функций

а) $z = x^3 - 2xy^2 + \sqrt{y}$;

б) $z = x^{\sin y}$.

Решение.

а) Считая $y=const$, имеем:

$$z'_x = \left(x^3\right)'_x - 2y^2\left(x\right)'_x + \left(\sqrt{y}\right)'_x = 3x^2 - 2y^2.$$

При вычислении z'_y нужно считать $x=const$**,** поэтому

$$z'_y = \left(x^3\right)'_y - 2x\left(y^2\right)'_y + \left(\sqrt{y}\right)'_y = -4xy + \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

б) Если $y = const$, то функция z является степенной функцией аргумента x, поэтому:

$$z'_x = \left(x^{\sin y}\right)'_x = \sin y \cdot x^{\sin y - 1}.$$

При $x = const$ функция z – показательная функция аргумента y, поэтому:

$$z'_y = \left(x^{\sin y}\right)'_y = x^{\sin y} \cdot \ln x \cdot (\sin y)'_y = x^{\sin y} \ln x \cdot \cos y.$$

Пример решения типовой задачи

Задача 1. Найти частные производные и полный дифференциал функции

$$z = x^2 + 2xy + y^3.$$

Решение.

Считая y постоянной и дифференцируя z как функцию от переменной x, получаем частную производную по x:

$$z'_x = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (y^3)'_x = 2x + 2y + 0 = 2(x+y).$$

Аналогично, считая x постоянной и дифференцируя z как функцию y, получаем частную производную по y:

$$z'_y = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (y^3)'_y = 0 + 2x + 3y^2.$$

Найдем полный дифференциал исходной функции:

$$dz = 2(x+y)dx + (2x+3y^2)dy.$$

Контрольный тест после изучения раздела VI « Функция двух переменных»

1. Вставить пущенное слово:

Частным приращением функции $f(x,y)$ по переменной x называется … между новым значением функции $f(x+\Delta x, y)$ и старым значением $f(x,y)$.

1. Разность. 2. Сумма. 3. Произведение. 4. Частное.

2. Сумма частных производных функции $z = x^{2y}$ в точке (1;1) равна

1) 0; 2) 2; 3) 1; 4) 4.

3. Полный дифференциал функции двух переменных равен:

1) $dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$; 2) $dz = z'_x \cdot dy + z'_y \cdot dx$;

3) $dz = z''_x \cdot dx + z''_y \cdot dy$; 4) $dy = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$.

4. Среди приведенных ниже высказываний найдите истинные.

1. Количество частных производных функции нескольких переменных зависит от количества ее независимых переменных
2. Производная произведения равна произведению производных
3. Задача о вычислении периметра криволинейной трапеции не приводит к понятию производной
4. Производная постоянной величины равна единице

5. Частная производная F'_x в точке $M_0(2,2,1)$ функции $F(x,y,z) = 2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} - 8 = 0$ имеет вид

1) 4ln2; 2) –16ln2; 3) –4ln2.

6. Дифференциал функции $u = \dfrac{x}{z} + y^2$ в точке $M_0(2,0,1)$ равен:

1) $dx - 2dz$; 2) $2dx - dz$; 3) $dx + 2dz$.

7. Частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = 2x + y^2$ равна:

1) 2; 2) $2+y$; 3) $2x+1$; 4) $2y$.

РАЗДЕЛ VII. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧЕСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§10. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

10.1 Первообразная функция и неопределенный интеграл

Определение. Дифференцируемая функция $F(x)$ называется <u>*первообразной*</u> для функции $f(x)$ на множестве $X = \{x\}$, если производная этой функции и дифференциал равны соответственно $f(x)$ и $f(x)\cdot dx$, то есть

$$F'(x) = f(x) \text{ и } d\big(F(x)\big) = f(x)\cdot dx.$$

Пример. Найти первообразные для функций:

а) $f(x) = \cos x$;

б) $f(x) = 4x^3$.

Решение.

а) Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$, так как $F'(x) = (\sin x)' = cosx$, то есть $F'(x) = f(x)$.

б) Функция $F(x) = x^4$ является первообразной для функции $f(x) = 4x^3$, так как $F'(x) = (x^4)' = 4x^3$, то есть $F'(x) = f(x)$.

Заметим, что одной функции соответствует не единственная первообразная, а множество их, причем они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое. Например, для функции $f(x) = 4x^3$ первообразной также будут являться функции вида $F(x) = x^4 \pm 5$, $x^4 \pm 10, \ldots, x^4 \pm C$, где $C = const$, так как производная каждой из этих функций одна и та же функция $f(x) = 4x^3$.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $F(x) + C$ для функции $f(x)$, называется <u>*неопределенным интегралом*</u> и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (10.1)$$

В формуле (10.1) знак $\int$ - знак интегрирования, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, $F(x)$ - первообразная, $C = const$, x - переменная интегрирования.

Процесс нахождения первообразной функции называется *интегрированием*, а раздел математики, изучающий интегрирование, называется *интегральным исчислением*.

Интегрирование, это есть действие обратное дифференцированию, поэтому результат интегрирования всегда можно проверить. Для этого нужно найти производную или дифференциал от множества первообразных функции и если будет получена подынтегральная функция или подынтегральное выражение, то действие выполнено, верно.

Пример.

1. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$, так как $\left(\ln|x| + C\right)' = \frac{1}{x}$.

2. $\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$, так как $d\left(-\frac{1}{3}\cos 3x + C\right) = \sin 3x dx$.

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Из определения неопределенного интеграла вытекают **следующие свойства**:

1°.Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, то есть

$$\left(\int d(x)dx\right)' = f(x).$$

2°. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3°. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен самой функции с точностью до произвольного постоянного слагаемого, то есть

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4°. Неопределенный интеграл от суммы конечного числа непрерывных функций равен сумме неопределенных интегралов этих функций, то есть

$$\int[f(x)+\varphi(x)-g(x)]dx=\int f(x)dx+\int\varphi(x)dx-\int g(x)dx\,.$$

5°. Отличный от нуля постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла, то есть

$$\int A\cdot f(x)dx=A\int f(x)dx\,,\ \text{где}\ \ A\neq 0\,.$$

Таблица основных интегралов

1.	$\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\alpha\neq-1$	**9.**	$\int\dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+C$
2.	$\int\dfrac{dx}{x}=\ln\|x\|+C$	**10.**	$\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=arcsin\dfrac{x}{a}+C$
3.	$\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$	**11.**	$\int\dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{x+a}{x-a}\right\|+C$
4.	$\int e^x dx=e^x+C$	**12.**	$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|+C$
5.	$\int\cos xdx=sinx+C$	**13.**	$\int tgxdx=-ln\,/cosx\,/+C$
6.	$\int\sin xdx=-cosx+C$	**14.**	$\int ctgxdx=ln\,/sinx\,/+C$
7.	$\int\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=tgx+C$	**15.**	$\int\dfrac{1}{\cos x}dx=\ln\left\|tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\|+C$
8.	$\int tgxdx\int\dfrac{1}{\sin^2 x}dx=-ctgx+C$	**16.**	$\int\dfrac{1}{\sin x}dx=\ln\left\|tg\dfrac{x}{2}\right\|+C$

10.2 Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование. Вычисление интегралов с помощью непосредственного использования таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределенных интегралов называется непосредственным интегрированием.

Пример.

а) $\int(x^2-2\sin x+1)dx$.

Решение.

Воспользуемся свойствами неопределенного интеграла 4° и 5°, а затем таблицей интегралов, получим

$$\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C.$$

Проверка:

Найдем производную от полученной первообразной

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 - 2\sin x + 1 = x^2 - 2\sin x + 1.$$

Так как получили подынтегральную функции, то интеграл вычислен верно.

Ответ. $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C$.

б) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} - \sqrt{x}\right)dx$

Решение. Аналогично предыдущему примеру, воспользуемся свойствами неопределенного интеграла 4° и 5°, а затем таблицей интегралов, получим

$$\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} - \sqrt{x}\right)dx = 5\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx - \int\sqrt{x}dx = 5\int x^{-\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= 5\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 10\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Проверка:

$$\left(10\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C\right)' = 10\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} - \sqrt{x}.$$

Ответ. $\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} - \sqrt{x}\right)dx = 10\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$.

2. Метод подстановки (замены переменных). Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, то есть перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называют *методом подстановки* или *методом замены переменной*.

Рассмотрим интеграл вида $\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx$. Применим подстановку $t=\varphi(x)$. Найдем дифференциал от каждой части последнего равенства, получим $dt=\varphi'(x)\cdot dx$, тогда $dx=\dfrac{dt}{\varphi'(x)}$. С учетом замены, получим интеграл вида $\int f(t)dt$, который можно привести к табличному. Замену переменной удобно оформлять в виде

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx=\left|\begin{array}{c} t=\varphi(x)\\ dt=\varphi'(x)\cdot dx\\ dx=\dfrac{dt}{\varphi'(x)}\end{array}\right|=\int f(t)\cdot\varphi'(x)\cdot\frac{dt}{\varphi'(x)}=\int f(t)\cdot dt. \tag{10.2}$$

Пример.

а) $\int\sqrt{\sin x}\cos xdx=\left|\begin{array}{l} t=\sin x\\ dt=\cos xdx\end{array}\right|=\int\sqrt{t}dt=\int t^{1/2}dt=\dfrac{2}{3}t^{3/2}+C=\dfrac{2}{3}\sin^{3/2}x+C.$

Проверка:

$$\left(\frac{2}{3}\sin^{3/2}x+C\right)'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\sin x^{1/2}\cdot\cos x=\sqrt{\sin x}\cos x.$$

б) $\int x(x^2+1)^{3/2}dx=\left|\begin{array}{l} t=x^2+1\\ dt=2xdx\\ dx=\dfrac{dt}{2x}\end{array}\right|=\int t^{3/2}\dfrac{dt}{2}=\dfrac{1}{2}\int t^{3/2}dt=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{5}t^{5/2}+C=$

$$=\frac{t^{5/2}}{5}+C=\frac{(x^2+1)^{5/2}}{5}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{(x^2+1)^{5/2}}{5}+C\right)'=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2}\left(x^2+1\right)^{3/2}\cdot 2x=x\left(x^2+1\right)^{3/2}.$$

3. Интегрирование по частям.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - это дифференцируемые функции. Производная произведения этих функций равна $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Найдем дифференциал этого произведения

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du.$$

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du \text{ или}$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du. \tag{10.3}$$

Формула (10.3) называется _формулой интегрирования по частям_. Она позволяет от интеграла вида $\int u \cdot dv$ перейти к вычислению интеграла вида $\int v \cdot du$, причем u и dv в исходном интеграле нужно выбрать таким образом, чтобы полученный интеграл $\int v \cdot du$ был проще.

Замечание: Если в подынтегральной функции имеется множитель вида $\ln x$, $\ln(\varphi(x))$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, то их удобно принимать в качестве u, так как они легко дифференцируются.

Если подынтегральная функция имеет вид $P(x) \cdot e^x$, $P(x) \cdot \cos x$, $P(x) \cdot \sin x$, $P(x) \cdot tgx$, $P(x) \cdot ctgx$, то за u удобно принимать $P(x)$, где $P(x)$ - это некоторый многочлен, причем формулу интегрирования по частям необходимо применять столько раз, какова степень многочлена.

Пример.

а) $$\int x \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x; & dv = xdx \\ du = \frac{1}{x}dx; & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx =$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C\right)' = \left(\frac{x^2}{4}\right)' \cdot (2\ln x - 1) + \frac{x^2}{4} \cdot (2\ln x - 1)' = \frac{1}{2}x \cdot (2\ln x - 1) + \frac{x^2}{4} \cdot (2\frac{1}{x}) =$$

$$= x\ln x - \frac{1}{2}x + \frac{x}{2} = x \ln x.$$

б) $$\int x^2 \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{vmatrix} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx\right] =$$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

Проверка:

$$\left(-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C\right) = (-x^2)'\cdot\cos x - x^2(\cos x)' + (2x)'\sin x +$$
$$+2x(\sin x)' + 2(\cos x)' = -2x\cos x + x^2\sin x + 2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x = x^2\sin x.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному виду.

Примеры решения типовых задач

Задача 1. Найти интеграл следующих функций:

а) $\int\frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2}dx$; б) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\frac{\ln^3(2x-3)}{2x-3}dx$; г) $\int\frac{2x+\cos x}{x^2+\sin x}dx$;

д) $\int\sqrt[6]{3-4\cos 3x}\cdot\sin 3x dx$; е) $\int\frac{7x^4dx}{\sqrt[4]{2+x^5}}$; ж) $\int\frac{5x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$; з) $\int\frac{xdx}{1+x^4}$;

и) $\int\frac{\arcsin^5 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$; к) $\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; л) $\int x\cdot\sin 5x dx$; м) $\int x\cdot e^{\frac{x}{5}}dx$.

Решение.

а) $$\int\frac{x^6 - x^5 + \sqrt{x}}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^6}{x^2} - \frac{x^5}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)dx = \int\left(x^4 - x^3 + x^{-3/2}\right)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - 2x^{-1/2} + C.$$

б) Воспользуемся подстановкой $x = t^2$. Тогда $dx = 2tdt$, получим:

$$\int\frac{\sin t}{t}2tdt = 2\int\sin tdt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

в) Если под знаком интеграла содержится логарифмическая функция, то удобно принять ее за новую переменную, если под знаком интеграла присутствует производная этой функции (с точностью до постоянного множителя).

$$\int\frac{\ln^3(2x-3)}{2x-3}dx = \left|\begin{array}{c} t = \ln(2x-3) \\ dt = \frac{1}{2x-3}\cdot 2dx \\ \frac{1}{2x-3}dx = \frac{1}{2}dt \end{array}\right| = \int t^3\cdot\frac{1}{2}\cdot dt =$$

$$\frac{1}{2}\int t^3 \cdot dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{8}\ln^4(2x-3) + C.$$

г) $$\int \frac{2x+\cos x}{x^2+\sin x}dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + \sin x \\ dt = (2x+\cos x)\cdot dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x^2+\sin x\right| + C.$$

д) За новую переменную удобно взять подкоренное выражение, если под интегралом присутствует также его производная с точностью до постоянного множителя.

$$\int \sqrt[6]{3-4\cos 3x}\cdot \sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} t = 3 - 4\cos 3x \\ dt = -4(-\sin 3x)\cdot 3dx \\ \sin 3x \cdot dx = \frac{1}{12}dt \end{array} \right| = \int \sqrt[6]{t}\cdot\frac{1}{12}dt =$$

$$= \frac{1}{12}\int t^{\frac{1}{6}}\cdot dt = \frac{1}{12}\cdot\frac{t^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + C = = \frac{1}{14}\sqrt[6]{(3-4\cos 3x)^7} + C.$$

е) $$\int \frac{7x^4dx}{\sqrt[4]{2+x^5}} = \left| \begin{array}{l} t = 2 + x^5 \\ dt = 5x^4dx \\ x^4dx = \frac{1}{5}dt \end{array} \right| = \int \frac{7\cdot\frac{1}{5}dt}{\sqrt[4]{t}} = \frac{7}{5}\int t^{-\frac{1}{4}}\cdot dt = \frac{7}{5}\cdot\frac{t^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C =$$

$$= \frac{28}{15}\sqrt[4]{t^3} + C = \frac{28}{15}\sqrt[4]{\left(2+x^5\right)^3} + C.$$

ж) Новая переменная иногда выбирается из следующих соображений: в знаменателе стоит разность постоянной и квадрата некоторой функции. Эту функцию мы принимаем за новую переменную, если в числителе присутствует ее производная (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \frac{5x^3dx}{\sqrt{1-x^8}} = \int \frac{5x^3dx}{\sqrt{1-\left(x^4\right)^2}} = \left| \begin{array}{l} t = x^4 \\ dt = 4x^3dx \\ x^3dx = \frac{1}{4}dt \end{array} \right| = \int \frac{5\cdot\frac{1}{4}dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{5}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{5}{4}\arcsin t + C = \frac{5}{4}\arcsin x^4 + C.$$

з) Подстановка выбирается аналогично предыдущему примеру.

$$\int\frac{x\cdot dx}{1+x^4}=\int\frac{x\cdot dx}{1+\left(x^2\right)^2}=\left|\begin{aligned}t&=x^2\\dt&=2xdx\\x\cdot dx&=\frac{1}{2}dt\end{aligned}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}arctgt+C=\frac{1}{2}arctgx^2+C\cdot$$

и) За новую переменную иногда выбирают функцию, стоящую в основании степени, если подынтегральное выражение содержит производную этой функции с точностью до постоянного множителя.

$$\int\frac{\arcsin^5 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx=\left|\begin{aligned}t&=\arcsin 3x\\dt&=\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3dx\\\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}&=\frac{1}{3}dt\end{aligned}\right|=\int t^5\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int t^5dt=\frac{1}{3}\int t^5dt==\frac{1}{3}\cdot\frac{t^6}{6}+C=\frac{1}{18}\arcsin^6 3x+C.$$

к) Воспользуемся формулой интегрирования по частям, причем, поскольку подынтегральное выражение содержит функцию $\ln x$, то ее удобнее принять за (u), получим

$$\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\left|\begin{aligned}&u=\ln x\Rightarrow\quad du=\frac{1}{x}dx\\&dv=\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow\quad v=\int x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}=3\sqrt[3]{x}\end{aligned}\right|=\ln x\cdot 3\sqrt[3]{x}-\int 3\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=3\sqrt[3]{x}\ln x-3\int x^{-\frac{2}{3}}dx=3\sqrt[3]{x}\cdot\ln x-3\cdot 3\cdot\sqrt[3]{x}+C=3\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\left(\ln x-3\right)+C.$$

л) Воспользуемся формулой интегрирования по частям, причем, поскольку подынтегральная функция имеет вид $P(x)\cdot\sin x$, где $P(x)=x$, то за (u) удобнее принять $P(x)=x$, получим

$$\int x\cdot\sin 5xdx=\left|\begin{array}{c}\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du\\ \textit{принимаем}:\quad\textit{находим}:\\ u=x\,\big|\quad du=dx\\ dv=\sin 5x\cdot dx\;\;\big|\quad v=\int\sin 5x\cdot dx=-\frac{1}{5}\cos 5x\end{array}\right|=$$

$$= x\cdot\left(-\frac{1}{5}\cos 5x\right)-\int -\frac{1}{5}\cos 5x\cdot dx = -\frac{1}{5}x\cdot\cos x5x+\frac{1}{5}\int\cos 5x\cdot dx =$$

$$-\frac{x}{5}\cos 5x+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\int\cos 5x\cdot d\left(5x\right) = -\frac{x}{5}\cos 5x+\frac{1}{25}\sin 5x + C\,.$$

м) Как и в предыдущем примере, подынтегральная функция имеет вид $P(x)\cdot e^{x}$, где $P(x)=x$, тогда за (u) удобнее принять $P(x)=x$, получим

$$\int x\cdot e^{\frac{x}{5}}\cdot dx = \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du} \\ \text{принимаем}: & \text{находим}: \\ u = x & du = dx \\ dv = e^{\frac{x}{5}}dx & v = \int e^{\frac{x}{5}}dx = 5\int e^{\frac{x}{5}}d\left(\frac{x}{5}\right) = 5e^{\frac{x}{5}} \end{array} \right| = x\cdot 5\cdot e^{\frac{x}{5}} - \int 5\cdot e^{\frac{x}{5}}dx =$$

$$= 5xe^{\frac{x}{5}} - 5\cdot 5\int e^{\frac{x}{5}}d\left(\frac{x}{5}\right) = 5x\cdot e^{\frac{x}{5}} - 25\cdot e^{\frac{x}{5}} + C = 5e^{\frac{x}{5}}\left(x-5\right)+C\,.$$

§11. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

11.1 Понятие определенного интеграла и его свойства

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и *F(x)* – первообразная функции $f(x)$ на этом отрезке, то

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = F\left(b\right)-F\left(a\right), \qquad (11.1)$$

где $\int_a^b f\left(x\right)dx$ - определенный интеграл, a и b – пределы интегрирования.

Формула (11.1) называется *формулой Ньютона-Лейбница.* При вычислении интегралов ее часто записывают в виде

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = F(x)\Big|_a^b = F\left(b\right)-F\left(a\right).$$

Пример.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2}-\sin 0 = 1\,.$$

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определённого интеграла

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла:

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx.$$

3. Определённый интеграл от суммы двух функций равен сумме определённых интегралов *от этих функций:*

$$\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$$

4. При перестановке пределов интегрирования определённый интеграл меняет знак на противоположный:

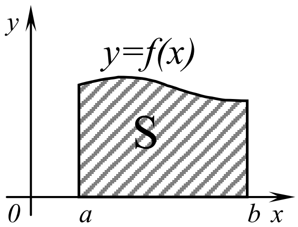
$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx.$$

5. Интеграл по отрезку равен сумме интегралов по его частям:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$ где $a < c < b$.

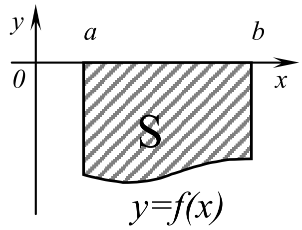
11.2 Геометрические приложения определённого интеграла. Вычисление площадей плоских фигур

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Если при этом $f(x) \geq 0$ на этом отрезке, то площадь S криволинейной трапеции,



ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, определяется с помощью интеграла:

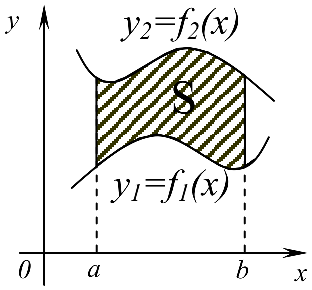
$$S = \int\limits_a^b f(x)dx.$$



Замечание 1. Если же $f(x) \le 0$ на $[a,b]$, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции находится по формуле:

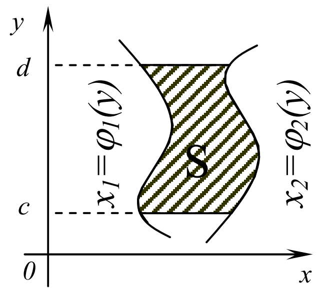
$$S = -\int_a^b f(x)dx, \text{или } S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

Наконец, если линия $y = f(x)$ пересекает ось Ox, то отрезок $[a,b]$ надо разбить на части, в пределах которых $f(x)$ не меняет знака, и к каждой части применить ту из формул, которая ей соответствует.



Замечание 2. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y_2 = f_2(x)$, снизу – графиком функции $y_1 = f_1(x)$, слева и справа прямыми $x = a,\ x = b$, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

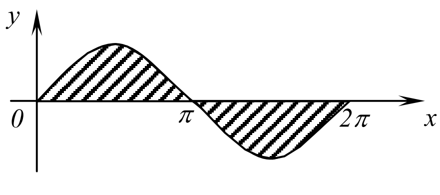


Замечание 3. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной справа графиком функции $x_2 = \varphi(y_2)$, слева – графиком функции $x_1 = \varphi(y_1)$, снизу и сверху прямыми $y = c$ и $y = d$, вычисляется по формуле:

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy.$$

Пример. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$ и осью абсцисс при условии $0 \le x \le 2\pi$.

Решение. Разобьём отрезок $[0,2\pi]$ на два отрезка: $[0,\pi]$ и $[\pi,2\pi]$. На первом из них $\sin x \ge 0$, на втором $\sin x \le 0$. Тогда, используя формулы, находим искомую площадь:



$$S=\int_0^{\pi}\sin x dx+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx\right|=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\left|-\cos x\right|\Big|_{\pi}^{2\pi}==-(-1)+1+|-1-1|=2+|-2|=4.$$

11.3 Несобственные интегралы

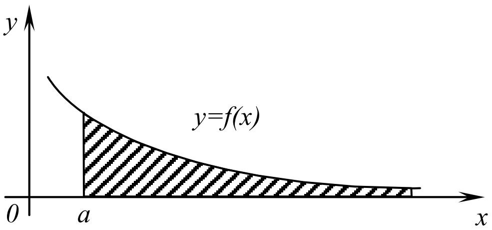
При введении понятия определённого интеграла мы предполагали, что подынтегральная функция является ограниченной, а пределы интегрирования – конечными. Такой интеграл называется *собственным* (слово «собственный» обычно опускается). Если хотя бы одно из этих двух условий не выполнено, то интеграл называется *несобственным.*

Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a\le x<+\infty$, то есть при $x\ge a.$ Тогда по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\cdot$$

Если этот предел существует, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится,* а если предел не существует, то интеграл называют *расходящимся*.



С геометрической точки зрения, для неотрицательной при $x\ge a$ функции $f(x)$, несобственный интеграл, по аналогии с собственным интегралом, представляет собой площадь фигуры, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, слева отрезком прямой $x=a$ и снизу осью Ox.

Пример. Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$; б) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$; в) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$.

Решение.

а) $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(1-e^{-b}\right)=1.$

Так как предел существует, то данный несобственный интеграл сходится.

б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\ln b\right) = +\infty$.

Данный интеграл расходится.

в) Установим, при каких значениях α интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится.

Случай $\alpha = 1$ был рассмотрен выше, то есть $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ - расходится. Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{при } <1 \\ \dfrac{1}{\alpha\text{-}1}, & \text{при } >1 \end{cases}.$$

Значит, данный интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Аналогично определяются следующие несобственные интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f\left(x\right) dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} f\left(x\right) dx.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x) dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x) dx, \;\; c \in (-\infty, \infty).$$

Примеры решения типовых задач

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$ и $y = x + 4$.

Решение. 1. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной двумя линиями найдем по формуле

$$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Найдем пределы интегрирования. В качестве a и b возьмем абсциссы точек пересечения данных линий. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}.$$

Получим $x^2+4x=x+4$; $x^2+3x-4=0$; $x_1=-4$, $x_2=1$. Таким образом $a=-4,\quad b=1$.

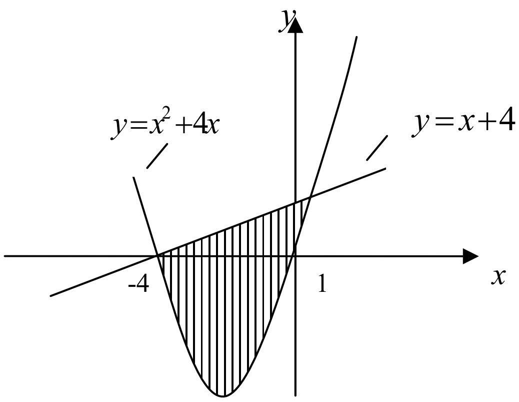
2. Определим, какой график расположен выше. Для этого построим заданные линии. Графиком функции $y=x^2+4x$ является парабола. Найдем координаты вершины параболы:

$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2}=-2,\ y_в=(-2)^2+4\cdot(-2)=4-8=-4.$$

Найдем точку пересечения параболы с осями координат, для этого рассмотрим два случая.

Если $y=0$, то $x^2+4x=0$. Решая квадратное уравнение получим $x_1=0$ и $x_2=-4$. Следовательно $(-4{,}0)$ и $(0{,}0)$ - точки пересечения с ось Ox.

Если $x=0$, то $y=0^2+4\cdot0=0$. Следовательно, $(0{,}0)$ - точка пересечения с осью Oy.



Графиком функции $y=x+4$ является прямая линия, для построения которой достаточно взять две точки.

Из рисунка видно, что график функции $y=x+4$ находится выше графика функции $y=x^2+4x$, следовательно, выполняется условие $(x+4)\geq(x^2+4x)$.

Применяя формулу $S=\int\limits_a^b(f_2(x)-f_1(x))dx$, где $f_1(x)=x+4$ и $f_2(x)=x^2+4x$, найдем площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$$S=\int\limits_{-4}^{0}\left(x+4-x^2-4x\right)dx=\int\limits_{-4}^{0}\left(-x^2-3x+4\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_{-4}^{0}=20\frac{5}{6}\ \text{(кв.ед.)}$$

Ответ. $S=20\frac{5}{6}$ (кв. ед.)

§12. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

12.1 Основные понятия и определения

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется всякое уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных, эти переменные и производные различных порядков данной функции, то есть в общем виде его можно записать $F(x, y, y', y''.., y^{(n)}) = 0$.

Пример. Выражение $\cos(xy'') + \sin(y') = 0$, является дифференциальным уравнением, где $y = y(x)$.

Определение. *Порядком дифференциального уравнения* называется максимальный порядок производной, входящей в уравнение.

В приведенном примере порядок дифференциального уравнения равен 2.

Определение. Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если от нескольких – то *уравнением в частных производных*.

Мы будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Определение. *Решением дифференциального уравнения* называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение превращает его в верное равенство.

Пример. Функция $y = \sin x$ является решением уравнения $y'' + y = 0$, так как при подстановке этой функции в уравнение получим верно равенство. Докажем это утверждение. Найдем производную второго порядка от функции $y = \sin x$, получим

$$y' = (\sin x)' = \cos x, \text{ следовательно } y'' = (\cos x)' = -\sin x.$$

Подставляя полученную производную и исходную функцию в дифференциальное уравнение, получим

$$-\sin x + \sin x = 0 \text{ или } 0 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема Коши. Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области D вместе со своей частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$, то для всякой точки $M(x_0, y_0)$, принадлежащей области D, в некоторой её окрестности, существует единственное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию при $x = x_0$, $y = y_0$. Эти условия называются *начальными условиями*.

Задачей Коши называют задачу о нахождении решения дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее начальным условиям $x = x_0$, $y = y_0$.

Вышеприведённую теорему называют *теоремой о существовании и единственности решения задачи Коши*.

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения первого порядка* называют функцию $y = \varphi(x, C)$ такую, что:

1. При любом C она является решением дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$.

2. Каковы бы ни были начальные условия, всегда можно найти такое $C = C_0$, что $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет начальным условиям $x = x_0$, $y = y_0$.

Определение. *Частным решением* называется решение, полученное из общего при конкретном значении C.

Общее решение, записанное в неявном виде, называется *общим интегралом.*

Решить дифференциальное уравнение – значит найти его общее решение или общий интеграл.

Задача нахождения решения некоторого дифференциального уравнения называется задачей интегрирования данного дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение n-го порядка называется разрешенным относительно старшей производной, если оно имеет вид $y^{(n)} = F(x, y, y', y''.., y^{(n-1)})$, где F – некоторая функция от n+1 переменной.

12.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если оно может быть представлено в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \text{ или в виде } M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0. \quad 12.1$$

Для решения такого уравнения его необходимо преобразовать к виду, в котором дифференциал и функция переменной x окажутся в одной части неравенства, а переменной y – в другой. Для этого необходимо определить перед dx и dy лишние сомножители, и разделись каждое слагаемое равенства на произведение лишних сомножителей, то есть

$$\frac{M(x)N(y)}{N(y)P(x)}dx + \frac{P(x)Q(y)}{N(y)P(x)}dy = 0.$$

Полученное уравнение будем называть уравнением с разделенными переменными, то есть уравнение вида

$$\frac{Q(y)}{N(y)}dy = -\frac{M(x)}{P(x)}dx.$$

Затем проинтегрируем обе части полученного равенства, то есть

$$\int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = -\int \frac{M(x)}{P(x)}dx.$$

Вычислим интегралы в левой и правой части равенства и получим общее решение или общий интеграл.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $\left(x^2 - 1\right)y' + 2xy^2 = 0$ и найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Представим производную y' в виде $\frac{dy}{dx}$ (из равенства $dy = y' \cdot dx$), получим $\left(x^2 - 1\right)\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$. Умножим каждое слагаемое на dx, получим

$$\left(x^2 - 1\right)dy + 2xy^2 dy = 0.$$

Последнее уравнение имеет вид (12.1), следовательно, оно является уравнением с разделяющимися переменными. Для его решения, разделим каждое слагаемое на выражение $\left(x^2 - 1\right) \cdot y^2$, так как $\left(x^2 - 1\right)$ - лишний сомножитель при dy, а y^2 - лишний сомножитель при dx. Получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{2x}{x^2 - 1}dx.$$

Интегрируем обе части последнего равенства

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{2x}{x^2 - 1}dx.$$

В результате получим: $\frac{1}{y} = \ln\left|x^2 - 1\right| + C$.

Таким образом, получаем общий интеграл: $y\left(\ln\left|x^2 - 1\right| + C\right) = 1$.

Находим частное решение уравнения. Подставляем начальное условие $y(0) = 1$, получим

$$1 \cdot \left(\ln\left|0^2 - 1\right| + C\right) = 1 \Rightarrow \ln 1 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Отсюда получаем частный интеграл $y\left(\ln\left|x^2 - 1\right| + 1\right) = 1$.

Ответ. $y\left(\ln\left|x^2 - 1\right| + 1\right) = 1$ - частный интеграл.

12.3 Линейные уравнения первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется <u>*линейным*</u>, если оно имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad (12.2)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ - некоторые функции независимой переменной x.

Если функция $q(x)$ тождественно равна 0, то уравнение называется *однородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка,* в противном случае – *неоднородным*.

Пример.

1) $y' + (x+1)y = 0 -$ однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

2) $y' + 4xy = x^2 -$ неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка применяют подстановку

$$y = u \cdot v \text{ и } y' = u'v + uv',$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$. Причем, функцию $u = u(x)$ будем считать новой неизвестной функцией, а функцию $v = v(x)$ выбираем произвольно. Получим,

$$u'v + uv' + p(x) \cdot uv = q(x).$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие переменную функцию u, и вынесем ее за скобки, получим

$$u'v + u \cdot \left(v' + p(x)v\right) = q(x). \qquad (12.3)$$

Так как функция $v = v(x)$ - произвольная, то предположим, что

$$v' + p(x)v = 0.$$

Перепишем v' в виде $\frac{dv}{dx}$, тогда последнее уравнение примет вид

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \text{ или } dv = -p(x)vdx \text{ -}$$

уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем обе части полученного уравнения.

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx; \ \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx;$$

$$\ln v = -\int p(x)dx;$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}. \qquad (12.4)$$

Так как мы предположили, что $v' + p(x)v = 0$, то уравнение (12.3) примет вид

$$u'v = q(x)\,. \tag{12.5}$$

Так как $v = e^{-\int p(x)dx}$, то уравнение (12.5) примет вид

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)\,.$$

Так как $u' = \dfrac{du}{dx}$, получим д.у. с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}}\,;$$

$$u = \int \frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}} + C = \int q(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + C\,.$$

Таким образом, решение линейного уравнения первого порядка сводится к решению двух дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. В результате, получим общее решение уравнения в виде

$$y = uv = \left(\int q(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + C \right) \cdot \left(e^{-\int p(x)dx} \right).$$

Пример. Решить уравнение $y' - \dfrac{2x}{x^2+1} y = x\sqrt{x^2+1}$.

Решение. Данное уравнение является линейным, так как содержит искомую функцию и ее производную в первой степени и не содержит их произведений. Применяем подстановку $y = uv$ и $y' = (uv)' = u'v + uv'$.

Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим

$$u'v + uv' - uv\frac{2x}{x^2+1} = x\sqrt{x^2+1}\,.$$

Группируем второе и третье слагаемые и выносим общий множитель (*u)* за скобку:

$$u'v + u(v' - \frac{2x}{x^2+1}v) = x\sqrt{x^2+1}\,.$$

Так как искомая функция *y* представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию *v* так, чтобы выражение, стоящее в скобках левой части последнего равенства, обращалось в нуль, то есть, чтобы имело место равенство:

$$1)\ v' - \frac{2x}{x^2+1}v = 0; \qquad 2)\ vu' = x\sqrt{x^2+1}.$$

Решаем первое уравнение. Перепишем его в виде

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}v = 0.$$

После разделения переменных получим:

$$\frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{x^2+1}, \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = \int\frac{2xdx}{x^2+1}, \Rightarrow \ln|v| = \ln(x^2+1),$$

$$\text{или } v = x^2+1.$$

Решаем второе уравнение $vu' = x\sqrt{x^2+1}$. Подставим найденное значение v, получим:

$$(x^2+1)\frac{du}{dx} = x\sqrt{x^2+1}.$$

Отсюда, разделяя переменные и интегрируя, находим функцию u:

$$du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$u = \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \left|\begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2} \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Теперь можно записать общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = uv \text{ или } y = (\sqrt{x^2+1} + C)(x^2+1).$$

Ответ. $y = (\sqrt{x^2+1} + C)(x^2+1)$ - общее решение.

12.4 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. *<u>Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами</u>* называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{12.6}$$

где p и q - постоянные коэффициенты.

Чтобы найти общее решение уравнения (12.6) нужно знать два его частных решения y_1 и y_2.

Будем искать решение уравнения (12.6) в форме $y = e^{kx}$, где k - это некоторое действительное число.

Так как $\left(e^{kx}\right)'' + p\left(e^{kx}\right)' + q\left(e^{kx}\right) = e^{kx} \cdot \left(k^2 + pk + q\right)$, то функция $y = e^{kx}$ является решением уравнения (12.6), если k есть корень уравнения

$$k^2 + pk + q = 0\,. \tag{12.7}$$

Уравнение (12.7) называют *<u>характеристическим уравнением</u>* исходного уравнения (12.6). Для его составления производные y'', y', и функцию y заменим на k в степени, соответствующей порядку производной.

Решение уравнения (12.6) зависит от того, имеет ли соответствующее характеристическое уравнение (12.7) один корень, два корня или не имеет действительных корней.

Рассмотрим три случая:

1) Пусть характеристическое уравнение (12.7) имеет два действительных корня k_1 и k_2, причем $k_1 \neq k_2$. Тогда общее решение уравнения (12.6) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k\ x}\,, \tag{12.8}$$

где C_1 и C_2 - некоторые числа.

2) Если характеристическое уравнение (12.7) имеет один корень k (два совпавших корня), то общее решение уравнения (12.6) имеет вид

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right), \tag{12.9}$$

где C_1 и C_2 - некоторые числа.

3) Если характеристическое уравнение не имеет действительных корней (имеют мнимые корни), то общее решение уравнения (12.6) имеет вид

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right), \qquad (12.10)$$

где $y_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ - комплексные корни характеристического уравнения.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 7y' + 10y = 0$;   б) $y'' + 6y' + 9y = 0$;   в) $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение.

а) $y'' - 7y' + 10y = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 7k + 10 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4\cdot 1\cdot 10 = 9 > 0;$$

$$k_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{7+3}{2} = 5, \quad k_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{7-3}{2} = 2$$

Тогда, общее решение дифференциального уравнения будет иметь вид (12.8):

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$$

Ответ. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$ - общее решение уравнения.

б) $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 6k + 9 = 0;$$

$$D = 36 - 4\cdot 9 = 0;$$

$$k_1 = k_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3.$$

Тогда, общее решение дифференциального уравнения будет иметь вид (12.9):

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x).$$

Ответ. $y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$ - общее решение.

в) $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 13 = 0;$$

$$D = 16 - 4 \cdot 13 = -36 < 0$$ - действительных корней нет.

Воспользуемся комплексным числом i, и представим дискриминант равный $D = -36$ как $D = 36i^2$, где $i^2 = -1$ - это мнимая единица.

Найдем α и β:

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36i^2}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i, \quad \alpha = 2, \beta = 3.$$

Тогда, общее решение дифференциального уравнения будет иметь вид (12.10):

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Ответ. $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ - общее решение.

12.5 Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{12.11}$$

где p и q - постоянные действительные числа, $f(x)$ - известная непрерывная в интервале (a,b) функция.

Теорема. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами ($y_{\text{о.н.}}$) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения ($y_{\text{о.о.}}$) $y'' + py' + qy = 0$ и частного решения исходного неоднородного уравнения ($y_{ч.н.}$), то есть

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}.$$

Вид частного решения уравнения зависит от вида правой части этого уравнения. Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Пусть правая часть уравнения (12.11) имеет вид

$$f(x)=P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,$$

где $P_n(x)$ - многочлен степени n. Тогда частное решение $y_{ч.н.}$ можно записать в виде

$$y_{ч.н.}=Q_n(x)\cdot x^m,$$

где $Q_n(x)$ - многочлен той же степени n, а m - число корней характеристического уравнения, равных нулю.

Пример. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+2y'-3y=x^2-4x+2.$$

Решение.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y_{о.о.}$ Для этого решим уравнение

$$y''+2y'-3y=0.$$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни, получим

$$k^2+2k-3=0;$$

$$k_1=1 \text{ и } k_2=-3.$$

Подставляя полученные корни в формулу (12.8), получим

$$y_{о.о.}=C_1e^x+C_2e^{-3x}.$$

Так как правая часть дифференциального уравнения имеет вид квадратного трехчлена и число 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y_{ч.н.}=ax^2+bx+c.$$

Тогда $$y'_{ч.н.}=2ax+b;$$

$$y''_{ч.н.}=2a.$$

Подставляя эти выражения в данное уравнение вместо y, y' и y'', получим

$$2a+2(2ax+b)-3(ax^2+bx+c)=x^2-4x+2;$$

$$-3ax^2+(4a-3b)x+(2a+2b-3c)=x^2-4x+2\,.$$

Так как в последнем выражении левая часть равна правой части, то соответствующие коэффициенты при x^2, x и свободные коэффициенты должны совпадать, то есть должно выполняться условие

$$\begin{cases} -3a=1 \\ 4a-3b=-4 \\ 2a+2b-3c=2. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, найдем коэффициенты a, b и c

$$\begin{cases} a=-\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{8}{9} \\ c=-\dfrac{8}{27} \end{cases}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в частное решение $y_{ч.н.}=ax^2+bx+c$, получим

$$y_{ч.н.}=-\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{9}x-\frac{8}{27}\,.$$

Таким образом, общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка будет иметь вид

$$y_{о.н.}=C_1e^x+C_2e^{-3x}-\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{9}x-\frac{8}{27}\,.$$

Ответ. $y_{о.н.}=C_1e^x+C_2e^{-3x}-\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{9}x-\frac{8}{27}$ - общее решение неоднородного уравнения.

б) Пусть правая часть уравнения (12.11) имеет вид

$$f(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha x},$$

где $P_n(x)$ - многочлен степени n. Тогда частное решение будем искать в виде:

$$y_{ч.н.}=Q_n(x)\cdot x^r\cdot e^{\alpha x}\,,$$

где $Q_n(x)$ - многочлен той же степени n что и $P_n(x)$, а r - число корней характеристического уравнения, равных α.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y''-3y'+2y=2e^{3x}\,.$$

Решение.

Для нахождения общего решения однородного уравнения составим характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$k^2 - 3k + 2 = 0\,;$$

$$k_1 = 1 \text{ и } k_2 = 2\,;$$

$$y_{о.о.} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x}\,.$$

Так как $\alpha = 3$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в виде

$$y_{ч.н.} = ae^{3x}\,;$$

$$y'_{ч.н.} = 3ae^{3x}\,;$$

$$y''_{ч.н.} = 9ae^{3x}\,.$$

Подставляя найденные производные в исходное уравнение, получим

$$9ae^{3x} - 9ae^{3x} + 2ae^{3x} = 2e^{3x}\,;$$

$$2ae^{3x} = 2e^{3x}\,;\ 2a = 2\,;\ a = 1\,.$$

Тогда $y_{ч.н.} = 1 \cdot e^{3x} = e^{3x}$.

Таким образом, общее решение неоднородного д.у. 2-го порядка будет иметь вид

$$y_{о.н.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{3x}\,.$$

Ответ. $y_{о.н.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{3x}$ - общее решение неоднородного уравнения.

Пример. Решить уравнение $y'' - y = 2e^x - x^2$.

Решение. Для нахождения общего решения однородного уравнения составим характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$k^2 - 1 = 0; \qquad k_1 = 1, \qquad k_2 = -1.$$

Общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y_{о.о.} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}\,.$$

Частное решите неоднородного уравнения будем искать в виде суммы двух частных решений, так как правая часть есть сумма функций $f_1(x) = 2e^x, f_2(x) = x^2$. Тогда

$$y_{ч.н.} = Axe^x + Bx^2 + Cx + D;$$
$$y'_{ч.н.} = A\left(e^x + xe^x\right) + 2Bx + C;$$
$$y''_{ч.н.} = 2Ae^x + Axe^x + 2B.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим:

$$2Ae^x + Axe^x + 2B - Axe^x - Bx^2 - Cx - D = 2e^x - x^2.$$

Сгруппируем подобные слагаемые, вынесем общий множитель за скобки и приравнивая коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях уравнения, получим

$$2Ae^x - Bx^2 - Cx + (2B - D) = 2e^x - x^2.$$

$$\begin{cases} 2A = 2 \\ -B = -1 \\ -C = 0 \\ 2B - D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 0 \\ D = 2. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид $y_{ч.н.} = xe^x + x^2 + 2$. Тогда общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$y_{о.н.} = c_1e^x + c_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2.$$

Ответ. $y_{о.н.} = c_1e^x + c_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2$ - общее решение неоднородного уравнения.

Примеры решения типовых задач

Задача 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - ytgx = \frac{2x}{\cos x}$$

и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$.

Решение.

Данное уравнение является линейным, так как содержит искомую функцию и ее производную в первой степени и не содержит их произведений. Применяем подстановку $y = uv$.

Если $y = uv$, то $y' = (uv)' = u'v + uv'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим

$$u'v + uv' - uvtgx = \frac{2x}{\cos x}.$$

Группируем второе и третье слагаемые и выносим u за скобку

$$u'v + u(v' - v\,tgx) = \frac{2x}{\cos x}.$$

Так как искомая функция y представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию v так, чтобы выражение, стоящее в скобках левой части последнего равенства, обращалось в нуль, то есть, чтобы имело место равенство

$$v' - v\,tgx = 0.$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными относительно v и x. Решим его

$$\frac{dv}{dx} = v\,tgx; \quad \frac{dv}{v} = tgx\,dx; \quad \int \frac{dv}{v} = \int tgx\,dx; \quad \ln v = -\ln\cos x;$$

$$v = \frac{1}{\cos x}.$$

Так как в уравнении $u'v + u(v' - v\,tgx) = \frac{2x}{\cos x}$ выражение в скобках равно нулю, то будет справедливо равенство $u'v = \frac{2x}{\cos x}$. Подставляя в него $v = \frac{1}{\cos x}$, получим

$$\frac{1}{\cos x}u' = \frac{2x}{\cos x}; \quad u' = 2x; \quad du = 2xdx.$$

$$\int du = \int 2xdx., \; u = x^2 + C.$$

Тогда, общее решение исходного уравнения

$$y = uv = \frac{1}{\cos x}(x^2 + C).$$

Определим значение произвольной постоянной C при указанных начальных условиях $y(0) = 2$, для этого подставим в общее решение вместо переменной x число 0, а вместо переменной y число 2. Получим

$$2 = \frac{1}{\cos 0}(0 + C); \quad C = 2.$$

Таким образом, $y = \frac{1}{\cos x}(x^2 + 2)$ есть частное решение, удовлетворяющее данному начальному условию.

Ответ. $y = \frac{1}{\cos x}(x^2 + 2)$ - частное решение линейного уравнения.

Задача 2. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \; y(0) = 3, \; y'(0) = 4.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 3k + 2 = 0;$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0,$$

$$k_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ и } k_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Тогда, общее решение однородного дифференциального уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Найдем y':

$$y' = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x}.$$

Подставим начальные значения $y(0) = 3$ и $y'(0) = 4$ в выражения y и y', получим систему двух уравнений с двумя неизвестными C_1 и C_2.

$$\begin{cases} C_1 e^{-2\cdot 0} + C_2 e^{-1\cdot 0} = 3 \\ -2 \cdot C_1 e^{-2\cdot 0} - C_2 e^{-1\cdot 0} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -2C_1 - C_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 3 - C_1 \\ -2C_1 - 3 + C_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 3 - C_1 \\ -3 - C_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 10 \\ C_1 = -7 \end{cases}.$$

Подставим найденные постоянные C_1 и C_2 в общее решение, и получим частное решение, которое имеет вид

$$y = -7e^{-2x} + 10 \cdot e^{-x}.$$

Ответ. $y = -7e^{-2x} + 10 \cdot e^{-x}$ – частное решение дифференциального уравнения.

Задача 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 4e^{3x}.$$

Решение.

Для нахождения общего решения однородного уравнения составим характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$k^2 + 3k + 2 = 0;$$

$$k_1 = -2 \text{ и } k_2 = -1;$$

$$y_{о.о.} = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-x}.$$

Так как $\alpha = 3$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в виде

$$y_{ч.н.} = ae^{3x};$$

$$y' = 3ae^{3x};$$

$$y'' = 9ae^{3x}.$$

Подставляя найденные производные в исходное уравнение, получим:

$$9ae^{3x} - 9ae^{3x} + 2ae^{3x} = 4e^{3x};$$

$$a = 2;$$

$$y_{ч.н.} = 2e^{3x}.$$

Таким образом, общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка будет иметь вид

$$y_{о.н.} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + 2e^{3x}.$$

Контрольный тест после изучения раздела VII « Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения»

1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на множестве $X = \{x\}$, если

а) производная этой функции и дифференциал равны соответственно $f(x)$ и $f(x) \cdot dx$;

б) $F(x) = f(x)$;

в) $F(x) = f'(x)$.

2. Неопределенный интеграл функции это …

а) совокупность всех первообразных функций;

б) сумма всех значений функции;

в) произведение функции на ее производную;

г) квадрат дифференциала.

3. Интеграл, один из пределов интегрирования которого бесконечен, называется…

а) неопределенный;

б) собственный;

в) несобственный;

г) замечательный.

4. Геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что определенный интеграл равен:

а) мгновенной скорости движения тела;

б) длине дуги в прямоугольных координатах;

в) объему тела вращения;

г) площади соответствующей криволинейной трапеции.

5. Среди приведенных ниже высказываний найдите ошибочные:

а) интеграл произведения нескольких функций есть произведение интегралов от этих функций;

б) неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная;

в) определенный интеграл можно вычислить с помощью формулы Ньютона-Лейбница;

г) величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования.

6. Интеграл $\int(\sqrt{x^2+2x+2})dx$ вычисляется с помощью замены

а) $x^2+2x+2=t^2$; б) $x+1=tgt$; в) $x+1=\cos t$; г) $x+1=t^2$.

7. Интеграл вида $\int f(x)dx$ вычисляется по формуле интегрирования по частям, если *f(x)* равно:

а) $f(x)=x\ln x$; б) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$; г) $f(x)=\dfrac{x\ln x}{(4-\ln x)^2}$.

8. Найти первообразную функции $f(x)=3x^2-1$, график которой проходит через точку *M(0;2)*:

а) $F(x)=x^3-x+2$; б) $f`(x)=x^3-x+2$;

в) $F(x)=x^3-x+C$; г) $f`(x)=x^3-x+C$.

9. Определить тип дифференциального уравнения $y' - \frac{3}{4}y = x$.

а) линейное; б) Бернулли; в) однородное; г) с разделяющимися переменными.

10. Укажите общее решение дифференциального уравнения

$$(2x+1)dy + y^2 dx = 0.$$

а) $y = 2\ln|2x+1| + C$; б) $y = \ln|2x+C|$;

в) $y = 3\ln x$; г) $y = \dfrac{2}{\ln|2x+1| + C}$.

11. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' - 4y' + 3y = 0$. Его общее решение имеет вид

а) $c_1e^{x} + c_2e^{3x}$; б) $c_1e^{x} + c_2e^{-3x}$;

в) $c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}$; г) $c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}$.

12. Дифференциальным уравнением называется любое уравнение, содержащее ……….., искомую функцию и ее производные любых порядков.

а) независимую переменную; б) зависимую переменную;

в) первообразную функции; г) неизвестный параметр.

13. Линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

а) $y'' + py' + qy = f(x)$; б) $y'' + py + q = f(x)$;

в) $y'' + py + qy' = f(y)$; г) $y'' + py' + qy = f'(y)$.

14. Если характеристическое уравнение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет один корень k (два совпавших корня), то общее решение данного уравнения имеет вид:

а) $y = e^{kx}\left(C_1 + C_2x\right)$; б) $y = e^{kx}\left(C_1 + C_2y\right)$;

в) $y = e^{x}\left(kC_1 + C_2x\right)$; г) $y = e^{kx}\left(yC_1 + C_2x\right)$.

15. Укажите тип дифференциального уравнения: $(2x+1)y' + y = x$.

а) с разделяющимися переменными; б) однородное; в) линейное.

16. Решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' - 3y = 0$ имеет вид а) $c_1e^{x}+c_2e^{-3x}$; б) $c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$;

в) $c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}$; г) $c_1e^{-x}+c_1e^{-3x}$.

РАЗДЕЛ VIII. РЯДЫ

§13. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

13.1 Основные понятия

Определение. <u>*Числовым рядом*</u> называется бесконечная последовательность чисел $a_1,\ \ a_2,\dots\ \ ,a_n,\dots,$ соединенных знаком сложения, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \qquad (13.1)$$

где числа $a_1,\ \ a_2,\dots\ \ ,a_n,\dots$ называются членами ряда, a_n - общим членом ряда.

Ряд (13.1) считается заданным, если известен его общий член a_n.

Пример.

1) $1-1+1-1+\dots,$

2) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots,$

3) $a+aq+aq^2+\dots+aq^{n-1}+\dots$

Ряд можно задать с помощью общего члена, например, $a_n=\frac{1}{2n-1}$, определяет следующий ряд: $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n-1}+\dots$

Определение. <u>*Частичной суммой*</u> S_n числового ряда называется сумма его первых *n* членов,

$$S_1=a_1,\quad S_2=a_1+a_2,\quad S_3=a_1+a_2+a_3,\quad S_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n.$$

Определение. <u>*Суммой числового ряда*</u> S называется предел последовательности его частичных сумм, если этот предел существует

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n,$$

причем ряд называется сходящимся, в противном случае, если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$, то ряд называется расходящимся.

Пример. Исследовать на сходимость ряды

а) $1-1+1-1+1-...$

б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...,$

Решение.

а) Рассмотрим ряд $1-1+1-1+1-...$. Найдем его частичные суммы $S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=1,\ S_4=0,...$ Последовательность его частичных сумм 1,0,1,0.1,0... не имеет предела, следовательно, ряд расходится.

б) Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...,$$

найдем его частичные суммы:

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2};$$
$$S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=1-\frac{1}{3},...$$
$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1,$ то рассматриваемый ряд сходится, и его сумма равна 1.

Свойства сходящихся числовых рядов

1°. Если ряд $a_1+a_2+...+a_n+...$ сходится и имеет сумму S, то и ряд, полученный путем умножения данного ряда на число λ, то есть ряд $\lambda\cdot a_1+\lambda\cdot a_2+...+\lambda\cdot a_n+...$, также сходится и его сумма равна $\lambda\cdot S$.

2°. Если ряды $a_1+a_2+...+a_n+...$ и $b_1+b_2+b_3+...+b_n+...$ сходятся и имеют соответственно суммы S_1 и S_2, то и ряд $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+...+(a_n+b_n)+...$ также сходится, и его сумма равна S_1+S_2.

3°. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания (или приписывания) конечного числа членов. То есть, если к ряду (1) приписать еще несколько членов, то получим ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{n+m} + \ldots .$$

При этом сумма $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{n+m} + \ldots$ называется *остатком ряда* (1). Если сумму остатка ряда обозначить через r_n, то получим сумму ряда (1) в виде

$$S = S_n + r_n .$$

4°. Для того чтобы ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$ остаток ряда стремился к нулю, то есть чтобы

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0 .$$

13.2 Ряды с положительными членами. Признаки сходимости числовых рядов

Определение. *Положительным рядом* называется ряд, члены которого не отрицательны.

Рассмотрим признаки сходимости числовых рядов с положительными членами.

Теорема 1 (необходимый признак сходимости).

Если ряд сходится, то предел его общего члена a_n при $n \to \infty$ равен нулю, то есть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Следствие. Если предел общего члена ряда (1) при $n \to \infty$ не равен нулю, то ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n+1} .$$

Решение.

Найдем предел общего члена ряда при $n \to \infty$. Получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Так как предел общего члена ряда не равен нулю, то данный ряд расходится.

Замечание. Рассмотренная теорема выражает лишь необходимый, но не достаточный признак сходимости ряда, то есть если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то из этого еще не следует, что ряд сходится, можно лишь утверждать, что ряд может сходиться, но может и расходиться.

Примером такого ряда служит ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$, который называется гармоническим. Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, хотя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Теорема 2 (признак сравнения). Пусть даны два положительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, и для всех n выполняется неравенство $a_n \leq b_n$. Тогда говорят, что из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами, а из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с большими членами. То есть, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится, и если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже расходится.

«Эталонные» ряды, часто используемые для сравнения

1) Геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\cdot q^{n-1}$.

Если ряд представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, то есть знаменатель прогрессии $|q|<1$, то ряд сходится и сумма его равна $S=\frac{b_1}{1-q}$, если $|q|\geq 1$, то ряд расходится.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...$ Ряд представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}$. Так как $\frac{1}{2}<1$, то данный ряд сходится.

2) Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - расходится.

3) Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+...+\frac{1}{n^{\alpha}}+...$ - сходится, если $\alpha>1$, и расходится, если $\alpha\le 1$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$

Решение.

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, про который известно, что он расходится.

Так как $1=1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{3},...\ ,\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$, то по теореме 2, из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с большими членами, делаем вывод, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$ расходится.

Теорема 3 (предельный признак сравнения). Если $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ - ряды с положительными членами и существует конечный предел отношения их общих членов, то есть $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0$, то ряды будут вести себя одинаково, то есть либо сходиться, либо расходиться.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{n^3}$.

Решение.

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

$$a_n = \frac{2n^2+5}{n^3};\ b_n = \frac{1}{n}$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2+5}{n^3}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+5n}{n^3} = 2 \neq 0$, следовательно, ряды ведут себя одинаково, то есть данный по условию ряд расходится.

Теорема 4 (признак Даламбера). Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами существует предел отношения последующего члена ряда a_{n+1} к предыдущему a_n, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = D.$$

Тогда, если $D<1$, то ряд сходится, если $D>1$, то ряд расходится, если $D=1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым, необходимо использование иных признаков сходимости.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$.

Решение. Общий член ряда имеет вид $a_n = \frac{n}{2^n}$, следовательно следующий за ним $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Таким образом, ряд сходится.

Теорема 5 (радикальный признак Коши). Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при $\rho<1$ ряд сходится, а при $\rho>1$ ряд расходится, при $\rho=1$ ответ остается открытым.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

Решение. Общий член ряда имеет вид $u_n = \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Теорема 6 (интегральный признак Коши). Если $f(x)$ при $x \geq 1$ является непрерывной, положительной и монотонно убывающей функцией, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = f(n)$ сходится или расходится, в зависимости от того, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Пример. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}.$$

Решение.

Члены ряда составляют монотонно убывающую последовательность $1>\frac{1}{2^p}>\frac{1}{3^p}>....>\frac{1}{n^p}>....$ Следовательно, функцией $f(x)$ будет $\frac{1}{x^p}$, то есть $f(x)=\frac{1}{x^p}$.

Тогда $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n}=\lim_{N\to\infty}\int_1^N\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}0, p>1;\\ \infty, p<1.\end{cases}$.

Если p=1, то имеем $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, который расходится.

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\leq 1$.

13.3 Сходимость знакочередующихся рядов

Определение. *Знакочередующимся рядом* называется ряд, в котором члены попеременно принимают то положительные, то отрицательные значения, то есть ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^n \cdot a_n + ... \ (a_n > 0). \qquad (13.2)$$

Для исследования на сходимость знакочередующихся рядов используют **признак Лейбница**, для применения которого проверяют два условия:

1) Члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине, то есть $|a_1| > |a_2|, \quad |a_2| > |a_3|, \quad |a_3| > |a_4|, ... \quad , |a_{n-1}| > |a_n|$;

2) Предел общего члена ряда при $n \to \infty$ равен 0, то есть $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Если оба условия выполняются, то ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена, то есть $S \le a_1$. Если нарушается хотя бы одно из этих условий, то ряд расходится.

Знакочередующийся ряд (13.2) называется *абсолютно сходящимся***,** если сходится сам ряд и сходится ряд, составленный из модулей a_n, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + ... |a_n| + ... \qquad (13.3)$$

Если ряд (13.2) сходится, а ряд (13.3) расходится, то знакочередующийся ряд (13.2) называется *условно сходящимся*.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ... - \frac{1}{n^2} + ...$.

Решение. Проверим два условия признака Лейбница.

1) $1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > ... > \frac{1}{n^2} > ...$, то есть члены ряда по модулю убывают.

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Так как выполнены оба условия признака Лейбница, то ряд сходится.

Составим ряд из модулей исходного ряда $|1| + \left|\frac{1}{2^2}\right| + \left|\frac{1}{3^2}\right| + \left|\frac{1}{4^2}\right| + ... + \left|\frac{1}{n^2}\right| + ...$

Исследуем полученный ряд с общим членом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Этот ряд сходится как обобщенный гармонический.

Так как сходится сам знакочередующийся ряд и сходится ряд, составленный из модулей исходного ряда, то данный ряд сходится абсолютно.

§14. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

14.1 Область сходимости степенного ряда

Определение. *Функциональным рядом* называется ряд вида

$$\sum f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_4(x) + \ldots, \tag{14.1}$$

члены которого $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_4(x),\ \ldots$, являются функциями от x.

Придавая x числовое значение x_0, мы получаем числовой ряд

$$\sum f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \ldots + f_4(x_0) + \ldots, \tag{14.2}$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Определение. Множество тех значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости*.

Ясно, что в области сходимости сумма функционального ряда является некоторой функцией от x. Обозначим се через $S(x)$.

Функциональный ряд (14.1) сходится в точке x_0, если сходится числовой ряд (14.2).

Функциональный ряд сходится на интервале, если он сходится в каждой точке этого интервала.

Специальный класс функциональных рядов составляют так называемые степенные ряды.

Определение. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n = a_0 + a_1\left(x-x_0\right) + a_2\left(x-x_0\right)^2 + \ldots + a_n\left(x-x_0\right)^n + \ldots, \tag{14.3}$$

где $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ldots$ - последовательность действительных чисел, называемых коэффициентами ряда.

При $x_0 = 0$ степенной ряд принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{14.4}$$

Степенной ряд (14.4) всегда сходится по крайней мере в точке $x = 0$, а ряд (14.3) – в точке $x = x_0$. Ряд (14.4) называется рядом по степеням x, а ряд (14.3) – по степеням $x - x_0$. Ряд (14.3) принимает вид ряда (14.4) при соответствующей замене переменных $y = x - x_0$.

Выясним, какой вид имеет «область сходимости» степенного ряда, то есть множество $\{x\}$ тех значений переменной, для которых ряд сходится.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно в интервале $\left(-|x_0|,\ |x_0|\ \right)$, то есть при всех значениях x, удовлетворяющих условию**.** $|x| < |x_0|$.

Следствие. Если степенной ряд расходится при некотором значении $x = x_1$, то он расходится и при всех значениях x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Любой степенной ряд сходится при значении $x = 0$. Есть степенные ряды, которые сходятся только при $x = 0$ и расходятся при остальных значениях x.

Область сходимости может состоять из всех точек оси *Ox*, другими словами, ряд может сходится при всех x.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Решение.

Ряд $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$, представляет геометрическую прогрессию со знаменателем x, сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$.

Из теоремы Абеля и ее следствия получаем, что все точки сходимости расположены от начала координат не дальше, чем любая из точек расходимости. Совершенно ясно, что точки сходимости будут целиком заполнять некоторый интервал с центром в начале координат.

Таким образом, можно сказать, что для каждого степенного ряда, имеющего как точки сходимости, так и точки расходимости, существует такое положительное число R, что для всех x, по модулю меньших R $(|x| < R)$, ряд абсолютно сходится, а для всех x, по модулю больших R $(|x| > R)$, ряд расходится.

Что касается значений $x = R,\ x = -R$ здесь могут быть различные случаи: ряд может сходится в обеих точках, или только в одной из них, или ни в одной. При этом ряд может сходиться как абсолютно, так и условно.

Определение. *Радиусом сходимости* степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется такое число R, что при $|x| < R$, степенной ряд сходится, а для всех $|x| > R$, расходится. Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости*.

Если степенной ряд (14.4) сходится только при $x = 0$, то $R = 0$, если он сходящихся на всей числовой оси, то $R = \infty$.

Если все коэффициенты степенного ряда, начиная с некоторого, отличны от нуля, то его радиус сходимости равен пределу при $n \to \infty$ отношения абсолютных величин коэффициентов общего и следующего за ним членов ряда. Таким образом, радиус сходимости можно вычислить по формуле

$$R = \lim_{x \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \tag{14.5}$$

Интервал сходимости для ряда (14.4) будет иметь вид $(-R, R)$, а для ряда (14.3) - $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Пример. Найти радиус и интервал сходимости рядов. Исследовать ряд на сходимость на концах интервала.

а) $1+x+\frac{x}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$; б) $1+\frac{x}{10}+\frac{2!x^2}{10^2}+...+\frac{n!x^n}{10^n}+...$;

в) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...$.

Решение.

а) $1+x+\frac{x}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$

Найдем радиус сходимости по формуле (14.5), учитывая, что $a_n=\frac{1}{n!}$ и $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$. Получим

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{n!}\right|}{\left|\frac{1}{(n+1)!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Ответ. $R=\infty$, следовательно ряд сходится на всей числовой оси..

б) $1+\frac{x}{10}+\frac{2!x^2}{10^2}+...+\frac{n!x^n}{10^n}+...$

Найдем радиус сходимости по формуле (14.5), учитывая, что $a_n=\frac{n!}{10^n}$ и $a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$. Получим

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{10^n}:\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot 10^{n+1}}{10^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{10n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n+1}=\frac{10}{\infty}=0.$$

Таким образом, ряд сходится только при $x=0$ и расходится при остальных значениях x.

Ответ. $R=0$, ряд сходится только в одной точке $x=0$.

в) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...$

Здесь $|a_n|=\frac{1}{n},\ |a_{n+1}|=\frac{1}{n+1}$. Тогда

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\div\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Тогда интервал сходимости будет иметь вид $(-1;1)$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x=1$ имеем знакочередующийся ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$. Исследуем его на сходимость по признаку Лейбница. Проверим два условия:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>...$, то есть члены ряда по модулю убывают.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$.

Так как оба условия выполняются, то ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$ сходится.

При $x=-1$ имеем ряд $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-...-\frac{1}{n}-...$., который расходится как произведение расходящегося гармонического ряда на -1. Следовательно, областью сходимости служит полуинтервал $(-1;\ 1]$.

Ответ. $R=1$ - радиус сходимости; $(-1;\ 1]$ - область сходимости.

14.2 Разложение функций в степенные ряды

Всякая функция $f(x)$ бесконечно дифференцируемая в интервале $(-R;R)$ разлагается в ряд Маклорена, который имеет вид

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+.......+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+........$$

Интервал $(-R;R)$ – интервал сходимости ряда Маклорена.

При разложении функций в степенные ряды часто используются разложения в ряд Маклорена следующих функций:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...,|x|<+\infty;$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...,|x|<+\infty;$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...,|x|<+\infty$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+...,-1<x\leq 1$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\cdot 1}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+....-1<x<1,$$

где α- любое вещественное число.

14.3 Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

На практике приходится прибегать к приближенным вычислениям функций, определенных интегралов при решении дифференциальных уравнений. В этих случаях функцию разлагают в степенной ряд Маклорена, а ряд заменяют суммой конечного числа членов с требуемой точностью. Точность оценивается с помощью первого отброшенного члена.

С помощью рядов составлены таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов, таблицы, применяемые в теории вероятностей и математической статистике.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$, с точностью 0,1.

Решение.

Разложим функцию e^{-x^2} в ряд Маклорена по формуле

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...,$$

заменив в левой и правой части равенства x на $-x^2$, получим

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}+....$$

Тогда исходный интеграл примет вид

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx=\int\limits_0^1\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}+...\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 1!}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+...\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{3\cdot 1!}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+...=1-0{,}33+0{,}1-0{,}024+...$$

Так как четвёртый член ряда меньше заданной точности $a_4=0{,}024<0{,}1$, то данный интеграл равен

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1 - 0{,}33 + 0{,}1 = 0{,}77 .$$

Ответ. $\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0{,}77$.

Примеры решения типовых задач

Задача 1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum \frac{3^n}{n!} = 3 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \frac{81}{4!} + ... + \frac{3^n}{n!} + ...$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2 + \frac{1}{2^n}\right)^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; г) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$.

Решение.

а) Применим признак Даламбера, вычислим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему. Получим

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n!}{(n+1)!3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0 .$$

Число $D = 0 < 1$, следовательно, ряд сходится.

Ответ. Данный ряд сходится.

б) Применим радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(2 + \frac{1}{2^n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{2^n}\right) = 2 ,$$

Так как предел больше 1, то ряд расходится.

Ответ. Данный ряд расходится.

в) Данный ряд сходится как обобщенный гармонический, так как степень *n* больше 1.

Исследуем этот же ряд на сходимость используя интегральный признак Коши. Имеем $a_n = \frac{1}{n^2}$, следовательно, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ - непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция при $x \geq 1$. Вычислим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1 .$$

Так как несобственный интеграл равен 1, то он сходится, поэтому сходится и данный ряд.

г) Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$.

Так как данный ряд является знакочередующимся, будем исследовать его на сходимость по признаку Лейбница. Проверим два условия:

1) $1\geq\frac{1}{2}\geq\frac{1}{3}\geq\frac{1}{4}\geq\ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Так как выполнены оба условия признака Лейбница, то ряд сходится.

Составим ряд из модулей $|1|+\left|\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{1}{3}\right|+\left|\frac{1}{4}\right|+\ldots+\left|\frac{1}{n}\right|+\ldots$

Исследуем полученный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Данный ряд является гармоническим рядом, который всегда расходится.

Таким образом, данный ряд сходится условно.

Задача 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{2^n\sqrt{n}}$.

Решение.

Данный степенной ряд перепишем в виде

$$\frac{3x}{2\sqrt{1}}+\frac{3^2x^2}{2^2\sqrt{2}}+\frac{3^3x^3}{2^3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{3^nx^n}{2^n\sqrt{n}}+\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}+\ldots.$$

Запишем формулу n-го члена ряда и следующего за ним $(n+1)$ – го члена ряда

$$a_n=\frac{3^n}{2^n\cdot\sqrt{n}};\quad a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}\cdot\sqrt{n+1}}.$$

Найдем радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}\cdot\frac{2\sqrt{n+1}}{3^{n+1}}\right|=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right|=\frac{2}{3}.$$

Следовательно, радиус сходимости $R=\frac{2}{3}$, и ряд сходится на интервале

$$|x|<\frac{2}{3}, \text{ или } \quad x\in\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right).$$

Выясним вопрос о сходимости ряда на концах интервала.

При $x=-\frac{2}{3}$ исходный ряд примет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\ldots .$$

Этот ряд является знакочередующимся. Заметим, что члены данного ряда по абсолютной величине убывают и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$. Следовательно, по признаку Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов заключаем, что последний ряд сходится. Следовательно, значение $x=-\frac{2}{3}$ принадлежит области сходимости данного ряда.

При $x=\frac{2}{3}$, исходный ряд примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots. .$$

Данный ряд расходится как обобщенно гармонический. Следовательно, значение $x=\frac{2}{3}$ не принадлежит области сходимости данного ряда.

Таким образом, $x\in\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ — область сходимости исследуемого ряда.

Задача 3. Вычислить $\int\limits_0^1\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Решение.

Представим подынтегральную функцию в виде степенного ряда.

Заменив x в разложении функции $\sin x$ на $\sqrt[3]{x}$ имеем:

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots.. .$$

$$\sin\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}-\frac{(\sqrt[3]{x})^3}{3!}+\frac{(\sqrt[3]{x})^5}{5!}-\frac{(\sqrt[3]{x})^7}{7!}+\ldots.$$

Тогда

$$\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}=x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{3!}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{5!}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{7!}+\ldots$$

$$\int_0^1\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx=\int_0^1\left(x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{3!}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{5!}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{7!}+\ldots\right)dx=\left[3x^{\frac{1}{3}}-\frac{x}{3!}+\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5!\cdot 5}-\frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7!\cdot 7}+\ldots\right]\Bigg|_0^1=$$

$$=3-\frac{1}{6}+\frac{1}{200}-\frac{1}{11760}+\ldots$$

Полученный знакочередующийся ряд удовлетворяет условию теоремы Лейбница. Так как четвертый его член по абсолютной величине меньше 0,001, то для обеспечения заданной точности достаточно взять первые три члена. Тогда

$$\int_0^1\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx\approx 3-\frac{1}{6}+\frac{1}{200}\approx 2{,}834.$$

Контрольный тест после изучения раздела VIII «Ряды»

1. Дана последовательность с общим членом $\frac{n^3+4n}{n+2}$. Тогда второй ее член равен

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{9}$; в) 4; г) 8; д) 0.

2. Даны первые 4 члена последовательности $\{5;\,6{,}5;\,8;\,9{,}5\}$. Указать формулу общего члена последовательности.

а) $\left\{\frac{11n+3}{12n}\right\}$; б) $\left\{\frac{3n-25}{n}\right\}$; в) $\{n^2+4\}$; г) $\left\{\frac{3n+7}{2}\right\}$; д) $\left\{\frac{3n+8}{15n-7}\right\}$.

3. Указать последовательность, четвертый член которой равен $2\frac{2}{3}$.

а) $\left\{\frac{4+n}{3}\right\}$; б) $\left\{\frac{n^2+2}{n^2}\right\}$; в) $\left\{\frac{n^3+1}{2}\right\}$; г) $\{5n-2\}$; д) $\left\{\frac{3n+7}{4}\right\}$.

4. При каких значениях α обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ является расходящимся?

а) $\alpha = 2$; б) $\alpha > 1$; в) $\alpha < 0$; г) $\alpha \le 1$; д) $-1 < \alpha \le 0$.

5. Четвертый член ряда равен $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{7}$?

а) $\frac{1}{3}$; б) $2\frac{3}{7}$; в) $2\frac{2}{7}$; г) $\frac{12}{7}$; д) $\frac{8}{7}$.

6. По признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\ a_n > 0$ расходится, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = p$ и выполняется условие

а) $p = 3$; б) $p > 1$; в) $p < 1$; г) $p = 1$; д) $p = -3$.

7. Чтобы исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$, применяя признак Даламбера, необходимо найти:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

8. Ряд $1-1-1+1+1-1-1+1+...+\left(-1\right)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}+... = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$ является:

а) знакопеременным; б) степенным;

в) обобщенно гармоническим; г) знакоположительным.

9. Какой из приведенных рядов является знакочередующимся рядом?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+2)^{2n}}{n^2\cdot 5^n}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Задачи № 1-10. Найти матрицу $D = 3C - AB$, где

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Задачи № 11-20. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

Найти матрицу D и вычислить её определитель

11. $D=(2A-3B)C$; 12. $D=\left(\frac{1}{2}B+A\right)2C$;

13. $D=\left(\frac{1}{3}A-2B\right)3C$; 14. $D=3A(B-2C)$;

15. $D=3A\left(2B+\frac{1}{3}C\right)$; 16. $D=3B\left(\frac{1}{3}A-C\right)$;

17. $D=B(2C-3A)$; 18. $D=2C\left(B+\frac{1}{2}A\right)$;

19. $D=C+2AB$; 20. $D=\left(C\cdot\frac{1}{2}+3B\right)\cdot 2A$

Задачи № 21-40. Решить систему линейных уравнений тремя способами: а) методом Гаусса; б) методом обратной матрицы; в) по формулам Крамера.

21. $\begin{cases}7x_1-5x_2=31,\\ 4x_1+11x_3=-43,\\ 2x_1+3x_2+4x_3=-20.\end{cases}$

22. $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4,\\ 3x_1+4x_2-2x_3=11,\\ 3x_1-2x_2+4x_3=11.\end{cases}$

23. $\begin{cases}5x_1+8x_2-x_3=7,\\ x_1+2x_2+3x_3=1,\\ 2x_1-3x_2+2x_3=9.\end{cases}$

24. $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4,\\ 3x_1-5x_2+3x_3=1,\\ 2x_1+7x_2-x_3=8.\end{cases}$

25. $\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3=5,\\ 2x_1-x_2-3x_3=-4,\\ x_1+5x_2+x_3=0.\end{cases}$

26. $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1,\\ 2x_1-x_2+2x_3=-4,\\ 4x_1+x_2+4x_3=-2.\end{cases}$

27. $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5,\\ 2x_1+3x_2+x_3=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3=11.\end{cases}$

28. $\begin{cases}x_1-4x_2-2x_3=-3,\\ 3x_1+x_2+x_3=5,\\ 3x_1-5x_2-6x_3=-9.\end{cases}$

29. $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=31,\\ 5x_1+x_2+2x_3=29,\\ 3x_1-x_2+x_3=10.\end{cases}$

30. $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=31,\\ 5x_1+x_2+2x_3=20,\\ 3x_1-x_2+x_3=9.\end{cases}$

$$31.\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=9,\\2x_1+5x_2-3x_3=4,\\5x_1+6x_2-2x_3=18.\end{cases}\qquad 32.\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4,\\3x_1+4x_2-2x_3=11,\\3x_1-2x_2+4x_3=11.\end{cases}$$

$$33.\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=9,\\2x_1+5x_2-3x_3=4,\\5x_1+6x_2-2x_3=18.\end{cases}\qquad 34.\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1,\\8x_1+3x_2-6x_3=2,\\4x_1+x_2-3x_3=3.\end{cases}$$

$$35.\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1,\\2x_1-x_2+2x_3=-4,\\4x_1+x_2+4x_3=-2.\end{cases}\qquad 36.\begin{cases}3x_1-x_2=5,\\-2x_1+x_2+x_3=0,\\2x_1-x_2+4x_3=15.\end{cases}$$

$$37.\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5,\\2x_1+3x_2+x_3=1,\\2x_1+x_2+3x_3=11.\end{cases}\qquad 38.\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=6,\\2x_1+3x_2-4x_3=20,\\3x_1-2x_2-5x_3=6.\end{cases}$$

$$39.\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=4,\\2x_1-5x_2-3x_3=-17,\\x_1+x_2-x_3=0.\end{cases}\qquad 40.\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2,\\2x_1-x_2-6x_3=-1,\\3x_1-2x_2=8.\end{cases}$$

Задания 41-60. Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Требуется:

1) Записать векторы $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$ в системе орт и найти модули этих векторов;

2) Найти угол между векторами $\overline{AB},\overline{AC}$;

3) Найти площадь грани *ABC;*

4) Найти объем пирамиды *ABCD.*

41. $A(2;-3;1); B(6;1;-1); C(4;8;-9) D(2;-1;2)$.

42. $A(5;-1;-4); B(9;3;-6); C(7;10;-14); D(5;1;-3)$.

43. $A(1;-4;0); B(5;0;-2); C(3;7;-10); D(1;-2;1)$.

44. $A(-3;-6;2); B(1;-2;0); C(-1;5;-8); D(-3;-4;3)$.

45. $A(-1;1;-5); B(3;5;-7); C(1;12;-15); D(-1;3;-4)$.

46. $A(-4;2;-1); B(0;6;-3); C(-2;13;-11); D(-4;4;0)$.

47. $A(0;4;3); B(4;8;1); C(2;15;-7); D(0;6;4)$.

48. $A(-2;0;-2); B(2;4;-4); C(0;11;-12); D(-2;2;-1)$.

49. $A(3;3;-3); B(7;7;-5); C(5;14;-13); D(3;5;-2)$.

50. $A(4;-2;5); B(8;2;3); C(6;9;-5); D(4;0;6)$.

51. $A(-5;0;1); B(-4;-2;3); C(6;2;11); D(3;4;9)$.

52. $A(1;-4;0); B(2;-6;2); C(12;-2;10); D(9;0;8)$.

53. $A(-1;-2;-8); B(0;-4;-6); C(10;0;2); D(7;2;0)$.

54. $A(0;2;-10); B(1;0;-8); C(11;4;0); D(8;6;-2)$.

55. $A(3;1;-2); B(4;-1;0); C(14;3;8); D(11;5;6)$.

56. $A(-8;3;-1); B(-7;1;1); C(3;5;9); D(0;7;7)$.

57. $A(2;-1;-4); B(3;-3;-2); C(13;1;6); D(10;3;4)$.

58. $A(-4;5;-5); B(-3;3;-3); C(7;7;5); D(4;9;3)$.

59. $A(-2;-3;2); B(-1;-5;4); C(9;-1;12); D(6;1;10)$.

60. $A(-3;4;-3); B(-2;2;-1); C(8;6;7); D(5;8;5)$.

Задания № 61-80. Даны векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{x}$. Показать, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе.

61. $\vec{x}=\{15; -20; -1\}$, $\vec{a}=\{0; 2; 1\}$, $\vec{b}=\{0; 1; -1\}$, $\vec{c}=\{5; -3; 2\}$.

62. $\vec{x}=\{2; 7; 5\}$, $\vec{a}=\{1; 0; 1\}$, $\vec{b}=\{1; -2; 0\}$, $\vec{c}=\{0; 3; 1\}$.

63. $\vec{x}=\{8; -7; -13\}$, $\vec{a}=\{0; 1; 5\}$, $\vec{b}=\{3; -1; 2\}$, $\vec{c}=\{-1; 0; 1\}$.

64. $\vec{x}=\{0; -8; 9\}$, $\vec{a}=\{0; -2; 1\}$, $\vec{b}=\{3; 1; -1\}$, $\vec{c}=\{4; 0; 1\}$.

65. $\vec{x}=\{-13; 2; 18\}$, $\vec{a}=\{1; 1; 4\}$, $\vec{b}=\{-3; 0; 2\}$, $\vec{c}=\{1; 2; -1\}$.

66. $\vec{x}=\{11; -1; 4\}$, $\vec{a}=\{1; -1; 2\}$, $\vec{b}=\{3; 2; 0\}$, $\vec{c}=\{-1; 1; 1\}$.

67. $\vec{x}=\{-1; 7; 0\}$, $\vec{a}=\{0; 3; 1\}$, $\vec{b}=\{1; -1; 2\}$, $\vec{c}=\{2; -1; 0\}$.

68. $\vec{x}=\{3; 1; 3\}$, $\vec{a}=\{2; 1; 0\}$, $\vec{b}=\{1; 0; 1\}$, $\vec{c}=\{4; 2; 1\}$

69. $\vec{x}=\{23; -14; -30\}$, $\vec{a}=\{2; 1; 0\}$, $\vec{b}=\{1; -1; 0\}$, $\vec{c}=\{-3; 2; 5\}$.

70. $\overline{x}=\{8; 9; 4\}$, $\vec{a}=\{1; 0; 1\}$, $\vec{b}=\{0; -2; 1\}$, $\vec{c}=\{1; 3; 0\}$.

71. $\vec{x}=\{-15; 5; 6\}$, $\vec{a}=\{0; 5; 1\}$, $\vec{b}=\{3; 2; -1\}$, $\vec{c}=\{-1; 1; 0\}$.

72. $\vec{x}=\{-5; 9; -13\}$, $\vec{a}=\{0; 1; -2\}$, $\vec{b}=\{3; -1; 1\}$, $\vec{c}=\{4; 1; 0\}$.

73. $\vec{x}=\{-9; -8; -3\}$, $\vec{a}=\{1; 4; 1\}$, $\vec{b}=\{-3; 2; 0\}$, $\vec{c}=\{1; -1; 2\}$.

74. $\vec{x}=\{8; 1; 12\}$, $\vec{a}=\{1; 2; -1\}$, $\vec{b}=\{3; 0; 2\}$, $\vec{c}=\{-1; 1; 1\}$.

75. $\vec{x}=\{3; 1; 8\}$, $\vec{a}=\{0; 1; 3\}$, $\vec{b}=\{1; 2; -1\}$, $\vec{c}=\{2; 0; -1\}$.

76. $\vec{x}=\{8; 0; 5\}$, $\vec{a}=\{2; 0; 1\}$, $\vec{b}=\{1; 1; 0\}$, $\vec{c}=\{4; 1; 2\}$.

77. $\vec{x}=\{11; 5; -3\}$, $\vec{a}=\{1; 0; 2\}$, $\vec{b}=\{-1; 0; 1\}$, $\vec{c}=\{2; 5; -3\}$.

78. $\vec{x}=\{2; -1; 11\}$, $\vec{a}=\{1; 1; 0\}$, $\vec{b}=\{0; 1; -2\}$, $\vec{c}=\{1; 0; 3\}$.

79. $\vec{x}=\{5; 15; 0\}$, $\vec{a}=\{1; 0; 5\}$, $\vec{b}=\{-1; 3; 2\}$, $\vec{c}=\{0; -1; 1\}$.

80. $\vec{x}=\{6; -1; 7\}$, $\vec{a}=\{1; -2; 0\}$, $\vec{b}=\{-1; 1; 3\}$, $\vec{c}=\{1; 0; 4\}$.

Задания № 81-100. Даны вершины треугольника АВС. Найти: 1) длину стороны *AB;* 2) уравнения сторон *AB* и *BC* и их угловые коэффициенты; 3) угол *B* в радианах с точностью до двух знаков; 4) уравнение высоты *CD* и ее длину; 5) уравнение медианы *AE* и координаты точки *К* пересечения этой медианы с высотой *CD;* 6) уравнение прямой, проходящей через точку *К* параллельно стороне *AB.*

81. *A(-5;0), B(7;9), C(5;-5);*

82. *A(-8; -3), B(4; -12), C(8;10);.*

83. *A(-12; -1), B(0; -10), C(4;12);*

84. *A(-10; 9), B(2; 0), C(6;22);*

85. *A(0; 2), B(12; -7), C(16;15);*

86. *A(-9; 6), B(3; -3), C(7;19);*

87. *A(1; 0), B(13; -9), C(17;13);*

88. *A(-4; 10), B(8; 1), C(12;23);*

89. *A(2; 5), B(14; -4), C(18;18);*

90. *A(-1; 4), B(11; -5), C(15;17);*

91. *A(-2; 7), B(10; -2), C(8;12);*

92. *A(-6; 8), B(6; -1), C(4;13);*

93. *A(3; 6), B(15; -3), C(13;11);*

94. *A(-10; 5), B(2; -4), C(0;10);*

95. *A(-4; -12), B(8; 3), C(6;17);*

96. *A(4; 1), B(16; -8), C(14;6);*

97. *A(-7; 4), B(5; -5), C(3;9);*

98. *A(0; 3), B(12; -6), C(10;8);*

99. *A(-5; 9), B(7; 0), C(5;14);*

100. *A(-5; 7), B(7; -2), C(11;20).*

Задания № 101-120. Установить, какие линии определяются данными равнениями. Изобразить эти линии на чертеже, охарактеризовав кривые.

101. $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$

102. $x=2-\sqrt{6-2y}$

103. $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$

104. $x=-5+\sqrt{40-6y-y^2}$

105. $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$

106. $y=7-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$

107. $2x^2+2y^2+12x+4y-30=0$

108. $x=-4+3\sqrt{y+5}$

109. $x^2+4y^2-4x-2=0$

110. $y=-\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$

111. $16x^2+y^2+32x-8y-48=0$

112. $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$

113. $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$

114. $x=-2\sqrt{-5-6y-y^2}$

115. $2x^2+2y^2-8x+16y+22=0$

116. $y^2-16x-6y+25=0$

117. $y=-3-\sqrt{21-4x-x^2}$

118. $x^2+y^2+2x+4y-31=0$

119. $x^2 + y^2 + 4y = 0$

120. $x^2 + 4y^2 - 4x - 2 = 0$.

Задания 121-140. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел. Записать комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной форме.

121. $z_1 = 3 - 3i,\ z_2 = -1 - i$.
122. $z_1 = 3i,\ z_2 = -1 + i$.
123. $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\,i,\ z_2 = -1 - i$.
124. $z_1 = -3 + 3i,\ z_2 = 2 - 2i$.
125. $z_1 = -2i,\ z_2 = -\sqrt{3} - i$.
126. $z_1 = -5 + 5i,\ z_2 = -2i$.
127. $z_1 = 6 + 6i,\ z_2 = -\sqrt{3} + i$.
128. $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\,i,\ z_2 = 1 - i$.
129. $z_1 = -4 + 4i,\ z_2 = 2 + 2i$.
130. $z_1 = 2i,\ z_2 = 2 - 2i$.
131. $z_1 = 5i,\ z_2 = \sqrt{3} - i$.
132. $z_1 = 7 - 7i,\ z_2 = -i$.
133. $z_1 = 1 - i,\ z_2 = \sqrt{3} - i$.
134. $z_1 = 3 - 3\sqrt{3}\,i,\ z_2 = 3i$.
135. $z_1 = 4i,\ z_2 = 2 - 2i$.
136. $z_1 = 2 - 2i,\ z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$.
137. $z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = -2 + 2i$.
138. $z_1 = -5i,\ z_2 = \sqrt{3} + i$.
139. $z_1 = -7 + 7i,\ z_2 = 7i$.
140. $z_1 = 1 + i,\ z_2 = -3 + \sqrt{3}\,i$.

Задания № 141-160. Найти указанные пределы.

141. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+1}{3n^2+n+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 2x}{4x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{n-1}$.

142. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{-x^2-4x+5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-2n+1}{2n^2+n+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n-4}\right)^{2-n}$.

143. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2-2n+3}{n^2+4n+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{4x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+3}{4n-1}\right)^{2n-3}$.

144. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n+4}{n^3-n+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg5x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{2n-1}\right)^{3-n}$.

145. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-x^2-5x-4}{x^2-2x-8}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n-4}{-4n^2+n+3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2x}{\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-1}{5n+4}\right)^{2n+1}$.

146. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-7n+1}{3n^2+n+3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x^2+x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n-4}\right)^{2n}$.

147. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+4}{2n^2-n+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{tg^2 2x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-7}{2n-3}\right)^{4n+1}$.

148. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-x^2-x+6}{3x^2+8x-3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-2n+1}{3n^2+4n+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{4x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{n-1}$.

149. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n^2-2n+5}{n^2+n+3}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{6+2x}}{x^2-5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-2}{5n+3}\right)^{-2n+3}$.

150. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3n+4}{2n^3+5n-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\cdot ctg5x$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+3}\right)^{4-n}$.

151. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^4-2n^2+n}{3n^2+n^4+4}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{1+4x}-3}{x^2-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtgx}{1-\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n+4}\right)^{1-2n}$.

152. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4x}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-3n+1}{3n^2+n+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{6x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{4n-3}\right)^{4n+1}$.

153. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^4-2n^3+1}{n^4+3}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-6x+8}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2x}{5x^2}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{2n+5}\right)^{1-3n}$.

154. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-10x+25}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^5-3n^2+9}{5n^5+2n^2+5}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{7+3x}-2}{x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg4x$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{4n+1}\right)^{2n-3}$.

155. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^2}{x^2-3x-10}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^4+n+3}{3n^4+12n+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{\sqrt{x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}$.

156. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+6n+1}{5n^2+n+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+4x}-3}{x^2-x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{3x}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x}{x-2}}$.

157. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-2x+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-3n^4+1}{3n+2n^4+4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+4x}-3x)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{tgx}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x}{x-2}}$.

158. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2-3n+1}{3n^2+5n+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x^2-25}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{\sin 5x}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{2}{x-3}}$.

159. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3x-2}{(x+2)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2-8n+1}{n^2+2n+4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2+3x})$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{4x}$; д) $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$.

160. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{4x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-n^2+1}{n^2+2n^3+4}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to -2}(2x+5)^{\frac{3}{x+2}}$.

Задания №161-180. Задана функция $y = f(x)$). 1) Исследовать функцию на непрерывность на всей числовой оси. 2) Найти и классифицировать точки разрыва, если они существуют. 3) Построить график функции.

161. $f(x)=\begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2}, & x<-2, \\ \sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2, \\ \frac{1}{x-2}, & x>2. \end{cases}$

162. $f(x)=\begin{cases} \frac{|x+3|}{x+3}, & x<-3, \\ \sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le 3, \\ \frac{1}{x-3}, & x>3. \end{cases}$

163. $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x<0, \\ \sqrt{1-x^2}, & 0\le x\le 1, \\ \frac{1}{x-1}, & x>1. \end{cases}$

164. $f(x)=\begin{cases} \frac{-2|x|}{x}, & x<0, \\ \sqrt{4-x^2}, & 0\le x\le 2, \\ \frac{1}{x-2}, & x>2. \end{cases}$

165. $f(x)=\begin{cases} \frac{3|x|}{x}, & x<0, \\ \sqrt{9-x^2}, & 0\le x\le 3, \\ \frac{1}{x-3}, & x>3. \end{cases}$

166. $f(x)=\begin{cases} \frac{-1}{x+2}, & x<-2, \\ -\sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2, \\ \frac{|x-2|}{x-2}, & x>2. \end{cases}$

167. $f(x)=\begin{cases} \frac{-1}{x+3}, & x<-3, \\ -\sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le 3, \\ \frac{|x-3|}{x-3}, & x>3. \end{cases}$

168. $f(x)=\begin{cases} \frac{-1}{x+1}, & x<-1, \\ \sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 0, \\ \frac{|x|}{x}, & x>0. \end{cases}$

169. $f(x)=\begin{cases} \frac{-1}{x+2}, & x<-2, \\ \sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2, \\ \frac{2|x|}{x}, & x>2. \end{cases}$

170. $f(x)=\begin{cases} \frac{-1}{x+3}, & x<-3, \\ \sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le 0, \\ \frac{3|x|}{x}, & x>0. \end{cases}$

171. $f(x)=\begin{cases} 2|x|, & x<0, \\ \sqrt{x}, & 0\le x\le 4, \\ 1, & x>4. \end{cases}$

172. $f(x)=\begin{cases} |2x|, & x\le 0, \\ x^2+1, & 0<x\le 1, \\ 2, & x>1. \end{cases}$

173. $f(x)=\begin{cases} -|x+1|, & x<-1, \\ x^2+2, & -1\le x<1, \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$

174. $f(x)=\begin{cases} -|x+1|, & x<-1, \\ x^2+1, & -1\le x<1, \\ -x+3, & x\ge 1. \end{cases}$

175. $f(x)=\begin{cases}|x+1|, & x<-1,\\ (x+1)^2, & -1\le x<0,\\ x, & x\ge 0.\end{cases}$

176. $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\le 0,\\ sinx, & 0<x\le\pi,\\ x-2, & x>\pi.\end{cases}$

177. $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\le 0,\\ -(x-1)^2, & 0<x<2,\\ x-3, & x\ge 2.\end{cases}$

178. $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ x+1, & x>2.\end{cases}$

179. $f(x)=\begin{cases}cos\,x, & x<0,\\ x^2+1, & 0\le x<1,\\ |x|, & x\ge 1.\end{cases}$

180. $f(x)=\begin{cases}-|x+2|, & x<-1,\\ x^2+1, & -1\le x<1,\\ -x+3, & x\ge 1.\end{cases}$

Задания № 181-200. Найти производные первого порядка, пользуясь формулами дифференцирования.

181.	а) $y=3x^5-\frac{1}{x}+\sqrt[4]{x}$;	б) $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$;	в) $y=(x+1)^2\cdot\cos 5x$;
	г) $y=arctg(e^{2x}+3)$;	д) $y=\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$;	е) $y=x^{\arcsin x}$.
182.	а) $y=4x^7+\frac{1}{x^2}-\sqrt{2x}$;	б) $y=x^2\cdot\cos 7x$;	в) $y=\frac{x+e^{3x+2}}{1+\cos 3x}$;
	г) $y=\frac{x^2}{(x+1)^2}$;	д) $y=(x+2)\cdot e^{-x^2}$;	е) $y=(\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$.
183.	а) $y=7x-\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^3}$;	б) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;	в) $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$;
	г) $y=3x\cdot\arcsin(2x)$;	д) $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$;	е) $y=(x^2)^{\frac{1}{x}}$.
184.	а) $y=9x^2+\frac{1}{2x^2}-\sqrt[3]{x}$;	б) $y=\sqrt[3]{1+x^3}$;	в) $y=e^{\sin 5x}\cdot\ln x$;
	г) $y=\ln(\sin(2x+5))$;	д) $y=x\cdot arctg3x$;	е) $y=x^{\arccos x}$.
185.	а) $y=3x^5-\frac{1}{x^5}-\sqrt[5]{x}$;	б) $y=2\sqrt{4x+3}-\frac{3}{\sqrt{x^3+x}}$;	в) $y=(\ln x+1)^2\cdot\cos 2x$;
	г) $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$;	д) $y=5^{tgx}+3^{\sin x}$;	е) $y=(x+1)^{2x}$.
186.	а) $y=2x^7-\frac{1}{7x^7}-\sqrt[7]{2x}$;	б) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;	в) $y=(3-\sin^2 x)^3$;

	г) $y=e^{\sqrt{2x}}$;	д) $y=\frac{1+\cos 2x}{x^3}+\sin 3x$;	е) $y=(\sin x)^{tgx}$.
187.	а) $y=3x^7-\frac{1}{x^7}-\sqrt[7]{3x}$;	б) $y=\sqrt{3-5x^2}+4x\cdot\ln x$;	в) $y=\arcsin(3x^2+2)$;
	г) $y=\frac{\sin^2 x}{2+\cos^2 x}$;	д) $y=3^{\sin^2 x}$;	е) $y=(\cos x)^{\sqrt{x}}$.
188.	а) $y=4x^9-\frac{4}{x^9}-\sqrt[9]{4x}$;	б) $y=\sqrt[3]{1+\sqrt{x+3}}$;	в) $y=arctg\frac{2x}{1-x^2}$;
	г) $y=0,2^{\mathrm{ctg}^2 x}$;	д) $y=x\cdot\arccos\sqrt{4-x^2}$;	е) $y=(\sin 2x)^{\cos x}$.
189.	а) $y=15x^3-\frac{15}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}$;	б) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$;	в) $y=\frac{\cos 3x+4}{\sin 3x-4}$;
	г) $y=e^{\sin 4x+8}$;	д) $y=\mathrm{tg}^2\sqrt{x+5}+8x+7$;	е) $y=(x+x^2)^x$.
190.	а) $y=5x^{10}+\frac{5}{x^{10}}+\sqrt[10]{5x}$;	б) $y=\sqrt{1+\cos^2(x^2)}$;	в) $y=x^2\cdot\sqrt{1-x^2}$;
	г) $y=5^{\sin(x^3)}$;	д) $y=arctg\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$;	е) $y=(x^3)^{\ln x}$.
191.	а) $y=3x^{11}+\frac{5}{x^{11}}+\sqrt[11]{x^3}$;	б) $y=(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})^2$;	в) $y=\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$;
	г) $y=arctg(\ln x)+\ln(\sin x)$;	д) $y=2\cos(4x+x^2)$;	е) $y=(\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.
192.	а) $y=12x^7-\frac{12}{x^7}+\sqrt[7]{x^2}$;	б) $y=x^2\cdot\arccos\left(\frac{x}{2}-4x\right)$;	в) $y=\frac{x^5}{x^4+2}$;
	г) $y=e^{ctg 3x}$;	д) $y=arctg^2 x+6x^2$;	е) $y=x^{\arcsin^2 x}$.
193.	а) $y=6x^7+\frac{7}{x^6}+\sqrt[6]{x^5}$;	б) $y=\sqrt[3]{2-x^2\cdot\sqrt{x}}$;	в) $y=\frac{x^6}{6x^5-1}$;
	г) $y=2^{\mathrm{tg}3x}$;	д) $y=\ln^3\sin(3x+3)$;	е) $y=(\sqrt{x})^{\sin x}$.
194.	а) $y=12x^{14}+\frac{14}{x^2}-\sqrt[12]{x}$;	б) $y=\sqrt[3]{x^2+3x}$;	в) $y=\frac{x}{x^2+2}$;
	г) $y=\ln(2x^3+3x^2)$;	д) $y=5^{\frac{x}{x+1}}$;	е) $y=x^{\ln^2 x}$.
195.	а) $y=x^{15}+\frac{15}{x^2}-\sqrt{x}$;	б) $y=(5x+x^3)\cdot\ln(x^2)$;	в) $y=\frac{x\cdot\cos x}{1-\sin x}+2\sin 4x+4$;
	г) $y=0,7^{arctgx}$;	д) $y=\arccos\frac{1}{2x^2}$;	е) $y=x^{\sin\sqrt{x}}$.
196.	а) $y=2x^5+\frac{5}{x^2}-\sqrt[5]{2x}$;	б) $y=\sqrt[3]{\cos^2 x+x^2}$;	в) $y=\frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}}$;

	г) $y=7^{\ln^2 x}$;	д) $y=x\cdot\arccos x-\sqrt{2-x^3}$;	е) $y=(\sin 2x)^x$.
197.	а) $y=x^7+\dfrac{7}{x^3}-\sqrt[3]{7x}$;	б) $y=\dfrac{\sin x}{1+\ln(\sin x)}$;	в) $y=(5+x^3)^2\cdot e^{-x}$;
	г) $y=7^{\sqrt{\cos x}}$;	д) $y=2\sqrt{4x}-\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2+5}}$;	е) $y=(\arcsin x)^{(x^2)}$.
198.	а) $y=x^5+\dfrac{5}{x^3}-\sqrt[3]{5x}$;	б) $y=\dfrac{2\sin 5x}{1-\cos 3x}$;	в) $y=\arcsin(\cos x^2)+x^2$;
	г) $y=2^{\sin 3x}$;	д) $y=2tg^3(x^3+2)$;	е) $y=(x+1)^{(x^2)}$.
199.	а) $y=7x^2+\dfrac{x^5}{5}-\sqrt[5]{x}$;	б) $y=\ln(ctg^3 x)$;	в) $y=\dfrac{x^7}{x^5-2}$;
	г) $y=arctg(tg^2 x+2)$;	д) $y=2^{\frac{x}{1+x}}+7^{\cos 2x}$;	е) $y=(\sin\sqrt{x})^x$.
200.	а) $y=x^7-\dfrac{x^6}{6}+\sqrt[6]{x}$;	б) $y=\sqrt{x}-arctg(\sqrt{x})$;	в) $y=3x\cdot\sin^3 x-\cos^3 x$;
	д) $y=\ln^2(\sin 3x)$;	г) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;	е) $y=(3x)^{e^x}$.

Задания №201-220. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию *y= f(x)* и, используя результаты исследования, построить ее график.

201. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$

202. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

203. $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

204. $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$

205. $y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$

206. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

207. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

208. $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$

209. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$

210. $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$

211. $y=\dfrac{2x^2}{2x-1}$

212. $y=\dfrac{4x^3}{x^2+1}$

213. $y=\dfrac{4x^3-5}{x}$

214. $y=\dfrac{2x^2}{2x+1}$

215. $y=\dfrac{2-4x^2}{1+4x^2}$

216. $y=\dfrac{4x}{4-x^2}$

217. $y=\dfrac{8x}{(x-2)^2}$

218. $y=\dfrac{3x}{(x+2)^2}$

219. $y=\dfrac{5x}{(x-3)^2}$

220. $y=\dfrac{5x}{9-x^2}$

Задания № 221-240. Вычислить частные производные первого порядка, полный дифференциал.

221. $z = \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + 3y^2}$.

222. $z = arctg\frac{2x^2}{y^3}$.

223. $z = \arcsin\frac{xy}{y+1}$.

224. $z = e^{2x}(x^2 + y^2)$.

225. $z = \ln(x^3 + 2xy - y^3 + x^2 y)$.

226. $z = \frac{2}{arctg\frac{y}{x}}$.

227. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

228. $z = xy\ln(x + 3y)$.

229. $z = \sqrt{\ln xy} + xy$.

230. $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

231. $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$.

232. $z = \sqrt[3]{xy + y^2 + 5x^2}$.

233. $z = \sin(xy)\cos(xy)$.

234. $z = \arcsin(xy) + 6y + 7x$.

235. $z = \arcsin\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

236. $z = \sin(x + 5y) - \cos(xy + 1)$.

237. $z=\dfrac{2}{arctg\,\dfrac{y}{x}}$.

238. $z=\dfrac{xy}{x^2+5y^2}$.

239. $z=xy\ln(x-4y)$.

240. $z=xy\sin(x+3y)$.

Задания № 241-260. Найти указанные неопределенные интегралы:

241. а) $\int\dfrac{2+\sqrt[5]{x}-2x^2}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int e^{3x-8}dx$; в) $\int\dfrac{\ln^2(5x+7)}{5x+7}dx$; г) $\int\dfrac{x^2dx}{1+x^6}$.

242. а) $\int\dfrac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx$; б) $\int x\sin^2 xdx$; в) $\int\dfrac{\ln x}{x^2}dx$; г) $\int e^{x^5+5x}\left(x^4+1\right)dx$.

243.а) $\int\dfrac{3\sqrt{x}+7x^2-5}{2x^3}dx$; б) $\int\sin(7x-5)dx$; в) $\int\dfrac{dx}{x\left(2+\ln^2 x\right)}$; г) $\int e^{\sin 4x}\cdot\cos 4xdx$.

244. а) $\int\dfrac{2\sqrt{x}-x^3+3}{\sqrt[3]{x^5}}dx$; б) $\int e^{7-3x}dx$; в) $\int\dfrac{\sqrt[3]{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; г) $\int\dfrac{6x^5-\sin x}{x^6+\cos x}dx$.

245. а) $\int\dfrac{\sqrt[5]{x}-2x^6+5}{x^6}dx$; б) $\int\dfrac{dx}{\cos^2 5x}$; в) $\int\sqrt[5]{2-3\cos 5x}\cdot\sin 5xdx$; г) $\int\dfrac{e^{tg\,2x}}{\cos^2 2x}dx$.

246. а) $\int\dfrac{2x^5-\sqrt{x}+4x}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int e^{11x+2}dx$; в) $\int\dfrac{e^{3x}}{\left(1+e^{3x}\right)^2}dx$; г) $\int\cos\left(x^2+2\right)\cdot xdx$.

247. а) $\int\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+3x^5}{x^3}dx$; б) $\int\dfrac{arctgx}{1+x^2}dx$; в) $\int\dfrac{3x^2}{\sqrt{5-x^3}}dx$; г) $\int\sqrt{\cos x}\sin xdx$.

248. а) $\int\dfrac{5x^4-6\sqrt{x^5}+x}{\sqrt{x^3}}dx$; б) $\int\sqrt{x}\ln 3xdx$; в) $\int\dfrac{xdx}{\sin^2\left(5-6x^2\right)}$; г) $\int(\ln x)^3\,\dfrac{dx}{x}$.

249. а) $\int\dfrac{2x^3-\sqrt{x^3}+4x}{x^5}dx$; б) $\int e^{2-3x}dx$; в) $\int\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}dx$; г) $\int\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$.

250. а) $\int\dfrac{3x^5-\sqrt[5]{x}+2x}{x^3}dx$; б) $\int\dfrac{dx}{\sin^2 5x}$; в) $\int(8x-2)\sin 5xdx$; г) $\int\dfrac{\cos xdx}{3-\sin x}$.

251. а) $\int\dfrac{2+\sqrt[5]{x}-2x^2}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int(x-3)e^{-2x}dx$; в) $\int\dfrac{\ln^2(5x+7)}{5x+7}dx$; г) $\int\dfrac{x^2dx}{1+x^6}$.

252. а) $\int\dfrac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx$; б) $\int x\sin^2 xdx$; в) $\int\dfrac{\ln x}{x^2}dx$; г) $\int\ln xdx$.

253. а) $\int \frac{3\sqrt{x}+7x^2-5}{2x^5}dx$; б) $\int \ln x dx$; в) $\int \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$; г) $\int e^{\sin 3x}\cdot \cos 3x dx$.

254. а) $\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int \sqrt{\ln x}\cdot \frac{dx}{2x}$; в) $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; г) $\int \frac{4x^3-\sin x}{x^4+\cos x}dx$.

255. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5x}{x^2}dx$; б) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; в) $\int \sqrt[5]{2-3\cos 6x}\cdot \sin 6x dx$; г) $\int \frac{e^{ctg\, 2x}}{\sin^2 2x}dx$.

256. а) $\int \frac{6x^3-\sqrt{x}+8x^2}{\sqrt{x^3}}dx$; б) $\int \frac{x}{2x^4+5}dx$; в) $\int \frac{e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}dx$; г) $\int \cos\left(x^3+2\right)\cdot x^2 dx$.

257.а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+8}{x^5}dx$; б) $\int \frac{x}{2+x^4}dx$; в) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{5-x^3}}dx$; г) $\int \sqrt[3]{4-\sin 3x}\cdot \cos 3x dx$.

258. а) $\int \frac{12x^3-\sqrt{x^5}+x}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \sqrt{4x-3}dx$; в) $\int \frac{xdx}{\sin^2\left(5-6x^2\right)}$; г) $\int \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

259. а) $\int \frac{7x^3+\sqrt{x}+4x}{x^2}dx$; б) $\int e^{-x^2} x dx$; в) $\int \frac{\ln(x+3)}{x+3}dx$; г) $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx.$

260. а) $\int \frac{5x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x^3}dx$; б) $\int \sqrt{\ln x}\cdot \frac{dx}{x}$; в) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; г) $\int \frac{\cos x dx}{3-\sin x}$.

Задания №261-270. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной заданными параболами.

261. $y=\frac{1}{2}x^2-x+1;\ y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6$.

262. $y=\frac{1}{2}x^2+x+2$; $y=-\frac{1}{2}x^2-5x+7.$

263. $y=\frac{1}{3}x^2-3x+2;\ y=-\frac{2}{3}x^2-2x+4.$

264. $y=2x^2+6x-3;\quad y=-x^2+x+5.$

265. $y=3x^2-5x-1;\ y=-x^2+2x+1.$

266. $y=x^2-3x-1;\ y=-x^2-2x+5.$

267. $y=2x^2-6x+1;\ y=-x^2+x-1.$

268. $y=\frac{1}{3}x^2-2x+4;\ y=-\frac{2}{3}x^2-x+2.$

269. $y=x^2-5x-3;\ y=-3x^2+2x-1.$

270. $y = x^2 - 2x - 5;\ y = -x^2 - x + 1.$

Задания №271-280. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями

271. $y = x^3; y = \sqrt{x}$.

272. $y = x^2 + 2; y = 4 - x^2$.

273. $y = x^2 - 4x + 4; y = x$.

274. $y = -x^2 + 2x; y = -x$

275. $y = -x^2 + 1; y = x - 1$.

276. $y = 3x^2 + 1; y = 3x + 7$.

277. $y = \frac{x^2}{4}; y^2 = 4x$.

278. $y = \frac{x^2}{2}; y = 4 - x$.

279. $y = \frac{5}{x}; y = 6 - x$.

280. $y = -x^2 + 1; y = x - 1$.

Задачи №281-300. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y = y_0$ при $x = x_0$

281. $y' + 3x^2 y = x^3 e^{-x^3}, \quad y(0) = 0$

282. $y' \sin x - y \cos x = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

283. $y' - yctgx = \frac{1}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

284. $(y^3 + 1)dy = xydx, \quad y(0) = 1$

285. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4$

291. $y' = (2y + 1)ctgx, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

292. $xy' - y = x^2 \sin x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

293. $y' \cos^2 x + y = tgx, \quad y(0) = -1$

294. $y' + \frac{1}{x} y = xy^2, \quad y(1) = 1$

295. $y' - 2y = e^{2x}, \quad x_0 = 0, y_0 = 2$

286. $y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3$

287. $(x^2+1)dy = xydx, \quad y(0) = 1$

288. $y' + 3y = e^{2x}, \quad y(0) = \frac{6}{5}$

289. $(xy^2 + x)dx + (x^2 y - y)dy = 0, \quad y(0) = 1$

290. $y' - \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1$

296. $y'\cos x + y \cdot \sin x = 1, x_o = \pi, \ y_0 = 3$

297. $y' + 2xy = x \ln x e^{-x^2}, \quad y(1) = 0$

298. $xy' - y = y^2 \cdot \sin x, \quad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

299. $y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}, \quad y(0) = 0$

300. $\left(1+x^2\right)y' + y = y^2 arctgx, \quad y(0) = 1$

Задачи № 301-320. Найти: а) частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее заданным начальным условиям $x = x_0, y = y_0, y' = y_0'$; б) общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

301. а) $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$; б) $y'' - 5y' = 4x + 3$.

302. а) $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$; б) $y'' - 2y' + 2y = x^2$.

303.а) $y'' - 7y' + 10y = 0; \ y(0) = 2; \ y'(0) = -1;$ б) $y'' - 2y' = 3x^2 + 1$.

304. а) $y'' + 2y' + 5 = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$; б) $y'' - y = e^{-x}$.

305.а) $y'' + 2y' + 10y = 0; \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$ б) $y'' + 4y = 8e^{2x}$.

306. а) $y'' - 6y' + 9y = 0; \ y(0) = 1; \ y'(0) = 0;$ б) $y'' - y = xe^x$.

307. а) $y'' + 8y' + 7y = 0; \ y(0) = 2; \ y'(0) = 1;$ б) $y'' - 7y' + 12y = e^{2x}$.

308. а) $y'' + 9y = 0; \quad y(\pi) = 0; \quad y'(\pi) = 1;$ б) $y'' - 7y' + 12y = x$.

309. а) $y'' - 7y' + 12y = 0; \ y(0) = 2; \quad y'(0) = -2;$ б) $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{-x}$.

310. а) $y'' + 9y' = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -3;$ б) $y'' + 8y' = (x-1)e^{2x}$.

311. а) $y'' - 3y' + 2y = 0; \ y(0) = 0; \quad y'(0) = 1;$ б) $y'' - 6y' + 8y = 3e^{4x}$.

312. а) $y'' - 2y' + 5y = 0; \ y(0) = -1; \quad y'(0) = 0;$ б) $y'' - 2y' - 3y = xe^{-x}$.

313. а) $y'' - 5y' + 6y = 0; \ y(0) = 5; \quad y'(0) = 0;$ б) $y'' + y' - 2y = (x+2)e^{-2x}$.

314. а) $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(2) = 1, \quad y'(2) = -2;$ б) $y'' + 2y' - 8y = (3x+1)e^{2x},$

315. а) $y'' - 3y' + 2y = 0;\ \ y(0) = 3; \quad y'(0) = 4;$ б) $y'' + 7y' = 2x^2 + x.$

316. а) $y'' - 2y' + y = 0;\ \ y(0) = 1; \quad y'(0) = 0;$ б) $y'' - y' = 8x^2 e^x.$

317. а) $y'' - 2y' + 2y = 0;\ \ y(0) = 1; \quad y'(0) = 1;$ б) $y'' + 3y' - 10y = 2x^2 e^x.$

318. а) $y'' + 4y' + 5y = 0,\ y(0) = -3, \quad y'(0) = 0;$ б) $y'' + 2y' + y = e^x.$

319. а) $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y(0) = -3, \quad y'(0) = 0;$ б) $y'' + y' - 2y = 6e^x.$

320. а) $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$ б) $y'' - 3y' + 2y = e^x.$

Задачи № 321-340. Исследовать сходимость ряда: а) по признаку Даламбера; б) по радикальному или интегральному признаку Коши; в) на абсолютную или условную сходимость

321. $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!};\ \ б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n;\ \ в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}.$

322. $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!};\ \ б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^n;\ \ в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}.$

323. $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n-1}}{3^{5n+1}};\ \ б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^n;\ \ в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}.$

324. $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n \cdot 3^n};\ \ б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^n;\ \ в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}.$

325. $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n};\ \ б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;\ \ в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}.$

326. $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!};\ \ б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2+\frac{3}{n}}\right)^n;\ \ в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)\cdot 3^n}.$

327. $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5};\ \ б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+8}{4n-1}\right)^n;\ \ в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 5^n}.$

328. $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n};\ \ б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n;\ \ в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n}{6n-5}.$

329. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{4^n}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n\cdot\sin^n\frac{1}{2n}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

330. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{4^n}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}$.

331. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{3^n}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

332. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3n)!}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n)^2}$.

333. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; *б*) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\cdot\ln n}\right)$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2+1}{2n^2+3}$.

334. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)^n$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{(n+1)^n}$.

335. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)^3}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n}{6n-5}$.

336. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^5}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{2n}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} 3^n}{n^3}$.

337. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)\cdot 3^{n+1}}{n^2-1}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} 3^n}{(2n-1)^n}$.

338. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n)!}$; *б*) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+2)^2}}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$.

339. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{10}}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{9n-10}\right)^n$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} 3^n}{n^3}$.

340. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}\cdot(2n-1)}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+12}{7n^2+2n}\right)^n$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} 3^n}{(2n-1)^n}$.

Задачи № 341-360. Найти область сходимости степенного ряда.

341. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3n+2}$. 342. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}$. 343. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4n-1}$. 344. $\sum_{n=1}^{\infty}10^n x^n$.

345. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$. 346. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$. 347. $\sum_{n=1}^{\infty}7^n x^n$. 348. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$.

349. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!x^n}{n(n!)^2}$. 350. $\sum_{n=1}^{\infty}3^n x^n$. 351. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^{n-1}}$. 352. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

353. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n^n}{e^n n!}$.   354. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^n}{n^2 e^n}$.   355. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3n-1}$.   356. $\sum_{n=1}^{\infty}5^n x^n$.

357. $\sum_{n=1}^{\infty}8^n x^n$.   358. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5n+3}$.   359. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{7^{n-1}}$.   360. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4n}$.

Задачи №361-380. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем разложения подынтегральной функции в ряд Маклорена и почленного интегрирования этого ряда:

361. $\int_0^{0.5}\sqrt{1+x^3}\,dx$.   362. $\int_0^{0.25}\frac{\sin 2x}{x}dx$.   363. $\int_0^{1}\cos x^2 dx$.   364. $\int_0^{0.2}\frac{\sin x}{x}dx$.

365. $\int_0^{0.1}\frac{1-e^x}{x}dx$.   366. $\int_0^{0.1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ 367. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{x}dx$.   368. $\int_0^{\frac{1}{10}}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

369. $\int_0^{1}\sin x^2 dx$.   370. $\int_0^{0.5}\cos\frac{x^2}{4}dx$.   371. $\int_0^{1/3}e^{\frac{x^2}{2}}dx$.   372. $\int_0^{\frac{1}{4}}e^{-x^2}dx$.

373. $\int_0^{0,25}e^{-x^2}dx$.   374. $\int_0^{1}x\cdot\cos\sqrt{x}dx$.   375. $\int_0^{\frac{1}{9}}\sqrt{x}e^x dx$.   376. $\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^2}dx$.

377. $\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.   378. $\int_0^{\frac{1}{8}}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.   379. $\int_0^{1}\sqrt[3]{x}\cdot\cos x dx$. 380 $\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Контрольные вопросы к аттестации по предмету

1. Определители и их свойства.
2. Матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица.
3. Решение систем линейных уравнений разными методами.
4. Понятие векторной величины.
5. Линейные операции над векторами.
6. Угол между векторами. Проекция вектора на ось.
7. Линейно зависимые и линейно независимые векторы. Базис векторного пространства.
8. Скалярное произведение двух векторов и его основные свойства.
9. Основные задачи пространства.
10. Векторное произведение и его основные свойства.
11. Смешанное произведение и его основные свойства.
12. Уравнение линии на плоскости.
13. Способы задания прямой на плоскости.
14. Плоскость. Взаимное расположение прямой и плоскости.
15. Эллипс, каноническое уравнение, построение и эксцентриситет эллипса.
16. Гипербола, каноническое уравнение, построение и эксцентриситет гиперболы.
17. Парабола.
18. Комплексные числа, действия с ними. Изображение комплексных чисел на плоскости.
19. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа.
20. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа. Корни из комплексных чисел.
21. Понятие постоянной и переменной величин, примеры. Понятие множества.

22. Функция с одной и двумя переменными. Область определения функции и область значения функции.

23. Способы задания функции. Основные свойства функции. Понятие сложной функции.

24. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.

25. Предел функции. Бесконечно малые величины и их свойства.

26. Теоремы о пределах.

27. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ в алгебраических выражениях.

28. Первый и второй замечательный пределы.

29. Непрерывность функции в точке, на интервале.

30. Приращение функции и приращение аргумента. Задачи, приводящие к понятию производной.

31. Определение производной. Ее геометрический и физический смысл.

32. Общее правило вычисления производной по определению.

33. Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций.

34. Дифференцирование сложной функции, неявных функций.

35. Производные высших порядков.

36. Дифференциал функции. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

37. Признаки постоянства и признаки монотонности функции.

38. Точки экстремума функции. Условия существования экстремума функции.

39. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба функции.

40. Асимптоты функции

41. Понятие функции с двумя переменными. Область определения, область значения функции, график функции с двумя переменными.

42. Полное приращение функции двух переменных. Предел и непрерывность функции с двумя переменными. Частные производные.

43. Частные производные высших порядков.

44. Дифференциал функции с двумя переменными.

45. Экстремум функции с двумя переменными.

46. Первообразная функции и неопределенный интеграл.

47. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов.

48. Методы интегрирования: непосредственное, подведение функции под знак дифференциала, замены переменной, по частям.

49. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

50. Понятие определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла и его свойства.

51. Методы интегрирования в определенном интеграле.

52. Определенный интеграл с переменным верхним пределом.

53. Несобственные интегралы.

54. Приложения определенного интеграла к решению геометрических задач.

55. Понятие функции с двумя переменными. Область определения, область значения функции, график функции с двумя переменными.

56. Полное приращение функции двух переменных. Предел и непрерывность функции с двумя переменными. Частные производные.

57. Частные производные высших порядков.

58. Дифференциал функции с двумя переменными.

59. Экстремум функции с двумя переменными.

60. Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения.

61. Понятие дифференциального уравнения.

62. Д.у. первого порядка с разделяющимися переменными.

63. Однородные уравнения первого порядка.

64. Линейные д.у. первого порядка.

65. Линейные однородные д.у. второго порядка с постоянными коэффициентами.

66. Числовые ряды. Основные понятия. Сходимость ряда.

67. Необходимый признак сходимости. Признаки сравнения числовых рядов.

68. Признаки сходимости Даламбера и Коши.

69. Знакочередующиеся ряды.

70. Степенные ряды.

Ответы к тестам

Раздел I.

1. б, 2. в, 3. б, 4. а, 5. г, 6. г, 7. г, 8. а, 9. а, 10.б.

Раздел II.

1) 5, 2) 5, 3)1, 4) 2, 5) 5, 6) 4, 7) 3, 8) 2, 9) 1, 10) 2.

Раздел III.

1. а, 2. а, 3. а, 4. а, 5. а, 6.а, 7. б, 8. а, 9. а, 10. в, 11. а, 12. а, 13. а, 14. а, 15. в.

Раздел IV.

1. в, 2. а, 3. г, 4. б, 5. г, 6. г, 7. б, 8. в, 9. в, 10. г, 11. г.

Раздел V.

1. г, 2. а, 3. б, 4.а, в, 5. в, 6. г, 7. б, в, 8. г, 9. в, 10. а, 11. г, 12. б, 13. в, 14.а, 15. в, 16. г.

Раздел VI.

1. а, 2. а, 3. в, 4. г, 5. а, 6. г, 7. а, 8. а, 9. а, 10. г, 11. а, 12. а, 13. а, 14. а, 15. в, 16. а,

Раздел VII.

1. в, 2. г, 3. а, 4. г, 5. в, 6. а, б, 7. д, 8. а, 9, б.