МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ
СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

В.Н. Агуленко

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Часть II

Новосибирск 2003

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ

**СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ**

В.Н. Агуленко

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Часть II

Допущено региональным отделением УМО
Ассоциации строительных вузов в качестве
учебного пособия

Новосибирск 2003

УДК 539.3.8
А272

Агуленко В.Н. Сопротивление материалов: Учебное пособие. Ч. II – Новосибирск: Изд-во СГУПСа, 2003. – 159 с.

ISBN 5-93461-133-X

Учебное пособие содержит необходимый краткий теоретический материал, решение стандартных примеров и задания к контрольным работам для заочников.

При составлении учебного пособия использованы изданные в 1987–1988 гг. «Методические указания…» (авторы В.Н. Агуленко и В.И. Окунцов), которые были переработаны, дополнены и исправлены канд. техн. наук, доц. В.Н. Агуленко.

Ответственный редактор
канд. техн. наук, доц. *П.В. Грес*

Р е ц е н з е н т ы:

Кафедра «Строительная механика» Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (завкафедрой д-р техн. наук, проф. *Г.И. Гребенюк*)

Профессор кафедры «Сопротивление материалов и ПТМ» Новосибирской государственной академии водного транспорта д-р техн. наук *А.С. Ракин*

ISBN 5-93461-133-X

Учебное издание

Агуленко Виктор Николаевич

Сопротивление материалов

Учебное пособие

Часть II

Редактор *Л.В. Лебедева*
Рисунки *З.Е. Тихомировой*
Компьютерная верстка *А.С. Петренко*

Изд. лиц. ЛР № 021277 от 06.04.98.
Подписано в печать 20.12.2003.
10,0 печ. л., 9,25 уч.-изд. л. Тираж 700 экз. Заказ № 1054.

Издательство Сибирского государственного
университета путей сообщения
630049, Новосибирск, ул. Д. Ковальчук, 191.
Тел./факс: (383-2) 287-381. E-mail: press@stu.ru

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие написано на основе накопленного кафедрой «Строительная механика» Сибирского государственного университета путей сообщения многолетнего опыта использования Методических указаний к выполнению контрольных работ по сопротивлению материалов для студентов заочного факультета.

Учебное пособие состоит из двух частей, что соответствует программе курса, читаемого для большинства технических специальностей в двух семестрах.

Для лучшего усвоения студентами материала дисциплины в учебном пособии изложены основные понятия и необходимые формулы, рассмотрен порядок решения типовых задач, приведены некоторые справочные данные и задания к контрольным работам.

Для более глубокого изучения вопросов сопротивления материалов даны ссылки на учебники и приведен список рекомендуемой литературы. Все это облегчит студентам освоение теоретического и практического материала и будет полезно при самостоятельном изучении дисциплины.

Автор выражает глубокую признательность рецензентам — д-рам техн. наук, проф. Г.И. Гребенюку и А.С. Ракину, а также сотрудникам кафедры «Строительная механика» СГУПСа — проф. М.Х. Ахметзянову, доцентам П.В. Гресу, В.М. Тихомирову и А.П. Шабанову за ценные замечания и рекомендации, которые были учтены при завершении работы над рукописью.

Все замечания и пожелания направлять по адресу: 630049, г. Новосибирск, ул. Д. Ковальчук, 191, каф. «Строительная механика».

Автор

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Каждый студент выполняет контрольные работы в соответствии со специальностью и своим шифром.

Специальность	Номера задач		
	Контрольная работа № 3	Контрольная работа № 4	Контрольная работа № 5
СЖД, МТ, АД, СУ, УМТ	1, 2, 3	4, 5, 6	8, 10, 13, 14
ПГС, ВВ, УП	1, 2, 3	4, 5, 6	8, 13, 14
СДМ, СТЭМ, ТМ, УСМ	1, 2, 3	4, 5, 7	8, 9, 11, 12, 14
УПП, УУ, ВУ	8, 10, 12		
ССУ, УБТ	8, 10, 12		

Задачи к контрольным работам приведены на с. 136–158. Схемы и исходные данные взять к каждой задаче в соответствии с личным шифром и первыми шестью буквами русского алфавита.

Например: Шифр 99–П–5.

а	*б*	*в*	*г*	*д*	*е*
0	5	0	5	0	5

Более подробно порядок выбора данных и требования к оформлению контрольных работ описаны в I части учебного пособия [10].

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. *Ахметзянов М.Х.*, *Лазарев И.Б.* Сопротивление материалов. Новосибирск: СГУПС, 1997. 300 с.
2. *Смирнов А.Ф.* и др. Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 1969. 600 с.

Дополнительная

3. *Александров А.В.*, *Потапов В.Д.*, *Державин Б.П.* Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 1995. 560 с.
4. *Беляев Н.М.* Сопротивление материалов. М.: ГИТТЛ, 1958. 856 с.
5. *Дарков А.В.*, *Шпиро Г.С.* Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 1975. 654 с.
6. *Любошиц М.И.*, *Ицкович Г.М.* Справочник по сопротивлению материалов. Минск: Вышэйшая. шк., 1969. 462 с.
7. *Миролюбов И.Н.* и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. М.: Высш. шк., 1985. 399 с.
8. *Снитко Н.К.* Сопротивление материалов. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. 368 с.
9. *Строительные* нормы и правила. СНиП 2.05.03-84*. Мосты и трубы. М., 1996. 213 с.
10. *Агуленко В.Н.* Сопротивление материалов: Учеб. пособие. Ч. I. Новосибирск: Изд-во СГУПСа, 2003. 104 с.

ТЕМА 12

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ. МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Теория: [1], гл. 7, § 7.1, 7.2, 7.4;
[2], гл. 9, § 78, 79, 81.

Чтобы судить о работе изгибаемых балок, недостаточно знать только напряжения, так как весьма прочные балки могут оказаться непригодными к эксплуатации из-за недостаточной жесткости. Проверка жесткости сводится к требованию, по которому наибольший прогиб $v_{\max}$ не должен превышать определенной доли пролета балки:

$$v_{\max} = \frac{1}{m}, \tag{12.1}$$

где m — устанавливается нормами проектирования, обычно в пределах от 200 до 1000.

Отсюда видно, что прогибы, как правило, малы по сравнению с пролетом балки, что позволяет ввести некоторые упрощения:

1) при малых прогибах угол наклона касательной к изогнутой оси балки можно определять как

$$\theta \approx \operatorname{tg}\theta = \frac{dv}{dx}; \tag{12.2}$$

2) горизонтальными перемещениями точек оси балки можно пренебречь, так как они по сравнению с вертикальными прогибами v будут величинами второго порядка малости.

Для определения деформаций необходимо получить уравнение изогнутой оси балки:

$$v = v(x). \tag{12.3}$$

Для этого используют зависимость, связывающую радиус кривизны нейтрального слоя балки ρ с изгибающим моментом $M(x)$ в том же сечении,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EJ}, \tag{12.4}$$

где EJ — жесткость балки при изгибе.

Используя известные в математике зависимости, получают приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \pm \frac{M}{EJ}. \tag{12.5}$$

Знак кривизны зависит от направления осей координат. Если ось y направлена вверх, то положительному моменту соответствует положительная кривизна, а отрицательному — отрицательная кривизна. *Прогиб считают положительным, когда он совпадает с положительным направлением оси y, а угол поворота* $\theta > 0$ — *против хода часовой стрелки.*

Решение дифференциального уравнения (12.5) возможно разными методами. Для стандартных балок и нагрузок можно использовать таблицы для вычисления v_{max} и θ_{max} (прил. 2, табл. П 2.1).

Рассмотрим два аналитических метода определения прогибов и углов поворота сечений при изгибе балок:

1) метод начальных параметров;

2) метод единичных нагрузок — метод Максвелла–Мора.

Метод начальных параметров

В методе начальных параметров используют *универсальное уравнение изогнутой оси балки* в виде:

$$EJv_{(x)} = EJv_0 + EJ\theta_0 x + \Sigma m \frac{(x - a_i)^2}{2!} + \\ + \Sigma P \frac{(x - a_i)^3}{3!} + \Sigma q \frac{(x - a_i)^4}{4!}. \tag{12.6}$$

Здесь v_0 и θ_0 — прогиб и угол поворота сечения, где выбрано начало координат (левый конец балки), их называют начальными параметрами; a_i — расстояние от начала координат до точки приложения сосредоточенного момента, сосредоточенной силы или начала распределенной нагрузки на соответствующем участке.

Эта формула указывает, каким образом отражается в записи уравнения изогнутой оси балки любая возможная нагрузка, расположенная между началом координат и сечением x, в котором определяем прогиб.

Для составления уравнения изогнутой оси балки необходимо учитывать следующее:

1. Начало координат рекомендуется взять на левом конце балки.

2. Отсчет координаты x на всех участках балки вести от начала координат.

3. Записать два первых слагаемых универсальной формулы, содержащих начальные параметры, т.е. $EJv_0 + EJ\theta_0 x$.

4. Мысленно передвигая сечение вдоль балки от начала координат до произвольного сечения, последовательно записать в уравнение слагаемые, соответствующие всем силовым воздействиям (m, P, q), которые имеются на балке, в том числе и расположенным в начале координат.

Каждое слагаемое должно записываться со знаком, соответствующим знаку изгибающего момента (см. правило знаков для плоского изгиба [10]).

5. При переходе на следующий участок должно добавляться слагаемое, содержащее множитель $(x - a_i)$.

6. При наличии на балке распределенной нагрузки q, не доходящей до конца балки, ее продолжают до конца (в сторону возрастания x), компенсируя нагрузкой той же интенсивности q, но обратного направления (рис. 12.1). Следовательно, переходя через конец участка с нагрузкой q, необходимо отразить в уравнении изогнутой оси распределенную нагрузку слагаемым $q(x - a_i)^4 / 24$ со знаком, противоположным тому, что был взят для начала участка с нагрузкой q.

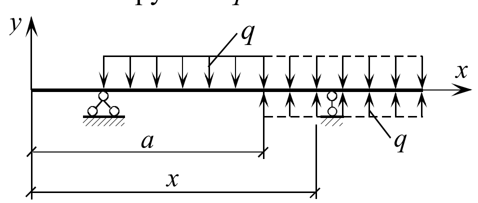


Рис. 12.1

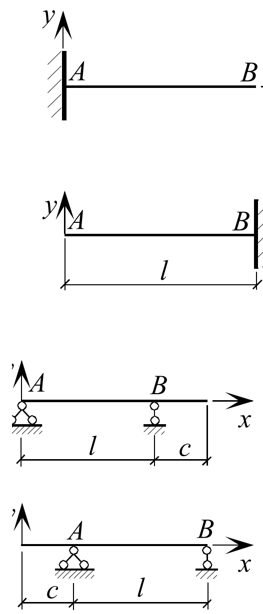
7. Используя дифференциальную зависимость

$$\frac{dv}{dx} = \theta, \tag{12.7}$$

легко получить уравнение для определения углов поворота сечений. Продифференцировав уравнение (12.6), получим:

$$EJ\theta_{(x)} = EJ\theta_0 + \Sigma m \frac{(x-a_i)}{1!} + \Sigma P \frac{(x-a_i)^2}{2!} + \Sigma q \frac{(x-a_i)^3}{3!}. \tag{12.8}$$

8. Начальные параметры EJv_0 и $EJ\theta_0$ определяют из начальных (граничных) условий, которые зависят от способа закрепления балки (рис. 12.2).



При $x = 0$
1) $v_A = 0$;
2) $\theta_A = 0$

При $x = l$
1) $v_B = 0$;
2) $\theta_B = 0$

При $x = 0$
$v_A = 0$
При $x = l$
$v_B = 0$

При $x = c$
$v_A = 0.$
При $x = c + l$
$v_B = 0$

Рис. 12.2

9. У каждого члена формул (12.6) и (12.8) знаменатель есть факториал показателя степени x или $(x - a_i)$.

10. При выражении нагрузки в Н или кН, а расстояний в м — единицы физической величины каждого члена формулы (12.6) —

кН·м^3, а формулы (12.8) — кН·м^2. Если их разделить на изгибную жесткость балки EJ, то получим прогиб v в м, а угол поворота θ в рад.

Пример 12.1. Для балки на двух опорах с консолями (рис. 12.3) подобрать сечение в виде двутавра (R = 210 МПа) и найти по методу начальных параметров линейные и угловые перемещения для сечений № 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Построить в масштабе эпюру прогибов (изогнутую ось балки).

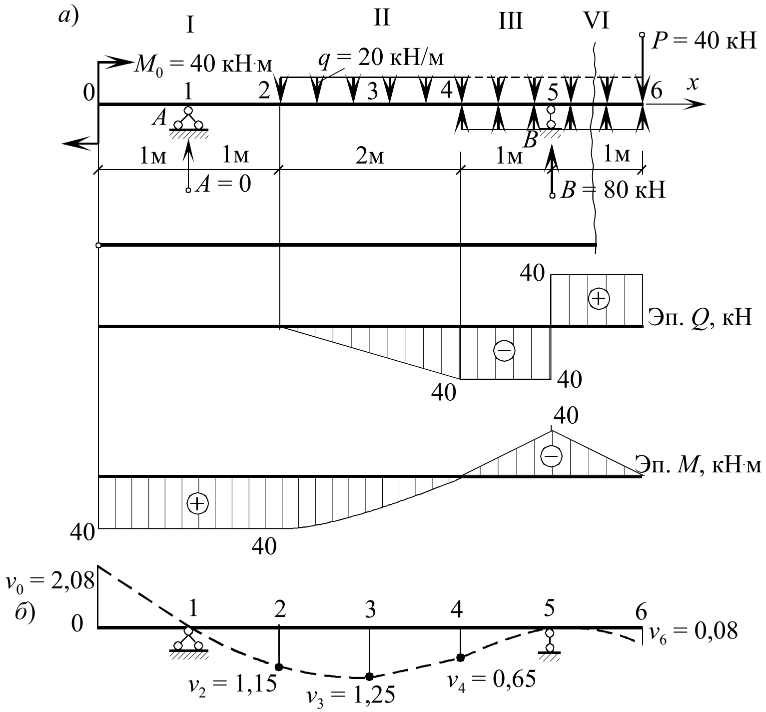


Рис. 12.3

Решение. Определив опорные реакции A = 0, B = 80 кН, строим эпюры Q и M, после чего переходим к подбору сечения балки, найдя предварительно для нее требуемый момент сопротивления:

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{R} = \frac{40 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0{,}191 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 191 \text{ см}^3.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 20*а*, для которого $W_z =$ $= 203$ см^3 и $J_z = 2030$ см^4.

Приняв начало координат на левом конце балки, направляем ось x вправо. Распределенную нагрузку продолжим до конца балки и компенсируем такой же нагрузкой обратного направления. Так как $A = 0$, то на балке рассматриваем четыре участка. Записываем уравнение для прогибов в произвольном сечении x по участкам:

$$EJv_x = EJv_0 + EJ\theta_0 x +$$

$$+ M_0 \frac{x^2}{2}\Big|_{\mathrm{I}} - q\frac{(x-2)^4}{24}\Big|_{\mathrm{II}} + \frac{q(x-4)^4}{24}\Big|_{\mathrm{III}} + B\frac{(x-5)^3}{6}\Big|_{\mathrm{IV}}.$$

Здесь EJv_0 и $EJ\theta_0$ — начальные параметры, подлежащие определению из граничных условий. Если подставим в правую часть уравнения сосредоточенные силы в кН, изгибающие моменты — кН·м, интенсивность распределенной нагрузки — кН/м, получим:

$$EJv_x = EJv_0 + E\theta_0 x +$$

$$+ 20x^2\Big|_{\mathrm{I}} - \frac{20 \cdot (x-2)^4}{24}\Big|_{\mathrm{II}} + \frac{20 \cdot (x-4)^4}{24}\Big|_{\mathrm{III}} + \frac{80}{6}(x-5)^3\Big|_{\mathrm{IV}}.$$

Это уравнение используем дважды — для определения начальных параметров EJv_0 и $EJ\theta_0$, взяв в качестве граничных условий равенство прогибов нулю на опоре A (при $x = 1$ м) и на опоре B (при $x = 5$ м). При $x = 1$ (I участок):

$$EJv_A = EJv_0 + EJ\theta_0 x + 20x^2 = 0 \text{ или } EJv_0 + EJ\theta_0 = -20. \quad (a)$$

При $x = 5$ м (III участок):

$$EJv_B = EJv_0 + EJ\theta_0 x + 20x^2 - \frac{20(x-2)^4}{24} + \frac{20(x-4)^4}{24} = 0$$

$$\text{или } 0{,}3EJv_0 + 1{,}5EJ\theta_0 = -130\,. \qquad (б)$$

Решая систему уравнений (*а*) и (*б*) совместно, найдем:

$$EJv_0 = \frac{250}{3}\ \text{кН}\cdot\text{м}^3 = \frac{25}{3}10^4\ \text{Н}\cdot\text{м}^3;$$

$$EJ\theta_0 = -\frac{310}{3}\ \text{кН}\cdot\text{м}^3 = -\frac{31}{3}\cdot 10^4\ \text{Н}\cdot\text{м}^2.$$

Запишем в окончательном виде уравнение прогибов

$$EJv_x = \frac{250}{3} - \frac{310}{3}x +$$

$$+20x^2 \Big|_{\mathrm{I}} - \frac{20(x-2)^4}{24}\Big|_{\mathrm{II}} + \frac{20(x-4)^4}{24}\Big|_{\mathrm{III}} + \frac{80}{6}(x-5)^3\Big|_{\mathrm{IV}}. \qquad (в)$$

Продифференцировав (*в*), получим уравнение углов поворота:

$$EJ\theta_x = -\frac{310}{3} + 40x\Big|_{\mathrm{I}} - \frac{20(x-2)^3}{6}\Big|_{\mathrm{II}} + \frac{20(x-4)^3}{6}\Big|_{\mathrm{III}} + \frac{80}{2}(x-5)^2\Big|_{\mathrm{IV}}. \quad (г)$$

Формулы (*в*) и (*г*) дают возможность определять прогибы и углы поворота любого сечения балки.

Найдем прогибы сечений 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Сечение 0 (I участок):

$$x = 0\,;\ EJv_0 = \frac{250}{3}\ \text{кН}\cdot\text{м}^3;$$

$$v_0 = \frac{250}{3EJ} = \frac{250\cdot 10^3\ \text{Н}\cdot\text{ì}^5}{3\cdot 2\cdot 10^{11}\ \text{Í}\ \cdot 2030\cdot 10^{-8}\ \text{ì}^4} = \frac{25}{12{,}18}\ \text{ñì} = 2{,}08\ \text{ñì}\ \ (\text{âåðõ})\,;$$

$$EJ\theta_0 = -\frac{310}{3}\text{кН}\cdot\text{м}^2\,;$$

$$\theta_0 = -\frac{310}{3EJ} = -\frac{310\cdot 10^3\ \text{Н}\cdot\text{ì}^4}{3\cdot 2\cdot 10^{11}\ \text{Í}\ \cdot 2030\cdot 10^{-8}\ \text{ì}^4} = -0{,}025\ \text{ðàä}$$

(по часовой стрелке).

Сечение 1 (I участок):

$$x = 1 \text{ м}; \; v_1 = 0 \text{ (опора } A);$$

$$EJ\theta_1 = -\frac{310}{3} + 40 = -\frac{190}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\theta_1 = -\frac{190}{3EJ} = -\frac{190 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^4}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \text{ Н} \cdot 2030 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = -0{,}013 \text{ рад}$$

(по часовой стрелке).

Далее находим аналогично:

$v_2 = -$ 1,15 см	$\theta_2 = -$ 0,0054 рад
$v_3 = -$ 1,25 см	$\theta_3 =$ 0,0030 рад
$v_4 = -$ 0,65 см	$\theta_4 =$ 0,0067 рад
$v_5 = 0$ (опора B)	$\theta_5 =$ 0,0022 рад
$v_6 = -$ 0,08 см (вниз);	$\theta_6 = -$ 0,0028 рад.

Откладывая прогибы в некотором масштабе, строим изогнутую ось балки. Максимальный прогиб будет на левом конце балки — v_{max} = 2,08 см.

Указание. Изучив данную тему, можно решать задачу № 1 контрольной работы.

ТЕМА 13

МЕТОД ЕДИНИЧНЫХ НАГРУЗОК — МЕТОД МАКСВЕЛЛА–МОРА

Теория: [1], гл. 7, § 7.5;
[3], гл. 8, § 8.9.

Во многих случаях при расчетах не требуется находить функции перемещений, а достаточно вычислить лишь перемещения в конкретных точках конструкции по фиксированным направлениям. Именно эта задача успешно решается методом Максвелла–Мора.

При определении перемещений рассматривают два состояния системы — *грузовое* (от заданных нагрузок) и вспомогательное — *единичное* состояние (от $P = 1$ при определении прогибов и $m = 1$ — при определении углов поворота сечений, рис. 13.1).

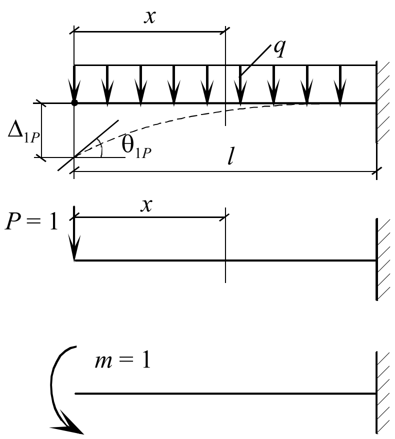


Рис. 13.1

Условимся о стандартном обозначении перемещений — используем двухиндексную систему обозначений Δ_{ij}. Здесь первый индекс (буква или цифра) *указывает адрес (сечение)*, где определяют перемещения; второй индекс *указывает причину*, вызвавшую перемещение.

В методе единичных нагрузок определение перемещений точек балочной системы сводится к статической задаче, а именно, к построению эпюр моментов в грузовом M_p и единичном M_i состояниях и последующему вычислению интеграла Максвелла–Мора в виде:

$$\Delta_{ip} = \int_0^l \frac{M_p M_i}{EJ} dx . \tag{13.1}$$

Интеграл Максвелла–Мора может быть вычислен по формуле Симпсона или по способу Верещагина.

Способом Верещагина можно пользоваться в тех случаях, когда хотя бы одна из эпюр имеет прямолинейное очертание (рис. 13.2). В этом случае интеграл Максвелла–Мора равен произведению площади грузовой эпюры ω_P и ординаты y_c на прямолинейной эпюре, взятой под центром тяжести грузовой эпюры,

$$\Delta_{iP} = \int_l \frac{M_P M_i dx}{EJ} = \omega_P y_c . \tag{13.2}$$

Справочные данные о площадях и положении центра тяжести часто встречающихся эпюр приведены в приложении (табл. П 2.2).

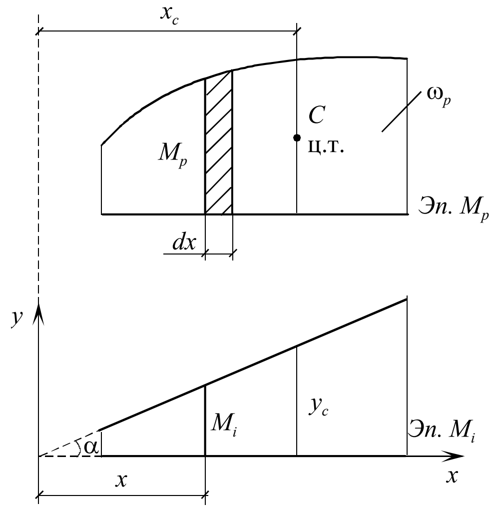


Рис. 13.2

Результат будет положительным, если обе эпюры одного знака, и отрицательным, если на эпюрах разные знаки. Положительный результат «перемножения» эпюр означает, что направление перемещения совпадает с выбранным направлением единичной силы $P = 1$ (при вычислении прогибов) или единичного момента $m = 1$ (при вычислении угла поворота сечения).

Для стержней с разной жесткостью вычисления по правилу Верещагина проводят для каждого участка отдельно (со своим значением жесткости EJ), а затем результаты суммируют.

Формула Симпсона. Интеграл Максвелла–Мора на участках постоянной жесткости $EJ = \text{const}$ может быть вычислен по формуле Симпсона, имеющей вид:

$$\Delta_{iP} = \int\limits_l \frac{M_p M_i}{EJ} dx = \frac{l}{6EJ}\left(ac + 4he + bd\right). \qquad (13.3)$$

Как видим, в скобках записана сумма произведений крайних ординат обеих эпюр и учетверенное произведение средних ординат (с учетом знаков).

Формула Симпсона дает точный результат как для случая «сопряжения» двух прямолинейных эпюр (рис. 13.3, *а*), так и для случая «сопряжения» квадратной параболы с прямой (рис. 13.3, *б*). Напомним, что средние ординаты на прямолинейных участках эпюр легко находятся как полусуммы крайних ординат, а на криволинейных участках средние ординаты должны быть вычислены по уравнениям квадратной параболы.

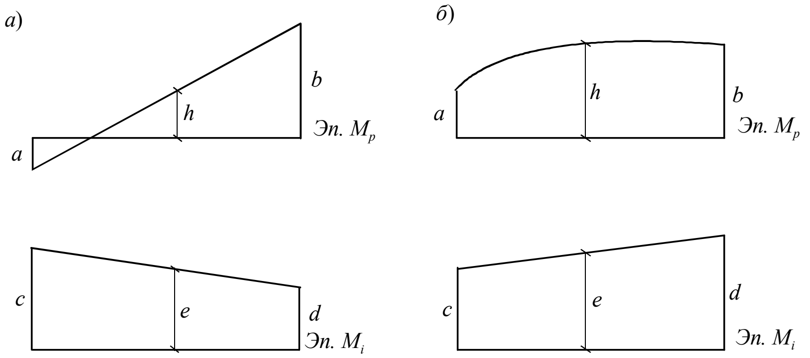


Рис. 13.3

Пример 13.1. Требуется определить прогиб и угол поворота свободного конца консольной балки постоянного сечения (рис. 13.4, *а*).

Р е ш е н и е .

1. Записать уравнение моментов и построить грузовую эпюру M_P от заданной нагрузки (рис. 13.4, *б*)

$$M_P = M_q = -\frac{qx^2}{2},\ 0 \le x \le l.$$

2. Приложить к балке единичную силу P = 1 в сечении, где определяем прогиб. Записать уравнение моментов $M_1 = -Px$ и построить единичную эпюру $\overline{M}_1$ (рис. 13.4, *в*).

3. Приложить единичный момент m = 1 и построить единичную эпюру $\overline{M}_2$.

Для вычисления прогибов (13.2) методом Максвелла–Мора используем способ Верещагина. Площадь эпюры M_P равна:

$$\omega_P = -\frac{1}{3}\frac{ql^2}{2}l = -\frac{ql^3}{6},$$

а расстояние до центра тяжести от вершины параболы $\frac{3}{4}l$. Вычислим ординаты y_1 и y_2 на единичных эпюрах (ординаты взять под центром тяжести грузовой эпюры):

$$y_1 = -\frac{3}{4}l, \; y_2 = -1.$$

Тогда прогиб сечения равен:

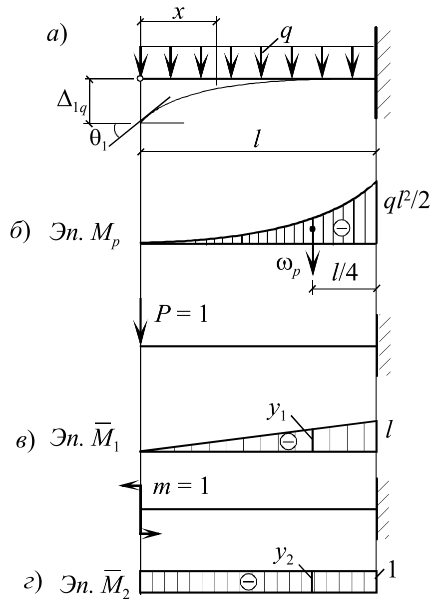


Рис. 13.4

$$v_1 = \Delta_1 q = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{ql^3}{6}\left(-\frac{3}{4}l\right)\right] = \frac{ql^4}{8EJ} \text{ (вниз)},$$

а угол поворота

$$\theta_1 = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{ql^3}{6}(-1)\right] = \frac{ql^3}{6EJ} \text{ (против хода часовой стрелки).}$$

Пример 13.2. Определить прогиб сечения *C* и угол поворота на опоре *A* (рис. 13.5). Отношение жесткостей $J_0 = 2J$.

Решение.

1. Построить эпюру моментов M_P от заданной нагрузки.

2. Приложить к балке единичную силу в точке *C* и построить единичную эпюру $\overline{M}_1$.

$$M_x = -Px = -x, \; 0 \le x \le 2.$$

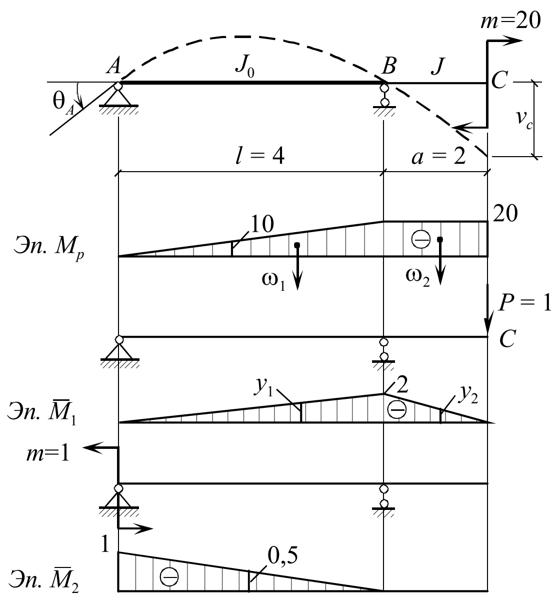


Рис. 13.5

Определить вертикальное перемещение точки C по способу Верещагина (приводим к меньшей жесткости):

$$v_c = \Delta_c = \frac{1}{EJ_0}\omega_1 y_1 + \frac{1}{EJ}\omega_2 y_2 = \frac{1}{EJ}\left(\frac{\omega_1 y_1}{2} + \omega_2 y_2\right),$$

где

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 4 = -40; \qquad \omega_2 = -20\cdot 2 = -40;$$

$$y_1 = -\frac{2}{3}\cdot 2 = -\frac{4}{3}; \qquad y_2 = -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1\,.$$

Тогда

$$v_c = \frac{1}{EJ}\left(\frac{40\cdot 4}{2\cdot 3} + 40\cdot 1\right) = \frac{200}{3EJ} \text{ (вниз).}$$

3. В точке A приложить единичный момент, построить эпюру $\overline{M}_2$ и определить угол поворота на опоре A. Для вычисления интеграла (13.1) используем формулу Симпсона (13.3):

$$\Delta_{iP} = \theta_A = \int_0^l \frac{M_P \overline{M}_2}{EJ} dx = \frac{l}{6EJ_0}\left(0 \cdot 1 + 4 \cdot 10 \cdot 0{,}5 + 20 \cdot 0\right) =$$

$$= \frac{4}{6EJ_0} \cdot 20 = \frac{40}{3EJ_0} = \frac{20}{3EJ} \text{ðàä (ï ðî òèâ õî äà ÷àñî âî é ñòðåëêè).}$$

Изобразим изогнутую ось балки (пунктирная линия на рис. 13.5).

Указание. Изучив данную тему, можно решать задачу № 2 контрольной работы.

ТЕМА 14

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Теория: [1], гл. 7, § 7.7;
[2], гл. X, § 84, 85, 86, 87.

Балка, способная воспринимать произвольную нагрузку, должна быть закреплена так, чтобы она не могла перемещаться как жесткое тело. В случае действия нагрузки в одной плоскости минимальное количество связей, необходимых для закрепления балки, равно трем. Эти три связи являются абсолютно необходимыми. Удаление хотя бы одной из таких связей превращает балку в геометрически изменяемую систему.

Так как для плоской системы можно составить три уравнения равновесия, то реакции в абсолютно необходимых связях могут быть определены из уравнений равновесия (статики).

Балки, в которых опорные реакции и внутренние усилия можно определить из уравнений равновесия, называются *статически определимыми*.

На практике встречаются балки, в которых число наложенных связей больше, чем нужно для обеспечения геометрической неизменяемости, т.е. некоторые связи являются «лишними». В балках с «лишними связями» опорные реакции нельзя определить только из уравнения равновесия. *Балки, в которых опорные реакции и внутренние усилия нельзя определить из уравнений равновесия, называют статически неопределимыми.*

Заметим, что «лишние связи» нужно понимать условно. По условиям работы конструкции эти связи являются необходимыми, так как при их отсутствии прочность и жесткость системы могут оказаться необеспеченными.

Число «лишних связей» или степень статической неопределимости балки, не имеющей врезных шарниров, можно определить по формуле

$$n = C - 3,$$

где C — число наложенных связей (определяется из условий закрепления балки); 3 — необходимое и достаточное число связей для того, чтобы балка была статически определимой и геометрически неизменяемой.

Рекомендуется следующий порядок расчета статически неопределимых балок:

1. Определить число «лишних связей».
2. Выбрать основную систему (о.с.).

Выбор о.с. заключается в отбрасывании всех «лишних связей» и приложении по их направлению неизвестных реакций.

3. Записать деформационные уравнения. Число этих уравнений равно числу «лишних связей». *Геометрический смысл* деформационных уравнений: *перемещение по направлению отброшенной связи равно нулю.*

4. Решая совместно деформационные уравнения, *определить значения «лишних неизвестных»,* т.е. *раскрыть статическую неопределимость системы.*

5. Далее ведут расчет статически определимой балки (о.с.), загруженной заданными внешними нагрузками и значениями «лишних неизвестных».

Пример 14.1. Для балки постоянного сечения, изображенной на рис. 14.1, построить эпюры Q и M. Определить номер двутавра при R = 210 МПа, найти прогиб в середине пролета и на конце балки (в точках F и K).

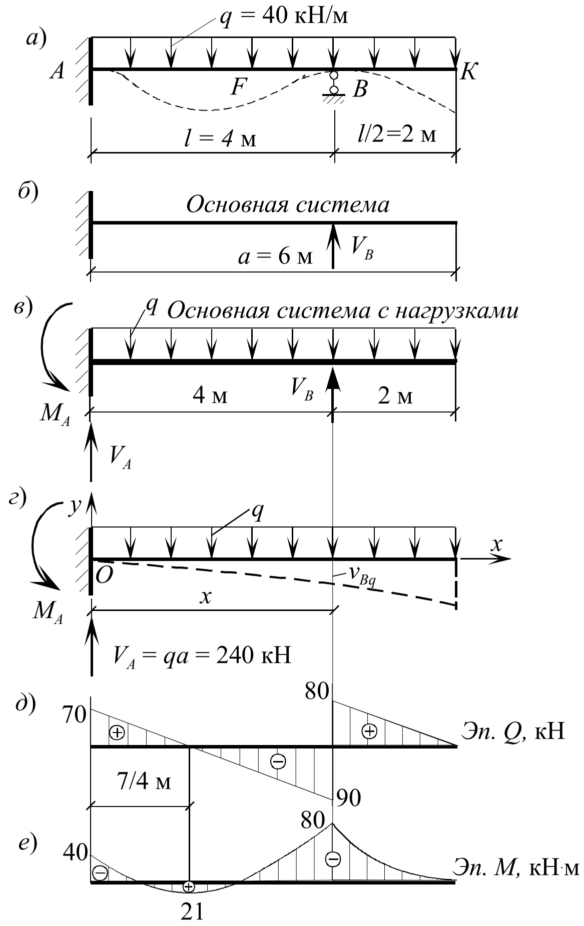


Рис. 14.1

Р е ш е н и е. На балку наложено четыре связи: три в жестком защемлении и одна на опоре *B*. Система является один раз статически неопределимой: $n = C - 3 = 4 - 3 = 1$. Горизонтальная реакция в защемлении $H_A = 0$, так как все нагрузки вертикальны. Примем основную систему в виде балки–консоли, отбросив связь на опоре *B* и заменив ее реакцией V_B. Деформационное уравнение, отрицающее перемещение балки по вертикали в точке B, будет

$$v_B = 0 .$$

Используя принцип независимости действия сил, деформационное уравнение можно записать так:

$$v_B = v_{BB} + v_{Bq} = 0 ,$$

где v_{BB} — перемещение в точке B от неизвестной реакции V_B; v_{Bq} — перемещение в точке B от внешней нагрузки q.

В такой записи первый индекс у каждого слагаемого обозначает рассматриваемое сечение (адрес), где происходит прогиб, а второй — указывает причину, вызвавшую прогиб. По табл. П. 2.1 определим

$$v_{BB} = \left| \frac{Pl^3}{3EJ} \right| = \frac{64V_B}{3EJ} \text{ (вверх)},$$

где $l = 4$ м.

Величину v_{Bq} (прогиб балки в точке B от нагрузки q) найдем методом начальных параметров:

$$EJv_x = D + Cx - M_A \frac{x^2}{2} + V_A \frac{x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} ,$$

где $D = EJv_0$, а $C = EJ\theta_0$.

Так как в защемлении $v_0 = 0$ и $\theta_0 = 0$, то постоянные $C = D = 0$. Тогда при $M_A = -\frac{qa^2}{2} = -\frac{40 \cdot 6^2}{2} = -720$ кН·м и $V_A = qa = 40 \cdot 6 =$ $= 240$ кН будем иметь

$$EJv = -720\frac{x^2}{2} + 240\frac{x^3}{6} - \frac{40x^4}{24} = -360x^2 + 40x^3 - \frac{5}{3}x^4 ,$$

отсюда при $x = 4$ м найдем

$$v_{Bq} = -\frac{10880}{3EJ} .$$

Подставив значения v_{BB} и v_{Bq} в деформационное уравнение, определим лишнюю неизвестную V_B:

$$\frac{64V_B}{3EJ} - \frac{10880}{3EJ} = 0,$$

откуда $V_B = 170$ кН.

Загружая далее основную систему заданными нагрузками и найденным значением лишней неизвестной, строим эпюры Q и M и из условия прочности по нормальным напряжениям при изгибе определяем момент сопротивления:

$$W_Z \geq \frac{M_{\max}}{R} = \frac{80\ \text{кН}\cdot\text{м}}{210\ \text{МПа}} = 380\ \text{см}^3.$$

Из таблиц ГОСТ 8239-89* выбираем двутавр 27*а*, $W_z = 407\ \text{см}^3$ и $J_z = 5500\ \text{см}^4$. Для определения прогибов в точках F и K еще раз воспользуемся методом начальных параметров, выбрав начало координат в защемлении и направив ось x вправо. Универсальное уравнение изогнутой оси балки запишем так:

$$EJv_x = D + Cx - M_A\frac{x^2}{2} + \frac{V_h x^3}{6} - \frac{qx^4}{24}\Bigg|_{\text{I}} + \frac{V_B\left(x-4\right)^3}{6}\Bigg|_{\text{II}}.$$

Здесь $C = D = 0$. Прогиб в точке F при $x = 2$ м

$$EJv_F = -40\frac{2^2}{2} + \frac{70\cdot 2^3}{6} - \frac{40\cdot 2^4}{24} = -\frac{40}{3}\ \text{кН·м}^3;$$

$$v_F = -\frac{40}{3EJ} = -\frac{40\cdot 10^3}{3\cdot 2\cdot 10^5\cdot 10^6\cdot 5500\cdot 10^{-8}} = -0{,}12\ \text{см}.$$

Прогиб в точке K при $x = 6$ м

$$EJv_K = -\frac{40\cdot 6^2}{2} + 70\frac{6^3}{6} - \frac{40\cdot 6^4}{24} + \frac{170(6-4)^3}{6} = -120\ \text{кН·м}^3;$$

$$v_K = -\frac{120}{EJ} = -\frac{120\cdot 10^3}{2\cdot 10^{11}\cdot 5500\cdot 10^{-8}} = -1{,}08\ \text{см}.$$

В соответствии с эпюрой M и условиями закрепления изображаем примерный вид изогнутой оси балки (пунктиром, см. рис. 14.1, *а*).

Пример 14.2. Дана балка постоянной жесткости $EJ = \text{const}$ (рис. 14.2). Построить эпюры Q и M.

Р е ш е н и е.

1. Определим степень статической неопределимости балки:

$$n = C - 3 = 4 - 3 = 1 \text{ (одна «лишняя связь»)}.$$

2. Выбрать основную систему (о.с.). Для этого удалим связь на опоре B и по направлению отброшенной связи приложим неизвестную опорную реакцию X. Основную систему загрузим заданной нагрузкой q.

3. Запишем деформационное уравнение:

$$v_B = 0 \text{ или } v_B = v_{BX} + v_{Bq} = 0.$$

Прогибы v_{Bq} и v_{BX} определить методом единичных нагрузок — методом Максвелла–Мора.

В этом случае деформационное уравнение запишем в виде:

$$\delta_{11} X + \Delta_{1P} = 0, \qquad (a)$$

где δ_{11} — единичный коэффициент или перемещение по направлению отброшенной связи, вызванной нагрузкой $i = 1$; Δ_{1P} — грузовой коэффициент или перемещение по направлению отброшенной связи, вызванное заданной нагрузкой q.

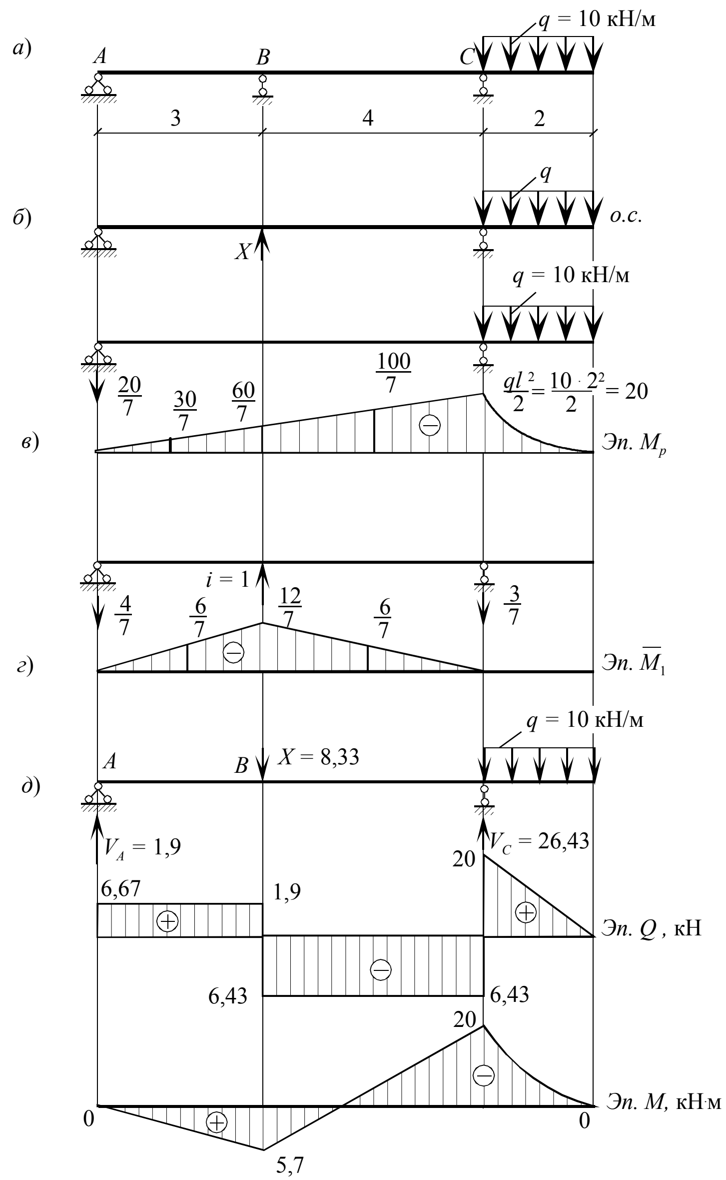
Для определения коэффициентов необходимо построить эпюры M_P и $\overline{M}_1$ (рис. 14.2, *в, г*).

При вычислении коэффициентов δ_{11} и Δ_{1P} используем формулу Симпсона (13.3).

Вычислим δ_{11}, перемножив единичную эпюру: $\delta_{11} = \left[\overline{M}_1 \times \overline{M}_1\right]$.

$$\delta_{11} = \frac{3}{6EJ}\left(0 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} + \frac{12}{7} \cdot \frac{12}{7}\right) +$$

$$+ \frac{4}{6EJ}\left(\frac{12}{7} \cdot \frac{12}{7} + 4 \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} + 0 \cdot 0\right) = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{288}{49} + \frac{2}{3EJ} \cdot \frac{288}{49} = \frac{336}{49EJ}.$$



а)
A
B
C
q = 10 кН/м
3
4
2
б)
q
о.с.
X
q = 10 кН/м
$\frac{20}{7}$
$\frac{30}{7}$
$\frac{60}{7}$
$\frac{100}{7}$
$\frac{ql^2}{2}=\frac{10\cdot 2^2}{2}=20$
в)
Эп. M_p
$i = 1$
$\frac{4}{7}$
$\frac{6}{7}$
$\frac{12}{7}$
$\frac{6}{7}$
$\frac{3}{7}$
г)
Эп. $\overline{M}_1$
q = 10 кН/м
д)
A
B
X = 8,33
V_A = 1,9
V_C = 26,43
20
6,67
1,9
Эп. Q , кН
6,43
6,43
20
Эп. M, кН·м
0
0
5,7

Рис. 14.2

Вычислим Δ_{1P}, перемножив единичную и грузовую эпюры: $\delta_{1P} = \left[M_P \times \overline{M}_1\right]$.

$$\Delta_{1P} = \frac{3}{6EJ}\left(0 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{30}{7} \cdot \frac{6}{7} + \frac{60}{7} \cdot \frac{12}{7}\right) +$$

$$+ \frac{4}{6EJ}\left(\frac{60}{7} \cdot \frac{12}{7} + 4 \cdot \frac{100}{7} \cdot \frac{6}{7} + 20 \cdot 0\right) =$$

$$= \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1440}{49} + \frac{2}{3EJ} \cdot \frac{3120}{49} = \frac{2800}{49EJ}.$$

Вычисленные коэффициенты подставим в уравнение (*а*):

$$\frac{336}{49EJ} X + \frac{2800}{49EJ} = 0 .$$

Отсюда

$$X = -\frac{2800}{336} = -8{,}33 \text{ кН (реакция направлена вниз).}$$

Определим опорные реакции в балке (рис. 14.2, *д*).

$$\sum m_A = 0 . \quad -8{,}33 \cdot 3 + V_C \cdot 7 - 10 \cdot 2 \cdot 8 = 0 ,$$

$$V_C = \frac{8{,}33 \cdot 3 + 10 \cdot 16}{7} = \frac{25 + 160}{7} = 26{,}43 \text{ кН,}$$

$$\sum m_B = 0 . \quad -V_A \cdot 7 + 8{,}33 \cdot 4 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 0 ,$$

$$V_A = \frac{8{,}33 \cdot 4 - 20}{7} \approx \frac{13{,}3}{7} = 1{,}9 \text{ кН.}$$

Запишем уравнения и вычислим Q и M на каждом участке.

I участок: $0 \le x_1 \le 3$ $Q = V_A = 1{,}9$ кН.

$$M = V_A x_1 \text{, при } x_1 = 0 \quad M = 0$$

$$x_1 = 3, \quad M = 5{,}7 \text{ кН·м.}$$

II участок: $0 \le x_2 \le 4$

$$Q = V_A - 8{,}33 = 1{,}9 - 8{,}33 = -6{,}43 \text{ кН,}$$

$$M = V_A(3 + x_2) - X \cdot x_2 \text{, при } x_2 = 0 \quad M = 5{,}7 \text{ кН·м};$$

$$x_2 = 4, \qquad M = -20 \text{ кН·м}.$$

III участок: $0 \le x_3 \le 2$

$$Q = qx_3, \; M = -q\frac{x_3^2}{2}.$$

При $x_3 = 0$, $Q = 0$ $M = 0$;

$$x_3 = 2, \; Q = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН}, \; M = -10\frac{2^2}{2} = -20 \text{ кН·м}.$$

Построим эпюры Q и M.

Указание. Изучив данную тему, можно решить задачу № 3 контрольной работы.

ТЕМА 15

КОСОЙ ИЗГИБ

Теория: [1], гл. 10, § 10.1;
[2], гл. XI, § 94, 96.

На практике часто встречаются случаи, когда в результате действия нагрузки в поперечных сечениях бруса одновременно возникают несколько компонент внутренних усилий. Тогда говорят, что брус находится в условиях *сложного сопротивления*. Из множества видов сложного сопротивления обычно уделяется внимание трем основным: косому изгибу, совместному действию растяжения (сжатия) и изгиба, совместному действию кручения и изгиба.

Косым изгибом называется такой случай изгиба бруса, *при котором плоскость действия суммарного изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции сечения.*

15.1. Определение напряжений при косом изгибе

Рассмотрим балку, жестко закрепленную одним концом, на которую действует сила P, приложенная под углом φ к оси y (рис. 15.1).

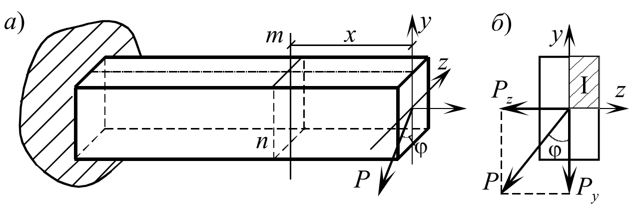


Рис. 15.1

Разложим силу P на две составляющие по осям координат:

$$\left.\begin{aligned} P_y &= P\cos\varphi \\ P_z &= P\sin\varphi \end{aligned}\right\}. \tag{15.1}$$

Каждая из этих сил вызывает деформацию плоского изгиба в соответствующей главной плоскости.

Изгибающие моменты в произвольном сечении $m-n$ относительно главных осей инерции:

$$\left.\begin{aligned} M_z &= P_y x = Px\cos\varphi \\ M_y &= P_z x = Px\sin\varphi \end{aligned}\right\}. \tag{15.2}$$

Правило знаков: *при сложном сопротивлении изгибающий момент считают положительным, если он вызывает растяжение волокон в I четверти поперечного сечения бруса* (на рис. 15.1 — первая четверть заштрихована).

Для определения нормальных напряжений в точке поперечного сечения с координатами z, y (рис. 15.2) воспользуемся принципом независимости действия сил и получим формулу

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z\,, \tag{15.3}$$

где J_z, J_y — моменты инерции сечения относительно главных осей; значения M_z, M_y, z и y берут с учетом их знаков.

Наибольшие напряжения будут в точках с координатами $z_{\max}$ и $y_{\max}$.

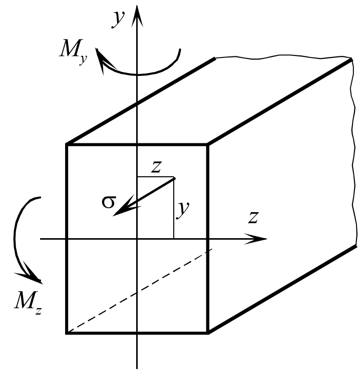


Рис. 15.2

Тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{J_z} y_{\max} + \frac{M_y}{J_y} z_{\max}\,. \qquad (15.4)$$

15.2. Определение положения нулевой линии при косом изгибе

Нулевой (нейтральной) линией (осью) называют прямую линию, в точках которой нормальные напряжения равны нулю.

Пусть текущие координаты нулевой линии (н.о.) будут y_0 и z_0, тогда из (15.3) запишем:

$$\sigma_0 = \frac{M_z}{J_z} y_0 + \frac{M_y}{J_y} z_0 = 0\,, \qquad (15.5)$$

откуда получим формулу для определения положения нулевой линии

$$\frac{y_0}{z_0} = \mathrm{tg}\alpha = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_z}\,. \qquad (15.6)$$

Если в эту формулу подставить значения изгибающих моментов по (15.2), то получим

$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{J_z}{J_y} \mathrm{tg}\varphi\,. \qquad (15.7)$$

На основании вышеизложенного сделаем выводы:

1. При косом изгибе нулевая линия проходит через центр тяжести сечения (при $y_0 = 0$ и $z_0 = 0$) и не перпендикулярна силовой плоскости, так как из (15.7) видно, что $\alpha \neq \varphi$. Углы α и φ тем больше отличаются друг от друга, чем больше отношение моментов инерции сечения J_z и J_y.

2. Положение нулевой линии не зависит от величины приложенной силы, а зависит от отношения моментов инерции сечения балки и направления силовой плоскости (угол φ).

Положительное значение угла α *откладывают от оси z против хода часовой стрелки.*

3. Нулевая линия не проходит через четверти, где находится силовая плоскость (рис. 15.3).

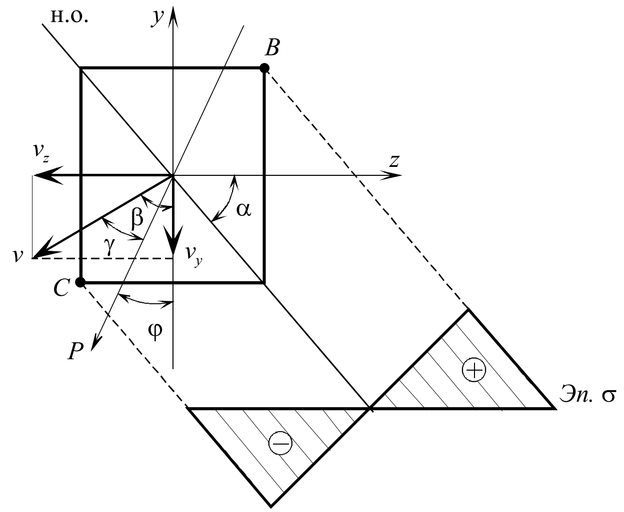


Рис. 15.3

15.3. Прогибы при косом изгибе

Так как при косом изгибе балка одновременно изгибается от сил P_y и P_z в двух главных плоскостях, то изогнутая ось балки в общем случае становится пространственной кривой. Обозначив прогибы свободного конца балки (см. рис. 15.1) по направлению осей y и z через v_y и v_z, получим

$$v_y = \frac{P_y l^3}{3EJ_z}; \; v_z = \frac{P_z l^3}{3EJ_y}.$$

Полный прогиб сечения (см. рис. 15.3) определим по формуле

$$v = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}\,. \qquad (15.8)$$

Найдем направление полного прогиба. Для этого определим угол между направлением полного прогиба и вертикальной осью *y*:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{v_z}{v_y} = \frac{P_z J_z}{P_y J_y} = \frac{J_z}{J_y}\frac{P\sin\varphi}{P\cos\varphi}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{J_z}{J_y}\mathrm{tg}\varphi\,. \qquad (15.9)$$

Полученная формула идентична формуле (15.7). Это позволяет сделать заключение, что $\beta = \alpha$.

Следовательно:

1) направление полного прогиба перпендикулярно нулевой линии;

2) направление полного прогиба не совпадает с направлением действующей силы. Чем больше отношение моментов инерции сечения J_z / J_y, тем больше будет γ — угол между направлением силы и полного прогиба. Это и послужило причиной того, что такой изгиб стали называть *косым*.

15.4. Условие прочности при косом изгибе

В общем случае косого изгиба самой опасной будет точка *К* (рис. 15.4), наиболее удаленная от нейтральной (нулевой) оси, положение которой можно определить по (15.6) или (15.7).

Условие прочности для этой точки

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{J_z} y_к + \frac{M_y}{J_y} z_к \le R\,. \qquad (15.10)$$

Для симметричных сечений (прямоугольник, двутавр) опасными будут точки B и C (см. рис. 15.3), и из формулы (15.4) получим условие прочности при косом изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \le R, \quad (15.11)$$

где $W_z = \dfrac{J_z}{y_{\max}}$ и $W_y = \dfrac{J_y}{z_{\max}}$ — есть моменты сопротивления сечения относительно осей z и y.

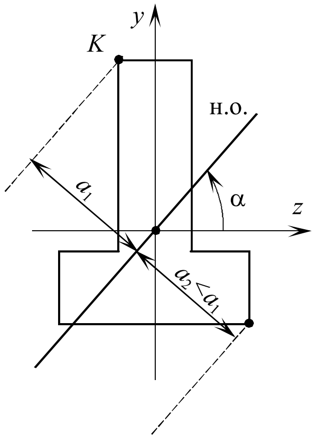


Рис. 15.4

Для подбора сечения балки при косом изгибе формулу (15.11) преобразуем к виду:

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{W_z}\left(M_z + cM_y\right) \le R, \quad (15.12)$$

откуда получим

$$W_z \ge \frac{M_z + cM_y}{R}, \quad (15.13)$$

где $c = \dfrac{W_z}{W_y}$. При предварительном подборе размеров сечения задаются значением коэффициента c в зависимости от формы сечения. Для прямоугольного сечения $c = \dfrac{h}{b}$; для швеллера $c \approx 6$; для двутавра $c \approx 8$. Затем делают проверку подобранного сечения по $\sigma_{\max}$ (15.11). Если $\sigma_{\max} \ne R$, то расчет заканчивают, когда $\Delta = \pm 5$ %.

$$\Delta = \frac{\sigma_{\max} - R}{R} \cdot 100\,\%. \quad (15.14)$$

Пример 15.1. Подобрать сечение двутавровой балки (рис. 15.5), испытывающей косой изгиб. Определить в опасном сечении балки положение нейтральной оси и построить эпюру нормальных напряжений, вычислить полный прогиб и его направление.

Дано: $P = 2$ кН; $q = 5$ кН/м; $\varphi = 30^0$; $R = 210$ МПа.

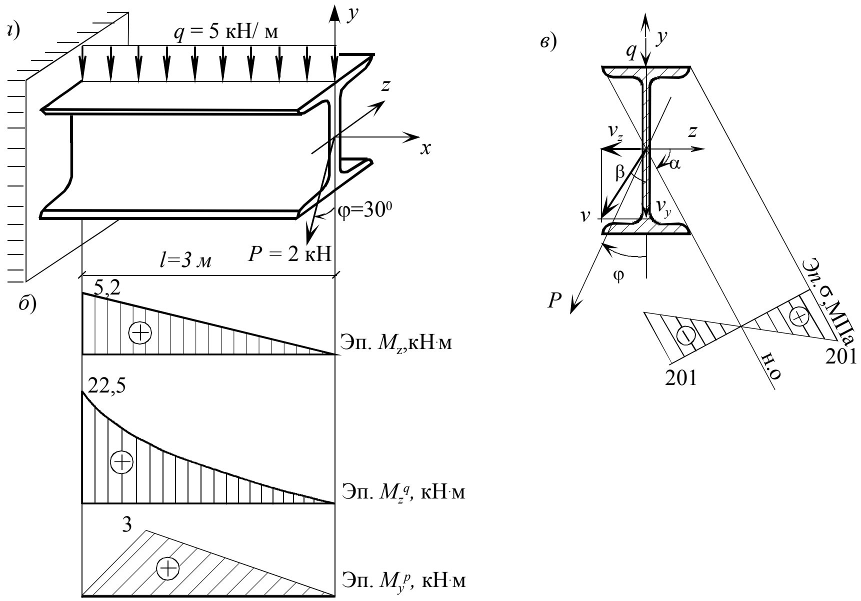


Рис. 15.5

Р е ш е н и е. Построим эпюры изгибающих моментов от P и q (рис. 15.5, *б*). Знак моментов определим по первой четверти. Наибольшие изгибающие моменты возникают в заделке:

$$M_y = P_z l = P\sin\varphi l = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3 = 3 \text{ кН·м};$$

$$M_z = \frac{ql^2}{2} + P_y l = \frac{ql^2}{2} + P\cos\varphi l = \frac{5\cdot 3^2}{2} + 2\cdot 0{,}866\cdot 3 = 27{,}7 \text{ кН·м}.$$

Определим момент сопротивления сечения по формуле (15.13), приняв для двутавра $c = 8$:

$$W_z \ge \frac{M_z + cM_y}{R} = \frac{27{,}7\cdot 10^3 + 8\cdot 3\cdot 10^3}{210\cdot 10^6} = 0{,}246\cdot 10^{-3}\,\text{м}^3 = 246\text{ см}^3.$$

Принимаем по ГОСТ 8239-89 двутавр 22*а*, для которого

$$W_z = 254\ \text{см}^3;\ W_y = 34{,}3\ \text{см}^3;\ J_y = 198\ \text{см}^4,\ J_z = 2790\ \text{см}^4.$$

Определим максимальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{27{,}7 \cdot 10^3}{254 \cdot 10^{-6}} + \frac{3 \cdot 10^3}{34{,}3 \cdot 10^{-6}} = 201 \cdot 10^6\ \text{Па} = 201\ \text{МПа} .$$

Вычислим $\Delta = \dfrac{201 - 210}{210} \cdot 100\ \% = -4{,}2\ \% .$

Положение нейтральной оси определим по формуле (15.6)

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{J_z}{J_y}\frac{M_y}{M_z} = -\frac{2790 \cdot 10^{-8}}{198 \cdot 10^{-8}}\frac{3 \cdot 10^3}{27{,}7 \cdot 10^3} = -1{,}53 ,$$

тогда $\alpha = -57^0$.

Максимальный прогиб будет на свободном конце консоли. Прогибы по осям

$$v_y = \frac{1}{EJ_z}\left(\frac{ql^4}{8} + \frac{P_y l^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2790 \cdot 10^{-8}}\left(\frac{5 \cdot 10^3 \cdot 3^4}{8} + \frac{1{,}73 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{3}\right) =$$

$$= 0{,}012\ \text{м} = 1{,}2\ \text{см};$$

$$v_z = \frac{P_z l^3}{3EJ_y} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 198 \cdot 10^{-8}} = 0{,}023\ \text{м} = 2{,}3\ \text{см} ,$$

где $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Полный прогиб определим по формуле (15.8)

$$v = \sqrt{1{,}2^2 + 2{,}3^2} = 2{,}59\ \text{см}.$$

Положение нейтральной оси, направление полного прогиба и эпюра σ показаны на рис. 15.5, *в*.

Указание. Изучив эту тему, можно решать задачу № 4 контрольной работы.

ТЕМА 16

СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ РАСТЯЖЕНИЯ (СЖАТИЯ) И ИЗГИБА

Теория: [1], гл. 10, § 10.2, 10.3;
[2], гл. XI, § 97, 98, 99.

Рассмотрим состояние стержня, в поперечных сечениях которого возникают одновременно продольная сила N и изгибающие моменты M_z и M_y (рис. 16.1, *а*). Такой случай сложного сопротивления стержня называют *совместным действием растяжения (сжатия) и изгиба*.

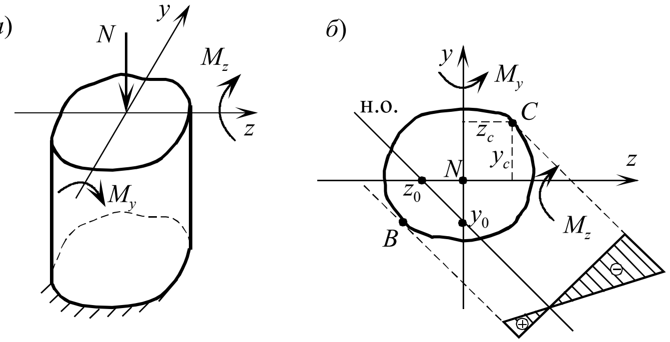


Рис. 16.1

Используя принцип независимости действия сил, получим формулу для определения нормальных напряжений: в точках поперечного сечения с координатами y, z от воздействия N, M_z и M_y

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z . \qquad (16.1)$$

При вычислении напряжений необходимо учитывать знаки N, M_z и M_y и координат точек y и z.

Правило знаков: *момент считают положительным, если он вызывает растяжение волокон в I четверти сечения; растягивающую силу считают положительной, а сжимающую — отрицательной.*

Точки, в которых возникают наибольшие напряжения σ_{max}, называют *опасными точками*. Если поперечное сечение стержня имеет простую форму, например, прямоугольник, двутавр и т.п., то опасными будут угловые точки. В общем случае опасными будут точки сечения *B* и *C*, наиболее удаленные от нулевой (нейтральной) оси (рис. 16.1, *б*).

Если нормальные напряжения (16.1) приравняем нулю, то получим уравнение нулевой линии:

$$\sigma_0 = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y_0 + \frac{M_y}{J_y} z_0 = 0\,, \tag{16.2}$$

где y_0, z_0 — координаты точек на осях y и z, через которые проходит нулевая линия (н.о.).

Найдем отрезки, отсекаемые нулевой линией. Если $z_0 = 0$, то

$$a_y = y_0 = -\frac{J_z}{A}\frac{N}{M_z} = -i_z^2 \frac{N}{M_z}\,, \tag{16.3}$$

а если $y_0 = 0$, то

$$a_z = z_0 = -\frac{J_y}{A}\frac{N}{M_y} = -i_y^2 \frac{N}{M_y}\,, \tag{16.4}$$

где $i_z^2 = \frac{J_z}{A}$ и $i_y^2 = \frac{J_y}{A}$ — радиусы инерции сечения в квадрате.

16.1. Внецентренное приложение силы

Рассмотрим случай внецентренного растяжения (сжатия) массивного стержня (рис. 16.2, *а*). Такая задача встречается при расчете опор мостов, колонн зданий и прочих сооружений. Предположим, что растягивающая сила *P* приложена в точке *C*, координаты которой y_p и z_p. От силы *P* в произвольном поперечном сечении возникают продольная сила и изгибающие моменты (рис. 16.2, *б*):

$$N = P\,,\ M_z = Py_p\,,\ M_y = Pz_p\,.$$

Внецентренное приложение нагрузки статически эквивалентно осевому растяжению (сжатию) с изгибом.

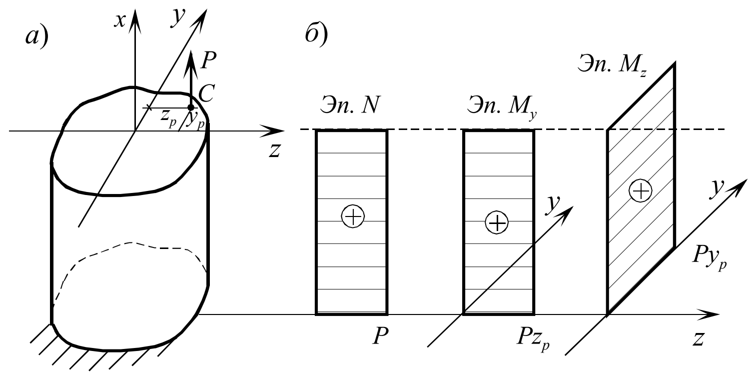


Рис. 16.2

Вычислим нормальные напряжения, подставив в формулу (16.1) выражения N, M_z и M_y:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Py_p}{J_z} y + \frac{Pz_p}{J_y} z = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{y_p}{i_z^2} y + \frac{z_p}{i_y^2} z\right). \qquad (16.5)$$

Если (16.5) приравнять нулю и учесть, что $\frac{P}{A} \neq 0$, то получим уравнение нулевой линии при внецентренном приложении силы:

$$1 + \frac{y_p}{i_z^2} y_0 + \frac{z_p}{i_y^2} z_0 = 0. \qquad (16.6)$$

Аналогично (16.3) и (16.4) получим формулы для вычисления отрезков, отсекаемых нулевой линией на координатных осях,

$$a_y = y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p} \text{ и } a_z = z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p}. \qquad (16.7)$$

Отметим некоторые свойства нулевых линий:

1) из формул (16.6) и (16.7) видно, что положение нулевой линии при внецентренном приложении силы не зависит от величины силы, а зависит от координат точки ее приложения и геометрических характеристик сечения;

2) из (16.7) очевидно, что знаки отрезков, отсекаемых нулевой линией, противоположны знакам координат точки приложения силы, т.е. нулевая линия отсекает отрезки в четверти, противоположной той, где приложена сила;

3) если точку приложения силы C перемещать по прямой, проходящей через центр тяжести сечения (рис. 16.3), то нулевая линия смещается параллельно самой себе в том же направлении, т.е. если силу приближать к центру тяжести сечения, то нулевые линии стремятся к бесконечности, и наоборот;

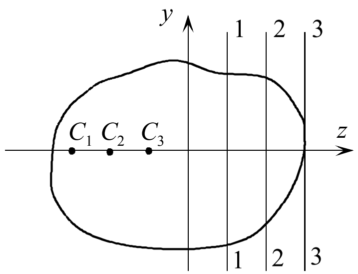


Рис. 16.3

4) если силу перемещать по прямой AB, не проходящей через центр тяжести сечения (рис. 16.4), то нулевые линии будут поворачиваться относительно одной точки K.

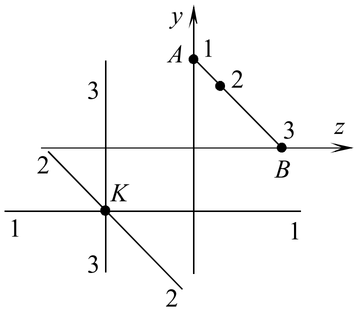


Рис. 16.4

Важно отметить, что при некотором положении силы нулевая линия пройдет по сечению (см. рис. 16.1, *б*). В этом случае нулевая линия будет границей между сжатой и растянутой зонами сечения.

16.2. Ядро сечения

Так как внецентренно сжатые элементы часто выполняются из хрупких материалов (камень, кирпич, бетон), обладающих малой прочностью на растяжение, то возникает важный для практики вопрос: какой эксцентриситет приложения силы относительно центра тяжести сечения можно допустить, чтобы в поперечных сечениях массивного стержня не возникали растягивающие напряжения.

Для ответа на него надо решить из (16.7) обратную задачу, т.е. определить координаты точки приложения силы из условия, что нулевая линия касается контура сечения:

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_0} \text{ и } z_p = -\frac{i_y^2}{z_0}. \qquad (16.8)$$

Рассмотрим порядок построения ядра, прямоугольного сечения (рис. 16.5). Проведем нулевую линию I–I, которая касается контура сечения. Определим отрезки, отсекаемые нулевой линией на координатных осях $z_0 = \frac{b}{2}$, а $y_0 = \infty$, так как нулевая линия параллельна оси y. Определим радиусы инерции сечения:

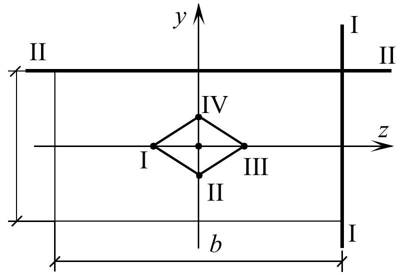


Рис. 16.5

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12},$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{b^3h}{12bh} = \frac{b^2}{12}.$$

Координаты точки приложения силы вычислим по формуле (16.8):

$$y_p = -\frac{h^2}{12\infty} = 0, \text{ а } z_p = -\frac{b^2 \cdot 2}{12b} = -\frac{b}{6} \text{ (точка I).}$$

Если проведем касательную II–II, для которой $z_0 = \infty$, а $y_0 = \frac{h}{2}$, то получим $z_0 = 0$, а $y_0 = -\frac{h}{6}$ (точка II). Аналогично получим точки III и IV. Соединив эти точки, получим некоторую область, которую называют *ядром сечения*.

Ядро сечения есть область, очерченная около центра тяжести сечения и характерная тем, что если равнодействующую сил приложить в этой области, то во всех точках поперечного сечения будут напряжения одного знака.

Точки I–IV называют *ядровыми точками.* Очевидно, что ядровая точка есть точка приложения силы, когда нулевая линия касается контура сечения с противоположной стороны от центра тяжести сечения.

При определении ядровых точек касательные не должны пересекать сечение, т.е. надо обходить внутренние углы (рис. 16.7, *г*).

Пример 16.1. Колонна промышленного здания (рис. 16.6, *а*) нагружена вертикальной силой P_1 = 600 кН и горизонтальной силой, возникающей при торможении, от крана P_2 = 4 кН. Найти наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения в колонне.

Р е ш е н и е. В произвольном сечении колонны возникают внутренние усилия:

$$N = -P_1 = -600 \text{ кН}; \; M_y = -P_1 \cdot a = -600 \cdot 0{,}06 = -36 \text{ кН·м};$$

$$M_z = -P_2 x = -4x \text{, где } 0 \le x \le l \text{,}$$

при $x = 0$ $M_z = 0$, при $x = 3$ $M_z = -4 \cdot 3 = -12$ кН·м.

Эпюры этих усилий показаны на рис. 16.6, *б*. Опасным является сечение у заделки. Действующие в нем усилия показаны на рис. 16.6, *в*. Моменты M_z и M_y приняты со знаком минус, так как они сжимают точки в I четверти поперечного сечения колонны.

Вычислим геометрические характеристики сечения: площадь, моменты инерции J_z, J_y и моменты сопротивления $W_z = \dfrac{J_z}{y_{\max}}$ и $W_y = \dfrac{J_y}{z_{\max}}$.

$$A = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12 \text{ м}^2;$$

$$J_z = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}3^3}{12} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4; \; J_y = \frac{0{,}4^3 \cdot 0{,}3}{12} = 16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4;$$

$$W_z = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}3^2}{6} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3; \; W_y = \frac{0{,}4^2 \cdot 0{,}3}{6} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

По формуле (16.1) вычислим напряжения в произвольной точке сечения:

$$\sigma = -\frac{600\cdot 10^3}{0{,}12} - \frac{12\cdot 10^3}{9\cdot 10^{-4}}y - \frac{36\cdot 10^3}{16\cdot 10^{-4}}z =$$

$$= -\left(5 + \frac{40}{3}y + 22{,}5z\right) \text{ МПа.}$$

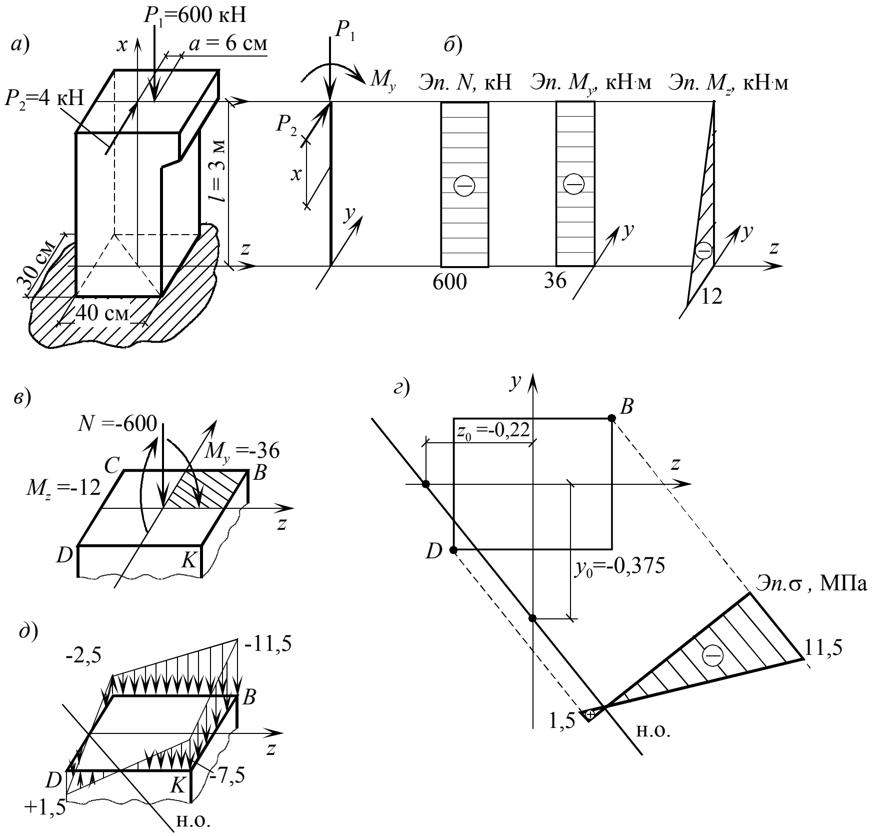


Рис. 16.6

Уравнение нулевой линии (при $\sigma = 0$):

$$5 + \frac{40}{3} y + 22{,}5z = 0 .$$

Отсюда отрезки, отсекаемые нулевой линией, будут: $z_0 = -5/22{,}5 = -0{,}22$ м, а $y_0 = -15/40 = -0{,}375$ м. Те же значения можно получить по формулам (16.3) и (16.4). Положение нулевой линии (н.о.) показано на рис. 16.6, *г*. Опасными будут точки *B* и *D*, как наиболее удаленные от нулевой оси. Вычислим напряжения в этих точках:

1) $z_B = 0{,}2$ м; $y_B = 0{,}15$ м; $\sigma_B = -11{,}5$ МПа;

2) $z_D = -0{,}2$ м; $y_D = -0{,}15$ м; $\sigma_D = 1{,}5$ МПа.

Плоская эпюра σ показана на рис. 16.6, *г*.

Заметим, что напряжения в угловых точках сечения можно вычислить без составления общей формулы для σ, а используя моменты сопротивления W_z, W_y. Так, в данном случае

$$\sigma_B = -\frac{N}{A} - \frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y} = -5 - 2 - 4{,}5 = -11{,}5 \text{ МПа},$$

$$\sigma_K = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y} = -5 + 2 - 4{,}5 = -7{,}5 \text{ МПа},$$

$$\sigma_D = -\frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = -5 + 2 + 4{,}5 = 1{,}5 \text{ МПа},$$

$$\sigma_C = -\frac{N}{A} - \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = -5 - 2 + 4{,}5 = -2{,}5 \text{ МПа}.$$

Знаки у слагаемых расставлены по физическому смыслу с учетом рис. 16.6, *в*, из которого видно, какую часть сечения растягивает или сжимает каждый из моментов M_z и M_y.

Пространственное изображение эпюры σ дано на рис. 16.6, *д*.

Пример 16.2. Колонна, поперечное сечение которой показано на рис. 16.7, *а*, в точке *D* нагружена сжимающей силой *P* = 20 кН. Требуется определить положение нейтральной оси, построить эпюру нормальных напряжений σ и ядро сечения.

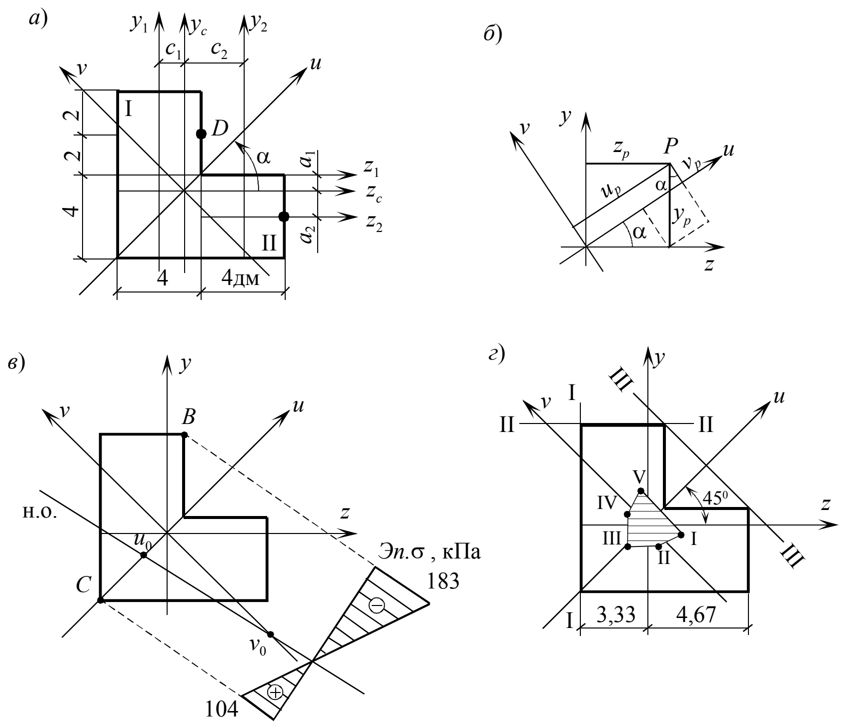


Рис. 16.7

Р е ш е н и е.

Определим координаты центра тяжести сечения. Разбиваем сечение на простые фигуры I и II. За начальные возьмем оси z_1 и y_1, проходящие через центр тяжести I фигуры:

$$z = \frac{\sum S_{y_1}}{\sum A} = \frac{32 \cdot 0 + 16 \cdot 4}{32 + 16} = 1{,}33 \text{ дм};$$

$$y = \frac{\sum S_{z_1}}{\sum A} = \frac{32 \cdot 0 + 16(-2)}{32 + 16} = -0{,}67 \text{ дм}.$$

Определим моменты инерции сечения относительно центральных осей:

$$J_z = \sum\left(J_{z_i} + a_i^2 A_i\right) = \frac{4 \cdot 8^3}{12} + 0{,}67^2 \cdot 32 + \frac{4 \cdot 4^3}{12} +$$

$$+ 1{,}33^2 \cdot 16 = 234{,}65 \text{ дм}^4;$$

$$J_y = \sum\left(J_{y_i} + c_i^2 A_i\right) = \frac{8 \cdot 4^3}{12} + 1{,}33^2 \cdot 32 + \frac{4^4}{12} +$$

$$+ 2{,}67^2 \cdot 16 = 234{,}65 \text{ дм}^4;$$

$$J_{zy} = \sum\left(a_i c_i A_i\right) = 0{,}67(-1{,}33)32 + 2{,}67(-1{,}33)16 = -85{,}33 \text{ дм}^4.$$

Главные моменты инерции:

$$J_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_z - I_y\right)^2 + 4I_{zy}^2} =$$

$$= 234{,}65 \pm \sqrt{0 + 4 \cdot 85{,}33^2} = 234{,}65 \pm 85{,}33 \text{ дм}^4;$$

$$J_{\max} = 319{,}98 \text{ дм}^4; \; J_{\min} = 149{,}32 \text{ дм}^4.$$

Радиусы инерции сечения:

$$i_{\max}^2 = \frac{I_{\max}}{\sum A} = \frac{319{,}98}{48} = 6{,}67 \text{ дм}^2; \; i_{\min}^2 = 3{,}11 \text{ дм}^2.$$

Положение главных осей:

$$\mathrm{tg}\alpha_{\max} = \frac{J_{zy}}{J_y - J_{\max}} = \frac{-85{,}33}{234{,}65 - 319{,}98} = 1,$$

а $\alpha_{\max} = 45^0$.

Главная ось *u*, относительно которой момент инерции максимальный, повернута на угол 45^0 против хода часовой стрелки (рис. 16.7, *а*). Найдем положение нейтральной оси. Но для этого определим координаты силы *P* (рис. 16.7, *б*):

$$u_P = z_P \cos\alpha + y_P \sin\alpha = 0{,}7\left(0{,}67 + 2{,}67\right) = 2{,}34 \text{ дм};$$

$$v_P = y_P \cos\alpha - z_P \sin\alpha = 0{,}7(2{,}67 - 0{,}67) = 1{,}4 \text{ дм}.$$

По формулам (16.7) найдем отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных осях u и v:

$$u_0 = -\frac{i_{\min}^2}{u_P} = -\frac{3{,}11}{2{,}34} = -1{,}32 \text{ дм};$$

$$v_0 = -\frac{i_{\max}^2}{v_P} = -\frac{6{,}67}{1{,}4} = -4{,}76 \text{ дм}.$$

Откладывая на осях отрезки u_0 и v_0, проведем нейтральную ось. Экстремальные значения напряжений будут в точках B и C, наиболее удаленных от нейтральной оси. Вычислим их координаты в главных осях u и v:

точка B (u = 3,74 дм; v = 2,8 дм);

точка С (u = – 4,66 дм; v = 0).

Тогда

$$\sigma_B = -\frac{P}{A}\left(1 + \frac{v_P}{i_{\max}^2} v_B + \frac{u_P}{i_{\min}^2} u_B\right) = -\frac{20000}{48}\left(1 + \frac{1{,}4}{6{,}67}\cdot 2{,}8 + \frac{2{,}34}{3{,}11}\cdot 3{,}74\right) =$$

$$= -1834{,}17 \text{ Н/дм}^2 \approx -183{,}4 \text{ кПа};$$

$$\sigma_C = -\frac{20000}{48}\left(1 + \frac{1{,}4}{6{,}67}\cdot 0 - \frac{2{,}34}{3{,}11}\cdot 4{,}66\right) = 1044 \text{ Н/дм}^2 = 104{,}4 \text{ кПа}.$$

По этим значениям построим эпюру σ (рис. 16.7, *в*).

Чтобы построить ядро сечения, надо определить координаты ядровых точек. Для этого проводим касательные (н.о.) по контуру сечения и вычисляем отрезки, отсекаемые касательными на главных осях. По формулам (16.8) определяем координаты ядровых точек:

касательная I–I (рис. 16.7, *г*) отсекает на оси z отрезок z = = –3,33 дм, тогда

$$u_0^{\mathrm{I}} = \frac{-3{,}33}{\cos 45^0} = -4{,}76 \text{ дм}; \; v_0^I = 4{,}76 \text{ дм},$$

а $u_я^I = -\frac{i_{\min}^2}{u_0^I} = -\frac{3{,}11}{-4{,}76} = 0{,}65$ дм; $v_я^I = -\frac{i_{\max}^2}{v_0^I} = -\frac{6{,}67}{4{,}76} = -1{,}4$ дм;

касательная II–II:

$$y = 4{,}67 \text{ дм};$$

$$u_0^{II} = v_0^{II} = \frac{4{,}67}{\cos 45^0} = 6{,}67 \text{ дм},$$

$$\text{а } u_я^{II} = -0{,}47 \text{ дм}; \; v_я^{II} = -1 \text{ дм};$$

касательная III–III:

$$z = y_C = 2{,}67 \text{ дм};$$

$$u_0^{\text{III}} = \frac{2{,}67}{\cos 45^0} = 3{,}81 \text{ дм}; \; v_0^{III} = \infty,$$

$$\text{а } u_я^{III} = -\frac{3{,}11}{3{,}81} = -0{,}82 \text{ дм}; \; v_я^{III} = -\frac{6{,}67}{\infty} = 0;$$

касательная IV–IV, аналогично II–II:

$$u_я^{IV} = -0{,}47 \text{ дм}; \; v_я^{IV} = 1 \text{ дм};$$

касательная V–V, аналогично I–I:

$$u_я^{V} = 0{,}65 \text{ дм}; \; v_я^{V} = 1{,}4 \text{ дм}.$$

По найденным координатам ядровых точек строим ядро сечения (см. рис. 16.7, *г*).

Указание. Изучив эту тему, можно решать задачи № 6 и 7 контрольной работы.

ТЕМА 17

ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Теория: [1], гл. 9. § 9.1, 9.2;
[2], гл. XII, § 101–103.

При оценке прочности различных конструкций и машин приходится учитывать, что многие элементы и детали работают в условиях сложного напряженного состояния. Поэтому вопрос, по каким причинам и при каких значениях напряжений происходит разрушение, является одним из важных.

Известно, что при возрастании действующей нагрузки главные напряжения будут соответственно увеличиваться. При некотором их значении наступит опасное или так называемое предельное напряженное состояние материала в исследуемой точке.

В качестве предельного состояния принимают:

– для пластичных материалов — появление пластических деформаций;

– для хрупких — начало разрешения.

Оценить опасность того или иного напряженного состояния и определить соответствующий коэффициент запаса можно опытным путем, определив значения главных напряжений, при которых наступает предельное напряженное состояние. Однако такое решение оказывается простым лишь при одноосном нагружении. Решение этой важной задачи в случаях сложного напряженного состояния осуществляется с помощью теорий прочности.

Теории прочности базируются на различных гипотезах, определяющих условия перехода материала в предельное состояние. Необходимо отметить, что расчеты по различным теориям прочности могут давать противоречивые результаты, не соответствующие часто и опытным данным. Поэтому в каждом частном случае следует выполнять расчет по той теории прочности, которая наиболее достоверна (наиболее хорошо согласуется с экспериментальными данными) для данного материала и типа напряженного состояния.

Рассмотрим основные теории прочности.

Первая теория прочности (Галилея, Ренкина) основывается на гипотезе о том, что предельное состояние материала наступает тогда, когда одно из главных напряжений достигает величины σ_0.

В соответствии с этой гипотезой должно соблюдаться условие

$$\sigma_{расч} = \sigma_1 \le \sigma_0 , \qquad (17.1)$$

где σ_0 — опасное напряжение, вызывающее предельное состояние при одноосном (линейном) растяжении или сжатии.

Главным недостатком теории наибольших нормальных напряжений является то, что ею не учитываются два других главных напряжения — σ_2 и σ_3, которые в действительности также оказывают влияние на прочность материала.

Данная теория подтверждается экспериментами только при растяжении хрупких материалов, разрушение которых происходит путем отрыва одной части от другой без развития заметных пластических деформаций. В настоящее время первая теория прочности не применяется и имеет лишь историческое значение.

Вторая теория прочности (Мариотта, Сен-Венана) базируется на гипотезе о том, что наступление предельного состояния материала определяется величиной наибольшей относительной деформации. Поэтому величина наибольшей относительной деформации ε_{max}, зависящая от действующих напряжений, не должна превышать допускаемого значения ε_0, определяемого из условия одноосного растяжения:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \le \varepsilon_0 . \qquad (17.2)$$

При определении ε_1 и ε_0 используют известные зависимости Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]; \ \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} . \qquad (17.3)$$

При этом считают, что зависимости (17.3) остаются справедливыми вплоть до наступления предельного напряженного состояния, что по существу отвечает хрупкому разрушению материала, которое происходит без заметных пластических деформаций. После подстановки зависимостей (17.3) в (17.2) получим

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \le \sigma_0 \qquad (17.4)$$

или

$$\sigma_{\text{расч}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \le R . \qquad (17.5)$$

Третья теория прочности (Кулона) строится на гипотезе о том, что наступление предельного напряженного состояния определяется величиной наибольших касательных напряжений.

Экспериментами установлено, что пластические деформации сопровождаются значительными сдвигами, вызванными касательными напряжениями. Поэтому данную гипотезу можно считать связанной с переходом материала в пластическое состояние. Соответствующее условие прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} \le \tau_0 , \tag{17.6}$$

где τ_0 — предельное для данного материала касательное напряжение, определяемое для одноосного напряженного состояния по формуле

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} , \tag{17.7}$$

а $\tau_{\max}$ для объемного напряженного состояния определяется по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} , \tag{17.8}$$

тогда

$$\sigma_{\text{расч}} = \sigma_1 - \sigma_3 \le \sigma_0 \le R . \tag{17.9}$$

Третья теория прочности достаточно хорошо подтверждается опытами для пластичных материалов и получила широкое распространение в машиностроении.

Для плоского напряженного состояния условие (17.9) после подстановки в него соответствующих выражений главных напряжений запишется в виде:

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} \le R . \tag{17.10}$$

На практике встречаются случаи, когда $\sigma_y = 0$, например, изгиб балок. Приняв $\sigma_x = \sigma$ и $\tau_{xy} = \tau$, получим

$$\sigma_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le R . \tag{17.11}$$

Основной недостаток третьей теории состоит в том, что при объемном напряженном состоянии не учитывается влияние главного напряжения σ_2.

Четвертая теория прочности (Максвелла, Бельтрами, Губера–Мизеса) основывается на предположении о том, что при любом напряженном состоянии к моменту наступления предельного состояния материала количество удельной потенциальной энергии, связанной с изменением формы элемента, одинаково. Эта теория называется энергетической. При применении энергетической теории должно соблюдаться условие:

$$U_{\text{ф}} \le U_{\text{фо}}, \tag{17.12}$$

где $U_{\text{ф}}$ — величина потенциальной энергии, идущей на изменение формы элемента при исследуемом напряженном состоянии; $U_{\text{фо}}$ — предельное значение потенциальной энергии изменения формы, определяемое для линейного напряженного состояния.

Значение $U_{\text{ф}}$ вычисляют по формуле

$$U_{\text{ф}} = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)\right]. \tag{17.13}$$

Для линейного напряженного состояния

$$U_{\text{ôî}} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_0^2. \tag{17.14}$$

Тогда условие прочности по четвертой теории имеет вид:

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)} \le R \tag{17.15}$$

или

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]} \le R. \tag{17.16}$$

При плоском напряженном состоянии, заменяя в формуле (17.16) соответствующие главные напряжения их выражениями через σ_x, σ_y и τ_{xy}, получим

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\tau_{xy}^2} \le R. \tag{17.17}$$

Для частного случая при $\sigma_y = 0$, приняв $\sigma_x = \sigma$ и $\tau_{xy} = \tau$, получим условие прочности по IV теории:

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le R. \tag{17.18}$$

Как и третья теория прочности, энергетическая теория хорошо подтверждается экспериментами с пластичными материалами и поэтому широко применяется на практике. Для пластичных материалов обе указанные теории устанавливают критерии, определяющие условия возникновения пластических деформаций. Поэтому выражения (17.6) и (17.12) называют также условиями пластичности.

Пример 17.1. Тонкостенный цилиндрический сосуд диаметром $D = 100$ см находится под внутренним давлением $p = 20$ атм = = 2 МПа. Необходимо:

1) выяснить напряженное состояние стенок;

2) найти главные напряжения по четвертой теории прочности;

3) подобрать толщину стенки t сосуда, если $R = 100$ МПа (1000 кгс/см^2).

Р е ш е н и е.

Сила, действующая на дно сосуда,

$$P_{\text{дн}} = p\frac{\pi D^2}{4} = 2\frac{3{,}14 \cdot 1^2}{4} = 1{,}57 \text{ МН}.$$

Найдем напряжения σ' (рис. 17.1, *а*):

$$\sum X = 0;\; N = P_{\text{дн}};\; \sigma'\pi D t = P_{\text{дн}};\; \sigma' = \frac{P_{\text{дн}}}{\pi D t} = \frac{p\pi D^2}{4\pi D t} = \frac{pD}{4t}.$$

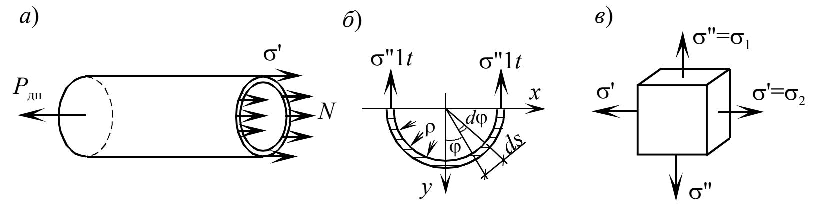


Рис. 17.1

Вырезав из сосуда полукольцо единичной ширины (рис. 17.1, *б*), найдем σ'':

$$pdS \cdot 1 = p\frac{D}{2}d\varphi \cdot 1;$$

$$\sum y = 0\,;\ -2\sigma'' t + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} p\frac{D}{2}\cos\varphi d\varphi = 0\,,$$

тогда $\sigma'' t = \dfrac{pD}{2}$, а $\sigma'' = \dfrac{pD}{2t}$.

Так как $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то обозначим $\sigma'' = \sigma_1$, а $\sigma' = \sigma_2$. Элемент стенки котла испытывает плоское напряженное состояние (рис. 17.1, *в*).

По четвертой теории прочности

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \le R$$

или

$$\sqrt{\frac{p^2D^2}{4t^2} + \frac{p^2D^2}{16t^2} - \frac{p^2D^2}{8t^2}} \le R\,;\ \frac{pD}{2t}\sqrt{\frac{3}{4}} \le R\,,$$

а

$$t \ge \frac{pD}{2R}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{2\cdot 1}{2\cdot 100}0{,}866 = 0{,}866\cdot 10^{-2}\ \text{м.}$$

Принимаем t = 10 мм.

ТЕМА 18

ОДНОВРЕМЕННОЕ ДЕЙСТВИЕ КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА

Теория: [1], гл. 10, § 10.4;
[2], гл. XI, § 100.

Изгиб с кручением представляют собой один из видов сложного сопротивления, когда в сечениях бруса действуют изгибающие и крутящий моменты. В отличие от рассмотренных выше случаев сложного сопротивления (косого изгиба и растяжения (сжатия) с изгибом) при кручении с изгибом напряженное состояние в опасных точках нельзя рассматривать как одноосное. Касательными напряжениями, обусловленными крутящим моментом, пренебречь нельзя.

Одновременное действие кручения с изгибом чаще всего встречается при работе различных валов. Изгиб валов вызывается их собственным весом, весом шкивов, маховиков и зубчатых колес, силами натяжения ремней, давлением на зубчатые шестеренки и прочее.

Расчет валов, работающих на кручение с изгибом, ведут в следующем порядке.

1. Все силы, не пересекающие ось вала, переносятся на эту ось параллельно своему расположению с добавлением соответствующих моментов в плоскостях, перпендикулярных оси вала.

В тех случаях, когда известны мощность, передаваемая на вал или снимаемая с вала в данном сечении, и скорость вращения вала, момент внешней пары может быть определен по известным формулам (10.2) и (10.3) [10].

2. Определив внешние моменты, строят эпюру крутящих моментов ($M_{\text{к}}$).

3. Рассматривая вал как балку, наклонные силы проецируют на вертикальную и горизонтальную оси; определяют вертикальные и горизонтальные опорные реакции, возникающие в подшипниках вала от соответствующих нагрузок, и строят эпюры моментов, изгибающих вал в вертикальной (M_z) и горизонтальной (M_y) плоскостях.

4. Строят эпюру суммарных изгибающих моментов, ординаты которой в любом сечении могут быть вычислены по формуле

$$M_{\grave{e}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}\ . \tag{18.1}$$

За опасное принимают то сечение, где $M_{\text{и}}$ и $M_{\text{к}}$ достигают одновременно возможно больших значений. Расчетный момент, учитывающий одновременное воздействие на вал кручения и изгиба, зависит от принятой теории прочности — третьей или четвертой (см формулы (17.11) или (17.18)).

Подставив $\sigma = \dfrac{M_{\grave{e}}}{W_z}$, а $\tau = \dfrac{M_{\text{к}}}{W_\rho} = \dfrac{M_{\text{к}}}{2W_z}$, получим расчетный момент: по третьей теории прочности

$$M_{\text{расч}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2}\,, \tag{18.2}$$

а по четвертой теории прочности

$$M_{\text{расч}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0{,}75 M_{\text{к}}^2}\,. \tag{18.3}$$

Запишем условие прочности при изгибе с кручением:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{расч}}}{W} \le [\sigma], \tag{18.4}$$

где W — осевой момент сопротивления, а W_ρ — полярный момент сопротивления.

Требуемый диаметр вала из условия прочности находят по формуле

$$D \ge \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{расч}}}{\pi[\sigma]}}\,. \tag{18.5}$$

Наружный диаметр полого вала

$$D \ge \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{расч}}}{\pi\left(1-\alpha^4\right)[\sigma]}}\,, \tag{18.6}$$

где $\alpha = d/D$; d — внутренний диаметр вала.

Условие жесткости вала

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{GJ_\rho} \le [\Theta]. \tag{18.7}$$

Диаметр вала из условия жесткости

$$D \ge \sqrt[4]{\frac{32 M_{\text{к}}}{\pi G[\Theta]}}\,. \tag{18.8}$$

Пример 18.1. На стальной вал *CB* (рис. 18.1, *а*) насажено рабочее зубчатое колесо *1* весом Q_1 = 1 кН, диаметром D_1 = 40 см и шкив *2* весом Q_2 = 5 кН, диаметром D_2 = 120 см, передающий на вал при помощи ременной передачи мощность $N = 200$ кВт при n = 400 об/мин. Окружные усилия на шкиве *2* параллельны между собой, причем $T_2 = 2t_2$, и наклонены к вертикали под углом

$\alpha_2 = 30^0$ (рис. 18.1, *б*). Окружное усилие шестерни T_1 составляет с вертикалью угол $\alpha_1 = 45^0$. Определить по третьей теории прочности диаметр вала, если дано: $l_1 = 20$ см, $l_2 = 40$ см, $l_3 = 40$ см, $[\sigma] =$
$= 120$ МПа (1200 кгс/см^2), $[\Theta] = 0{,}25^0$ на 1 м длины, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа ($8 \cdot 10^5$ кгс/см^2).

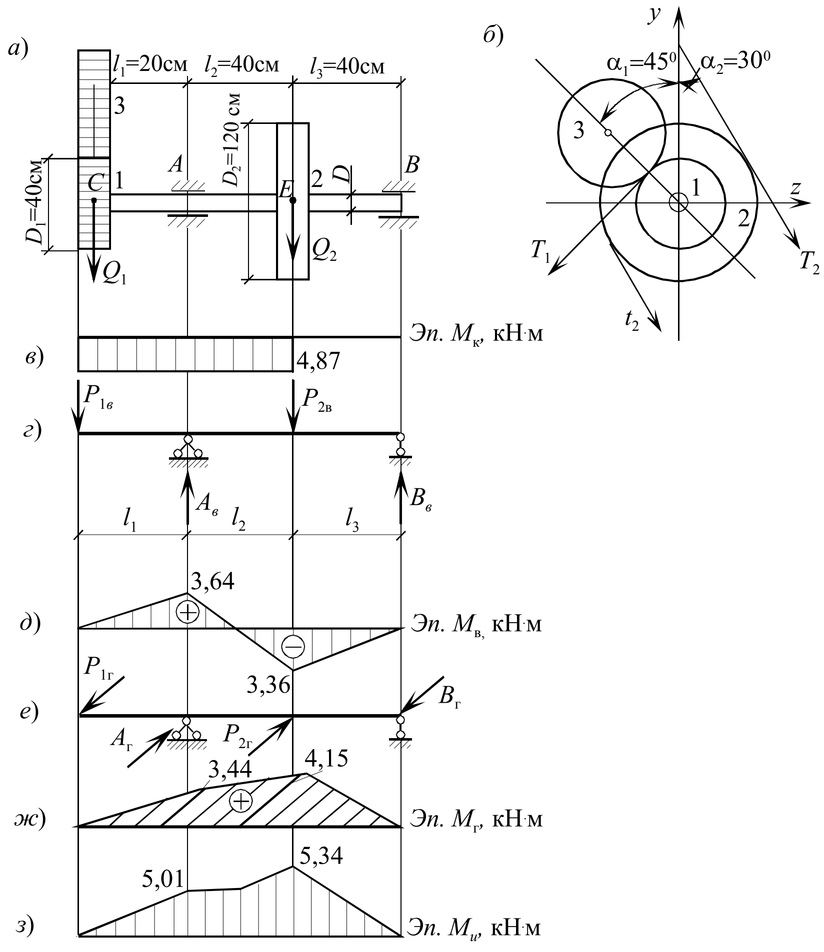


Рис. 18.1

Р е ш е н и е.

Находим крутящий момент на участке вала CE, между зубчатым колесом *1* и шкивом *2*:

$$M_{к} = 9736\frac{N}{n} = 9736\frac{200}{400} = 4868 \text{ Н·м},$$

где n — число оборотов вала; N — мощность, кВт.

Строим эпюру $M_к$ (рис. 18.1, *в*). Далее определим окружные усилия, приложенные к зубчатой шестерне и шкиву:

$$M_{к} = T_1R_1 = R_2(T_2 - t_2) = R_2t_2;$$

$$T_1 = \frac{M_{к}}{R_1} = \frac{4868}{0{,}2} = 24340 \text{ Н};$$

$$t_2 = \frac{M_{к}}{R_2} = \frac{4868}{0{,}6} = 8113 \text{ Н};$$

$$T_2 = 2t_2 = 2 \cdot 8113 = 16226 \text{ Н}.$$

Переносим все силы на ось вала и определяем вертикальные и горизонтальные составляющие с учетом веса Q_1 и Q_2.

В плоскости зубчатой шестерни:

$$P_{1в} = T_1\cos 45^0 + Q_1 = 24340 \cdot 0{,}707 + 1000 = 18208 \text{ Н};$$

$$P_{1г} = T_1\sin 45^0 = 24340 \cdot 0{,}707 = 17208 \text{ Н}.$$

В плоскости шкива:

$$P_{2в} = (T_2 + t_2)\cos 30^0 + Q_2 = 24339 \cdot 0{,}866 + 5000 = 25931 \text{ Н};$$

$$P_{2г} = (T_2 + t_2)\sin 30^0 = 24339 \cdot 0{,}5 = 12169{,}5 \text{ Н}.$$

Определим опорные реакции и изгибающие моменты от вертикальных сил (рис. 18.1, *г, д*):

$$A_{в} = \frac{P_{1в}(l_1 + l_2 + l_3) + P_{2в}l_3}{(l_2 + l_3)} = \frac{18208 \cdot 1 + 25931 \cdot 0{,}4}{0{,}8} = 35725{,}5 \text{ Н};$$

$$B_в = \frac{P_{2в} l_2 - P_{1в} l_1}{(l_2 + l_3)} = \frac{25931 \cdot 0{,}4 - 18208 \cdot 0{,}2}{0{,}8} = 8413{,}5 \text{ Н};$$

$$M_в^A = P_{1в} l_1 = 18208 \cdot 0{,}2 \approx 3{,}64 \text{ кН·м};$$

$$M_в^E = -B_в l_3 = -8413{,}5 \cdot 0{,}4 \approx -3{,}36 \text{ кН·м}.$$

Опорные реакции и изгибающие моменты от горизонтальных сил (рис. 18.1, *е, ж*):

$$A_г = \frac{P_{1г}(l_1 + l_2 + l_3) - P_{2г} l_3}{(l_2 + l_3)} = \frac{17208 \cdot 1 - 12169{,}5 \cdot 0{,}4}{0{,}8} = 15425 \text{ Н};$$

$$B_г = \frac{P_{1г} l_1 + P_{2г} l_2}{(l_2 + l_3)} = \frac{17208 \cdot 0{,}2 + 12169 \cdot 0{,}4}{0{,}8} = 10386{,}75 \text{ Н};$$

$$M_г^A = P_{1г} l_1 = 3{,}44 \text{ кН·м}; \; M_г^E = B_г l_3 = 4{,}15 \text{ кН·м}.$$

Построив эпюры $M_в$ и $M_г$, переходим к построению суммарной эпюры изгибающих моментов $M_и$ (рис. 18.1, *з*). Наибольшие значения $M_и$ будут в сечениях A и E:

$$M_и^A = \sqrt{\left(M_в^A\right)^2 + \left(M_г^A\right)^2} = \sqrt{3{,}64^2 + 3{,}44^2} = \sqrt{25{,}103} = 5{,}01 \text{ кН·м};$$

$$M_и^E = \sqrt{\left(M_в^E\right)^2 + \left(M_г^E\right)^2} = \sqrt{3{,}36^2 + 4{,}15^2} = \sqrt{28{,}512} = 5{,}34 \text{ кН·м}.$$

Анализируя эпюры $M_и$ и $M_к$, установим, что опасное сечение находится в точке E. Расчетный момент в точке E по третьей теории прочности равен:

$$M_{расч} = \sqrt{M_и^2 + M_к^2} = \sqrt{5{,}34^2 + 4{,}87^2} = \sqrt{52{,}23} = 7{,}23 \text{ кН·м}.$$

Диаметр вала из условия прочности (18.5) равен:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{расч}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 7{,}23 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 120 \cdot 10^6}} = \sqrt[3]{0{,}614 \cdot 10^{-3}} = 0{,}085 \text{ м}.$$

Найдем диаметр вала из условия жесткости (18.8):

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_к 180}{\pi^2 G[\theta]}} = 4{,}92\sqrt[4]{\frac{M_к}{G[\theta]}} = 4{,}92\sqrt[4]{\frac{4868 \cdot 4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1}} = 0{,}109 \text{ м.}$$

Принимаем окончательно диаметр вала D = 11 см.

Указание. Изучив данную тему, можно решать задачу № 7 контрольной работы.

ТЕМА 19

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Теория: [1], гл. 11, § 11.1–11.4;
[2], гл. XV, § 126–129, 132.

В ряде случаев проектирования инженерных сооружений обычных расчетов на прочность бывает недостаточно. Наряду с проблемой прочности существует так называемая *проблема устойчивости сооружения* или его элементов.

Инженерные объекты, кроме нагрузок, учитываемых расчетом, всегда подвергаются дополнительным малым воздействиям (возмущениям), стремящимся вывести данное тело из его расчетного состояния равновесия.

Если малые возмущения *вызывают малые отклонения системы* от расчетного состояния, то такое состояние системы *является устойчивым.* Если же при малых возмущениях возникают *большие отклонения* системы от расчетного состояния, то такое состояние системы является *неустойчивым.*

Примером устойчивого и неустойчивого равновесия может служить равновесие тяжелого шарика, лежащего на вогнутой или на выпуклой поверхности.

В первом случае (рис. 19.1, *а*) при любом малом отклонении шарик стремится вернуться в исходное положение — *устойчивое равновесие*. Во втором случае (рис. 19.1, *б*) при любом малом воздействии шарик покатится вниз — *неустойчивое равновесие*.

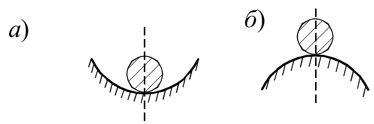


Рис. 19.1

Аналогичные явления можно наблюдать при изучении равновесия сжатого стержня.

При сжимающей силе меньше некоторого критического значения $\left(P < P_{\text{кр}}\right)$ сжатый стержень будет устойчивым. *При увеличении сжимающей силы* $\left(P > P_{\text{кр}}\right)$ *происходит потеря прямолинейной формы сжатого стержня, т.е. стержень изогнется* (рис. 19.2). *Такое состояние носит название «продольный изгиб или потеря устойчивости»*.

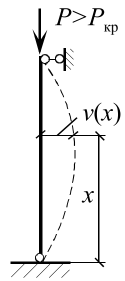


Рис. 19.2

Появление продольного изгиба опасно тем, что при малом увеличении сжимающей силы происходит сильный рост прогибов $v(x)$, а следовательно, резкое увеличение напряжений, деформаций и разрушение стержня. В гибких стержнях потеря устойчивости наступает при сравнительно небольших сжимающих напряжениях, не являющихся опасными с точки зрения прочности самого материала.

Таким образом, продольный изгиб, или потеря устойчивости, является опасным явлением и его нельзя допускать в конструкциях. Необходимость проверки на устойчивость возникает при расчете стоек, колонн и других элементов конструкций, работающих на сжатие. В этом случае размеры поперечных сечений сжатых стержней должны назначаться не из условия прочности от чистого сжатия, а из условия того, что сжимающие напряжения должны быть меньше критических:

$$\sigma_{\max} < \sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{A}. \tag{19.1}$$

Определение критических сил, изучение форм потери устойчивости и разработка методов подбора сечений составляют основную задачу науки об устойчивости сооружений.

Для исследования устойчивости упругих систем есть ряд методов, но в сопротивлении материалов ограничиваются рассмотрением метода Эйлера.

В инженерных расчетах практический интерес представляет формула Эйлера для определения наименьшей критической силы. Запишем ее без вывода:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{l_{\text{р}}^2}, \qquad (19.2)$$

где $l_{\text{р}}$ — расчетная или приведенная длина стержня, которую определяют по формуле

$$l_{\text{р}} = l\mu , \qquad (19.3)$$

l — длина стержня; μ — коэффициент приведения длины, учитывающий характер закрепления концов стержня.

На рис. 19.3 приведены четыре основных случая закрепления стержней и даны соответствующие значения коэффициента μ.

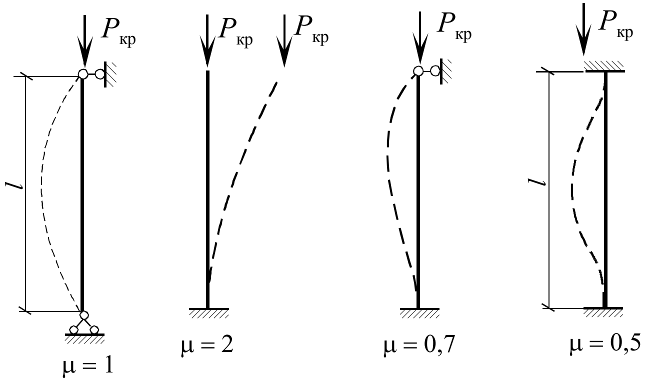


Рис. 19.3

Величина *критической силы*, вычисленная по формуле Эйлера (19.2), *прямо пропорциональна изгибной жесткости EJ и обратно пропорциональна квадрату длины стержня*. Таким образом, наблюдается разница между работой стержней на растяжение и сжатие. Предельная *растягивающая сила не зависит от длины стержня, а зависит от прочностных характеристик материала*:

$$P_{\text{доп}} \le AR ,$$

где R — расчетное сопротивление материала, и поэтому различна для разных сортов материала.

Величина критической силы не зависит от прочностных характеристик материала.

В растянутых стержнях признаки опасного состояния часто наступают задолго до разрушения, а в сжатых стержнях каких-либо заметных признаков возможной потери устойчивости, как правило, установить не удается. Потеря устойчивости стержней опасна, потому что она происходит внезапно.

Формула (19.2), полученная Леонардом Эйлером в 1744 г., долгое время была предметом дискуссий. Одной из главных причин споров явилось то обстоятельство, что эта формула в ряде случаев не подтверждалась экспериментами. Дело в том, что эта формула выведена с учетом закона Гука, т.е. в предположении, что стержень работает в пределах упругих деформаций. Поэтому ее нельзя применять, когда критические напряжения больше предела пропорциональности. Для установления предела применимости формулы Эйлера найдем критическое напряжение:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{A} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l / i)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \qquad (19.4)$$

где $i_{\min} = \sqrt{\dfrac{J_{\min}}{A}}$ — минимальный радиус инерции сечения; λ — гибкость стержня,

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}. \qquad (19.5)$$

Приравнивая выражение (19.4) пределу пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$, получим предельное значение гибкости или предел применимости формулы Эйлера:

$$\lambda_{\text{пр}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}. \qquad (19.6)$$

Следовательно, *по формуле Эйлера величину критической силы $P_{кр}$ можно определять только для стержней большой гибкости*, т.е. когда $\lambda \geq \lambda_{\text{пр}}$.

Если гибкость стержней $\lambda < \lambda_{\text{пр}}$, то формулы (19.2) и (19.4) дают неверное (завышенное) значение. В таких случаях величину критического напряжения можно найти, используя данные экспериментов.

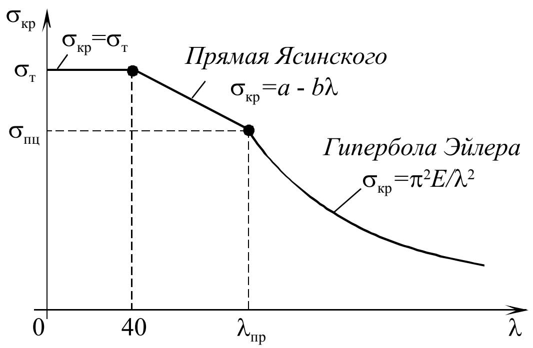


Рис. 19.4

На рис. 19.4 приведена зависимость $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ для строительной стали. Для $\lambda > \lambda_{пр} = 100$ график $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ построен с использованием формулы (19.4) — так называемая *гипербола Эйлера*.

Как отмечалось выше, при $\lambda = \lambda_{пр}$ критическое напряжение равно пределу пропорциональности, т.е. $\sigma_{кр} = \sigma_{пц}$. Экспериментами установлено, что для коротких и массивных стержней, с гибкостью $\lambda = 0...40$, потеря устойчивости не опасна. В этом случае опасна потеря прочности, и тогда можно принять $\sigma_{кр} = \sigma_т$. В интервале $40 \le \lambda \le 100$ $\sigma_{кр}$ зависит от гибкости λ почти линейно. На основе обработки экспериментальных данных, проведенной в конце XIX в. Л. Тетмайером, Ф.С. Ясинским и другими, была предложена эмпирическая формула

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \tag{19.7}$$

где a и b — коэффициенты, зависящие от материала.

Например, для стали Ст.3 a = 310 МПа; b = 1,14 МПа; для дерева a = 29,3 МПа; b = 0,194 МПа.

Формула (19.7) носит название — *формула Ясинского*.

19.1. Практический расчет центрально сжатых стержней

При назначении поперечных размеров сжатых гибких стержней в первую очередь необходимо заботиться о том, чтобы стержень в процессе эксплуатации при действии сжимающих сил не потерял устойчивости. Условие устойчивости записывается в виде:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{A_{\text{бр}}} \leq R_y , \tag{19.8}$$

где R_y — расчетное напряжение на устойчивость, которое зависит от гибкости стержня и определяется по формуле

$$R_y = R\varphi , \tag{19.9}$$

где R — основное расчетное сопротивление на сжатие; φ — коэффициент уменьшения основного расчетного сопротивления при продольном изгибе, который зависит от гибкости стержня и принимает значения от 0 до 1 (Прил. 3).

Исследования показали, что местные ослабления сечения (например, заклепочные отверстия) не оказывают существенного влияния на величину критической силы. Поэтому в формуле (19.8) взята площадь сечения брутто. Окончательное условие устойчивости имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A_{\text{бр}}} \leq R\varphi \tag{19.10}$$

или

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A_{\text{бр}}\varphi} \leq R . \tag{19.11}$$

Формула (19.11) дает возможность сделать поверочный расчет на устойчивость, определить допускаемую нагрузку и размеры поперечного сечения сжатого стержня.

Для определения размеров сечения приходится пользоваться методом последовательных приближений.

Порядок расчета следующий.

1. Задаются значением коэффициента φ (например, $\varphi \approx 0{,}5$).
2. Определяют площадь сечения $A_{\text{бр}}$ из формулы (19.11).

3. По площади находят размеры сечения или номер прокатного профиля, а затем определяют J_z, J_y, i_z, i_y, λ_z, λ_y. Для прокатных профилей моменты и радиусы инерции можно взять из ГОСТ 8509-93, 8510-86, 8240-89, 8239-89. Гибкость стержня определяют по формуле (19.5).

4. По большей гибкости из прил. 3 берут значение коэффициента φ_1 для данного материала и по формуле (19.11) находят напряжение.

Естественно, что при первой попытке полученное напряжение может значительно отличаться от расчетного сопротивления. В этом случае делают второе приближение:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi + \varphi_1}{2}$$

и повторяют расчет.

Процесс последовательных попыток продолжают до тех пор, пока разница между $\sigma_{\max}$ и R не станет достаточно малой, т.е.,

$$\Delta = \frac{\sigma_{\max} - R}{R} \cdot 100\,\% = \pm 5\,\%\,.$$

При подборе составных сечений с одинаковыми условиями закрепления стержня в двух главных плоскостях инерции рациональным будет сечение, у которого два главных момента инерции равны:

$$J_z = J_y\,.$$

Расстояние между центрами тяжести составных элементов можно определить из условия равноустойчивости (рис. 19.5):

$$2J_z = 2\left[J_{y_1} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 A_1\right],$$

где J_z, J_{y_1} и A_1 — моменты инерции и площадь одного профиля, из которых выполнено составное сечение.

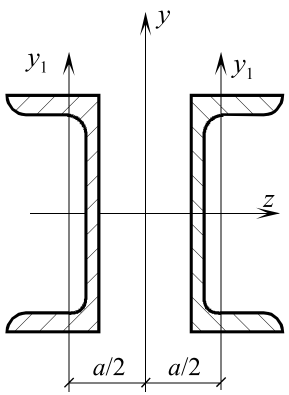


Рис. 19.5

Пример 19.1. Подобрать диаметр D трубы, сжатой осевой силой (рис. 19.6).

Дано: P = 650 кН, толщина стенки трубы δ = 2 см, расчетное сопротивление R = 200 МПа (2000 кгс/см^2).

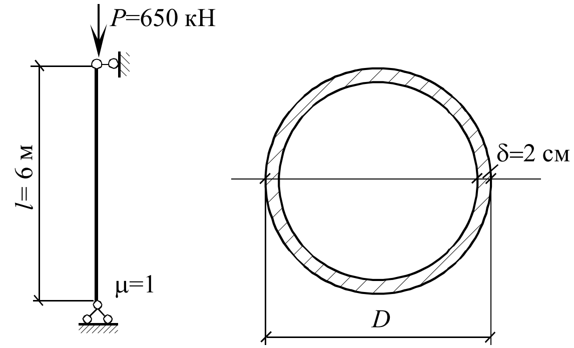


Рис. 19.6

Р е ш е н и е.

Запишем условие устойчивости:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A_{бр}} \le R\varphi .$$

Первое приближение. Задаем предварительно $\varphi = 0{,}5$ и находим требуемую площадь поперечного сечения трубы:

$$A_1 \ge \frac{650 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 200 \cdot 10^6} = 65 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2.$$

Площадь трубы равна разности площадей кругов

$$A = \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4} = 65\ \text{см}^2 \text{ или } \left(D+d\right)\left(D-d\right) = \frac{65}{\pi}4 . \qquad (a)$$

Так как $D - d = 2\delta = 4$ см, то $d = D - 4$. Подставим d в (a) и получим

$$8D - 16 = \frac{65}{\pi}4 ,$$

откуда D = 12,35 см, а d = 8,35 см.

Вычислим радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64}\frac{4}{\pi\left(D^2 - d^2\right)}} = \frac{D}{4}\sqrt{1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2},$$

тогда

$$i = \frac{12,35}{4}\sqrt{1 + \left(\frac{8,35}{12,35}\right)^2} = 3,72 \text{ см.}$$

Гибкость $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 600}{3,72} = 161$.

Для данной гибкости берем из прил. 3 $\varphi_1 = 0,29$.

Так как $\varphi_1 << \varphi$, то делаем второе приближение:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \frac{0,5 + 0,29}{2} = 0,395$$

и повторяем расчет.

$$A_2 = 82 \text{ см}^2;\ D = 15 \text{ см};\ d = 11 \text{ см};\ i = 4,65 \text{ см};$$

$$\lambda_2 = 129;\ \varphi_2 = 0,405.$$

Напряжение

$$\sigma_{max} = \frac{650 \cdot 10^3}{0,405 \cdot 82 \cdot 10^{-4}} = 195,72 \text{ МПа.}$$

Расхождение составляет:

$$\Delta = \left|\frac{195,72 - 200}{200}\right| 100\,\% = 2,14\,\%,$$ что меньше 5 %.

Указание. Изучив данную тему, можно решать задачу № 8 контрольной работы.

ТЕМА 20

РАСЧЕТ КРИВОГО БРУСА

Теория: [2]. гл. XIV, § 118–123.

В строительной практике и машиностроении встречаются стержни (брусья) с криволинейной осью: крюк подъемного крана, замкнутое кольцо, обод колеса, звенья цепей, проушины, арки (рис. 20.1).

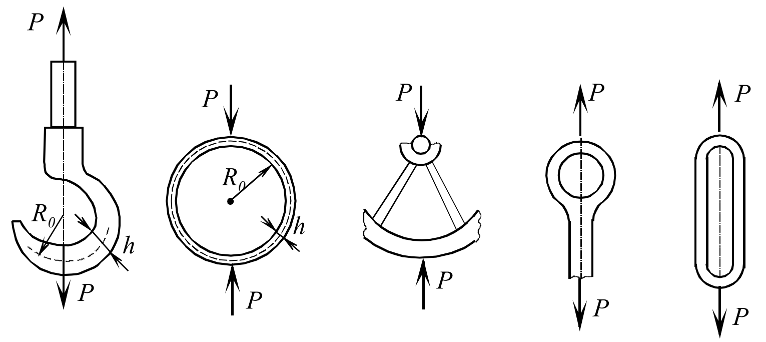


Рис. 20.1

Кривые брусья бывают малой и большой кривизны: критерием является отношение радиуса кривизны продольной оси бруса R_0 к высоте сечения бруса h.

Если $\frac{R_0}{h} > 5$, то имеем брус малой кривизны; при $\frac{R_0}{h} \le 5$ — брус большой кривизны.

Ограничимся рассмотрением плоских кривых брусьев, у которых:

1) поперечное сечение имеет хотя бы одну ось симметрии;

2) все нагрузки и опорные реакции лежат в плоскости симметрии поперечного сечения бруса.

При таких условиях все внутренние силы в произвольном сечении кривого бруса приводятся к трем компонентам: *продольной силе N*, *изгибающему моменту M* и *поперечной силе Q*.

Опорные реакции для кривых брусьев определяются из уравнений равновесия (статики).

20.1. Определение внутренних усилий

Метод сечения, применяемый к кривым брусьям, позволяет определить внутренние усилия, действующие в его поперечном сечении: продольную (нормальную) силу N, изгибающий момент M и поперечную силу Q, которые в произвольном сечении кривого бруса определяют по тем же правилам, что и для прямых брусьев.

Изгибающий момент считают положительным, если он увеличивает кривизну оси бруса. Знак поперечной и продольной силы определяют так же, как и для прямых стержней. Положительные направления N, Q и M показаны на рис. 20.2.

Эпюры N, Q и M для кривых брусьев строятся так же, как и для брусьев с прямолинейной осью, однако есть некоторые особенности. Условимся положительные значения ординат эпюр N, Q и M откладывать перпендикулярно криволинейной оси бруса, в сторону от центра его кривизны, а отрицательные — к центру кривизны. Ось бруса является базой эпюры. Для построения эпюр внутренних усилий необходимо на каждом участке получить аналитические выражения N, Q и M для произвольного сечения.

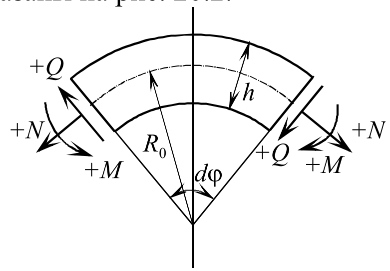


Рис. 20.2

Пример 20.1. Возьмем стержень, очерченный по окружности радиусом R_0, защемленный левым концом и нагруженный силой P (рис. 20.3, *а*). Положение сечения определяется углом φ. При вычислении N, Q и M рассмотрим правую часть — так избавимся от необходимости вычисления опорных реакций.

Построим силовой треугольник (рис. 20.3, *б*). Проецируя силу P на нормаль к сечению и на само сечение (рис. 20.3, *в*), получим из условия равновесия

$$N = -P\sin\varphi \text{ (сжатие);}$$

$$Q = P\cos\varphi \text{ (поворот по часовой стрелке).}$$

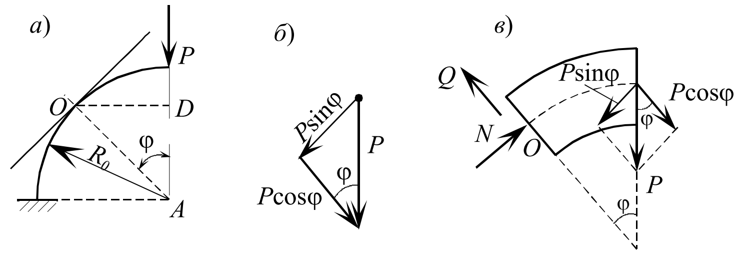


Рис. 20.3

Изгибающий момент равен моменту силы относительно точки O:

$$M = P \cdot OD = PR_0 \sin \varphi .$$

Изменяя угол φ, можно определить *N, Q* и *M* в сечениях.

На рис. 20.4 показаны эпюры. За нулевую линию принята ось кривого стержня, а ординаты отложены по радиусам кривизны стержня.

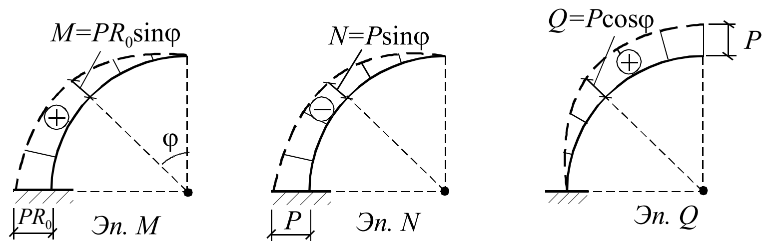


Рис. 20.4

Пример 20.2. Для кривого бруса на двух опорах (рис. 20.5, *а*), загруженного в точке *C* горизонтальной силой *P*, записать выражения *N, Q* и *M* для произвольных сечений на I и II участках и построить эпюры. Брус очерчен по окружности радиусом R_0.

Решение.

По уравнениям статики определим опорные реакции:

$$H = P\ ;\ V_A = \frac{P}{2}\ ;\ V_B = \frac{P}{2}\ .$$

Разобьем брус на два участка, и для произвольных сечений на каждом участке запишем уравнения для *N, Q* и *M*.

I участок (*AC*): $0 \le \varphi_1 \le \dfrac{\pi}{2}$.

$$M = -HR_0 \sin\varphi_1 + V_A R_0 \left(1-\cos\varphi_1\right) = -PR_0 \sin\varphi_1 + \frac{PR_0}{2}\left(1-\cos\varphi_1\right);$$

$$Q = P\cos\varphi_1 - \frac{P}{2}\sin\varphi_1;\ \ N = P\sin\varphi_1 + \frac{P}{2}\cos\varphi_1 .$$

II участок (*BC*): $0 \le \varphi_2 \le \dfrac{\pi}{2}$.

$$M = -\frac{PR_0}{2}\left(1-\cos\varphi_2\right);\ Q = -\frac{P}{2}\sin\varphi_2;\ N = -\frac{P}{2}\cos\varphi_2 .$$

Построение эпюр (рис. 20.5, *б, в, г*) проводим так же, как и в предыдущем примере. При этом на эпюре *N* в точке *C* получим скачок, равный величине сосредоточенной силы *P*.

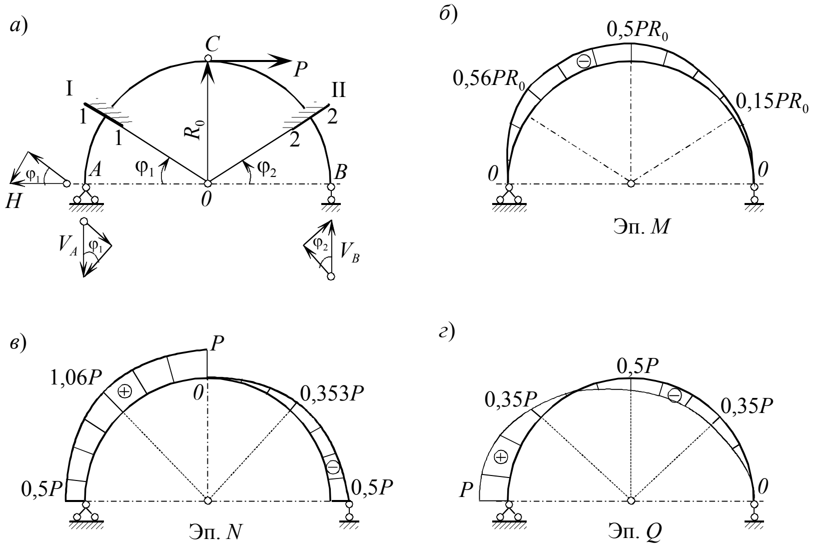


Рис. 20.5

20.2. Определение нормальных напряжений

Определение напряжений в кривых брусьях производится по разным формулам, в зависимости от кривизны — малой или большой. Напряжения в брусьях малой кривизны с достаточной для практики точностью можно определять по формулам для прямых стержней.

Важнейшей отличительной особенностью изгиба бруса большой кривизны является то, что нормальные напряжения в поперечном сечении кривого бруса изменяются непропорционально расстоянию от нейтральной оси. Напряжения σ в сечении кривого бруса изменяются по гиперболическому закону. Нейтральная (нулевая) ось, в отличие от прямого бруса, не проходит через центр тяжести сечения, а смещена от него в сторону центра кривизны на y_0 (рис. 20.6).

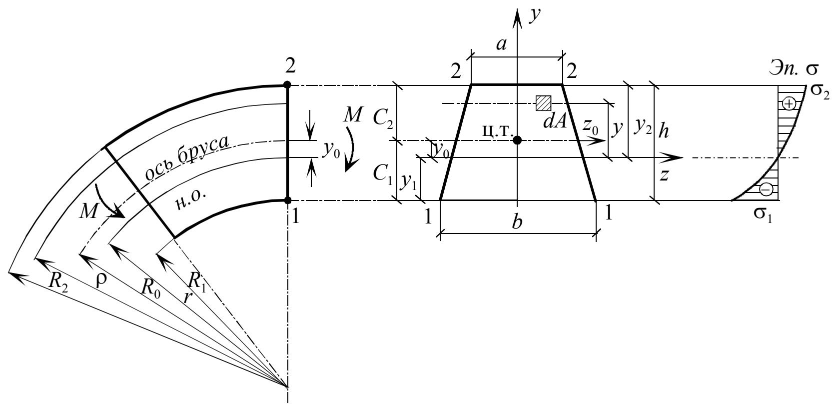


Рис. 20.6

Нормальные напряжения от изгибающего момента для произвольной точки поперечного сечения вычисляют по формуле

$$\sigma_M = \frac{M}{S_z}\frac{y}{\rho} = \frac{M}{S_z}\frac{y}{r+y}, \qquad (20.1)$$

где $S_z = Ay_0$ — статический момент площади поперечного сечения A относительно нейтральной оси z; y — расстояние от нейтрального слоя до рассматриваемой точки; $\rho = r + y$ — расстояние от центра кривизны до точки, в которой определяют напряжения; r — радиус кривизны нейтрального слоя.

Напряжения в наиболее удаленных от нейтральной оси точках будут наибольшими:

$$\sigma_{(1)} = -\frac{My_1}{S_z R_1}; \ \sigma_{(2)} = \frac{My_2}{S_z R_2}. \tag{20.2}$$

Если кроме изгибающего момента в поперечном сечении действует и продольная сила, то полное напряжение в произвольной точке равно:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M}{S_z}\frac{y}{\rho}. \tag{20.3}$$

Для определения напряжений по формулам (20.1) – (20.3) необходимо знать положение нейтральной оси z.

Радиус кривизны нейтрального слоя для любого сечения вычисляют по формуле

$$r = \frac{A}{\int\limits_A \frac{dA}{\rho}}. \tag{20.4}$$

Для некоторых типов поперечных сечений положение нейтральной оси можно определить по формулам, приведенным в табл. 20.1, учитывающим, что $y_0 \approx \frac{J_z}{AR_0}$.

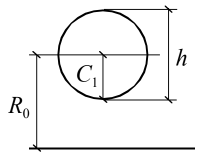
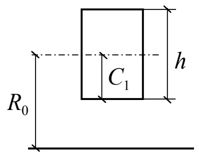
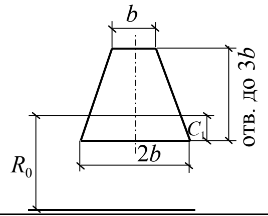
Смещение нейтральной оси для некоторых сечений также можно определить по формуле

$$y_0 = kR_0\,, \qquad (20.5)$$

где k — коэффициент (табл. 20.2), который зависит от формы сечения и отношения R_0/c_1; c_1 — расстояние от центра тяжести сечения до крайнего внутреннего волокна кривого бруса (точка *1* на рис. 20.6).

Таблица 20.2

Значения коэффициента *k* для определения положения нейтральной оси кривого бруса

$\dfrac{R_0}{c_1}$			
1,2	0,224	0,305	0,336
1,4	0,151	0,204	0,229
1,6	0,108	0,149	0,168
1,8	0,084	0,112	0,128
2,0	0,069	0,090	0,102
2,2	0,058	0,077	0,084
2,4	0,049	0,065	0,071
2,6	0,042	0,055	0,061
2,8	0,036	0,047	0,053
3,0	0,030	0,041	0,046
3,5	0,022	0,028	0,033
4,0	0,016	0,021	0,024
6,0	0,0070	0,0093	0,011
8,0	0,0039	0,0052	0,0060
10,0	0,0025	0,0033	0,0039

Заметим, что k быстро уменьшается с увеличением отношения R_0/c_1. Так, для прямоугольного сечения при $k = 10$ $y_0 = 0{,}0033R_0$, а нейтральная ось проходит вблизи центра тяжести сечения. Поэтому при $k = R_0/c_1 \geq 10$ для определения напряжений можно использовать формулы прямого бруса.

Пример 20.3. К изогнутой раме машины (рис. 20.7, *а*) приложены две силы P = 800 кгс (8 кН) каждая. Найти краевые напряжения в сечении AB, если поперечное сечение прямоугольное: h = = 80 мм, b = 30 мм, а R_0 = 80 мм.

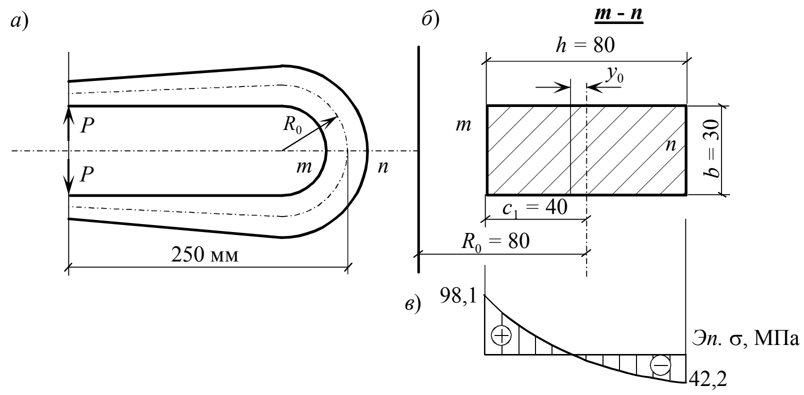


Рис. 20.7

Р е ш е н и е.

Так как $R_0 / h = 1 < 5$, то для стрежня большой кривизны вычисление напряжений вести по формулам (20.2) и (20.3).

Найдем положение нейтральной оси.

Так как $R_0 / c_1 = \dfrac{80}{40} = 2$, то по табл. 20.2 принимаем k = 0,090 и по формуле (20.5) определим

$$y_0 = 0{,}09 \cdot 8 = 0{,}72 \text{ см}.$$

Тогда статический момент сечения относительно нейтральной оси

$$S_z = A \cdot y_0 = 8 \cdot 3 \cdot 0{,}72 = 17{,}3 \text{ см}^3.$$

Вычислим:

продольная сила N = 800 кгс = 8 кН;

изгибающий момент в сечении A–B

$$M = -800 \cdot 25 = -20000 \text{ кгс·см} = -20 \text{ кН·м}.$$

$$A = 8 \cdot 3 = 24 \text{ см}^2;$$

$$y_1 = 4 - 0{,}72 = 3{,}28 \text{ см}; \; y_2 = 4 + 0{,}72 = 4{,}72 \text{ см};$$

$$R_1 = R_0 - h/2 = 8 - 4 = 4 \text{ см};$$

$$R_2 = R_0 + h/2 = 8 + 4 = 12 \text{ см}.$$

Нормальные напряжения в точках $A(\sigma_1)$ и $B(\sigma_2)$ равны (рис. 20.7, *в*):

$$\sigma_1 = \frac{800}{24} + \frac{20000}{17{,}3}\frac{3{,}28}{4} = 33 + 948 = 981 \text{ кгс/см}^2 = 98{,}1 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{800}{24} - \frac{20000}{17{,}3}\frac{4{,}72}{12} = 33 - 455 = -422 \text{ кгс/см}^2 = -42{,}2 \text{ МПа}.$$

Если бы мы пренебрегли кривизной и вычислили напряжения по формуле для прямого бруса

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W_z},$$

то получили бы

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{800}{24} \pm 20000\frac{6}{3\cdot 8^2} = 33 \pm 625 =$$

$$= \begin{Bmatrix} +658 \\ -593 \end{Bmatrix} \text{кгс/см}^2 = \begin{Bmatrix} 65{,}8 \\ -59{,}3 \end{Bmatrix} \text{МПа}.$$

Мы получили бы напряжение на внутренних волокнах на

$$\Delta = \frac{98{,}1 - 65{,}8}{98{,}1}\cdot 100 \; \% = 33 \; \%$$

меньше, причем не в запас прочности. Таким образом, неучет кривизны стержня может повлечь значительные перенапряжения сечения.

Указание. Изучив данную тему, можно решать задачу № 9 контрольной работы.

ТЕМА 21

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

Теория: [1], гл. 12, § 12.1–12.4;
[2], гл. XVI, § 135–141.

По характеру воздействия на инженерные конструкции внешние силы (нагрузки) делятся на статические и динамические. Влияние динамической нагрузки при расчете на прочность и жесткость обычно учитывают динамическим коэффициентом

$$S_{\text{дин}} = S_{\text{ст}} k_{\text{д}} \text{ или } k_{\text{д}} = \frac{S_{\text{дин}}}{S_{\text{ст}}},$$

т.е. динамический коэффициент есть отношение динамического значения некоторого фактора (усилия, напряжения, деформации) к соответствующему фактору, вычисленному при статическом нагружении.

В сопротивлении материалов рассматривают три вида динамических нагрузок — силы инерции, удар и колебания.

21.1. Учет сил инерции

При динамической нагрузке любой элемент конструкций в каждый момент времени можно рассматривать как находящийся в состоянии равновесия под действием внешних сил (включая опорные реакции), внутренних усилий и сил инерции. Это положение, как известно, носит название *принцип Даламбера* и является обоснованием использования уравнений равновесия и при решении динамических задач. Силы инерции, как и собственный вес, являются объемными силами, так как приложены к каждой частице объема тела.

Величина элементарной силы инерции $dP_{\text{è}}$*, действующая на каждую частицу тела, равна произведению массы* dm *этой частицы на ускорение* a .

$$dP_{\text{и}} = dm \cdot a \tag{21.1}$$

или

$$dP_{\text{и}} = \frac{dG}{g} a = \frac{\gamma dV}{g} a, \tag{21.2}$$

где dG — вес элементарной частицы; γ — объемный вес материала; g — ускорение свободного падения ($g = 9{,}81$ м/с^2).

Сила всегда направлена в сторону, противоположную ускорению.

При расчете стержневых систем объемные силы инерции заменяют силами инерции, распределенными по длине стержня, т.е. распределенной погонной инерционной нагрузкой. Интенсивность этой нагрузки $q_{\text{и}}$ равна отношению $\frac{dP_{\text{è}}}{dx}$. Подставим в формулу (21.2) объем элемента стержня $dV = Adx$. Тогда

$$dP_{\text{и}} = \frac{\gamma dV}{g} a = \frac{\gamma A dx}{g} a. \qquad (21.3)$$

Следовательно, интенсивность погонной инерционной нагрузки

$$q_{\text{и}} = \frac{dP_{\text{и}}}{dx} = \frac{\gamma A}{g} a = ma. \qquad (21.4)$$

Динамический расчет при подъеме груза

Рассмотрим задачу о подъеме груза Q с постоянным ускорением a. Определим динамическое значение продольного усилия в тросе $N_{\text{д}}$, возникающего при подъеме. Рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 21.1, *б*). По принципу Даламбера

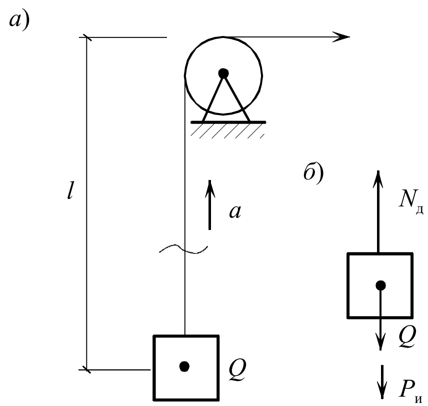


Рис. 21.1

$$N_{д} = Q + P_{и} = Q + \frac{Q}{g}a = Q\left(1 + \frac{a}{g}\right) = N_{ст}k_{д}\,, \qquad (21.5)$$

где $\left(1 + \dfrac{a}{g}\right) = k_{д}$ — динамический коэффициент при учете сил инерции.

Вращение стержня вокруг оси

Рассмотрим горизонтальный стержень BC, площадь поперечного сечения которого A, длина $2l$ (рис. 21.2, *а*), вращающийся с постоянной скоростью ω вокруг вертикальной оси O–O. При вращении стержня ускорение частиц, расположенных на расстоянии r от оси вращения, направлено к этой оси и определяется по формуле

$$a = \omega^2 r\,. \qquad (21.6)$$

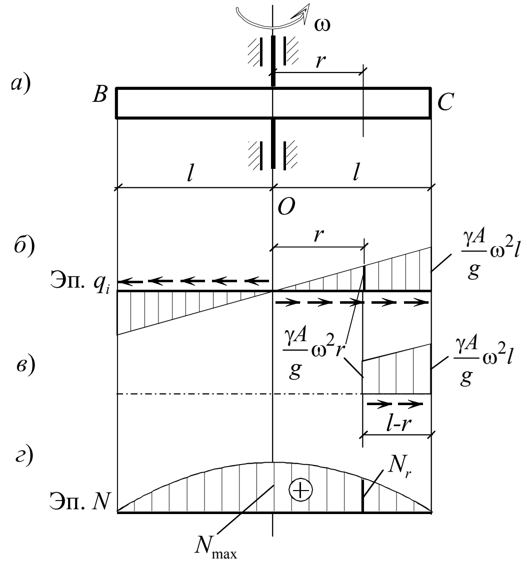


Рис. 21.2

Силы инерции (центробежные силы) направлены по радиусу от оси вращения. Интенсивность их, отнесенная к единице длины стержня, по (21.4) и (21.6) равна

$$q_{\text{и}} = \frac{\gamma A}{g}\omega^2 r\,. \tag{21.7}$$

Эпюра $q_{\text{и}}$ показана на рис. 21.2, *б*. Формулы (21.6) и (21.7) можно использовать при вращении как относительно вертикальной, так и относительно горизонтальной осей.

Силы инерции вызывают растяжение стержня. Продольная сила N_r в сечении, расположенном на расстоянии r от оси вращения, равна площади эпюры $q_{\text{и}}$ на участке от этого сечения до свободного конца стержня (рис. 21.2, *в*). Запишем

$$N_r = \left(\frac{\gamma A}{g}\omega^2 r + \frac{\gamma A}{g}\omega^2 l\right)\frac{l-r}{2} = \frac{\gamma A}{2g}\omega^2\left(l^2 - r^2\right). \tag{21.8}$$

Наибольшее значение продольной силы будет у оси вращения, т.е. при $r = 0$:

$$N_{\max} = \frac{\gamma A}{2g}\omega^2 l^2\,. \tag{21.9}$$

Эпюра продольных сил показана на рис. 21.2, *г*.

Пример 21.1. Стержень CB (рис. 21.3) на двух тросах поднимается вверх с ускорением a. Погонный вес стержня q, Н/м. Определить наибольшее напряжение в стержне BC.

Р е ш е н и е.

Прикладываем силы инерции $\frac{q}{g}a$ к каждому элементу единичной длины и получим:

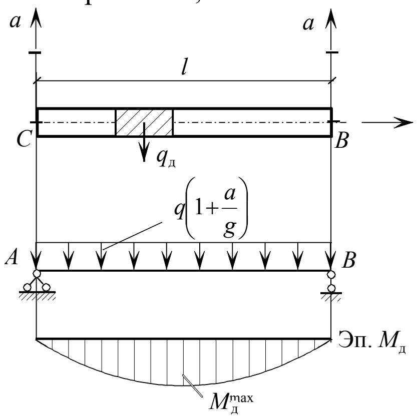


Рис. 21.3

$$q_{д} = q + \frac{q}{g} a = q\left(1 + \frac{a}{g}\right) = qk_{д}\text{, где } k_{д} = 1 + \frac{a}{g}.$$

Наибольший изгибающий момент от равномерно распределенной нагрузки q будет в середине стержня (балки):

$$M_{д} = \frac{ql^2}{8} k_{д}.$$

Наибольшее динамическое напряжение равно

$$\sigma_{д}^{\max} = \frac{M_{д}^{\max}}{W_z}.$$

Пример 21.2. Рамка *BCDE* вращается вокруг оси *O–O* (рис. 21.4) с частотой n = 240 оборотов в минуту. Все стержни стальные, круглые, шарнирно скрепленные. Определить диаметр стержней *BC* и *DE*, если R = 100 МПа.

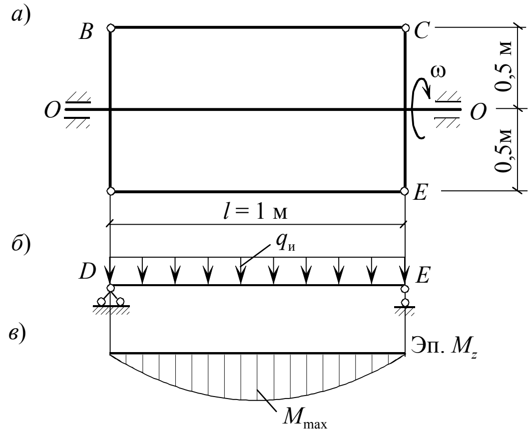


Рис. 21.4

Угловая скорость вращения

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi \cdot 240}{30} = 8\pi.$$

Ускорение равно:

$$a = \omega^2 r = (8\pi)^2 \cdot 0{,}5 = 32\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

Вес стержня DE равен:

$$G = \gamma A l = \gamma \frac{\pi D^2}{4} \cdot 1,$$

где γ = 78 кН/м^3 — удельный вес стали.

Интенсивность распределенной инерционной нагрузки

$$q_и = \frac{G}{gl} a = \gamma \frac{\pi D^2}{4 \cdot 1} \frac{32\pi^2}{g} = \gamma \frac{8\pi^3 D^2}{g} =$$

$$= \frac{78 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 3{,}14^3 \cdot D^2}{9{,}81} = 1970 D^2.$$

Так как распределенная нагрузка от собственного веса $q << q_и$, то максимальный изгибающий момент в балке DE определяем только от инерционной нагрузки:

$$M_{max} = \frac{q_è l^2}{8} = \frac{1970 D^2 \cdot 1^2}{8} = \frac{985}{4} D^2.$$

Момент сопротивления круглого сечения

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32}.$$

Из условия прочности $\sigma_{max} = \dfrac{M_{max}}{W_z} \le R$ определим

$$D \ge \frac{32 \cdot 985}{4\pi R} = \frac{32 \cdot 985 \cdot 10^3}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 100 \cdot 10^6} = 0{,}025 \text{ м} = 2{,}5 \text{ см}.$$

Указание. Изучив данную тему, можно решать задачи № 11 и 12 контрольной работы.

21.2. Расчеты на прочность при колебаниях

Колебания представляют собой процесс периодического отклонения упругой системы от положения статического равновесия (ПСР).

Колебания называют свободными, если они возникли от однократного воздействия силового импульса. Амплитуды свободных колебаний при наличии сил сопротивления движению колеблющейся массы (сопротивление среды, внутреннее трение и т.д.) постепенно уменьшаются — идет процесс затухания колебаний.

Если на систему действует возмущающая сила, периодически изменяющаяся, то возникают вынужденные колебания. Решение простейших задач на колебания в сопротивлении материалов обычно ведется приближенно с заменой всей системы распределенных и сосредоточенных масс одной массой, приложенной в некоторой точке. Такое упрощение называют приведением заданной системы к системе с одной степенью свободы.

Свободные колебания системы

Рассмотрим свободные вертикальные колебания груза Q, подвешенного на пружине, масса которой мала по сравнению с массой груза (рис. 21.5, *а*).

В произвольный момент времени t отклонение груза от положения статического равновесия будет x, скорость v и ускорение a. На систему действуют силы: Q — вес груза; направленная вверх сила инерции $P_и = ma = \frac{Q}{g}a$; $Q + S(t)$ — восстанавливающая сила, стремящаяся вернуть груз в положение статического равновесия. Для изображенного положения груза (рис. 21.5, *б*) восстанавливающая сила направлена вверх.

Сила упругого сопротивления пружины S (t) пропорциональна удлинению пружины x:

$$S(t) = Cx, \qquad (21.10)$$

где C — жесткость пружины, которая равна силе, необходимой для создания единичного удлинения пружины (Н/м).

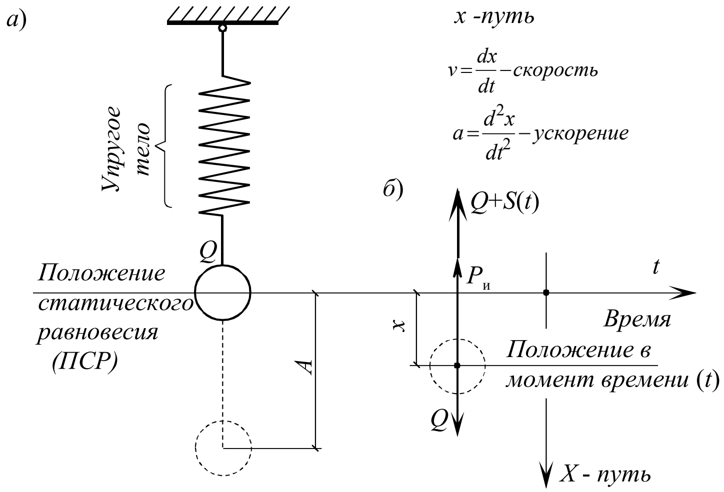


Рис. 21.5

Запишем сумму проекций всех сил на вертикальную ось (положительное направление — вниз):

$$-Q - S(t) - P_и + Q = 0 \text{ или } S(t) + P_и = 0\,.$$

Заменив $S\,(t)$ и $P_и$ их значениями по (21.1) и (21.10), получим

$$\frac{Q}{g}\frac{d^2x}{dt^2} + Cx = 0\,. \tag{21.11}$$

Разделим все члены уравнения на Q/g и, приняв

$$\frac{Cg}{Q} = \frac{C}{m} = \omega^2\,, \tag{21.12}$$

запишем дифференциальное уравнение собственных колебаний системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0\,, \tag{21.13}$$

где ω — круговая частота или частота свободных или собственных колебаний.

Решение уравнения (21.13) имеет вид:

$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t\,. \qquad (21.14)$$

Пусть отсчет времени t ведется от момента прохождения грузом положения статического равновесия. Тогда имеем первое условие: при $t = 0$ $x = 0$, откуда $B = 0$ и, следовательно,

$$x = A\sin\omega t\,. \qquad (21.15)$$

Если период колебаний T, то

$$A\sin\omega t = A\sin\omega(t+T)\,.$$

Отсюда следует, что

$$\omega(t+T) - \omega t = 2\pi \text{ или } T = \frac{2\pi}{\omega}\,.$$

Так как период колебаний T есть время одного полного цикла колебаний, то обратная ему величина $\dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ есть число колебаний в единицу времени (1 с). Отсюда следует, что ω представляет собой число колебаний за 2π секунд.

Если разделить вес Q на жесткость пружины C, то получим величину деформации пружины или перемещение груза при статическом приложении силы Q:

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{Q}{C}\,. \qquad (21.16)$$

Тогда из (21.12) получим частоту собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}}\,. \qquad (21.17)$$

Из формул (21.16) и (21.17) видно, что *частота свободных колебаний* ω *будет тем больше, чем больше жесткость пружины и меньше колеблющаяся масса* Q.

Вынужденные колебания систем

Рассмотрим линейно деформируемую балку с закрепленным на ней грузом, находящуюся под действием периодически изменяющейся нагрузки — возмущающей силы.

Рассмотрим консольную балку с установленным на ней двигателем весом Q (рис. 21.6, *а*). Прогиб балки от статического приложения Q равен Δ_Q.

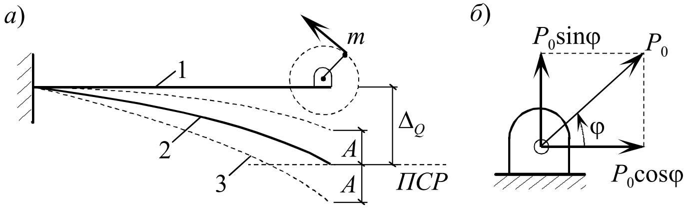


Рис. 21.6

На балку действует периодически изменяющаяся сила $P(t)$, возникающая от вращения некоторой неуравновешенной массы m (центр тяжести которой не совпадает с осью вращающегося вала двигателя). Разложим возникающую центробежную силу P_0 на две составляющие силы: $P_0 \sin\varphi$ и $P_0 \cos\varphi$ (рис. 21.6, *б*), переменные во времени. Первая из них вызывает вынужденные колебания балки в вертикальном направлении (прогибы балки), а вторая — в горизонтальном направлении и сопровождается деформацией растяжения или сжатия. Обычно в балках горизонтальные деформации значительно меньше вертикальных ($v >> u$, см. тему 12), поэтому влиянием горизонтальной составляющей $P_0 \cos\varphi$ можно пренебречь. Итак, считаем, что балка находится под действием только вертикальной возмущающей силы:

$$P(t) = P_0 \sin\varphi = P_0 \sin\Theta t\,, \tag{21.18}$$

где Θ — угловая скорость вращения вала двигателя или частота вынужденных колебаний,

$$\Theta = \frac{\pi n}{30}\,, \tag{21.19}$$

где n — число оборотов двигателя в минуту.

Рассмотрим вынужденные колебания некоторой массы (рис. 21.7). В общем случае к массе приложены силы: $P_{\text{и}}$ — сила инерции; $S\ (t)$ — сила упругого сопротивления системы; $R\ (t)$ — сила сопротивления среды и возмущающая сила — $P\ (t)$.

Запишем уравнение равновесия $\left(\sum X = 0\right)$:

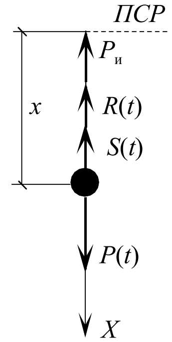


Рис. 21.7

$$P(t) - P_и - R(t) - S(t) = 0\,. \qquad (21.20)$$

Силу $R\ (t)$ принимают пропорциональной скорости движения массы:

$$R(t) = \alpha \frac{dx}{dt}\,, \qquad (21.21)$$

где α — коэффициент пропорциональности.

После подстановки выражений (21.1), (21.10), (21.18) и (21.21) в (21.20) получим дифференциальное уравнение равновесия в виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + Cx = P_0 \sin\Theta t\,. \qquad (21.22)$$

Обозначив $\alpha / m = 2n$; $C / m = \omega^2$, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{P_0 g}{Q}\sin\Theta t\,, \qquad (21.23)$$

где n — коэффициент затухания колебаний; $Q / g = m$ — масса.

После преобразования уравнения (21.23) получим формулу для определения амплитуды вынужденных колебаний:

$$A = \frac{P_0 g}{Q}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Theta^2\right)^2 + 4n^2\Theta^2}} = \frac{P_0 g}{Q\omega^2}\beta\,, \qquad (21.24)$$

где β — коэффициент нарастания колебаний,

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\Theta^2}{\omega^2}}}\,. \qquad (21.25)$$

При отсутствии сил сопротивления среды ($n = 0$)

$$\beta = \frac{1}{\left|1 - \frac{\Theta^2}{\omega^2}\right|}. \tag{21.26}$$

Подставив в (21.24) выражения (21.17) и (21.16), получим

$$A = \frac{P_0}{C}\beta = \Delta_{P_0}\beta, \tag{21.27}$$

где Δ_{P_0} — перемещение колеблющейся точки от статического приложения наибольшего значения возмущающей силы P_0.

Очевидно, что наибольшие усилия и напряжения возникают в балке тогда, когда ось балки (рис. 21.6, *а*) наиболее удалена от исходного прямолинейного ее очертания, т.е. когда ось балки совпадает с линией *3*. Тогда полное динамическое перемещение

$$\Delta_{д} = \Delta_Q + A = \Delta_Q\left(1 + \frac{A}{\Delta_Q}\right) = \Delta_Q k_{д}, \tag{21.28}$$

где Δ_Q — перемещение массы или прогиб балки от статического приложения веса Q.

Учитывая (21.27) и (21.28), определим динамический коэффициент

$$k_{д} = \frac{\Delta_{д}}{\Delta_Q} = 1 + \frac{A}{\Delta_Q} = 1 + \frac{\Delta_{P_0}}{\Delta_Q}\beta = 1 + \frac{P_0}{Q}\beta. \tag{21.29}$$

Последнее равенство справедливо для линейно деформируемых систем при действии сил P_0 и Q, приложенных в одной точке и направленных вдоль одной линии.

Как видно из формулы (21.29), при заданных значениях сил P_0 и Q динамический коэффициент зависит от коэффициента нарастания колебаний β. Проанализируем влияние на величину β параметров колебательного процесса:

1) при отсутствии сил сопротивления β зависит лишь от соотношения частот Θ/ω. Эта зависимость графически представлена верхней кривой на рис. 21.8. Как видно из (21.26), при $\Theta/\omega \to 1$

имеет место *явление резонанса,* связанное с ростом амплитуды колебаний, динамического коэффициента $k_д$ и, как следствие, с возможным нарушением целостности конструкции;

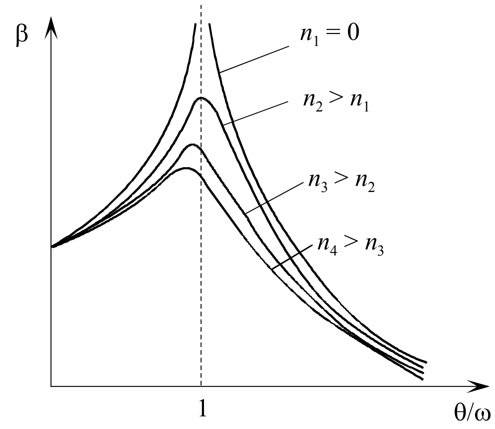


Рис. 21.8

2) при наличии сил сопротивления зависимость (21.25) графически выражается на рис. 21.8 семейством кривых для различных коэффициентов *n.* Если $\Theta = \omega$, то $\beta = \omega / 2n$. Следовательно, при резонансе величины β, *A* и $k_д$ хотя и не возрастают до бесконечности, но могут достигать больших значений.

Из сказанного следует, что для обеспечения прочности конструкции, подверженной действию возмущающей силы, необходимо добиваться достаточного различия частоты возмущающей силы Θ и частоты свободных колебаний ω. Частота Θ обычно задается заранее, поэтому для выполнения указанного требования стремятся запроектировать конструкцию так, чтобы ее частота свободных колебаний ω, определяемая по формуле (21.17), отличалась от Θ не менее чем на 25 %.

Пример 21.3. На балке пролетом l = 4 м установлен двигатель (рис. 21.9, *а*) весом Q = 35 кН, совершающий 550 об/мин. От неуравновешенной массы возникает центробежная сила P_0 = 6 кН. Сечение балки — двутавр 33 (J_z = 9840 см^4, W_z = 597 см^3). Пренебрегая весом балки и силами сопротивления, определить амплитуду вынужденных колебаний и наибольшие динамические напряжения в балке.

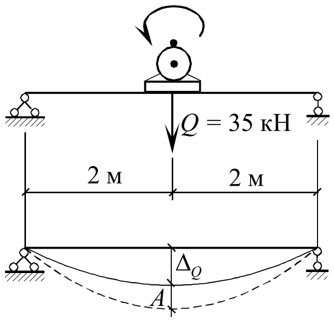


Рис. 21.9

Решение.

Находим максимальные прогибы балки от статистического приложения сил Q и P_0 (рис. 21.9, *б*):

$$\Delta_{\text{ст}} = \Delta_Q = \frac{Ql^3}{48EJ} = \frac{35\cdot 10^3\cdot 4^3}{48\cdot 2\cdot 10^5\cdot 10^6\cdot 9840\cdot 10^{-8}} = 2{,}37\cdot 10^{-3}\ \text{м};$$

$$\Delta_{P_0} = \frac{P_0 l^3}{48EJ} = \frac{6\cdot 10^3\cdot 4^3}{48\cdot 2\cdot 10^5\cdot 10^6\cdot 9840\cdot 10^{-8}} = 0{,}406\cdot 10^{-3}\ \text{м}.$$

Частоту собственных колебаний найдем по (21.17):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_Q}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{2{,}37\cdot 10^{-3}}} = 64{,}3\ \text{с}^{-1}.$$

Частота вынужденных колебаний

$$\Theta = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14\cdot 550}{30} = 57{,}6\ \text{с}^{-1}.$$

Амплитуду вынужденных колебаний находим по формуле (21.27)

$$A = \Delta_{P_0}\beta = \Delta_{P_0}\frac{1}{1-\dfrac{\Theta^2}{\omega^2}} = 0{,}406\cdot 10^{-3}\frac{1}{1-\dfrac{57{,}6^2}{64{,}3^2}} = 2{,}05\cdot 10^{-3}\,\text{м}.$$

Динамический коэффициент

$$k_д = 1 + \frac{A}{\Delta_Q} = 1 + \frac{2{,}05 \cdot 10^{-3}}{2{,}37 \cdot 10^{-3}} = 1 + 0{,}865 = 1{,}865\,.$$

Нормальные напряжения в балке от веса двигателя при его статическом действии

$$\sigma_{ст} = \sigma_Q = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{Ql}{4W_z} = \frac{35 \cdot 10^3 \cdot 4}{4 \cdot 597 \cdot 10^{-6}} = 58{,}6\ \text{МПа}\,.$$

Динамическое напряжение в балке:

$$\sigma_д = \sigma_{ст} k_д = 58{,}6 \cdot 1{,}865 = 109{,}3\ \text{МПа}.$$

В крайних волокнах поперечного сечения балки к постоянным напряжениям от веса двигателя $\sigma_{ст}$ добавляются периодические напряжения от действия инерционных сил при колебаниях $\sigma_{è} = 50{,}7$ МПа. Очевидно, что в нижней точке сечения в середине пролета напряжения будут изменяться от $\sigma_{\max} = 109{,}3$ МПа до $\sigma_{\min} = 7{,}9$ МПа, а в верхней — от $\sigma_{\max} = -7{,}9$ МПа до $\sigma_{\min} =$ $= -109{,}3$ МПа.

Пример 21.4. К грузу Q = 1 кН, закрепленному на конце стержня постоянного сечения, длиной l = 1 м и площадью A = 1 см^2, прикреплен груз P = 20 Н, который вращается с частотой n = = 2400 об/мин (рис. 21.10, *а*). Длина плеча ρ = 8 см, а модуль продольной упругости материала стержня E = $2{\cdot}10^5$ МПа. Определить амплитуду вынужденных колебаний груза, динамический коэффициент, удлинение стержня и максимальное напряжение. Массу стержней и силы сопротивления не учитывать.

Решение.

Линейное перемещение груза Q в направлении колебаний равно удлинению стержня BC:

$$\Delta_{ст} = \Delta_Q = \Delta l_{BC} = \frac{Ql}{EA} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{2 \cdot 10^4}\ \text{м} = 0{,}005\ \text{см}\,.$$

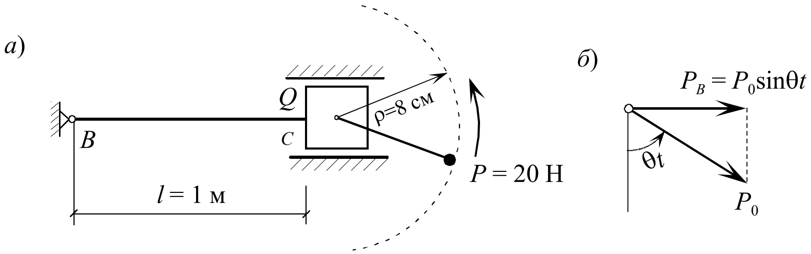


Рис. 21.10

По формуле (21.17) найдем круговую частоту свободных продольных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{9{,}81\cdot 2\cdot 10^4} \approx 443 \ \text{с}^{-1}.$$

При вращении неуравновешенного груза P возникает центробежная сила P_0, горизонтальная составляющая которой в направлении колебаний будет возмущающей силой $P_{\text{в}} = P_0 \sin \Theta t$ (рис. 21.10, *б*). Угловая скорость вращения груза является круговой частотой вынужденных колебаний и равна, по (21.19),

$$\Theta = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi\cdot 2400}{30} \approx 251 \ \text{с}^{-1}.$$

Возмущающая сила по формулам (21.1) и (21.6) имеет максимальное значение

$$P_0 = \frac{P}{g}\Theta^2\rho = \frac{20\cdot 251^2\cdot 8\cdot 10^{-2}}{9{,}81} = 10\,300 \text{ Н} = 10{,}3 \text{ кН}.$$

От статического действия силы P_0 в направлении колебаний (горизонтальное направление) удлинение стержня BC составит

$$\Delta_{\text{ст}P_0} = \Delta l_{BC} = \frac{P_0 l}{EA} = \frac{10300\cdot 1}{2\cdot 10^{11}\cdot 1\cdot 10^{-4}} = 52\cdot 10^{-5} \text{м} = 0{,}052 \text{ см}.$$

Так как по формуле (21.26) коэффициент нарастания колебаний

$$\beta = \frac{1}{\left|1 - \frac{\Theta^2}{\omega^2}\right|} = \frac{1}{1 - \frac{251^2}{443^2}} = 1{,}47 \text{ ,}$$

то амплитуда вынужденных колебаний системы по формуле (21.27) равна

$$A = \Delta_{P_0}\beta = 0{,}052 \cdot 1{,}47 = 0{,}08 \text{ см.}$$

Динамический коэффициент по формуле (21.29)

$$k_{д} = 1 + \frac{P_0}{Q}\beta = 1 + \frac{10{,}3}{1} \cdot 1{,}47 = 16{,}14 \text{ .}$$

Динамическое удлинение стержня *BC*

$$\Delta l_{ä} = \Delta_{ñò} k_{ä} = 0{,}052 \cdot 16{,}14 = 0{,}81 \text{ см,}$$

а динамическое напряжение

$$\sigma_{д} = k_{д}\sigma_{ст} = k_{д}\frac{Q}{A} = 16{,}14 \cdot \frac{1 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-4}} = 161{,}4 \text{ МПа .}$$

Указание. Изучив данную тему, можно решать задачи № 12 и 13 контрольной работы.

21.3. Ударные нагрузки

Ударом называют процесс взаимодействия двух тел в результате их соприкосновения, связанный с резким изменением скоростей за очень малый промежуток времени.

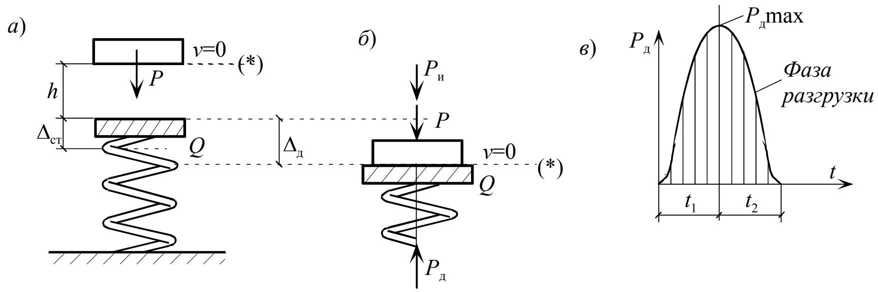


Рис. 21.11

Рассмотрим пример. На невесомой пружине укреплен груз Q, по которому ударяет груз P (рис. 21.11, *а*). Время соударения их очень мало, но за это время развиваются большие ударные силы взаимодействия, график изменения которых показан на рис. 21.11, *в*.

За время t_1 грузы совершают перемещение $\Delta_д$, равное деформации пружины, а силы взаимодействия между телами достигают максимального значения $P_д$.

Для инженерных расчетов оказывается вполне приемлемой техническая теория удара, основанная на законе сохранения энергии при следующих допущениях, упрощающих вычисления:

1) ударяемая система (по которой производится удар) неподвижна;

2) ударяющее тело абсолютно жесткое (не деформируется);

3) после удара тела P и Q перемещаются вместе («прилипают» друг к другу);

4) напряжения не превышают предела пропорциональности (справедлив закон Гука);

5) потенциальная энергия ударяющего тела без потерь переходит в потенциальную энергию деформации ударяемой системы;

6) жесткость ударяемой системы считается постоянной независимо от способа нагружения. Другими словами, имеет место следующее равенство:

$$C = \frac{P_д}{\Delta_д} = \frac{P}{\Delta_{ст}}. \qquad (21.30)$$

На рис. 21.11, *б* показано положение тел в момент, когда ударяемая система деформирована в наибольшей степени (пружина сжата). В этот момент скорость движения тел $v = 0$, а в следующий момент начнется движение тел в обратном направлении — фаза разгрузки.

В соответствии с принципом Даламбера запишем уравнение равновесия

$$P_д = P + \frac{P}{g}a = P\left(1 + \frac{a}{g}\right) = Pk_д, \qquad (21.31)$$

где $P_д$ — сила противодействия сжатой пружины.

Однако в данном случае ускорение a неизвестно, поэтому динамический коэффициент $k_д$ будем определять, воспользовавшись законом сохранения энергии (см. выше допущение 5).

Составим уравнение баланса полной энергии системы, рассмотрев два положения груза, отмеченные на рис. 21.11 звездочками (*):

1) ударяющий груз P поднят на высоту h и начинает падение. Полная энергия равна потенциальной энергии ударяющего тела:

$$A_1 = P\left(h + \Delta_д\right); \tag{21.32}$$

2) ударяющее тело в нижнем положении. В этом случае полная энергия равна потенциальной энергии упругих деформаций ударяемой системы (пружины):

$$A_2 = \frac{1}{2} P_д \cdot \Delta_д . \tag{21.33}$$

В обоих случаях кинетическая энергия равна нулю, так как скорость $v = 0$.

Уравнение баланса энергии

$$P\left(h + \Delta_д\right) = \frac{1}{2} P_д \Delta_д . \tag{21.34}$$

Из формулы (21.30) выразим

$$P_д = P \frac{\Delta_д}{\Delta_{ст}} \tag{21.35}$$

и, подставив $P_д$ в уравнение (21.34), получим

$$\Delta_д^2 - 2\Delta_д \Delta_{ст} - 2h\Delta_{ст} = 0 . \tag{21.36}$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$\Delta_д = \Delta_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}} \right) = \Delta_{ст} k_д . \tag{21.37}$$

В этой формуле перед корнем взят знак «плюс», так как $k_д$ не может быть отрицательным при ударе,

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}\,, \qquad (21.38)$$

где $\Delta_{ст}$ — перемещение точки, по которой производится удар, от статического действия силы P.

Представим формулу (21.38) в другом виде. Так как падение с высоты h производится без начальной скорости, то скорость падения ударяющего тела в момент соприкосновения с ударяемым телом

$$v = \sqrt{2gh}\text{, отсюда } 2h = \frac{v^2}{g}\,,$$

а динамический коэффициент

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{ст}}} = 1\sqrt{1 + \frac{v^2 C}{Pg}}\,, \qquad (21.39)$$

где C — жесткость системы, которая равна величине нагрузки, вызывающей единичную деформацию (кН/м).

Учет массы ударяемой системы

Вывод формулы динамического коэффициента (21.38) сделан без учета массы груза Q. Запишем без вывода $k_д$ с учетом массы ударяемой системы:

$$k_д = \frac{\Delta_д}{\Delta_{ст}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}\eta}\,, \qquad (21.40)$$

где η — коэффициент, учитывающий массы ударяющего и ударяемого грузов,

$$\eta = \frac{P}{P+Q} = \frac{1}{1+\dfrac{Q}{P}} = \frac{1}{1+\dfrac{m}{M}}\,. \qquad (21.41)$$

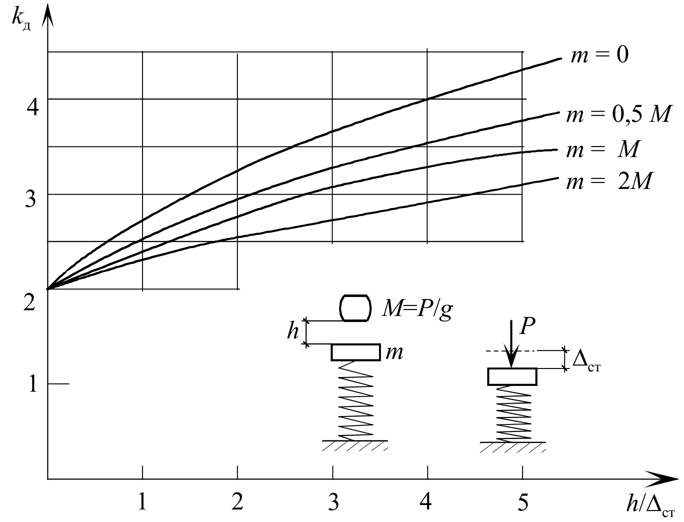


Рис. 21.12

Очевидно, что чем больше масса системы, по которой производится удар, тем меньше динамический коэффициент. На рис. 21.12 приведена зависимость $k_д$ от соотношения масс $\left(\frac{m}{M}=\frac{Q}{P}\right)$ и относительной высоты падения груза $\left(\frac{h}{\Delta_{ст}}\right)$.

Если ударяемая система не имеет в точке удара сосредоточенной массы m, то ее роль в какой-то мере выполняет распределенная масса стержня.

Рассмотрим удар груза P по концу консольной балки, имеющей массу m, распределенную по длине балки (рис. 21.13, *а*). Для приближенного решения задачи заменим стержень с распределенной массой невесомым стержнем с одной сосредоточенной приведенной массой в точке удара (рис. 21.13, *б*):

$$M_{прив} = kml\,, \tag{21.42}$$

где ml — общая масса ударяемого стержня; k — коэффициент приведения массы к точке соударения, который определяют из условия равенства кинетической энергии распределенной и приведенной к точке соударения масс стержня.

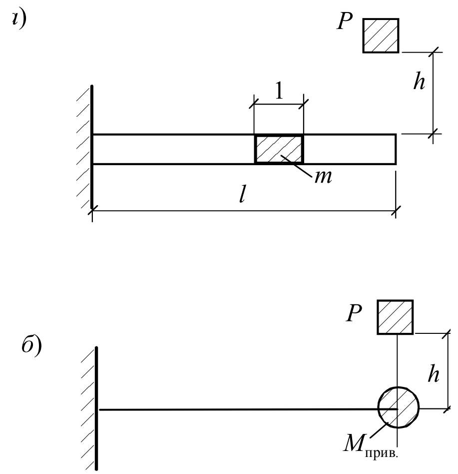


Рис. 21.13

Запишем без вывода коэффициенты приведения массы стержня к точке удара:

а) консольная балка (рис. 21.13):

$$k = \frac{33}{140} = 0{,}236\,;$$

б) балка на двух опорах (рис. 21.14, *а*):

$$k = \frac{17}{35} \approx 0{,}5\,:$$

в) прямолинейная стойка (рис. 21.14, *б*):

$$k = \frac{1}{3} = 0{,}33\,.$$

Неучет массы ударяемой системы дает завышенное значение $k_д$*, т.е. расчет повышает запас прочности конструкции.*

Частные случаи

1. Вертикальный продольный удар (рис. 21.14, *б*). Динамический коэффициент без учета массы ударяемой системы

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}\,, \tag{21.43}$$

где $\Delta_{ст} = \Delta l = \dfrac{Pl}{EA}$ — продольная деформация.

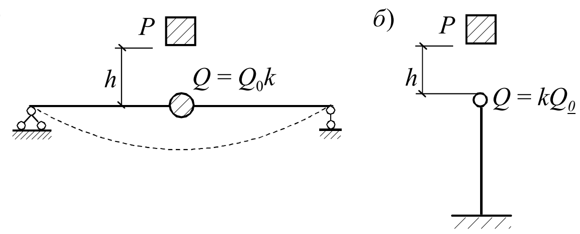


Рис. 21.14

2. Вертикальный поперечный удар (рис. 21.14, *а*). Динамический коэффициент вычисляют по формуле (21.43), где $\Delta_{ст}$ — перемещение точки, по которой производится удар или прогиб балки (методы определения прогибов см. темы 12 и 13).

3. Горизонтальный продольный удар. Тело движется со скоростью v по горизонтали (рис. 21.15) и ударяет по упругому препятствию:

$$k_д = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{ст}}} = v\sqrt{\frac{C}{gP}}\,, \tag{21.44}$$

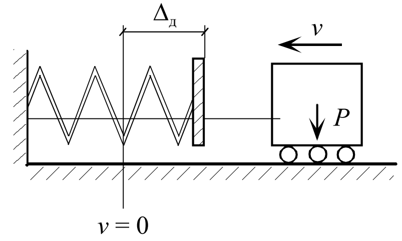


Рис. 21.15

где $\Delta_{ст}$ определяется как перемещение точки соударения от условной силы, ориентированной в направлении удара, т.е. горизонтально, и равной весу ударяющего тела P.

Выводы

1. Наименьшее значение $k_д$ соответствует падению ударяющего тела с высоты $h = 0$. *Такое нагружение называют внезапным приложением нагрузки.* В этом случае из формулы (21.43) получим $k_д = 2$, т.е. при внезапном приложении нагрузки все характеристики напряженно-деформированного состояния в два раза превышают соответствующие значения, вычисленные при статическом нагружении.

2. Динамический коэффициент при ударе (21.43) тем больше, чем менее податлива (т.е. жестче) ударяемая система.

3. Учет массы ударяемого тела приводит к снижению динамического коэффициента.

4. Чтобы уменьшить величину динамического коэффициента, следует увеличить $\Delta_{ст}$ путем установки дополнительных пружин, рессор, резиновых прокладок и прочее.

Пример 21.5. Груженый вагон весом Q = 600 кН, идущий со скоростью 0,2 м/с, ударяется о тупиковое ограждение (рис. 21.15). Сжатие двух буферных пружин (осадка пружины) от силы P = 10 кН равно λ = 1 см, следовательно, жесткость пружин

$$C = \frac{P}{\lambda} = 10\,\frac{\text{кН}}{\text{см}} = 100\,\frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

Определить силу удара, действующую на тупиковое ограждение.

Р е ш е н и е.

При горизонтальном ударе динамический коэффициент вычисляют по формуле (21.44): $k_д = v\sqrt{\dfrac{C}{gP}}$. Определим динамическую силу

$$P_д = Pk_д = P\sqrt{\frac{v^2C}{gP}} = v\sqrt{\frac{PC}{g}} = 0{,}2\sqrt{\frac{600\cdot 1000}{9{,}81}} = 49\ \text{кН}.$$

Пример 21.6. Определить, с какой высоты h можно свободно сбрасывать груз P = 15 кН (рис. 21.16) по направляющему стержню, имеющему на конце ограничитель, чтобы наибольшие динамические напряжения не превзошли R = 120 МПа.

Дано: l = 4 м; d = 4 см; $E = 2{\cdot}10^5$ МПа. Как изменится высота падения h, если для смягчения удара в нижней части стержня поставить пружину с коэффициентом осадки $\alpha = 0{,}625{\cdot}10^{-3}$ м/кН.

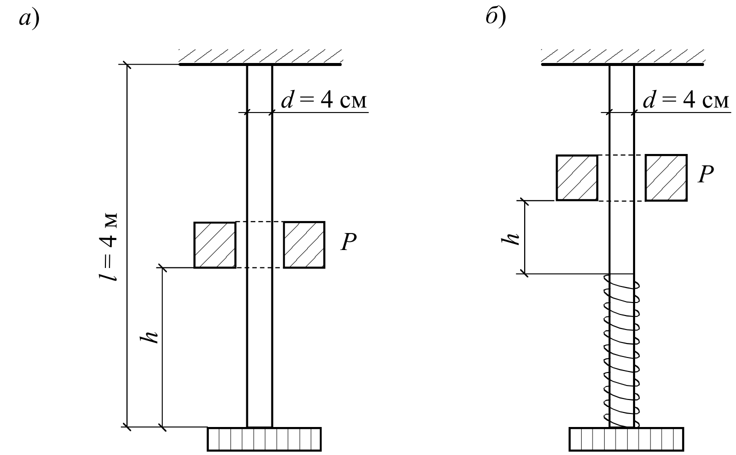


Рис. 21.16

Р е ш е н и е.

Определим предельно допустимый динамический коэффициент:

$$k_{\text{д}} = \frac{\sigma_{\text{д}}}{\sigma_{\text{ст}}},$$

где $\sigma_{\text{д}} = R = 120$ МПа, а $\sigma_{\text{ст}} = \dfrac{P}{A} = \dfrac{4P}{\pi d^2} = \dfrac{4\cdot 15\cdot 10^3}{3{,}14\left(4\cdot 10^{-2}\right)^2} = 12$ МПа .

Тогда $k_{\text{д}} = 10$.

По формуле (21.43):

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = 10,$$

откуда

$$h = 40\Delta_{\text{ст}}.$$

Эта зависимость между h и $\Delta_{ст}$ справедлива при ударе с пружиной и без нее.

Удар без пружины:

$$\Delta_{ст} = \Delta l = \frac{Pl}{EA} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3{,}14\left(4 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 0{,}24 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

следовательно,

$$h = 40 \cdot 0{,}24 \cdot 10^{-3} = 9{,}6 \cdot 10^{-3}\,\text{м} = 0{,}96\,\text{см} .$$

Удар с пружиной:

$$\Delta_{ст} = 0{,}24 \cdot 10^{-3} + P\alpha = 0{,}24 \cdot 10^{-3} + 15 \cdot 0{,}625 \cdot 10^{-3} = 9{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

тогда

$$h = 40\Delta_{ст} = 40 \cdot 9{,}6 \cdot 10^{-3} = 384 \cdot 10^{-2}\,\text{м} = 38{,}4\,\text{см} .$$

Как видно, наличие пружины позволило увеличить высоту подъема груза в 40 раз.

Пример 21.7. Проверить прочность двутавровой балки, воспринимающей удар грузом P = 5 кН, падающим на конец консоли с высоты h = 4 см. Расчет произвести в двух случаях: 1) обе опоры жесткие (рис. 21.17, *а*); 2) левая опора жесткая, правая — заменена пружиной (рис. 21.17, *б*).

Дано: сечение балки — двутавр 24, $J_z = 3460$ см^4, $W_z = 289$ см^3, радиус пружины R = 5 см, радиус проволоки для пружины r = 1 см; число витков пружины n = 10, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Р е ш е н и е.

Максимальное динамическое напряжение будет в наиболее нагруженном сечении, т.е. в сечении над опорой B:

$$\sigma_д = \sigma_{ст} k_д ,$$

где $k_д = 1 + \sqrt{1 + \dfrac{2h}{\Delta_{ст}}}$.

Здесь $\Delta_{ст}$ — прогиб балки в точке C от статического приложения груза P в этой точке. Прогиб можно найти любым методом (см. темы 12 и 13). Опорные реакции: A = 2,5 кН; B = 7,5 кН. Опуская вычисления, запишем величину прогиба в точке C:

$$v_{\text{ст}} = 0{,}58 \text{ см.}$$

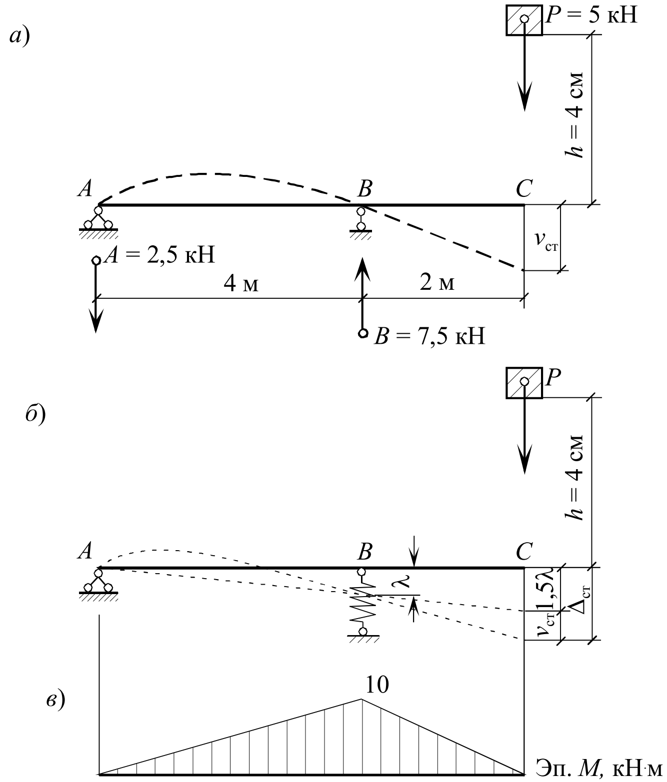


Рис. 21.17

При замене правой опоры пружиной статический прогиб в точке C будет равен

$$\Delta_{\text{ст}} = 1{,}5\lambda + v_{\text{ст}}\,,$$

где λ — осадка пружины на опоре B от статического сжатия ее силой B = 7,5 кН, которую можно определить по формуле

$$\lambda = \frac{4BR^3n}{Gr^4} = \frac{4 \cdot 7{,}5 \cdot 10^3 \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^3 \cdot 10}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \left(1 \cdot 10^{-2}\right)^4} = 4{,}7 \cdot 10^{-2}\,\text{м} = 4{,}7\ \text{см}\ .$$

В этом случае

$$\Delta_{\text{ст}} = 1{,}5 \cdot 4{,}7 + 0{,}58 = 7{,}63\ \text{см}.$$

Динамический коэффициент будет равен:

опора без пружины

$$k_{\text{д},1} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{0{,}58 \cdot 10^{-2}}} = 4{,}85\ ;$$

опора с пружиной

$$k_{\text{д},2} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{7{,}63 \cdot 10^{-2}}} = 2{,}43\ .$$

Наибольшие нормальные напряжения в сечении балки над опорой *B*

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ст}}^{\max} k_{\text{д}} = \frac{M_{\max}}{W_z} k_{\text{д}}\ .$$

Вычислим динамические напряжения:

при жестких опорах

$$\sigma_{\text{д},1} = \frac{10 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} \cdot 4{,}85 = 167{,}8\ \text{МПа}\ ;$$

при установке на опоре *B* пружины

$$\sigma_{\text{д},2} = 84\ \text{МПа}.$$

Из решения видно, что постановка пружины на опоре в условиях рассмотренной задачи снижает динамические напряжения в два раза.

Указание. Изучив данную тему, можно решать задачу № 14 контрольной работы.

ТЕМА 22

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ

22.1. Понятие об усталости материалов

Многие элементы конструкций, машин и технических устройств испытывают воздействие нагрузок, циклически меняющихся во времени. Например, железнодорожные рельсы и элементы мостов при прохождении поездов, оси колесных пар вагонов и все объекты транспорта (самолеты, поезда, автомобили, суда и т.д.) испытывают воздействие переменных во времени напряжений.

При действии переменных напряжений в опасных точках поперечного сечения элементов конструкций появляются микротрещины, которые затем объединяются в макротрещины. С течением времени макротрещины растут, а площадь поперечного сечения элемента конструкции уменьшается и происходит его разрушение.

Рассмотрим пример (рис. 22.1, *а*). Возьмем вращающийся вал со шкивом весом Q. При повороте вала точка K в сечении $m–n$ будет менять свое положение (1, 2, 3 и 4), попадая то в сжатую, то в растянутую зону (рис. 22.1, *б*).

Напряжения в точке K определяются по формуле

$$\sigma_{\kappa} = \frac{M_z}{J_{\text{н.о.}}} y_{\kappa} = \frac{Qa}{J_{\text{н.о.}}} r \sin \omega t \qquad (22.1)$$

и изменяются по синусоиде (рис. 22.1, *в*).

Многократное возникновение таких быстроменяющихся напряжений приводит к появлению усталостных трещин и излому деталей часто при напряжениях, меньше расчетных. Явление потери прочности, связанное с действием переменных напряжений, называют *«усталостью» материала*.

В настоящее время *под «усталостью» понимают процесс постепенного накопления повреждений материала при действии переменных напряжений. Свойство материала противостоять «усталости» называют выносливостью. Наибольшее напряжение, при котором материал может работать неограниченно долго, называют пределом выносливости*.

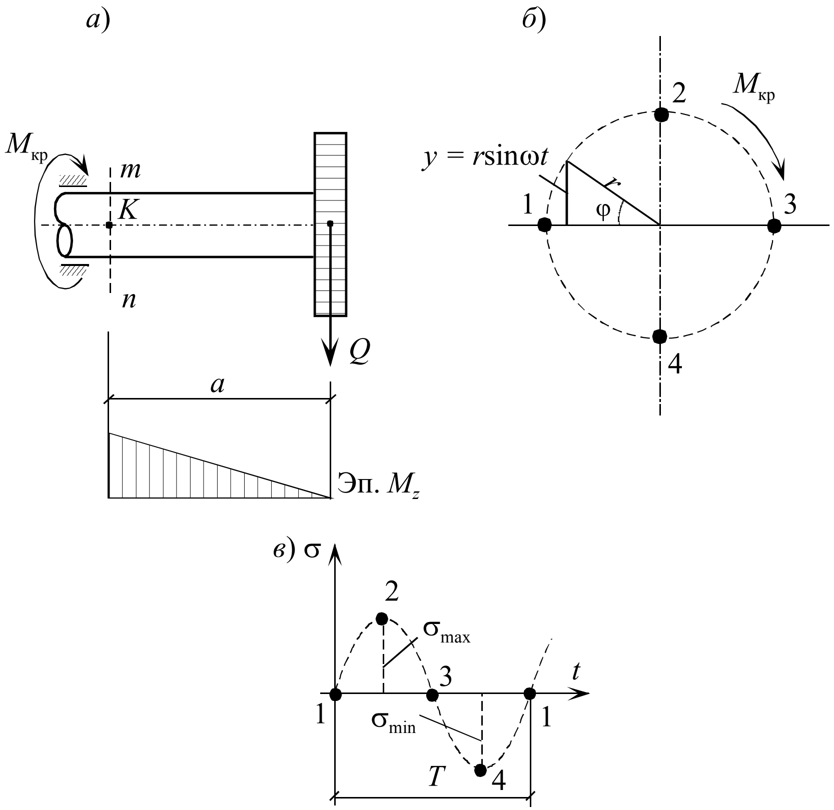


Рис. 22.1

22.2. Характеристики цикла напряжений

Время, за которое вал делает один оборот, называют периодом T. Изменение напряжений за один период называют *циклом напряжений*.

Усталостная долговечность элемента конструкции определяется числом циклов, которое он выдерживает до разрушения при заданных σ_{max} и σ_{min}.

Любой цикл напряжений характеризуется двумя параметрами:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \text{ и } \sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}, \qquad (22.2)$$

где σ_m — среднее напряжение цикла; σ_a — амплитудные напряжения или амплитуда цикла.

Отношение напряжений

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \tag{22.3}$$

называют *коэффициентом асимметрии цикла*.

Различают следующие циклы напряжений:

а) *симметричный* (рис. 22.1, *в*). Для него $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, $\sigma_m = 0$, $\sigma_a = \sigma_{\max}$, $r = -1$, а предел выносливости симметричного цикла обозначают σ_{-1};

б) *асимметричный* (рис. 22.2, *а*) — знакопостоянный или знакопеременный;

в) *отнулевой или пульсирующий* (рис. 22.2, *б*). Для него $\sigma_{\max}$ или $\sigma_{\min} = 0$; $\sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_{\max}}{2}$; $r = 0$, а предел выносливости – σ_0;

г) *постоянный цикл* (рис. 22.2, *в*) — это статическое нагружение. В данном случае $\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$, $\sigma_m = \sigma_{\max}$, $\sigma_a = 0$, $r = 1$, а предел выносливости — σ_1.

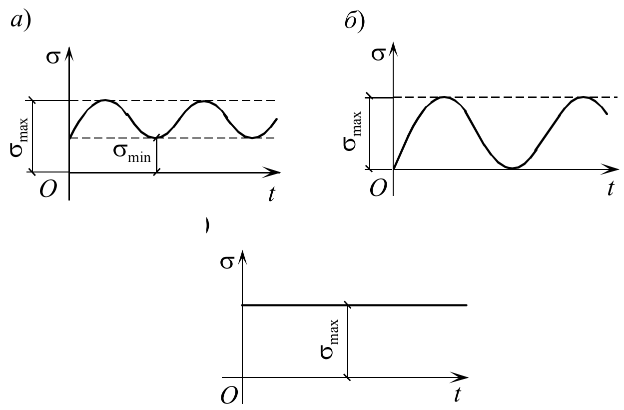


Рис. 22.2

Предел выносливости имеет наименьшее значение для симметричного цикла, а наибольшее — для постоянного (статического нагружения), т.е. из всех циклов симметричный цикл является наиболее опасным по усталости.

Для определения предела выносливости проводят специальные испытания на «усталость» и строят кривую усталости или кривую Велера (рис. 22.3). Ординаты кривой усталости есть значения максимальных напряжений цикла, а абсцисса — число циклов N, которое выдерживает образец до разрушения.

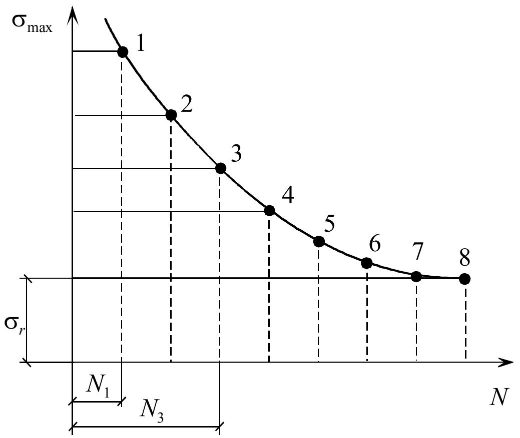


Рис. 22.3

Многочисленными испытаниями установлены следующие приближенные соотношения между пределами выносливости при симметричном цикле в случае изгиба (σ_{-1}), осевого растяжения-сжатия σ_{-1P} , кручения τ_{-1} и пределом прочности материала $\sigma_{\text{в}}$:

$$\sigma_{-1} = \beta\sigma_{\text{в}} . \qquad (22.4)$$

Для стали:

$$\sigma_{-1} \approx (0,4...0,6)\sigma_{\text{â}} ; \ \sigma_{-1P} \approx (0,7...0,8)\sigma_{-1} = (0,28...0,48)\sigma_{\text{â}} ;$$

$$\tau_{-1} \approx (0,4...0,7)\sigma_{-1} \approx (0,16...0,42)\sigma_{\text{â}} ;$$

для чугуна:

$$\sigma_{-1} \approx (0,4...0,5)\sigma_{\text{â}}\,; \ \tau_{-1} \approx (0,7...0,9)\sigma_{-1} = (0,28...0,45)\sigma_{\text{â}}\,;$$

для цветных металлов:

$$\sigma_{-1} \approx (0,25...0,5)\sigma_{\text{â}}\,.$$

22.3. Диаграмма предельных амплитуд

Чтобы иметь возможность проводить расчеты на усталостную прочность (или долговечность), для каждого материала *строят диаграмму предельных амплитуд* (рис. 22.4). Эта диаграмма строится в координатах σ_m (среднее напряжение цикла) и σ_a (амплитуда цикла). Для построения такой диаграммы надо провести большой объем испытаний «на усталость».

В современной расчетной практике наиболее часто используют диаграмму Серенсена–Кинасошвили (рис. 22.5), построенную по трем точкам: *A*, *B* и *C*. Точка *A* соответствует пределу выносливости симметричного цикла σ_{-1}; точка *B* соответствует параметрам отнулевого или пульсирующего цикла:

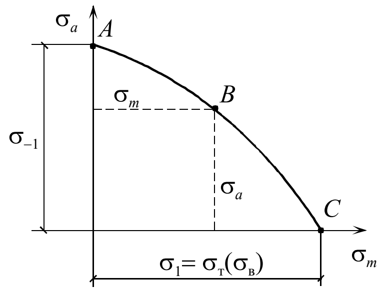


Рис. 22.4

$$\sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma_0}{2}\,;$$

точка *C* соответствует предельному напряжению для материала, полученному при статическом растяжении образцов. Для пластичных материалов предельное значение равно пределу текучести: $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{т}}$, а для хрупких материалов — пределу прочности: $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{в}}$. Из точки *C* проводят луч под углом 45^0 и получают точку *D*. При пользовании данной диаграммой надо иметь в виду, что если прямая *ON* пересекается для заданного цикла с прямой *AD*, то опасно разрушение по усталости, а если с прямой *DC*, то опасна потеря прочности.

Циклы, у которых *коэффициенты асимметрии одинаковы, называют подобными циклами*. Они будут характеризоваться точками, расположенными на прямой ON, угол наклона которой определяется формулой

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-r}{1+r}. \tag{22.5}$$

Иногда $\mathrm{tg}\alpha$ называют *определителем цикла*. При этом цикл, изображаемый точкой N (рис. 22.5), для заданного коэффициента асимметрии является предельным, а его максимальное напряжение

$$\sigma'_{\max} = \sigma'_m + \sigma'_a$$

и предел выносливости равен

$$\sigma_r = \sigma'_{\max}. \tag{22.6}$$

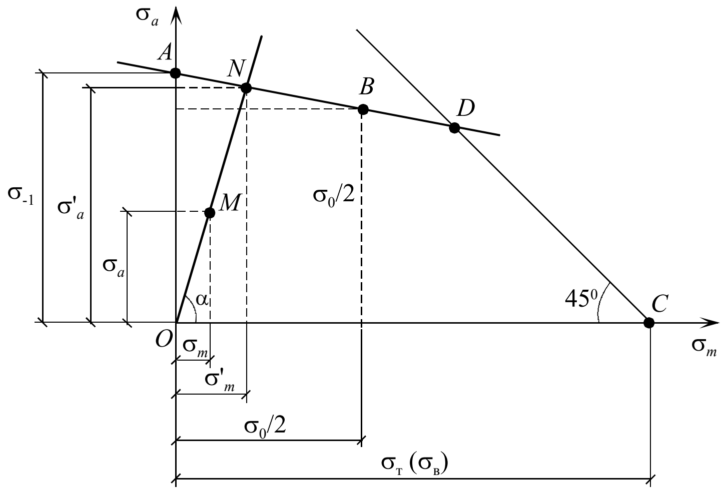


Рис. 22.5

Аналогично для заданного подобного цикла (точка M) максимальное напряжение равно:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a.$$

Тогда для заданного цикла можно определить коэффициент запаса:

$$n = \frac{ON}{OM} = \frac{\sigma'_{\max}}{\sigma_{\max}} > 1 . \qquad (22.7)$$

22.4. Факторы, влияющие на усталостную прочность

На величину предела выносливости влияют многие факторы. Рассмотрим наиболее важные из них, которые обычно учитывают при оценке усталостной прочности.

Концентрация напряжений. В местах изменения размеров поперечных сечений (отверстия, канавки, выкружки (рис. 22.6)) наблюдается *концентрация напряжений*, под которой понимается местное повышение величины напряжений.

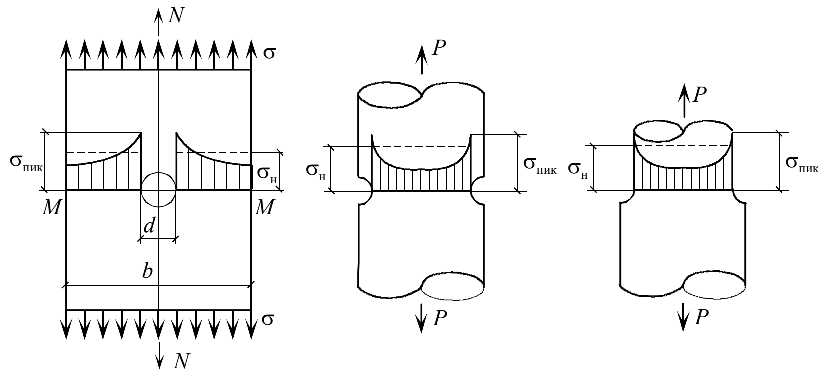


Рис. 22.6

Отношение пиковых напряжений около концентратора $\sigma_{пик}$ к средним нормальным напряжениям $\sigma_н$ в поперечном сечении *M–M* называют теоретическим коэффициентом концентрации напряжений:

$$K_т = \frac{\sigma_{пик}}{\sigma_н} .$$

Здесь (рис. 22.6, *а*)

$$\sigma_н = \frac{N}{A_н} ,$$

где

$$A_{\text{н}} = A_{\text{нетто}} = h(b-d),$$

здесь h — толщина пластины.

Графики теоретических коэффициентов концентрации напряжений приведены в приложении (рис. П 4.1 – П 4.4).

Если провести испытания на усталостную прочность двух партий образцов, одна из которых не имеет концентраторов напряжений, а другая — с концентраторами, то отношение предела выносливости σ_r первой партии к пределу выносливости образцов с концентраторами $\sigma_r^{\text{к}}$ определит *эффективный или действительный коэффициент концентрации напряжений*:

$$K_{\text{э}} = \frac{\sigma_r}{\sigma_r^{\text{к}}}. \tag{22.8}$$

Графики эффективных коэффициентов концентрации напряжений приведены в прил. 5 (рис. П 5.1 – П 5.5).

Так как испытания на усталостную прочность трудоемки и длительны, то часто определяют $K_{\text{э}}$ по формуле

$$K_{\text{э}} = 1 + q(K_{\text{т}} - 1), \tag{22.9}$$

где q — коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений (рис. П 6.1).

Коэффициент чувствительности для материалов:

1) для высокопрочных сталей $q = 1$;

2) для обычных сталей $q = 0,6...0,8$;

3) для чугуна, бетона $q = 0$, т.е. они не чувствительны к концентрации напряжений.

Концентраторы напряжений являются местом зарождения усталостных трещин и сильно снижают усталостную прочность конструкций.

При неответственных расчетах и отсутствии данных о величинах $K_{\text{т}}$ эффективный коэффициент концентрации напряжений $K_{\text{э}}$ можно определить приближенно по следующим эмпирическим соотношениям:

а) при отсутствии острых концентраторов напряжений для деталей с чисто обработанной поверхностью

$$K_э = 1{,}2 + 0{,}2\frac{\sigma_в - 400}{1100}; \tag{22.10}$$

б) при наличии острых концентраторов напряжений

$$K_э = 1{,}5 + 1{,}5\frac{\sigma_в - 400}{1100}. \tag{22.11}$$

В приведенных соотношениях предел прочности $\sigma_в$ выражен в МПа. При использовании соотношений (22.10) и (22.11) не следует дополнительно учитывать влияния качества поверхности детали.

Чистота обработки детали. Следы обработки поверхности детали в виде царапин, надрезов и т.п. являются своеобразными концентраторами напряжений и могут служить очагами, из которых начинают расти усталостные трещины.

Следовательно, при повышении качества обработки поверхности детали предел выносливости повышается.

Масштабный фактор. Многочисленными экспериментами установлено, что размеры детали существенно влияют на величину предела выносливости. С увеличением размеров детали предел выносливости уменьшается. Так, например, предел выносливости для стали, идущей на изготовление вагонных осей, определенный на образцах диаметром d = 7,5 мм, равен 250 МПа. В действительности предел выносливости вагонной оси диаметром D = 170 мм составляет 120 МПа, что в 2 раза меньше лабораторных результатов. Это явление объясняется тем, что в большем объеме увеличивается вероятность появления дефектов обработки детали, структуры материала и ухудшения его качества.

Влияние размеров детали на предел выносливости материала учитывается масштабным коэффициентом, который равен отношению предела выносливости детали $\sigma_{-1д}$ (большего размера), к пределу выносливости σ_{-1}, определенному при испытании стандартных образцов диаметром 7 мм,

$$\gamma_м = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_{-1}}. \tag{22.13}$$

Графики масштабных коэффициентов для сталей приведены на рис. П 6.2.

Коэффициент качества поверхности $\gamma_п$ есть отношение предела выносливости, определенного при испытаниях образцов с заданным состоянием поверхности детали $\sigma_{-1д}$, к пределу выносливости σ_{-1}, определенному при испытаниях образцов, обработанных по требованиям ГОСТ «Испытания на выносливость» (с полированной поверхностью):

$$\gamma_п = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_{-1}}. \qquad (22.12)$$

Коэффициенты качества поверхности приведены на рис. П 6.3.

Внешняя среда. Усталостная прочность детали зависит от среды, в которой она находится. Коррозионная среда (вода, соленая вода, кислоты, пары) резко снижает усталостную прочность. Снижение предела выносливости вследствие коррозии более существенно для высокопрочных сталей. Применение защитных покрытий поверхности (окраска, металлизация, азотирование, цементация, цинкование, закалка токами высокой частоты и др.) повышает усталостную прочность.

Совместное влияние концентрации напряжений, масштабного фактора и состояния поверхности оценивается коэффициентом K, который принимают согласно формуле

$$K = \frac{K_э}{\gamma_п \gamma_м}. \qquad (22.14)$$

Каждый из входящих сюда коэффициентов можно определить по формулам (22.8) – (22.13). Коэффициент K можно назвать общим *коэффициентом снижения предела выносливости*.

Таким образом, предел выносливости детали при симметричном цикле $\left(\sigma_{-1д}\right)$ зависит от предела выносливости $\left(\sigma_{-1}\right)$ материала, из которого изготовлена деталь, и коэффициента снижения предела выносливости. Если опасными являются нормальные напряжения, то

$$\sigma_{-1\text{д}} = \frac{\sigma_{-1}}{K}. \qquad (22.15)$$

При действии касательных напряжений аналогично:

$$\tau_{-1\text{д}} = \frac{\tau_{-1}}{K}, \qquad (22.16)$$

где τ_{-1} — предел выносливости при кручении круглых образцов. Для стали $\tau_{-1} \approx 0{,}6\sigma_{-1}$.

22.5. Определение коэффициентов запаса и допускаемых напряжений

Многочисленные опыты показывают, что концентрация напряжений, масштабный эффект и состояние поверхности оказывают влияние только на величину предельных амплитуд (σ_a) и практически не влияют на величину средних напряжений (σ_m). Поэтому в расчетной практике принято коэффициент снижения предела выносливости K по (22.14) относить только к амплитудному напряжению. Тогда формулы для определения коэффициентов запаса прочности по усталости будут иметь вид:

при изгибе

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}; \qquad (22.17)$$

при кручении

$$n = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_a + \psi_\tau \tau_m}. \qquad (22.18)$$

При растяжении–сжатии следует пользоваться формулой (22.17), но вместо σ_{-1} подставлять в нее предел выносливости $\sigma_{-1\text{р}}$ (при симметричном цикле растяжения–сжатия).

Если для расчета принять диаграмму Серенсена–Кинасошвили (см. рис. 22.5), то для нормальных напряжений

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}; \qquad (22.19)$$

аналогично для касательных напряжений

$$\psi_\tau = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}. \tag{22.20}$$

Для некоторых сортов стали значения коэффициентов ψ_σ и ψ_τ приведены в табл. 22.1.

Таблица 22.1

Сталь	Предел прочности при растяжении $\sigma_в$, МПа	ψ_σ при изгибе	ψ_σ при растяжении	ψ_τ при кручении
Углеродистая	370	0,05	0,07	0,03
	450	0,07	0,08	0,03
	550	0,08	0,09	0,04
	650	0,10	0,11	0,04
	750	0,12	0,14	0,05
Легированная	830	0,15	0,16	0,06
	980	0,17	0,19	0,07
	1150	0,22	0,24	0,10
	1200	0,22	0,25	0,12

В большинстве случаев расчеты на усталость выполняются как проверочные. Однако в некоторых случаях возможен проектный расчет на усталостную прочность по допускаемому напряжению $[\sigma_r]$, соответствующему заданному коэффициенту асимметрии цикла (r_σ или r_τ).

Полагая в формуле (22.17)

$$\frac{n}{n_0} = [n], \ \frac{\sigma_a}{n_0} = [\sigma_a], \ \frac{\sigma_m}{n_0} = [\sigma_m],$$

где n_0 — общий коэффициент запаса прочности детали, определим допускаемый коэффициент запаса по усталости:

$$[n_r] = \frac{\sigma_{-1}}{K[\sigma_a] + \psi_\sigma[\sigma_m]} = \frac{\sigma_{-1}}{[\sigma_a]\left(K + \psi\dfrac{[\sigma_m]}{[\sigma_a]}\right)} =$$

$$= \frac{\sigma_{-1}}{[\sigma_m]\left(K\dfrac{[\sigma_a]}{[\sigma_m]} + \psi_\sigma\right)}. \tag{22.21}$$

Отсюда допускаемое амплитудное напряжение

$$\left[\sigma_a\right] = \frac{\sigma_{-1}}{\left[n\right]\ \left(K\rho + \psi_\sigma\right)}, \tag{22.22}$$

где $\rho = \dfrac{\sigma_a}{\sigma_m}$.

Допускаемое среднее напряжение

$$\left[\sigma_m\right] = \frac{\sigma_{-1}}{\left[n\right]\left(K\rho + \psi_\sigma\right)}. \tag{22.23}$$

Но так как по формуле (22.6)

$$\left[\sigma_r\right] = \left[\sigma_a\right] + \left[\sigma_m\right], \tag{22.24}$$

следовательно, допускаемое напряжение по усталостной прочности равно:

$$\left[\sigma_r\right] = \frac{\sigma_{-1}\left(\rho + 1\right)}{\left[n\right]\left(K_{\sigma д}\rho + \psi_\sigma\right)}. \tag{22.25}$$

Аналогично допускаемое касательное напряжение

$$\left[\tau_r\right] = \frac{\tau_{-1}\left(\rho + 1\right)}{\left[n\right]\left(K\rho + \psi_\tau\right)}. \tag{22.26}$$

22.6. Порядок расчета при действии циклических напряжений

Определение допускаемых напряжений и коэффициентов запаса при циклических напряжениях можно представить в виде следующей схемы.

Д а н о: а) вид деформации; б) напряжения σ_{max} и σ_{min} (при кручении σ заменить касательными напряжениями τ); в) конфигурация детали; г) механические характеристики материала (предел прочности $\sigma_в$ и предел текучести $\sigma_т$).

Требуется: найти допускаемое напряжение $\left[\sigma_r\right]$ и коэффициент запаса прочности $\left[n\right]$.

Схема решения

1. Вычислить по формулам (22.2)

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \text{ и } \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

2. Найти коэффициент асимметрии цикла (22.3)

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}.$$

3. Определить предел выносливости для симметричного цикла (22.4)

$$\sigma_{-1} = \beta\sigma_{в}.$$

4. По графикам (рис. П 4.1 – П 4.4) найти $K_т$ — теоретический коэффициент концентрации напряжений в зависимости от конфигурации детали.

5. По рис. П 6.1 определить коэффициент чувствительности материала q.

6. Определить эффективный коэффициент концентрации по формуле (22.9) или по рис. П 5.1 – П 5.5.

7. Найти коэффициент качества поверхности $\gamma_п$ (рис. П 6.3). Если известен лишь общий характер обработки детали, то эффективный коэффициент концентрации напряжений $K_э$ можно вычислить по формуле (22.10) или (22.11).

8. Найти общий коэффициент снижения предела выносливости K по формуле (22.14).

9. Допускаемый коэффициент запаса по усталостной прочности $[n_r]$ определить по формуле (22.21).

10. Допускаемое напряжение по усталости $[\sigma_r]$ или $[\tau_r]$ определить по формулам (22.25) или (22.26).

Расчет на выносливость элементов стальных конструкций и их соединений выполняют по СНиП 2.05.03-84 [9]. Механические и деформационные характеристики материалов для этих конструкций приведены в табл. П 1.1 – П 1.3.

22.7. Примеры расчета

Пример 22.1. Д а н о : материал — сталь Ст 3. Опытные значения:

предел выносливости для постоянного цикла $\sigma_1 = \sigma_т = 388$ МПа;

предел выносливости для симметричного цикла $\sigma_{-1} = 185$ МПа;

средние и амплитудные напряжения σ_m и σ_a представлены в табл. 22.2.

Таблица 22.2

Средние напряжения	σ_m, МПа	100	200	300
Амплитудные напряжения	σ_a, МПа	175	140	85

Определить предел выносливости цикла, имеющего коэффициент асимметрии $r = 0{,}25$.

Р е ш е н и е.

По опытным данным построим диаграмму предельных амплитуд в координатах $\sigma_m - \sigma_a$ (рис. 22.7). Так как предел выносливости надо определить при $r = 0{,}25$, то по формуле (22.5)

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1-r}{1+r} = \frac{1-0{,}25}{1+0{,}25} = 0{,}6 \text{ и } \alpha = 31^0 .$$

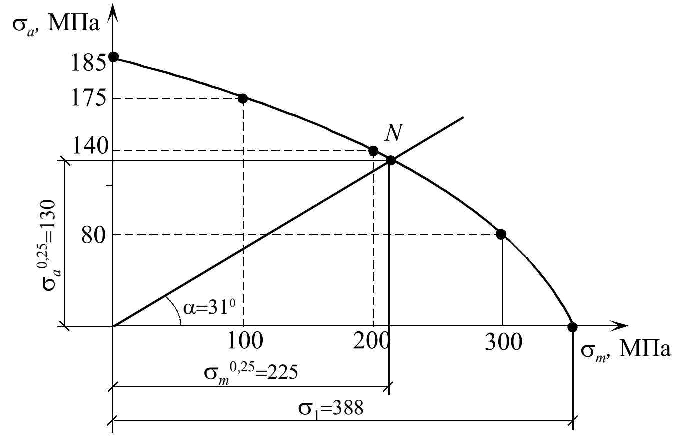


Рис. 22.7

Из начала координат проведем прямую под углом $\alpha = 31^0$ к оси σ_m. Координаты точки пересечения этой прямой с диаграммой предельных амплитуд равны:

$$\sigma_m^{0,25} \approx 225 \text{ МПа и } \sigma_a^{0,25} \approx 130 \text{ МПа.}$$

Предел выносливости цикла при $r = 0{,}25$ по формуле (22.6)

$$\sigma_{0,25} = \sigma_m^{0,25} + \sigma_a^{0,25} \approx 225 + 130 \approx 355 \text{ МПа}.$$

Пример 22.2. Ступенчатый стержень круглого сечения диаметром D = 80 мм и d = 40 мм (рис. 22.8) изготовлен из стали 40, для которой $\sigma_в = 1000$ МПа и $\sigma_{-1р} = 250$ МПа. Отношение радиуса галтели к диаметру $\rho / d = 0{,}2$. Поверхность стержня тщательно полирована. Определить коэффициент запаса прочности $[n]$, если сила $P_{\max}$ = = 100 кН и изменяется по симметричному циклу.

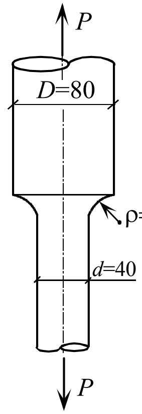


Рис. 22.8

Р е ш е н и е.

Из графика (рис. П5.1) при $\rho / d = 0{,}2$ для стали с $\sigma_в$ = 1000 МПа путем линейной интерполяции найдем эффективный коэффициент концентрации напряжений $K_э$ = 1,48. При тщательной полировке поверхности (рис. П 6.3) $\gamma_п$ = 1, а $\gamma_м$ = 0,87 (рис. П 6.2). В этом случае по формуле (22.14)

$$K = \frac{1{,}48}{1 \cdot 0{,}87} = 1{,}7 .$$

Площадь сечения стержня $A = \dfrac{\pi d^2}{4} = \pi \cdot 4 = 12{,}6$ см^2. Напряжение равно

$$\sigma_p = \frac{P_{\max}}{A} = \frac{100 \cdot 10^3}{12{,}6 \cdot 10^{-4}} = 80 \text{ МПа}.$$

Коэффициент запаса по усталостной прочности

$$[n] = \frac{\sigma_{-1p}}{\sigma_p K} = \frac{250}{80 \cdot 1{,}7} = 1{,}84 .$$

Пример 22.3. Найдем допускаемое напряжение по усталости и допускаемую силу для вращающегося вала (рис. 22.9), если l = = 25 см, d = 80 мм, ρ = 10 мм, предел прочности $\sigma_в$ = 450 МПа, общий коэффициент запаса n_0= 2, поверхность обдирная.

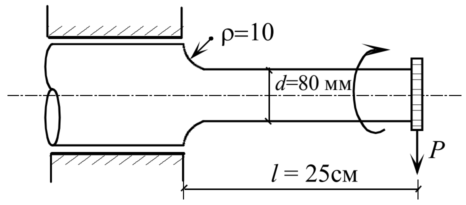


Рис. 22.9

Р е ш е н и е.

По графикам (рис. П.4.3 и рис. П.6.1) найдем: $K_т = 1{,}6$; $q = 0{,}42$. По формуле (22.8)

$$K_э = 1 + 0{,}42(1{,}6 - 1) = 1{,}25\ .$$

Коэффициент качества поверхности по рис. П. 6.3 равен $\gamma_п =$ $= 0{,}82$, а масштабный коэффициент (рис. П. 6.2) $\gamma_м = 0{,}64$.

При изгибе вращающегося вала $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$.

Полный коэффициент запаса по (22.14)

$$K = \frac{K_э}{\gamma_п\gamma_м} = \frac{1{,}25}{0{,}82 \cdot 0{,}64} = 2{,}38\ .$$

Допускаемое напряжение согласно (22.4) и (22.15)

$$[\sigma_{-1}] = \frac{\sigma_{-1}}{n_0 K} = \frac{\beta \cdot \sigma_в}{n_0 \cdot K} = \frac{0{,}4 \cdot 450}{2 \cdot 2{,}38} = 38\ \text{МПа}.$$

Момент сопротивления сечения

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 8^3}{32} = 50{,}2\ \text{см}^3.$$

Допускаемый изгибающий момент

$$M_{доп} = W_z[\sigma_{-1}] = 50{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 38 \cdot 10^6 = 1{,}9\ \text{кН·м},$$

а допускаемая нагрузка

$$P_{доп} = \frac{M_{доп}}{l} = \frac{1{,}9}{0{,}25} = 7{,}63\ \text{кН}.$$

Пример 22.4. Определить коэффициент запаса прочности клапанной пружины, изготовленной из хромованадиевой проволоки с характеристиками:

– предел текучести $\tau_т = 950$ МПа;

– предел выносливости симметричного цикла $\tau_{-1} = 500$ МПа;

– предел пульсирующего (отнулевого) цикла $\tau_0 = 700$ МПа;

– модуль сдвига $G = 8{\cdot}10^4$ МПа.

Размеры пружины: средний диаметр $D = 50$ мм, диаметр проволоки $d = 4{,}5$ мм, число витков $n = 6$. Предварительная затяжка пружины $\lambda_з = 25$ мм, а наибольший ход клапана $h = 14$ мм.

Решение.

Максимальное напряжение в сечении витка пружины $\tau_{max} = \dfrac{8PD}{\pi d^3}$, а осадку пружины определим по формуле

$$\lambda = \frac{8PD^3 n}{Gd^4}, \text{ откуда } P = \frac{Gd^4}{8D^3 n}\lambda .$$

Подставим P в формулу для вычисления τ и получим

$$\tau = \frac{Gd}{\pi D^2 n}\lambda .$$

Определим τ при закрытом клапане (это минимальное напряжение):

$$\tau_{min} = \frac{Gd}{\pi D^2 n}\lambda_з = \frac{8\cdot 10^4\cdot 10^6\cdot 4{,}5\cdot 10^3}{3{,}14\left(50\cdot 10^{-3}\right)\cdot 6}\cdot 2{,}5\cdot 10^{-2} = 191 \text{ МПа.}$$

При наибольшем открытии клапана (это максимальное напряжение)

$$\lambda_{max} = \lambda_з + h = 25 + 14 = 39 \text{ мм,}$$

$$\text{а } \tau_{max} = \tau_{min}\frac{\lambda_{max}}{\lambda_з} = 191\cdot\frac{39}{25} = 298 \text{ МПа.}$$

Среднее напряжение цикла

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{298 + 191}{2} = 244{,}5 \text{ МПа.}$$

Амплитуда цикла

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{298 - 191}{2} = 53{,}5 \text{ МПа.}$$

Коэффициент запаса прочности по сопротивлению усталостному разрушению определим по формуле (22.18).

Коэффициент $K = 1$, так как величина предела выносливости определена на образцах того же диаметра и с тем же состоянием поверхности, что и проволока, из которой изготовлена пружина.

По формуле (22.20) определим

$$\psi_\tau = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} = \frac{2 \cdot 500 - 700}{700} = 0{,}428 .$$

Тогда коэффициент запаса по усталости

$$n = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_a + \psi_\tau \tau_m} = \frac{500}{1 \cdot 53{,}5 + 0{,}428 \cdot 244{,}5} = 3{,}16 .$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Механические характеристики сталей и сплавов

Таблица П 1.1

Механические и деформационные характеристики сталей и сплавов

Марка	$\sigma_{пц}$, МПа	$\sigma_т$, МПа	$\sigma_в$, МПа	$\varepsilon_{пц}\cdot10^3$	$\varepsilon_т\cdot10^3$	$\varepsilon_{ост}\cdot10^3$
Ст 3	200	240	400	1,00	2,00	0,80
Ст 10	150	230	380	0,75	3,00	1,85
Ст 25	280	310	400	1,30	2,50	1,10
Ст 45	400	500	600	1,83	7,00	4,72
Ст 55	500	590	700	2,26	8,00	5,20
09ГМ	190	240	400	0,86	2,00	0,91
15ХСНД и СХЛ 1	290	350	600	1,32	3,20	1,61
СХЛ 2	430	600	700	1,86	4,30	2,04
18ХНВА	600	850	1150	2,72	9,50	5,64
Сплав 29 аустенитовый	600	900	1200	2,73	8,18	4,10
ЭИ 891	380	550	950	1,73	8,00	4,50
Сплав титановый	500	635	—	4,2	11,5	5,23

Таблица П 1.2

Коэффициенты надежности по материалу

Государственный стандарт (марка стали или значение предела текучести)	Коэффициент надежности по материалу γ_m
ГОСТ 538-88 ГОСТ 14637-89 [Ст3сп, Ст3пс, Ст3кп] ГОСТ 19281-89 ГОСТ 19282-89 [до $\sigma_т$ = 380 МПа (39 кгс/мм^2)]	1,05
ГОСТ 19281-89 ГОСТ 19282-89 [св. 380 МПа (39 кгс/мм^2)]	1,10
ГОСТ 6713-91 [16Д]	1,09
ГОСТ 6713-91 [15ХСНД]	1,165

Приложение 2
Определение прогибов и углов поворота сечений при изгибе балок

Таблица П 2.1

Наибольшие прогибы и углы поворота сечений

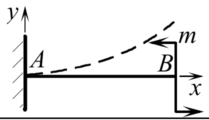
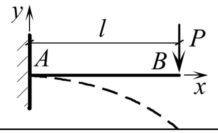
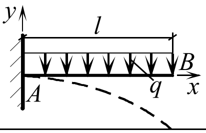
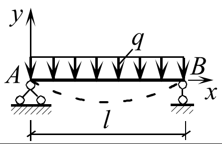
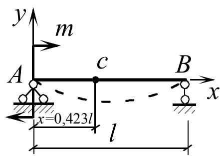
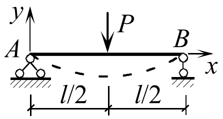
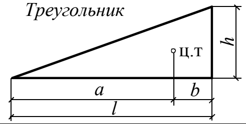
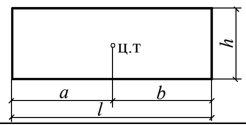
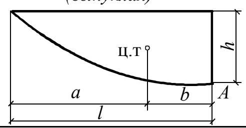
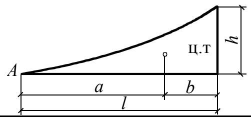
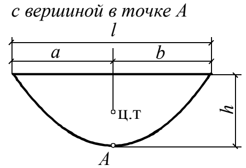
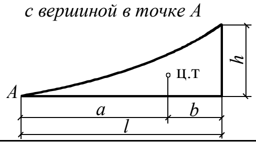
№ п.п.	Расчетная схема балки с нагрузкой	Максимальный прогиб	Угол поворота сечений
1		$v_{в} = \frac{ml^2}{2EJ_z}$	$\theta_{в} = \frac{ml}{EJ_z}$
2		$v_{в} = -\frac{Pl^3}{3EJ_z}$	$\theta_{в} = -\frac{Pl^2}{2EJ_z}$
3		$v_{в} = -\frac{ql^4}{8EJ_z}$	$\theta_{в} = -\frac{ql^3}{6EJ_z}$
4		$v_{\max} = -\frac{5ql^4}{384EJ_z}$ при $x = \frac{l}{2}$	$\theta_A = -\frac{ql^3}{24EJ_z}$ $\theta_B = \frac{ql^3}{24EJ_z}$
5		при $x = 0{,}423l$ $v_{\max} = -\frac{ml^2}{15{,}6EJ_z}$; при $x = l/2$ $v = -\frac{ml^2}{16EJ_z}$	$\theta_A = -\frac{ml}{3EJ_z}$ $\theta_B = \frac{ml}{6EJ}$
6		$v_{\max} = -\frac{Pl^3}{48EJ_z}$	$\theta_A = -\frac{Pl^2}{16EJ_z}$ $\theta_B = \frac{Pl^2}{16EJ}$

Таблица П 2.2

Площади эпюр и положение их центров тяжести

Вид эпюр	Положение центра тяжести	Площадь эпюры ω
Треугольник 	$a = \frac{2}{3}l$ $b = \frac{1}{3}l$	$\omega = \frac{1}{2}lh$
Прямоугольник 	$a = b = \frac{1}{2}l$	$\omega = lh$
Квадратная парабола (выпуклая) 	$a = \frac{5}{8}l$ $b = \frac{3}{8}l$	$\omega = \frac{2}{3}lh$
Квадратная парабола (вогнутая) 	$a = \frac{3}{4}l$ $b = \frac{1}{4}l$	$\omega = \frac{1}{3}lh$
Квадратная парабола с вершиной в точке А 	$a = b = \frac{l}{2}$	$\omega = \frac{2}{3}lh$
Кубическая парабола с вершиной в точке А 	$a = \frac{4}{5}l$ $b = \frac{1}{5}l$	$\omega = \frac{1}{4}lh$

Приложение 3

Коэффициенты продольного изгиба φ

Гибкость λ	Значения φ для			
	стали Ст0, Ст2, Ст3, Ст4	стали Ст5	чугуна	дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43	—	0,25
120	0,45	0,36	—	0,22
130	0,40	0,33	—	0,18
140	0,36	0,29	—	0,16
150	0,32	0,26	—	0,14
160	0,29	0,24	—	0,12
170	0,26	0,21	—	0,11
180	0,23	0,19	—	0,10
190	0,21	0,17	—	0,09
200	0,19	0,16	—	0,08

Приложение 4

Теоретические коэффициенты концентрации напряжений $K_т$

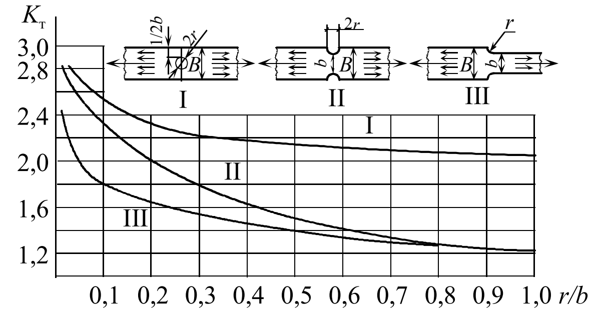


Рис. П. 4.1. Графики теоретических коэффициентов концентрации напряжений при растяжении полосы с различными концентраторами

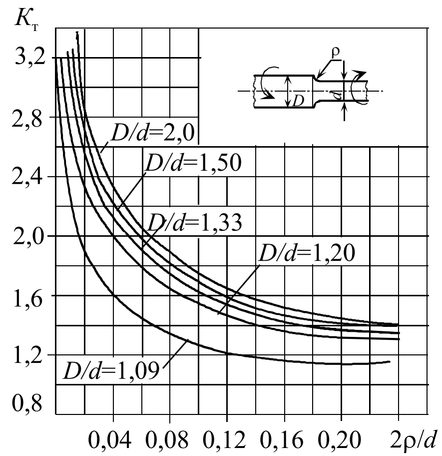


Рис. П. 4.2. Графики теоретических коэффициентов концентрации напряжений при кручении вала переменного сечения

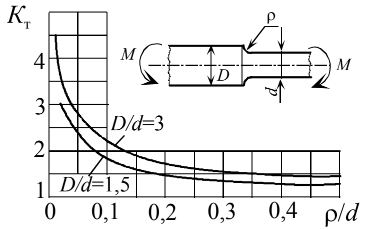


Рис. П. 4.3. Графики теоретических коэффициентов концентрации напряжений при изгибе круглого стержня переменного сечения

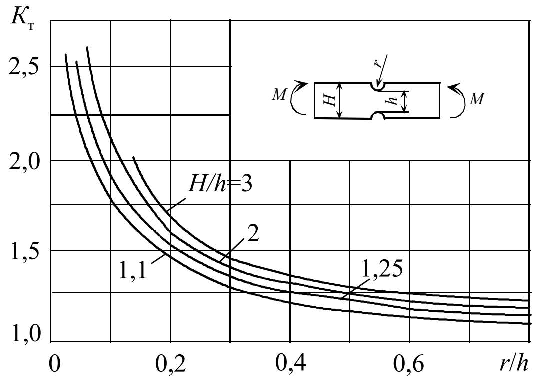


Рис. П. 4.4. Графики теоретических коэффициентов концентрации напряжений при изгибе полосы с двухсторонней внешней выточкой

Приложение 5

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений $K_э$

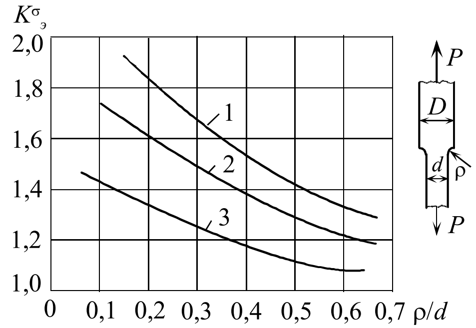


Рис. П. 5.1. Графики эффективных коэффициентов концентрации напряжений для ступенчатых валов при растяжении (сжатии) с отношением $D/d = 2$ при $d = 30…50$ мм:
1 — для стали с $\sigma_в = 1200$ МПа; *2* — для стали с $\sigma_в = 800$ МПа;
3 — для стали с $\sigma_в = 400$ МПа

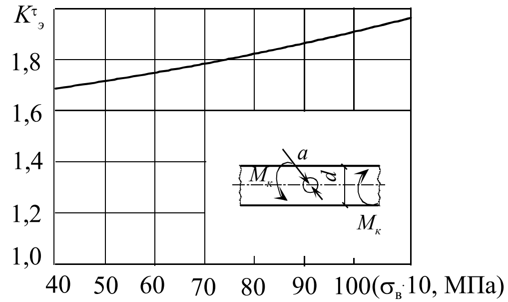


Рис. П. 5.2. Графики эффективных коэффициентов концентрации напряжений валов с поперечным отверстием при кручении: $a/d = 0{,}05…0{,}25$;
$\tau = M_к/W_{к\ нетто}$ при $d = 30…50$ мм

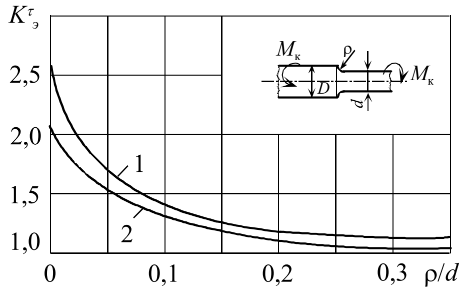


Рис. П. 5.3. Графики эффективных коэффициентов концентрации напряжений для ступенчатых валов при кручении с отношением $D/d = 2$ при $d = 30…50$ мм:
1 — для стали с $\sigma_в = 1200$ МПа; *2* — для стали с $\sigma_в = 500$ МПа

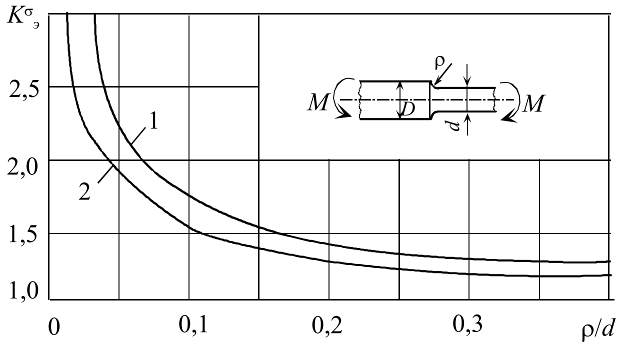


Рис. П. 5.4. Графики эффективных коэффициентов концентрации напряжений для ступенчатых валов при изгибе с отношением $D/d = 2$ при $d = 30…50$ мм:
1 — для стали с $\sigma_в = 1200$ МПа; *2* — для стали с $\sigma_в = 500$ МПа

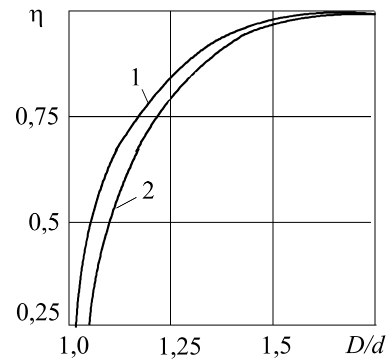


Рис. П. 5.5. Графики поправочных коэффициентов для отношения $D/d < 2$ к рис. П. 5.3 и П. 5.4:
1 — изгиб; *2* — кручение

Если $D/d < 2$, то $K_э$ следует определить по формуле

$$K_э = 1 + \eta\left(K_{эо} - 1\right),$$

где $K_{эо}$ — коэффициент, найденный из графиков (рис. П. 5.3 или П. 5.4), т.е. $K_{эо} = K_э^{\tau}$ или $K_э^{\sigma}$

Приложение 6

Графики коэффициентов чувствительности, качества поверхности и масштаба

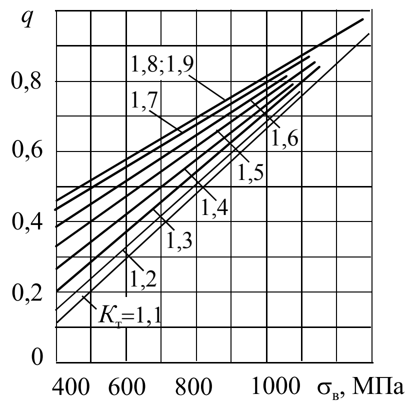


Рис. П. 6.1. Графики изменения коэффициента чувствительности в зависимости от предела прочности стали и теоретического коэффициента концентрации напряжений

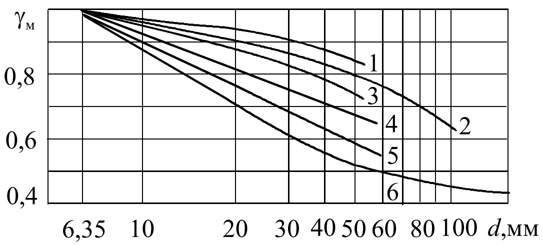


Рис. П. 6.2. Графики масштабных коэффициентов:
1 — углеродистая сталь, гладкая полировка; *2* — углеродистая сталь, гладкая шлифовка; *3* — легированная сталь, гладкая полировка; *4* — легированная сталь, гладкая шлифовка; углеродистая сталь с концентрацией напряжений; *5* — легированная сталь с умеренной концентрацией напряжений, $K_э < 2$; *6* — конструкционная сталь ($\sigma_в$ < 650 МПа); вал с напрессованной деталью, изготовленной из непрессованной стали; при d < 60 мм — легированная сталь с концентрацией напряжений

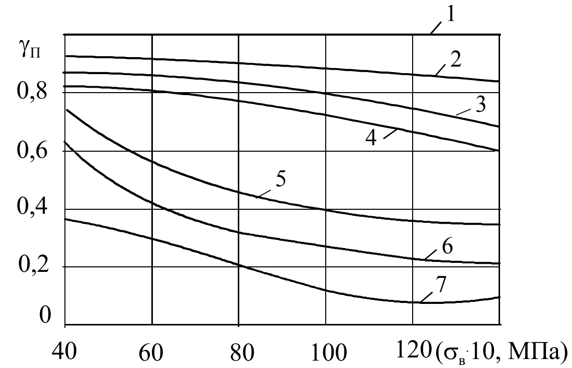


Рис. П. 6.3. Графики коэффициентов качества поверхности для сталей: *1* — тщательная полировка; *2* — грубая полировка; *3* — тонкая шлифовка или тонкая обточка; *4* — грубая шлифовка или грубая обточка; *5* — испытание в пресной воде при отсутствии концентрации напряжений; *6* — испытание в пресной воде при наличии концентрации напряжений; *7* — испытание в морской воде при отсутствии концентрации напряжений

ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

Задача 1 (тема 12). Для балки на двух опорах с консолями, работающей на изгиб от заданных по варианту нагрузок, требуется:

1. Построить эпюры Q и M, выразив опорные реакции и ординаты в кН и кН·м.

2. Из условия прочности при изгибе подобрать номер двутавра при R = 210 МПа.

3. Приняв начало координат на левом конце балки, записать формулы для определения прогибов и углы поворота сечений методом начальных параметров.

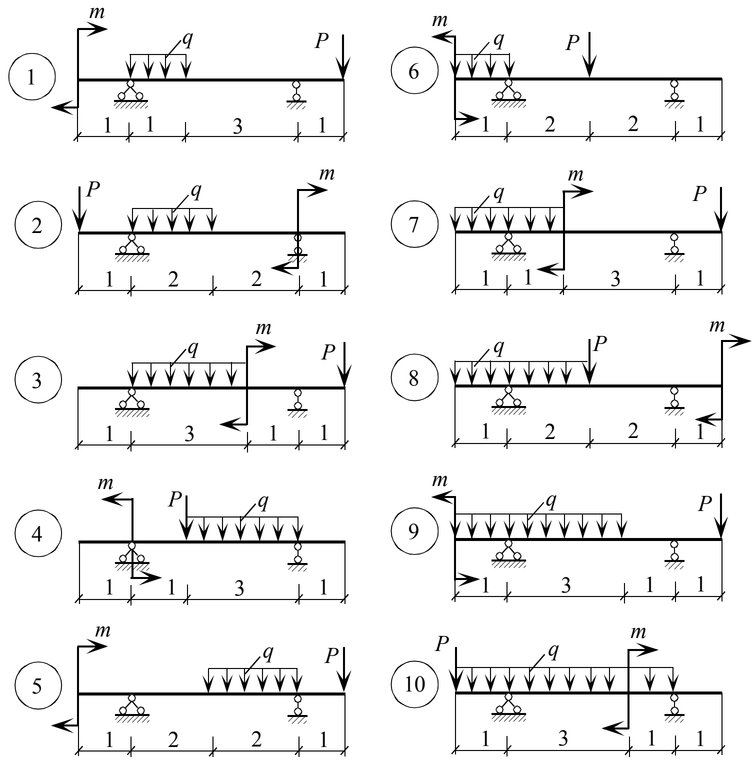
4. Найти прогибы (в сантиметрах) и углах поворота сечений (в радианах) на границе участков и на концах балки. Принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

5. Руководствуясь эпюрой M и найденными значениями прогибов, изобразить изогнутую ось балки. Исходные данные взять из таблицы к задаче 1.

(К задаче 1)

Номер строки	Номер схемы по рис.	P, кН	q, кН/м	m, кН·м
1	1	32	20	20
2	2	34	21	30
3	3	36	22	40
4	4	38	23	50
5	5	40	24	60
6	6	42	25	70
7	7	44	26	80
8	8	46	27	40
9	9	48	28	60
0	10	50	30	80
	е	*в*	*д*	*г*

(К задаче 1)



Длина участков дана в м

Задача 2 (тема 13). Для балки переменного сечения определить методом единичных нагрузок прогиб и угол поворота сечения в точке A.

Принять $J_0 = kJ$.

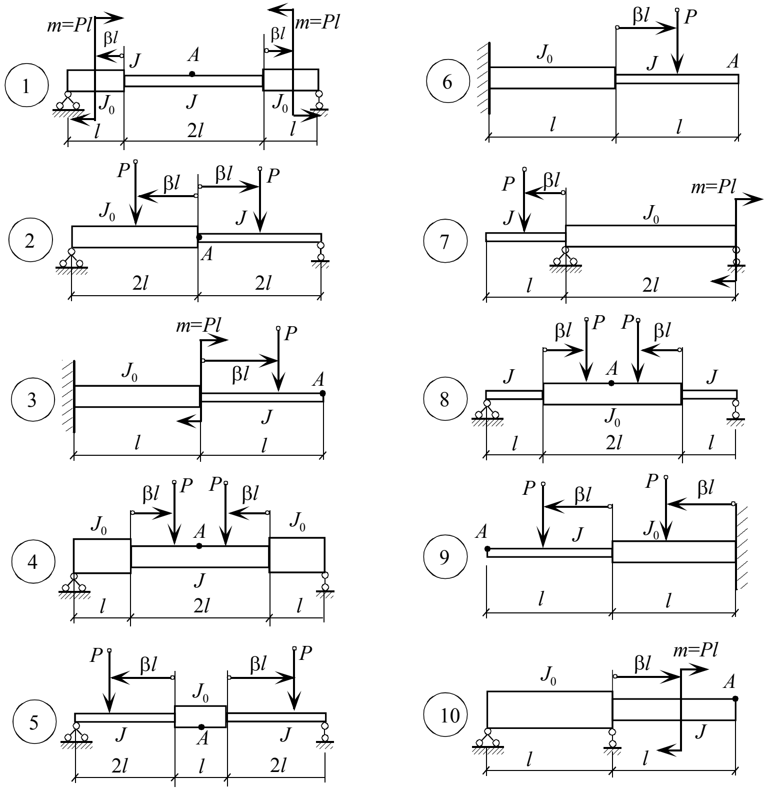
(К задаче 2)

Номер строки	Номер схемы по рис.	β	k	P, кН	l, м
1	1	0	1,5	5	0,5
2	2	0,2	2,0	8	0,7
3	3	0,3	2,5	10	0,9
4	4	0,4	3,0	12	1,0

Продолжение таблицы

Номер строки	Номер схемы по рис.	β	*k*	*P*, кН	*l*, м
5	5	0,5	3,5	14	1,2
6	6	0,6	4,0	16	1,4
7	7	0,7	4,5	18	1,3
8	8	0,8	5,0	20	1,1
9	9	0,9	5,5	22	0,8
0	10	0,5	6,0	24	0,6
	е	*д*	*а*	*е*	*г*

(К задаче 2)



Задача 3 (тема 14). Для заданной один раз статически неопределимой балки постоянного сечения требуется построить эпюры изгибающих моментов M (кН·м) и поперечных сил Q (кН). Для этого необходимо:

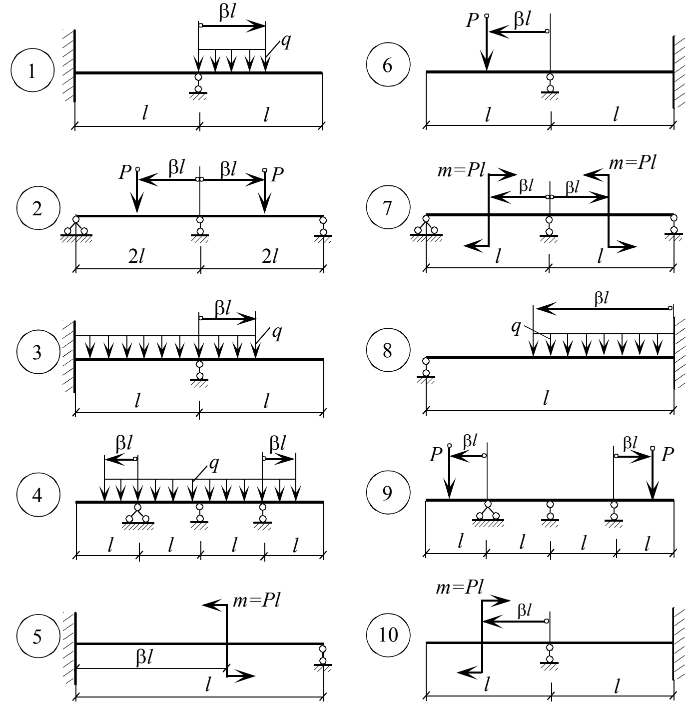
1. Удалить лишнюю связь, выбрать основную систему.

2. Загрузив основную систему заданными нагрузками и неизвестными реакциями, записать деформационное уравнение. Прогибы от заданных нагрузок и лишних неизвестных можно определять любым методом.

3. Определив значение лишней неизвестной, приложить ее вместе с внешними нагрузками к основной системе и найти все остальные опорные реакции.

4. Построить эпюры Q и M, выразив их ординаты в кН и кН·м.

(К задаче 3)



(К задаче 3)

Номер строки	Номер схемы	l, м	P, кН	q, кН/м	β
1	1	2,0	10	20	0,7
2	2	2,2	15	21	0,6
3	3	2,4	20	22	0,5
4	4	2,6	25	23	0,4
5	5	2,8	30	24	0,5
6	6	3,0	35	25	0,6
7	7	3,4	40	26	0,7
8	8	3,6	45	27	0,8
9	9	3,8	50	28	0,9
0	10	4,0	60	30	0,65
	е	*е*	*г*	*а*	*б*

Задача 4 (тема 15). Стальная балка (см. рисунок *а*), формы и размеры поперечного сечения которой заданы (см. рисунок. *б*), работает на косой изгиб от сил, проходящих под углом φ к вертикали. Опорные закрепления балок допускают восприятие вертикальных и горизонтальных реакций. Требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов и установить положение опасного сечения.

2. Из условия прочности при косом изгибе найти допускаемую величину силы P, если R = 210 МПа (2100 кгс/см^2).

3. Определить положение нейтральной оси в опасном сечении балки и построить для сечения плоскую эпюру нормальных напряжений σ.

4. По найденному значению силы P при той же расчетной схеме взамен первой балки подобрать балку двутаврового сечения, приняв R = 210 МПа.

(К задаче 4)

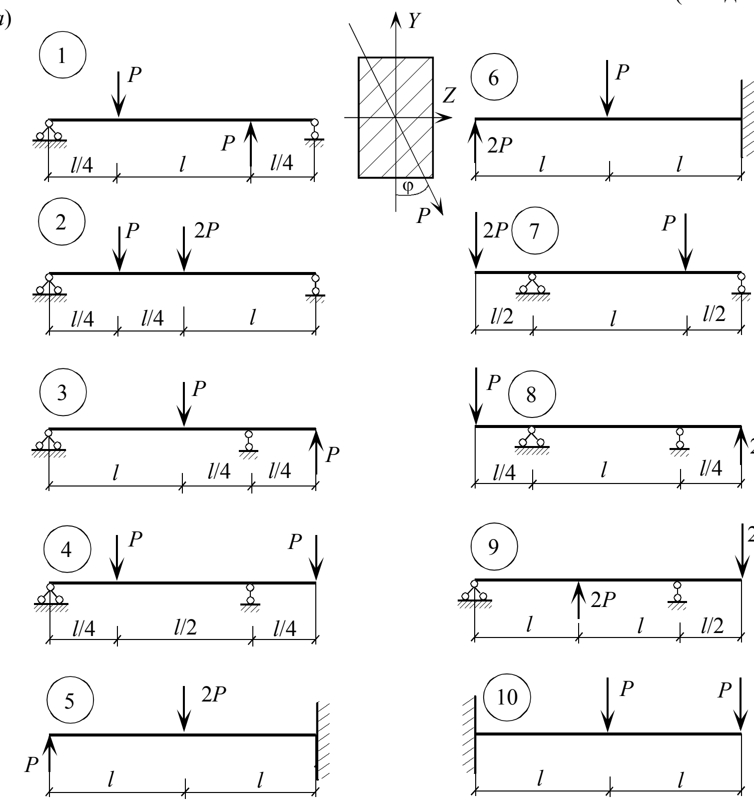
Номер строки	Номер схемы	l, м	φ, град	Форма сечения	Размеры a, см
1	1	3,0	15	1	3,0
2	2	3,5	20	2	4,0
3	3	4,0	25	3	5,0
4	4	4,5	30	4	6,0
5	5	5,0	35	5	7,0

Продолжение таблицы

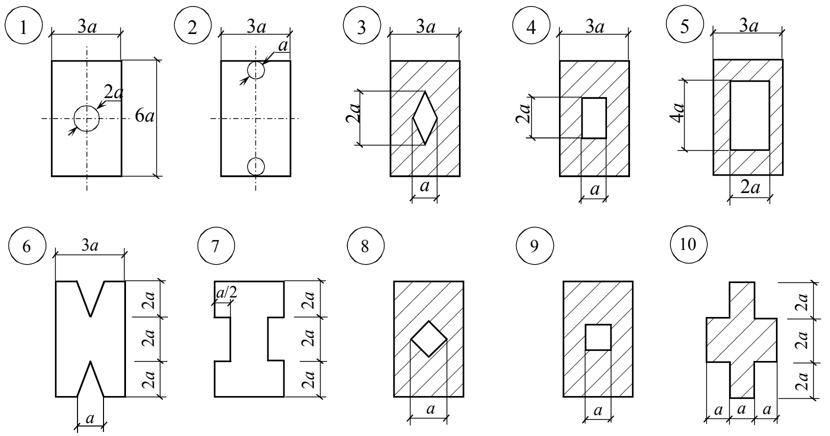
Номер строки	Номер схемы	l, м	φ, град	Форма сечения	Размеры a, см
6	6	5,5	40	6	8,0
7	7	6,0	45	7	7,0
8	8	7,0	50	8	6,0
9	9	7,5	55	9	5,0
0	10	8,0	60	10	4,0
	е	*д*	*г*	*е*	*в*

(К задаче 4)

а)



б)



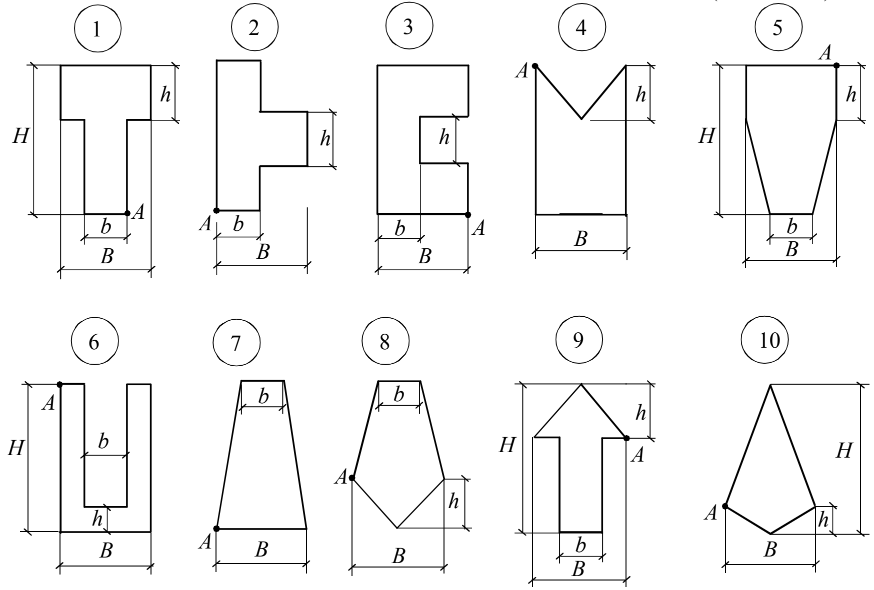
Задача 5 (тема 16). Колонна, поперечное сечение которой показано на рисунке, сжимается вертикальной силой *P*, приложенной в точке *A*. Требуется:

1. Найти центр тяжести сечения, главные моменты инерции и положение главных осей.
2. Найти положение нейтральной оси.
3. Определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в опасных точках поперечного сечения.
4. Построить эпюру напряжений и ядро сечения (в масштабе).

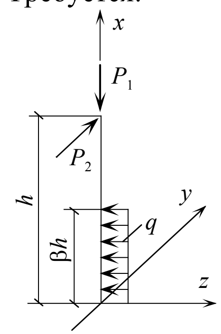
(К задаче 5)

Номер строки	Номер сечения	*P*, кН	*H*, м	*h*, м	*B*, см	*b*, м
1	1	110	1,0	0,2	1,0	0,5
2	2	120	1,2	0,4	0,9	0,45
3	3	130	1,4	0,6	0,8	0,4
4	4	140	1,6	0,8	0,7	0,35
5	5	150	1,8	0,7	0,6	0,3
6	6	140	2,0	0,5	0,55	0,25
7	7	130	1,9	0,3	0,65	0,2
8	8	120	1,7	0,1	0,75	0,25
9	9	110	1,5	0,25	0,85	0,3
0	10	100	1,3	0,35	0,95	0,4
	е	*д*	*г*	*в*	*б*	*а*

(К задаче 5)



Задача 6 (тема 16). Бетонный брус загружен в центре тяжести сечения вертикальной сжимающей силой P_1, горизонтальной силой P_2, направленной по оси y и распределенной нагрузкой q по оси z, как показано на рисунке. Удельный вес материала бруса γ = = 25 кН/м^3. Форму сечения принять по заданию. Требуется:



1. Найти центр тяжести сечения, главные моменты инерции и положение главных осей.
2. Построить ядро сечения (в масштабе).
3. Построить эпюры N, M_z, M_y от P_1, P_2, q и собственного веса (отдельно от каждой нагрузки).
4. В нижнем сечении найти положение нейтральной оси при одновременном действии P_1, P_2, q и собственного веса.
5. В нижнем сечении колонны определить напряжения и построить эпюру σ.

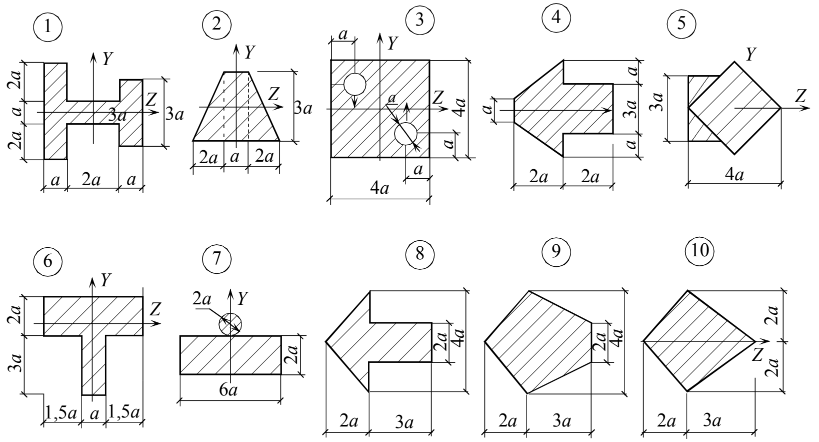
(К задаче 6)

Номер строки	Форма сечения	h, м	P_1, кН	P_2, кН	q, кН/м	a, см	β
1	1	2	100	50	10	40	0,50
2	2	2,25	150	–45	15	42	0,55
3	3	2,50	200	40	20	44	0,60
4	4	2,75	250	–35	25	46	0,65
5	5	3,0	300	30	30	48	0,70
6	6	3,25	350	–25	35	50	0,75
7	7	3,50	400	20	–30	52	0,80
8	8	3,75	450	–15	–25	54	0,85
9	9	4,0	500	10	–20	56	0,90
0	10	4,25	550	–5	–15	58	1,00
	е	*д*	*г*	*в*	*б*	*а*	*е*

Примечание. 1. Собственный вес бруса представить как распределенную погонную нагрузку $q_1 = \gamma A h$, приложенную в центре тяжести вдоль продольной оси вниз.

2. Если нагрузки P_2 и q имеют знак (–), то их направить в противоположную сторону.

(К задаче 6)



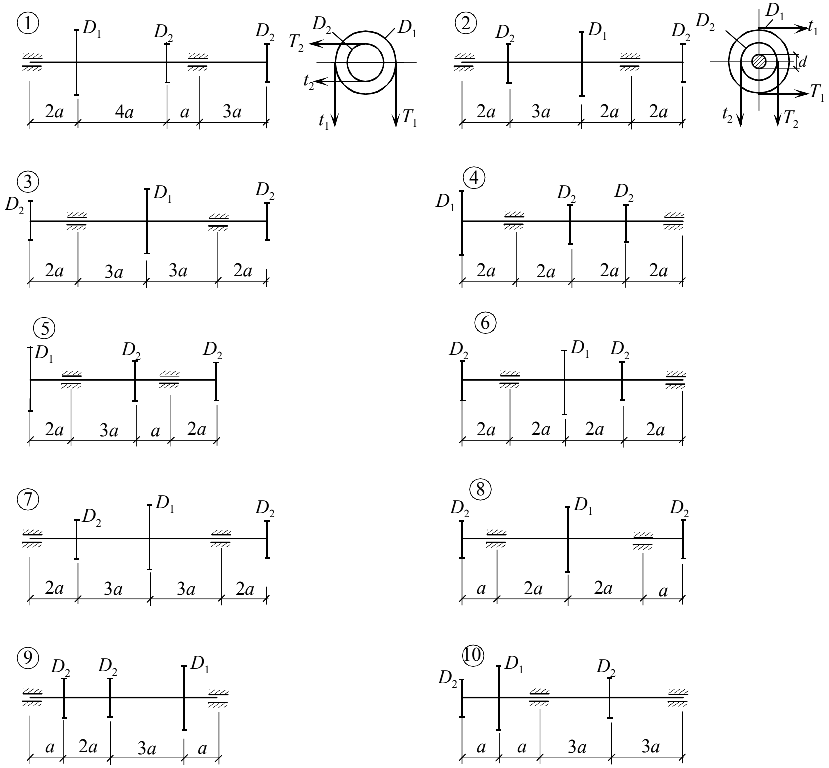
Задача 7 (тема 18). На стальной вал передается от двигателя при помощи ременной передачи мощность N при числе оборотов в минуту n. Принять шкив *1* ведущим, а *2* — ведомым. Требуется:

1. Определить крутящий момент, создаваемый двигателем.
2. Построить эпюру крутящих моментов $M_{кр}$, (кН·м).
3. Определить окружные усилия, действующие на ободе шкивов.
4. Найти силы, изгибающие вал в вертикальной и горизонтальной плоскостях (вес шкивов не учитывать). В ременных передачах отношение усилия в ветвях ремней принять $T/t = 2$.
5. Построить эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях и суммарную эпюру изгибающих моментов, совместив ее с плоскостью чертежа.
6. По эпюрам $M_и$ и $M_{кр}$ найти опасное сечение и определить диаметр вала по третьей теории из условий прочности и жесткости по заданным R и $[\Theta]$.

(К задаче 7)

Номер строки	Номер схемы	N, кВт	n, об/мин	a, м	D_1, м	D_2, м	R, МПа	$[\Theta]$, град/м
1	1	10	100	0,40	0,80	0,20	60	0,10
2	2	15	150	0,45	0,70	0,25	70	0,15
3	3	20	200	0,50	0,60	0,30	75	0,20
4	4	25	250	0,55	0,55	0,35	80	0,25
5	5	30	300	0,60	0,40	0,40	85	0,30
6	6	35	350	0,65	0,45	0,35	90	0,35
7	7	40	400	0,70	0,50	0,30	95	0,40
8	8	45	450	0,75	0,55	0,25	100	0,45
9	9	50	500	0,80	0,60	0,20	110	0,50
0	10	55	550	0,85	0,65	0,15	120	0,60
	е	*д*	*г*	*в*	*б*	*а*	*г*	*в*

(К задаче 7)



Задача 8 (тема 19). В заданной стержневой системе (см. рисунок *а*) сжатые стержни изготовлены из стали ($R = 200$ МПа, $E =$ $= 2{\cdot}10^5$ МПа). Поперечное сечение принять по рисунку, *б*. Требуется:

1. Определить геометрические характеристики поперечного сечения и гибкость сжатых стержней.

2. Определить критическую силу $P_{кр}$ (если $\lambda < 100$, то критическую силу вычислять по формуле Ясинского, приняв $a =$ $= 276$ МПа; $b = 0{,}8$ МПа).

3. Из условия устойчивости определить допускаемую продольную силу $N_{доп}$.

4. Определить предельную силу P для стержневой системы.

5. Для той же расчетной схемы определить размеры квадратного сечения сжатого стержня (принять R = 150 МПа и силу $N_{доп}$, вычисленную в п. 3).

(К задаче 8)

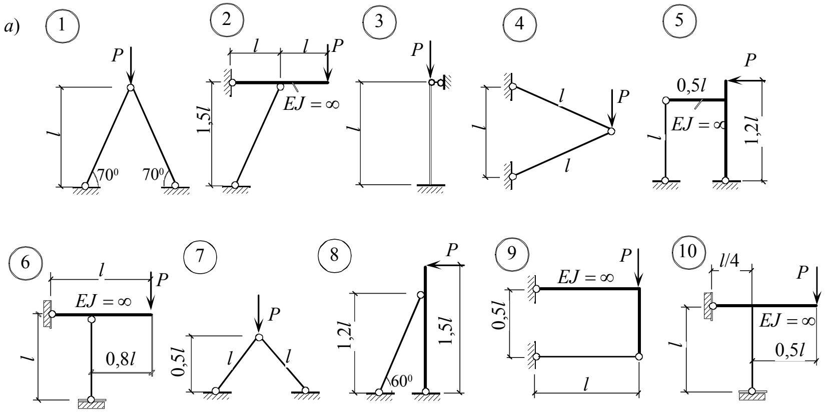
Номер строки	Номер схемы	Тип сечения	Уголок равнобокий	Уголок неравнобокий	Двутавр	Швеллер	D, мм	l, м
1	1	1	100×100×8	100×63×10	10	10	250	4,0
2	2	2	200×200×12	200×125×12	22а	22а	480	3,0
3	3	3	100×100×10	100×63×8	12	12	280	4,5
4	4	4	110×110×8	110×70×8	14	14	300	5,0
5	5	5	125×125×8	125×80×8	16	14а	320	5,5
6	6	6	125×125×10	125×80×12	18	16	340	6,0
7	7	7	140×140×10	140×90×8	18а	16а	350	5,6
8	8	8	160×160×10	140×90×10	20	18	380	4,9
9	9	9	160×160×16	160×100×10	20а	20	400	4,5
0	10	10	160×160×20	180×110×10	22	22	440	3,5
	д	*е*	*д*	*г*	*в*	*а*	*б*	*е*

Примечания. 1. Коэффициенты продольного изгиба приведены в прил. 3.

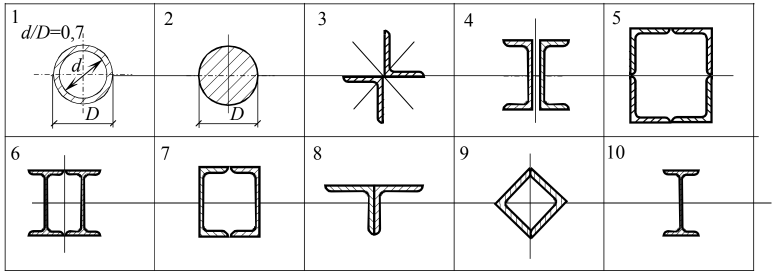
2. Закрепления стержней в обеих главных плоскостях инерции считать одинаковыми.

(К задаче 8)

а)



б)



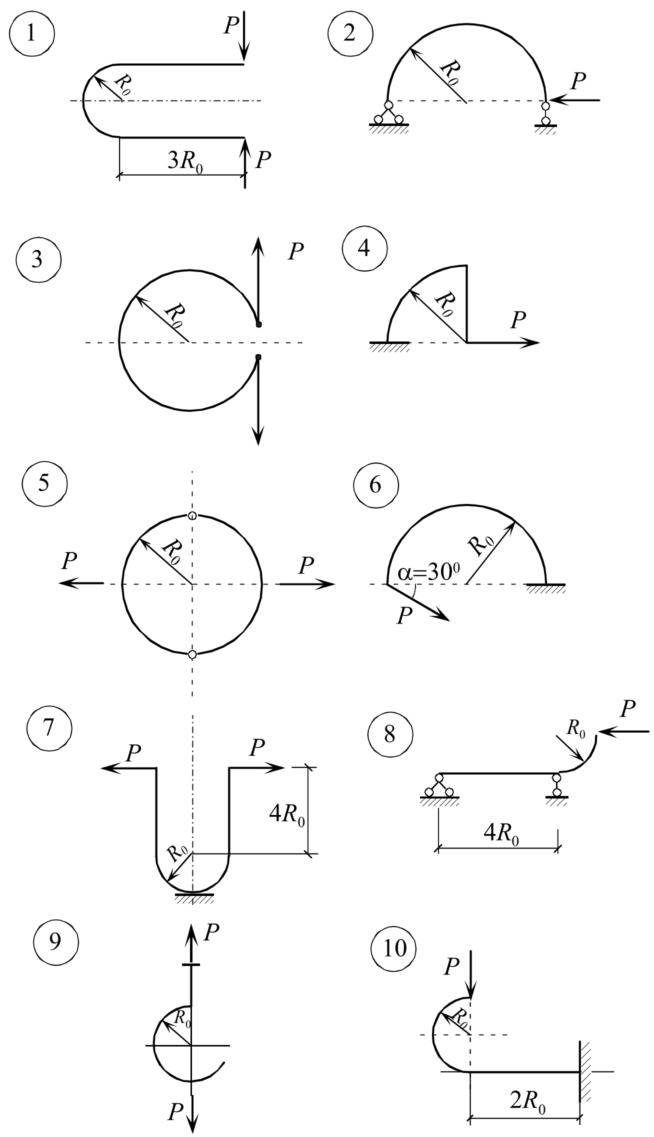
Задача 9 (тема 20). Для стального бруса (см. рисунок, *а*), ось которого очерчена по окружности радиусом R_0, построить эпюры изгибающих моментов M, продольных N и поперечных Q сил с указанием ординат в сечениях через 30^0. В опасном сечении построить эпюры нормальных напряжений σ_N и σ_M и суммарную $\sigma_{(N+M)}$ с вычислением ординат в крайних волокнах.

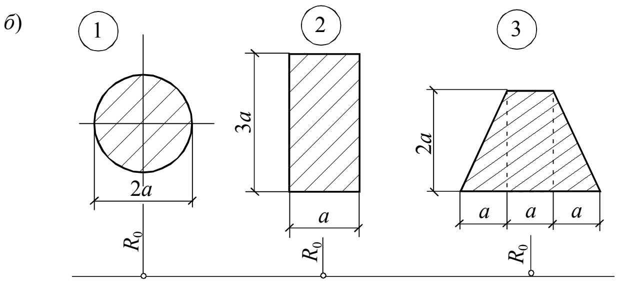
(К задаче 9)

Номер строки	Номер схемы	Тип сечения (рисунок, *б*)	R_0, см	P, кН	α, град	a, см
1	1	1	31	75	0	4,0
2	2	2	32	80	10	4,1
3	3	3	33	85	20	4,2
4	4	1	34	90	30	4,3
5	5	2	35	95	40	4,4
6	6	3	36	100	50	4,5
7	7	1	37	105	60	4,6
8	8	2	38	110	70	4,7
9	9	3	39	115	80	4,8
0	10	1	40	120	90	4,9
	е	*д*	*г*	*а*	*б*	*в*

(К задаче 9)

а)


1
P
R_0
$3R_0$
P
2
R_0
P
3
P
R_0
4
R_0
P
5
P
R_0
P
6
R_0
$\alpha=30^0$
P
7
P
P
$4R_0$
R_0
8
P
R_0
$4R_0$
9
P
R_0
P
10
P
R_0
$2R_0$



Задача 10 (тема 21.1). Стальной стержень *AB* круглого поперечного сечения с закрепленными на нем грузами (см. рисунок) поднимается с ускорением *a*. Требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил в стержне *AB* от статического и динамического действия нагрузок (массой стержней пренебречь).

2. Из условия прочности определить диаметр стержня *AB*, если R = 180 МПа.

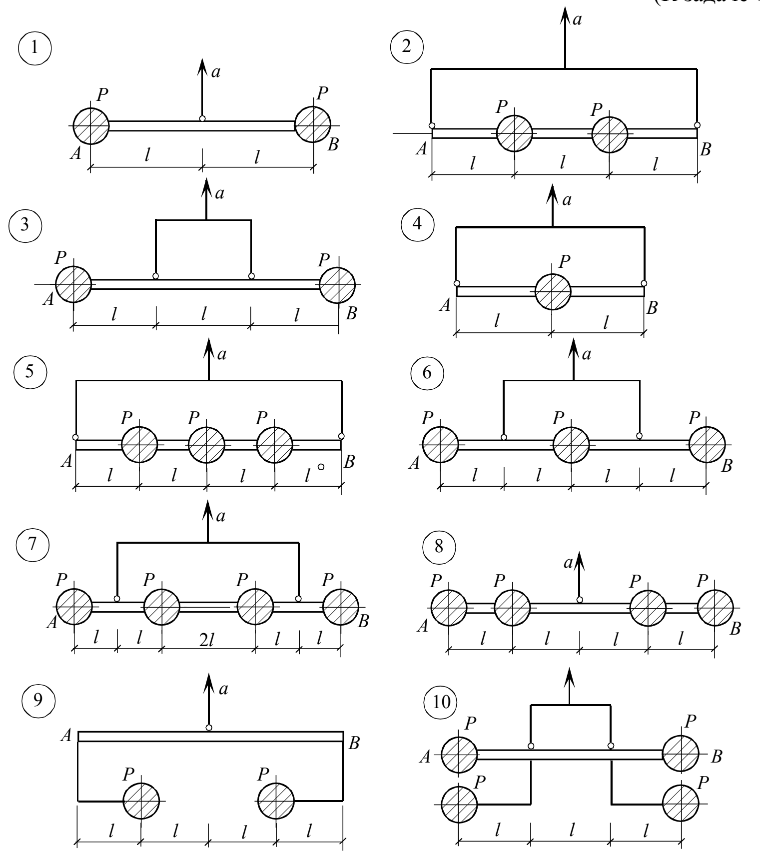
(К задаче 10)

Номер строки	Номер схемы	P, Н	Ускорение a, м/с^2	l, м
1	1	100	2	0,6
2	2	150	3	0,8
3	3	200	4	1,0
4	4	250	5	1,2
5	5	300	6	1,5
6	6	350	7	1,3
7	7	400	8	1,1
8	8	350	7	0,9
9	9	300	6	0,7
0	10	250	5	0,5
	е	*д*	*г*	*в*

Примечания. 1. Решение задачи начать с определения сил опорных реакций, построения эпюр от статического действия сил и определения динамического коэффициента.

2. В схемах 9 и 10 нижние грузы заменить силой и моментом и приложить их к стержню *AB*.

(К задаче 10)



Задача 11 (тема 21.1). Вал вращается вокруг своей оси, совершая *n* оборотов в минуту. Требуется: 1. Определить угловую скорость Θ, ускорение *a*, силы инерции и динамические нагрузки $P_д$ (принять положение грузов согласно схеме).

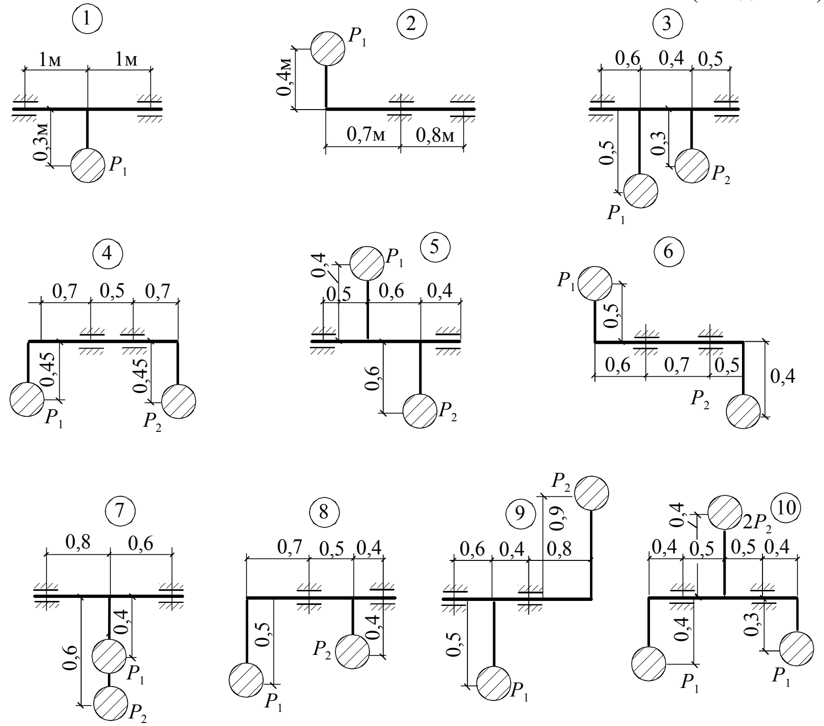
2. Построить эпюры изгибающих моментов в вале (собственным весом стрежней и их инерционными силами пренебречь).

3. Из условия прочности определить диаметр круглого вала, если R = 210 МПа.

(К задаче 11)

Номер строки	Номер схемы	P_1, Н	P_2, Н	n, об/мин
1	1	100	200	100
2	2	110	190	115
3	3	120	180	130
4	4	130	170	145
5	5	140	160	160
6	6	150	150	175
7	7	160	140	200
8	8	170	130	215
9	9	180	120	230
0	10	200	110	250
	е	*д*	*г*	*в*

(К задаче 11)



Задача 12 (тема 21.2). На балке из двух двутавров (ГОСТ 8239-89) установлен электродвигатель весом Q, совершающий n об/мин. Максимальная величина вертикальной составляющей центробежной силы $P_0 \sin \Theta t$ от вращения неуравновешенных масс равна 0,25Q. Массой балки пренебречь. Требуется:

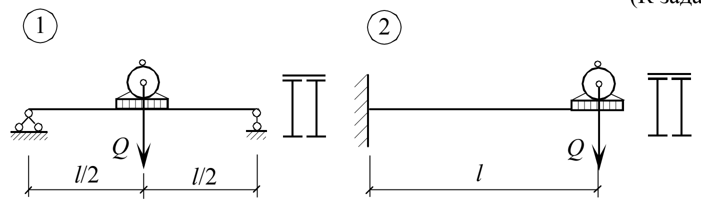
1. Определить размеры поперечного сечения балки из условия, что частота свободных колебаний ω превышает на 40 % частоту возмущающей силы Θ.

2. Определить максимальные динамические напряжения в балке.

(К задаче 12)

Номер строки	Номер схемы	l, м	Q, кН	n, об/мин
1	1	3,0	4	800
2	2	3,2	5	900
3	1	3,4	6	1000
4	2	3,6	7	1100
5	1	3,8	8	1200
6	2	4,0	7	1100
7	1	4,2	6	1000
8	2	4,4	5	900
9	1	4,6	4	800
0	2	4,8	3	700
	а	*е*	*д*	*г*

(К задаче 12)



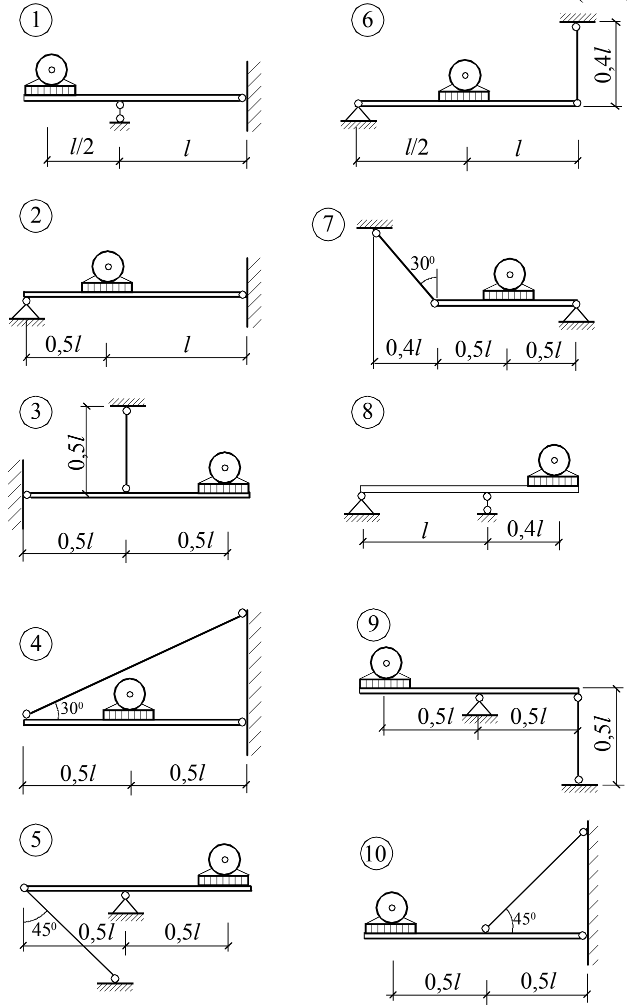
Примечание. Решение задачи начать с определения $\omega = 1,4\Theta$, номера двутавра по J_z, напряжений $\sigma_{ст}$ и динамического коэффициента.

Задача 13 (тема 21.2). На двутавровую балку установлен электромотор весом Q. За счет вращения неуравновешенной массы развивается центробежная сила, равная $0{,}1Q$. Вал мотора делает n оборотов в минуту. Подвески выполнены из стальных круглых стержней. Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Определить амплитуду вынужденных колебаний и наибольшие динамические напряжения в балке. Массой балки и силами сопротивления пренебречь.

(К задаче 13)

Номер строки	Номер схемы	Номер двутавра	l, м	Q, кН	n, об/мин	d, см
1	1	10	2,0	1,0	800	2,0
2	2	12	2,5	1,5	900	2,5
3	3	14	3,0	2,0	1000	3,0
4	4	16	3,5	2,5	1100	3,5
5	5	18	4,0	3,0	1200	4,0
6	6	18а	4,5	3,5	1300	4,5
7	7	20	4,0	2,5	1200	5,0
8	8	22	3,5	2,0	1100	4,0
9	9	24	3,0	1,5	1000	3,0
0	10	27	2,0	1,0	900	2,0
	е	*д*	*г*	*в*	*б*	*а*

(К задаче 13)



Примечание. В схемах 4, 5, 7 и 10 напряжениями в балке от продольных сил пренебречь.

Задача 14 (тема 21.3). На стальную конструкцию с высоты h падает груз массой P (см. рисунок). В схемах 6–10 балка имеет двутавровое сечение. Требуется: определить максимальные динамические напряжения в конструкции

а) без постановки упругих элементов;

б) при установке в точке B упругого элемента жесткостью C.

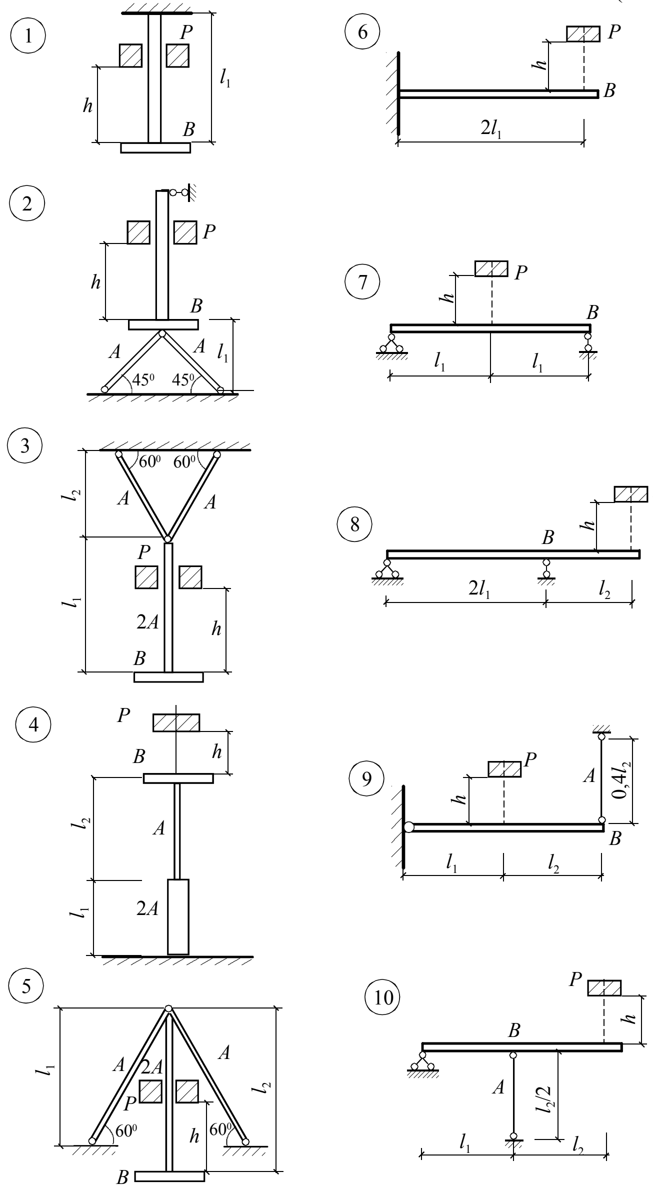
(К задаче 14)

Номер строки	Номер схемы	P, кН	A, см^2	Двутавр	$C \cdot 10^{-5}$, Н/м	l_1, м	l_2, м	h, см
1	1	20	8,2	10	10	1,4	1,4	10
2	2	22	8,4	12	11	1,5	1,5	12
3	3	24	8,6	14	12	1,6	1,6	14
4	4	26	8,8	16	13	1,7	1,7	16
5	5	28	9,0	18	14	1,8	1,8	18
6	6	30	9,2	20	15	1,9	1,9	20
7	7	32	9,4	22	16	2,0	2,0	19
8	8	34	9,6	24	17	2,1	2,1	17
9	9	36	9,8	27	18	2,2	2,2	15
0	10	38	10	30	19	2,3	2,3	13
	е	*д*	*г*	*б*	*а*	*г*	*д*	*е*

Примечание. 1. Решение задачи начать с определения продольных сил в стержнях или изгибающих моментов в балках, которые необходимы для определения статических напряжений $\sigma_{ст}$.

2. Деформацию упругого элемента $\lambda = \Delta_{ст}$ определять по формуле (21.16), где C — жесткость упругого элемента.

(К задаче 14)



1
P
l_1
h
B
2
P
h
B
A
A
l_1
45^0
45^0
3
60^0
60^0
l_2
A
A
P
l_1
2A
h
B
4
P
h
B
l_2
A
l_1
2A
5
l_1
A
2A
A
P
l_2
60^0
h
60^0
B
6
P
h
B
$2l_1$
7
P
h
B
l_1
l_1
8
P
h
B
$2l_1$
l_2
9
P
h
A
$0,4l_2$
B
l_1
l_2
10
P
h
B
A
$l_2/2$
l_1
l_2

СОДЕРЖАНИЕ

Таблица 20.1

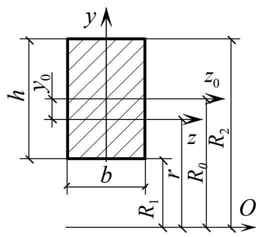
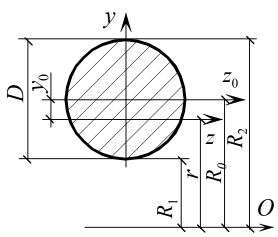
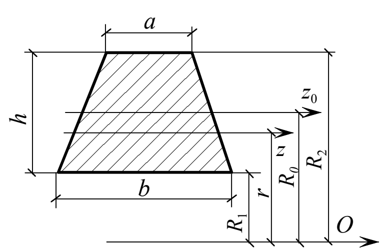
	Прямоугольник	Круг	Трапеция
Тип сечения			
Точное решение	$r=\dfrac{h}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$	$r=\dfrac{D^2}{8\left(R_0-\sqrt{R_0^2-\dfrac{D^2}{4}}\right)}$	$r=\dfrac{(b+a)h^2}{2\left[(bR_2-aR_1)\ln\dfrac{R_2}{R_1}-(b-a)h\right]}$
Приближенное решение	$y_0=\dfrac{h^2}{12R_0}$	$y_0=\dfrac{D^2}{16R_0}$	$y_0=\dfrac{b^2+4ba+a^2}{18(b+a)^2}\dfrac{h^2}{R_0}$

Таблица П 1.3

Характеристики материалов для мостовых конструкций

Марка стали	Государственный стандарт	Прокат	Толщина проката[1], мм	Нормативное сопротивление[2], МПа (кгс/мм^2)		Расчетное сопротивление[3], МПа (кгс/см^2)	
				по пределу текучести $R_{уп}$	по временному сопротивлению $R_{ип}$	по пределу текучести $R_у$	по временному сопротивлению $R_и$
16Д	ГОСТ 6713-91	Любой	До 20	235 (24)	370(38)	215 (2200)	340 (3450)
16Д	ГОСТ 6713-91	Любой	21–40	225 (23)	370 (38)	205 (2100)	340 (3450)
16Д	ГОСТ 6713-91	Любой	41–60	215(22)	370(38)	195 92000)	340 (3450)
15ХСНД	ГОСТ 6713-91	Любой	8–32	340 (35)	490 (50)	295 (3000)	415 (4250)
15ХСНД	ГОСТ 6713-91	Листовой	33–50	330 (34)	470 (48)	285 (2900)	400 (4000)
10ХСНД	ГОСТ 6713-91	Любой	8–15	390 (40)	530 (54)	350(3550)	470 (4800)
10ХСНД	ГОСТ 6713-91	Листовой	16–32	390 (40)	530(54)	350(3550)	470 (4800)
10ХСНД	ГОСТ 6713-91	Листовой	33–40	390 (40)	510(55)	350(3550)	450 (4600)
390-15Г2АФДпс	ГОСТ 19282-89	Листовой	4–32	390 (40)	540 (55)	355 (3600)	490 (5000)
40Х13	ГОСТ 5632-72	Круглый	До 250	1200 (122)	1540(157)	1050 (10700)	1365 (13900)

[1] За толщину фасонного проката следует принимать толщину полки.

[2] За нормативные сопротивления приняты минимальные значения предела текучести и временного сопротивления, приведенные в ГОСТ 6713-91 в кгс/мм^2. Нормативные сопротивления в МПа вычислены умножением соответствующих величин на множитель 9,80665 и округлением до 5 МПа.

[3] Здесь указаны расчетные сопротивления растяжению, сжатию и изгибу $R_у$ и $R_и$.

Значения расчетных сопротивлений получены делением нормативных сопротивлений на коэффициент надежности по материалу, определяемый по табл. П 1.2, и округлением до 5 МПа.