

***С.Д. ШАПОРЕВ***

# **ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА**

**Учебное пособие**

**Санкт-Петербург  
2004**

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

*С.Д. ШАПОРЕВ*

# ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

*Допущено научно-методическим советом по математике вузов Северо-Запада в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальностям 220200 «Автоматизированные системы обработки информации и управления», 071900 «Информационные системы в технике и технологиях»*

Санкт-Петербург  
2004

УДК 510.22: 519.1  
Ш 24

**Шاپورев С.Д.**  
**Ш 24** Дискретная математика: Учебное пособие / Балт. гос. техн. ун-т. СПб.,  
2004. с.  
ISBN

Пособие состоит из двух частей. В первой рассмотрены три раздела: теория множеств, комбинаторика и теория графов. Автор уделит особое внимание доступности материала. Основной текст снабжен большим количеством примеров.

Во второй части приведены решения практически всех задач, предложенных на практических занятиях, причем развернутые решения некоторых из них дополняют основной курс.

Предназначено для студентов технических вузов и читателей, интересующихся основными направлениями и методами дискретной математики.

Р е ц е н з е н т ы: кафедра высшей математики ПГУПС (зав. каф. д-р техн. наук, проф.  
*В.Г. Дегтярев*), д-р техн. наук, проф. *М.С. Попов*

ISBN

© С.Д. Шапорев, 2004  
© БГТУ, 2004

# ЧАСТЬ I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КУРСА

## 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

### 1.1. Множества и действия над ними

Первичное понятие теории множеств – понятие самого множества.

Множество – это совокупность некоторых (произвольных) объектов, объединенных по какому-либо признаку. Элементы множества при этом должны быть различными. Множество обозначается скобками  $\{..\}$ , внутри которых либо просто перечисляются элементы, либо описываются их свойства. Например,  $A = \{x \in N / x + 2 = 1\}$  – множество натуральных чисел, удовлетворяющих условию  $x + 2 = 1$ , очевидно, пусто.  $B = \{ \text{сложение, умножение} \}$  – множество основных арифметических операций. Если необходимо указать, что объект  $a$  является элементом множества  $A$ , то пишут  $a \in A$  ( $a$  принадлежит  $A$ ), запись  $a \notin A$  говорит о том, что  $a$  не принадлежит  $A$ .

Если каждый элемент множества  $A$  есть элемент множества  $B$ , то пишут  $A \subseteq B$  или  $B \supseteq A$  и говорят, что множество  $A$  является подмножеством множества  $B$ . Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными, то есть  $A = B$ , в противном случае  $A \neq B$ . Очевидно, что

$$A = B \Leftrightarrow \forall x((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)) = \forall x[(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)] = (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$

Итак,  $A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$ . Если  $M \subseteq A$  и  $M \neq \emptyset$ ,  $M \neq A$ , то множество  $M$  называется собственным подмножеством множества  $A$ . Пустое множество и множество  $A$  называются несобственными подмножествами множества  $A$ . Если  $A$  есть подмножество множества  $B$ , причем  $A \neq B$ , то пишут  $A \subset B$  или  $B \supset A$ . Совокупность всех подмножеств множества  $A$  называется его булеаном или множеством – степенью и обозначается через  $P(A)$  или  $2^A$ . С помощью скобок и операций над множествами можно построить новые множества, более сложные чем исходные.

**1. Объединение (или сумма)** – эта операция над множествами обозначается  $A \cup B$  определяется как  $C = A \cup B = \{x \in C / (x \in A) \vee (x \in B)\}$ . Все операции над множествами можно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера\* – Венна\*\*. Если за некоторое универсальное множество, содержащее как подмножества все другие множества, обозначить  $U$  (или  $\Omega$ ) и

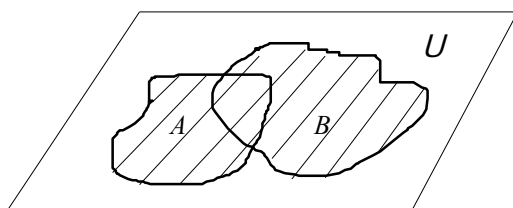


Рис. 1.1

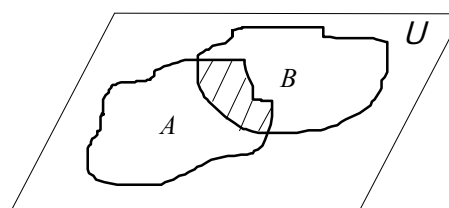


Рис. 1.2

изобразить его в виде всей плоскости, то любое множество  $A \subset U$  можно изобразить в виде части плоскости, то есть в виде некоторой фигуры, лежащей на плоскости. Множество  $C$  – объединение множеств  $A$  и  $B$ , ( $C$  на рис. 1.1 заштриховано),  $C = A \cup B$ .

**2. Пересечением (или произведением)** двух множеств называется такое множество  $C$ , которое состоит из элементов, принадлежащих одновременно обоим множествам, то есть  $C = A \cap B = \{x \in C / (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ . Пересечение множеств  $A$  и  $B$  заштриховано и изображено на рис. 1.2.

**3. Разностью** двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \setminus B$ , состоящее из тех и только тех элементов, которые входят в  $A$  и одновременно не входят в  $B$ , то есть

\* Леонард Эйлер (1707 - 1783) - швейцарский математик.

\*\* Джон Венн (1834 - 1923) - английский математик и логик.

$C = A \setminus B = \{x \in C / (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap \bar{B}$  (рис. 1.3). Если, в частности,  $A$  – подмножество  $U$ , то разность  $U \setminus A$  обозначается  $\bar{A}$  и называется дополнением множества  $A$  (рис. 1.4).

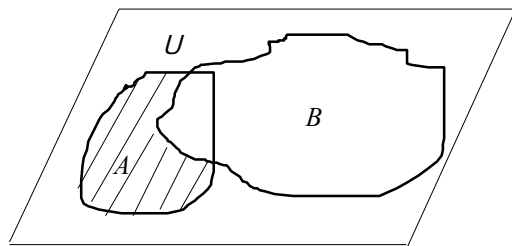


Рис. 1.3

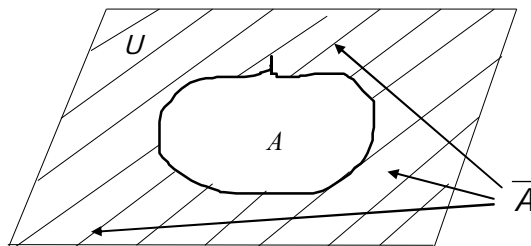
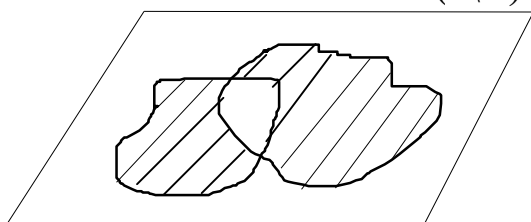


Рис. 1.4

**4. Симметрической разностью или кольцевой суммой** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $C = A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  (рис. 1.5). Очевидно, что  $C = A \oplus B =$



$= \{x \in C / ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B))\}$ . Если  $a \in A$  и  $b \in B$ , то пару элементов  $(a, b)$  называют упорядоченной парой, причем пары  $(a_1, b_1)$  и  $(a_2, b_2)$  равны тогда и только тогда, когда  $a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$ .

**5.** Множество, элементами которого являются все упорядоченные пары  $(a, b)$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$  называется **прямым или декартовым произведением** множеств  $A$  и  $B$  и обозначается  $A \times B$ . Например,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\} \rightarrow A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$ , а  $B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$ ; Таким образом, декартово произведение не подчиняется коммутативному закону и  $A \times B = B \times A$  справедливо, если  $A = B$ . Произведение  $A \times A$  называется декартовым квадратом.

Свойства операций объединения, пересечения и дополнения иногда называются законами алгебры множеств. Эти законы таковы:

- 1) коммутативный:  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap B = B \cap A$ ;
- 2) ассоциативный:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ,  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;
- 3) дистрибутивный:  $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \end{cases}$
- 4) законы идемпотентности:  $A \cup A = A$ ,  $A \cap A = A$ , в частности  $A \cup \emptyset = A$ ,  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ,  $A \cup U = U$ ,  $A \cap U = A$ ;
- 5) законы поглощения:  $A \cup (A \cap B) = A$ ,  $A \cap (A \cup B) = A$ ;
- 6) законы де Моргана\* (двойственности):  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ,  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ;
- 7) закон двойного дополнения:  $\overline{\bar{A}} = A$ ;
- 8) закон включения:  $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$ ;
- 9) закон равенства:  $A = B \Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow (A \cap B) \vee (\bar{A} \cap \bar{B}))$

Конечно, этим кратким перечнем количество законов алгебры множеств не исчерпывается. Другие соотношения между множествами могут быть выведены на основе вышеприведенных законов по правилам алгебры логики.

**Пример 1.** Доказать включения  $(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$ .

Легче всего сделать это по диаграмме Эйлера – Венна (рис. 1.6).

\* Огастес де Морган (1806 – 1871) – шотландский математик и логик.

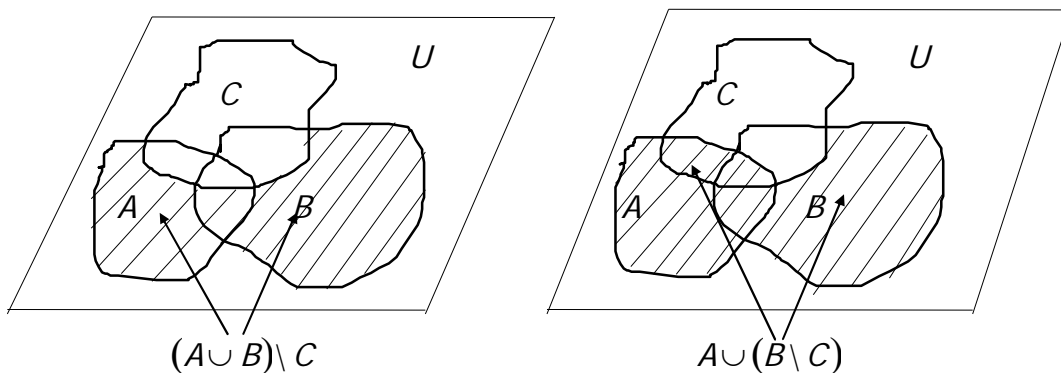


Рис. 1.6

**Пример 2.** Пусть  $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 < x \leq 6\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} / 1 < x < 4\}$ ,  $C = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 4 = 0\}$ . Из каких элементов состоит множество  $(A \cap B) \cup (B \cup C)$ ,  $C \times B$ ?

Перепишем множества  $A, B$  и  $C$ , перечислив их элементы.  $A = \{3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ ,  $C = \{2\}$ . Тогда  $A \cap B = \{3\}$ ,  $B \cup C = \{2, 3\}$ ,  $(A \cap B) \cup (B \cup C) = \{2, 3\}$ ,  $C \times B = \{(2, 2), (2, 3)\}$ , а  $B \times C = \{(2, 2), (3, 2)\}$ .

## 1.2. Отношения и функции. Специальные бинарные отношения

Часто элементы разных множеств связаны различными соотношениями, например, соотношениями порядка.

$n$ -местным отношением или  $n$ -местным предикатом  $P$  на множествах  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называется любое подмножество декартова произведения  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ . Обозначение  $n$ -местного отношения  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . При  $n=1$  отношение  $P$  называется унарным и является подмножеством множества  $A_1$ . Бинарным (или двуместным при  $n=2$ ) отношением называется множество упорядоченных пар. Элементы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называются координатами или компонентами отношения  $P$ .

Для любого множества  $A$  отношение  $id_A = \{(x, x) / x \in A\}$  называется тождественным отношением или диагональю, а  $U_A = A^2 = A \times A = \{(x, y) / x \in A, y \in A\}$  полным отношением или полным квадратом.

Пусть  $P$  – некоторое бинарное отношение. Тогда областью определения бинарного отношения  $P$  называется множество  $D = \{x / (x, y) \in P \text{ для некоторого } y\}$ , а областью значений – множество  $R = \{y / (x, y) \in P \text{ для некоторого } x\}$ . Аналогично вводится еще несколько определений. Обратным к  $P$  отношением называется множество  $P^{-1} = \{(y, x) / (x, y) \in P\}$ . Композицией бинарных отношений  $P \subseteq A \times B$  и  $Q \subseteq B \times C$  называется множество  $P \circ Q = \{(x, y) / x \in A, y \in C, \exists z \in B \text{ такой, что } (x, z) \in P, (z, y) \in Q\}$  (рис. 1.7). Для любых бинарных отношений выполняются следующие свойства:

- 1)  $(P^{-1})^{-1} = P$ ;
- 2)  $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$ ;
- 3)  $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$  – ассоциативность композиции.

**Пример 1.** Пусть  $A = \{x / x \text{ - арабская цифра}\}$ ,  $P = \{(x, y) / x, y \in A, x - y = 5\}$ . Отношение  $P$  можно записать в виде  $P = \{(5, 0), (6, 1), (7, 2), (8, 3), (9, 4)\}$ . Тогда для него имеем  $D = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $R = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $P^{-1} = \{(0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9)\}$ .

**Пример 2.** Пусть  $P = \{(x, y) / x, y \in [-\pi/2, \pi/2] \ y \geq \sin x\}$ . Найдем для этого отношения  $D, R, P^{-1}, P \circ P, P^{-1} \circ P, P \circ P^{-1}$  отношения.

Очевидно, что  $D[-\pi/2, \pi/2] \ R = [-1, \pi/2]$ . По определению  $P^{-1} = \{(y, x) / (x, y) \in P\} = \{(y, x) / y, x \in [-\pi/2, \pi/2] \ x \geq \sin y\}$ . Аналогично для композиции  $P \circ Q = \{(x, y) / x \in A, y \in C, \exists z \in B \text{ такой, что } (x, z) \in P, (z, y) \in Q\}$ , где  $P \subseteq A \times B$ , а  $Q \subseteq B \times C$ . В нашем случае  $P = A \times B$ ,  $A = [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $B = \{(x, y) / \sin x \leq y\}$ ,  $Q = P = B \times C$ ,  $C = [-\pi/2, \pi/2]$ . Тогда

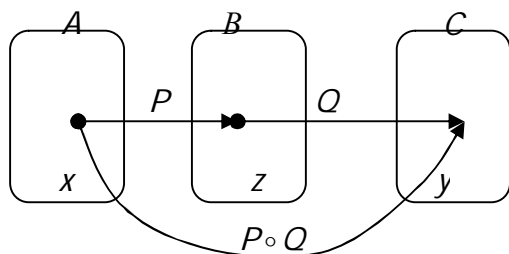


Рис. 1.7

$P \circ P = \{(x, y) / x \in [-\pi/2, \pi/2] \ y \in [-\pi/2, \pi/2] \ \exists z \text{ такой, что } (x, z) \in \{x, z \in [-\pi/2, \pi/2] \ z \geq \sin x\}, (z, y) \in \{y, z \in [-\pi/2, \pi/2] \ y \geq \sin z\}\} = \{(x, y) / \sin x \leq y\}$ .

Далее таким же образом получим  $P \circ P^{-1} = \{(x, y) / x \in [-\pi/2, \pi/2], y \in [-\pi/2, \pi/2], \exists z \text{ такой, что } (x, z) \in \{x, z \in [-\pi/2, \pi/2], z \geq \sin x\}, (z, y) \in \{z, y \in [-\pi/2, \pi/2], y \geq \sin z\}\} =$

$= \{(x, y) / x \in [-\pi/2, \pi/2] \ y \in [-\pi/2, \pi/2]\} = [-\pi/2, \pi/2]^2$ .

$P^{-1} \circ P = \{(x, y) / x \in \{x / \sin x \leq y\}, y \in \{y / \sin x \leq y\}, \exists z \text{ такой, что } (x, z) \in \{(z, x) / x \in [-\pi/2, \pi/2], x \geq \sin z\}, (z, y) \in \{(z, y) / z, y \in [-\pi/2, \pi/2] \ y \geq \sin z\}\} = \{(x, y) / x, y \in [-1, \pi/2]\}$ .

Бинарное отношение  $f \subseteq A \times B$  называется функцией или отображением из множества  $A$  в множество  $B$ , если  $D_f = A, R_f \subseteq B$ , и из  $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f$  следует, что  $y_1 = y_2$ . Область определения функции обозначается  $D_f$ , область значений -  $R_f$ . Определяются они так же, как для бинарных отношений. Если же вместо  $D_f = A$  выполняется  $D_f \subseteq A$ , то  $f$  называется частичной функцией.

Говорят, что функция  $f$  задана на множестве  $A$  со значениями во множестве  $B$  и осуществляет отображение множества  $A$  во множество  $B$ . Функция  $f$  из  $A$  в  $B$  обозначается через  $f: A \rightarrow B$  или  $A \xrightarrow{f} B$ . Тожественное отношение  $id_A(x) = \{(x, x) / x \in A\}$  является функцией  $id_A: A \rightarrow A$ , для которой  $id_A(x) = x$  для всех  $x \in A$ .

Функция  $f$  называется инъективной (разнозначной), если отношение  $f^{-1}$  является частичной функцией, т.е. для любых элементов  $x_1, x_2 \in D_f$  из  $x_1 \neq x_2$  следует  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Функция  $f: A \rightarrow B$  называется функцией  $A$  на  $B$  или сюръективной функцией, если  $R_f = B$ . Для сюръективной функции для любого  $y \in B$  существует  $x \in A$  такой, что  $f(x) = y$ .

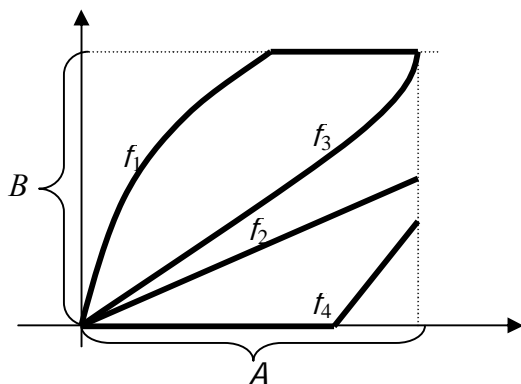


Рис. 1.8

Функция  $f$  называется биективной, если она одновременно сюръективна и инъективна. В этом случае говорят, что  $f$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами  $A$  и  $B$ . Биекция  $f: A \leftrightarrow A$  называется подстановкой множества  $A$ . Простейшим примером подстановки является функция  $id_A$ .

На рис. 1.8 показаны функции  $f_j: A \rightarrow B$ ,  $j = \overline{1, 4}$ . Функция  $f_1$  сюръективна, но неинъективна, функция  $f_2$  инъективна, но несюръективна, функция

$f_3$  биективна и является подстановкой (если  $A = B$ ), функция  $f_4$  неинъективна и несюръективна. Функции обладают несколькими легко доказываемыми свойствами.

1. Композиция двух функций есть функция, т.е. если  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ , то  $f \circ g: A \rightarrow C$ .

2. Композиция двух биективных функций есть биективная функция, если  $f: A \leftrightarrow B$ ,  $g: B \leftrightarrow C$ , то  $f \circ g: A \leftrightarrow C$ .

3. Отображение  $f: A \rightarrow B$  имеет обратное отображение  $f^{-1}: B \rightarrow A$  тогда и только тогда, когда  $f$  - биекция, т.е. если  $f: A \leftrightarrow B$ , то  $f^{-1}: B \leftrightarrow A$ ,  $f \circ f^{-1} = id_B$ ,  $f^{-1} \circ f = id_A$ .

В теории множеств важную роль играют два вида специальных бинарных отношений: эквивалентности и порядка. Их прообразами служат интуитивные понятия равенства, предшествования и предпочтения.

Рассмотрим два конечных множества  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  и бинарное отношение  $P \subseteq A \times B$ . Введем матрицу  $\|P\| = (p_{i,j})$  бинарного отношения  $P$  следующим образом:

$p_{i,j} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in P, \\ 0, & (a_i, b_j) \notin P. \end{cases}$  Эта матрица содержит полную информацию о связях между элементами множеств  $A$  и  $B$  и позволяет представить эту информацию в графическом виде.

Матрица любого бинарного отношения обладает следующими свойствами:

1) если  $P, Q \subseteq A \times B$  и  $\|P\| = (p_{i,j})$ ,  $\|Q\| = (q_{i,j})$ , то  $\|P \cup Q\| = \|P\| + \|Q\| = (p_{i,j} + q_{i,j})$ ;  $\|P \cap Q\| = \|P\| * \|Q\| = (p_{i,j} \cdot q_{i,j})$ , причем сложение элементов матрицы осуществляется по правилам  $0+0=0$ ,  $1+1=1$ ,  $1+0=0+1=1$ , а умножение почленно обычным образом, т.е. по правилам  $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$ ,  $1 \cdot 1 = 1$ ;

2) если  $P \subseteq A \times B$ ,  $Q \subseteq B \times C$ , то  $\|P \circ Q\| = \|P\| \cdot \|Q\|$  и матрицы умножаются по обычному правилу умножения матриц, но произведение и сумма элементов при перемножении матриц находится по правилам пункта 1;

3)  $\|P^{-1}\| = \|P\|^T$ , где  $\|P^{-1}\|$  - матрица обратного отношения  $P^{-1}$ ;

4) если  $P \subseteq Q$ , то  $\|P\| = (p_{i,j})$ ,  $\|Q\| = (q_{i,j})$  и  $p_{i,j} \leq q_{i,j}$ .

**Пример 3.** Бинарное отношение  $P \subseteq A^2$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ , изображено на рис. 1.9. Его матрица имеет вид  $\|P\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Пусть  $\|Q\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , тогда  $\|P \cup Q\| = \|P\| + \|Q\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\|P \cap Q\| = \|P\| * \|Q\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|P \circ Q\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $P$  - бинарное отношение на множестве  $A$ ,  $P \subseteq A^2$ . Отношение  $P$  на множестве  $A$  называется рефлексивным, если

$$\forall x \in A, (x, x) \in P, \text{ т. е. } id_A = P, \quad \|P\| = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ * & 1 & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}, \text{ где звездечки обозначены нули или единицы.}$$

Отношение  $P$  называется иррефлексивным, если  $\forall x \in A, (x, x) \notin P$ . Отношение  $P$  на множестве  $A$  называется симметричным, если для  $\forall x \in P$  и для  $\forall y \in P$  из условия  $(x, y) \in P$  следует, что  $(y, x) \in P$ . Это значит, что  $\|P\|^T = \|P\|$ .

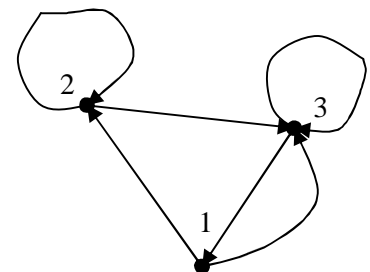


Рис. 1.9



Отношение  $P$  называется антисимметричным, если из условий  $(x, y) \in P$  и  $(y, x) \in P$  следует, что  $x = y$ , т.е.  $P \cap P^{-1} \subseteq id_A$  или  $\|P \cap P^{-1}\| = \|P\| * \|P\|^T$ . Это свойство приводит к тому, что у матрицы  $\|P \cap P^{-1}\|$  все элементы вне главной диагонали будут нулевыми (на главной диагонали тоже могут быть нули). Отношение  $P$  называется транзитивным, если из  $(x, y) \in P$  и  $(y, z) \in P$  следует, что  $(x, z) \in P$ , т.е.  $P \circ P \subseteq P$ .

**Пример 4.** Рассмотрим все свойства следующего отношения  $P$ , если  $\|P\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Здесь на главной диагонали матрицы  $\|P\|$  стоят все единицы, следовательно,  $P$  рефлексивно, т.е.  $id_A \subseteq P$ . Матрица  $\|P\|$  не симметрична, тогда не симметрично и отношение  $P$ .

$$\|P \cap P^{-1}\| = \|P\| * \|P\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Эта матрица нужна для проверки}$$

антисимметричности. Так как не все элементы, стоящие вне главной диагонали, нулевые, то отношение  $P$  не антисимметрично. Из этого примера видно, что свойство несимметричности не совпадает со свойством антисимметричности.

$$\text{Наконец, } \|P \circ P\| = \|P\| \cdot \|P\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ т. е. } P \circ P \not\subseteq P, \text{ следова-}$$

тельно, отношение  $P$  не транзитивно.

Рефлексивное, транзитивное и симметричное отношение на множестве  $A$  называется эквивалентностью на  $A$ . Эквивалентность обозначается символами  $E$  или  $\sim$ , например,  $x E y$ ,  $x \sim y$ .

Классом эквивалентности (смежным классом) элемента  $x \in A$  называется множество  $E(x) = \{y / x \sim y\}$ . Множество классов эквивалентности элементов множества  $A$  по эквивалентности  $E$  называется фактор-множеством  $A$  по  $E$  и обозначается  $A/E = \{E(x) / x \in A\}$ .

**Пример 5.** Докажем, что на множестве  $N \times N$  отношение  $Q$  является отношением эквивалентности, если  $\{(a, b), (c, d)\} \in Q \Leftrightarrow a + d = b + c$ .

Если отношение  $Q$  рефлексивно на  $A$ , то  $\forall x \in Q (x, x) \in Q$ . В нашем случае роль  $A$  играет множество  $N \times N$ , а роль элемента  $x$  – пара  $(x, y)$ . Тогда отношение  $Q$  рефлексивно на  $N \times N$ , если  $\forall (x, y) \in Q \{(x, y), (x, y)\} \in Q$ . По определению  $Q: a + d = b + c$ , но  $a + b = b + a$ , следовательно,  $Q$  рефлексивно.

Аналогично, если  $\{(a, b), (c, d)\} \in Q$ , то и  $\{(c, d), (a, b)\} \in Q$ , так как из  $a + d = b + c$  следует, что  $c + b = d + a$ . Таким образом,  $Q$  симметрично.

Наконец, если  $\{(a, b), (c, d)\} \in Q$ ,  $\{(c, d), (f, g)\} \in Q$ , то  $\{(a, b), (f, g)\} \in Q$ , так как  $a + d = b + c$  и  $c + g = d + f$ . Тогда  $(a + d) + (c + g) = (b + c) + (d + f) \Rightarrow a + d + c + g = b + c + d + f \Rightarrow a + g = b + f$ , т.е.  $Q$  транзитивно.

Разбиением множества  $A$  называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств  $A$  таких, что каждый элемент множества  $A$  принадлежит одному и только одному из этих подмножеств.

**Теорема 1.1.** Фактор-множество  $A/E$  является разбиением множества  $A$ . Наоборот, если  $R = \{A_i\}$  - некоторое разбиение множества  $A$ , то можно задать соответствующее ему отношение эквивалентности  $E$  по правилу  $xEy \Leftrightarrow x, y \in A_i$  для некоторого  $i$ .

Если  $E$  - эквивалентность на конечном множестве  $A$ , то  $E(x_i)$  - классы эквивалентности, а  $A/E = \{E(x_1), E(x_2), \dots, E(x_n)\}$  и  $E(x_i) = \{b'_1, b'_2, \dots, b'_{m_i}\}$   $i = \overline{1, n}$ . Если множество  $A$  пронумеровано в следующем порядке:  $b_1^1, b_2^1, \dots, b_{m_1}^1, b_1^2, b_2^2, \dots, b_{m_2}^2, \dots, b_1^n, b_2^n, \dots, b_{m_n}^n$ , то матрица отношения эквивалентности  $\|E\|$  имеет блочно-диагональный вид  $\|E\| =$

$$\begin{pmatrix} m_1 \{ \begin{matrix} \boxed{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boxed{1} \end{matrix} & \dots & \dots & \dots \\ m_2 \{ & & & \\ \vdots & & & \\ m_n \{ \end{pmatrix}, \text{ где}$$

блоки  $\boxed{1}$  состоят из единиц, а остальные элементы равны нулю. Если же множество  $A$  пронумеровано произвольным образом, то матрица  $\|E\| = (e_{i,j})$  приводится к блочно-диагональному виду перестановкой строк и столбцов.

Отношение  $R \subseteq A^2$  называется предпорядком, если оно рефлексивно и транзитивно. Очевидно, что симметричный предпорядок является отношением эквивалентности.

**Пример 6.** Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Тогда отношение  $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (3,2), (4,1)\}$  - предпорядок.

Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение на множестве  $A$  называется частичным порядком на  $A$ . Частичный порядок обозначается символом  $\leq$ , а обратное ему отношение  $\leq^{-1}$  символом  $\geq$ . Отношение  $<$  называется строгим порядком и определяется таким образом  $x < y \Leftrightarrow x \leq y$  и  $x \neq y$ . Это отношение не является частичным порядком, так как не удовлетворяет условию рефлексивности  $x < x$ .

Если во множестве  $A$  есть элементы  $x$  и  $y$ , о которых нельзя сказать, что  $x \leq y$  или  $y \leq x$ , то такие элементы называются несравнимыми. Частичный порядок называется линейным порядком, если любые два элемента  $x$  и  $y$  из множества  $A$  сравнимы, т.е.  $x \leq y$  или  $y \leq x$ .

Непустое множество  $A$ , на котором зафиксирован некоторый частичный (линейный) порядок, называется частично (линейно) упорядоченным множеством. Элемент  $a \in A$  частично упорядоченного множества  $A$  называется максимальным (минимальным), если для  $\forall x \in A$  из того, что  $a \leq x$  ( $x \leq a$ ), следует  $a = x$ . Элемент  $a \in A$  называется наибольшим (наименьшим), если  $x \leq a$  ( $a \leq x$ ) для всех  $\forall x \in A$ . Наибольший элемент обозначается  $\max A$ , наименьший -  $\min A$ . Этих элементов у множества может и не быть, например, линейно упорядоченное множество рациональных чисел  $(0, 1]$  не имеет наименьшего элемента, наибольший элемент равен единице.

Верхней (нижней) гранью подмножества  $B$  частично упорядоченного множества  $A$  называется всякий элемент  $a \in A$  и такой, что  $b \leq a$  ( $a \leq b$ ) для всех  $b \in B$ . Точной верхней (нижней) гранью подмножества  $B \subseteq A$  называется наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) грань для  $B$ . Точная верхняя и точная нижняя грани множества  $B \subseteq A$  обозначаются через  $\sup B$  (супремум) и  $\inf B$  (инфимум) соответственно.

Линейный порядок  $\leq$  на множестве  $A$  называется полным, если каждое непустое подмножество множества  $A$  имеет наименьший элемент. В этом случае множество  $A$  называется вполне упорядоченным.

Рассмотрим непустое конечное частично упорядоченное множество  $A$ . Говорят, что элемент  $y$  покрывает элемент  $x$ , если  $x \leq y$  и не существует такого элемента  $z$ , что

$x < z < y$ . Если  $x < y$ , то существуют такие элементы  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , что  $x = x_1 < x_2 < \dots < x_n = y$ , где  $x_{i+1}$  покрывает  $x_i$ .

Любое частично упорядоченное множество можно представить в виде схемы, в которой каждый элемент изображается точкой на плоскости, и если  $y$  покрывает элемент  $x$ , то точки  $x$  и  $y$  соединяются отрезком, причем точку, соответствующую  $y$ , располагают ниже  $x$ . Такие схемы называются диаграммами Хассе\*.

**Пример 7.** Пусть  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  – линейно упорядоченное множество с обычным отношением порядка на множестве натуральных чисел, не превосходящих семи. Его диаграмма Хассе изображена на рис. 1.10. Элементы этого отношения упорядочены обычным отношением частичного порядка  $\leq$ .

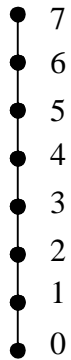


Рис. 1.10

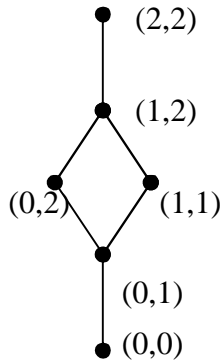


Рис. 1.11

Рассмотрим еще одно отношение:

$P = \{(x, y) / x, y \in Z, x - y < 1, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ . Элементы этого отношения – пары чисел – будут упорядочены отношением включения  $(a, b) \subseteq (c, d) \Leftrightarrow (a \leq c) \wedge (b \leq d)$ . Проверим теперь будет ли это множество частично упорядоченным.  $P = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2)\}$ . Так как  $x - x = 0 < 1$  для всех возможных  $x$ , то отношение  $P$  рефлексивно.  $(1,2) \in P$  и  $(2,1) \notin P$ , следовательно,  $P$  не симметрично. Однако, если  $x - y < 1$  и  $y - x < 1$ , то  $x = y$ , иначе из  $x \neq y$  следует  $|x - y| \geq 1$ . Таким образом, отношение

$P$  антисимметрично. Пусть теперь  $(x, y) \in P$ ,  $(y, z) \in P$  и  $x - y < 1$  и  $y - z < 1$ . Тогда  $x < y$  и  $y < z$  и, следовательно,  $x < z$ , т.е.  $x - z < 1$  и  $(x, z) \in P$ . Отношение  $P$  транзитивно, тогда  $P$  есть частично упорядоченное множество. Его диаграмма Хассе изображена на рис. 1.11.

### 1.3. Практическое занятие № 1. Операции над множествами. Отношения и функции

1.3.1. Доказать равенства:

а)  $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ ; б)  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ ; в)  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ .

1.3.2. Пусть  $A = \{x \in N / 2 < x \leq 6\}$ ,  $B = \{x \in N / 1 < x < 4\}$ ,  $C = \{x \in N / x^2 - 4 = 0\}$ . Из каких элементов состоят множества: а)  $B \cup C$ ; б)  $A \cap B \cap C$ ; в)  $A \cup B \cup C$ ; г)  $B \times C$ ; д)  $C \times B$ ?

1.3.3. Доказать включения: а)  $A \cup (B \setminus C) \supseteq (A \cup B) \setminus C$ ; б)  $(A \cup C) \setminus B \subseteq (A \setminus B) \cup C$ .

1.3.4. Пусть  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq U$ . Найти множество  $X \subseteq U$ , удовлетворяющее уравнению  $\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \bar{A})} = B$ .

1.3.5. Доказать, что а) если  $A \subseteq B \cap C$ , то  $A \subseteq B$  и  $A \subseteq C$ ; б) если  $A \cap B \subseteq C$ , то  $A \subseteq \bar{B} \cup C$ ; в) если  $A \cup B \subseteq C$ , то  $A \subseteq C$  и  $B \subseteq C$ ; г) если  $A \subseteq B \cup C$ , то  $A \cap \bar{B} \subseteq C$ .

1.3.6. Решить систему уравнений  $\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$  где  $B \subseteq A \subseteq C$ .

1.3.7. Доказать, что а) если  $A \subseteq B$ , то  $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ ; б) если  $A \subseteq B$ , то  $A \cup C \subseteq B \cup C$ ; в) если  $A \subseteq B$ , то  $A \cap C \subseteq B \cap C$ .

\* Хельмут Хассе (1898 – 1979) – немецкий математик.

1.3.8. Решить систему уравнений  $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ X \setminus A = C, \end{cases} \quad B \subseteq A, \quad A \cap C = \emptyset.$

1.3.9. Доказать, что система уравнений  $\begin{cases} A \cap X = \emptyset, \\ B \cap \overline{X} = \emptyset \end{cases}$  имеет решение тогда и только то-

гда, когда  $B \subseteq \overline{A}$ , при этом условием решением системы является любое множество  $X$  такое, что  $B \subseteq X \subseteq \overline{A}$ .

1.3.10. Пусть  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $P_1 \subseteq A \times B$ ,  $P_2 \subseteq B^2$ . Изобразить  $P_1$  и  $P_2$  графически, найти  $\|(P_1 \circ P_2)^{-1}\|$ . Проверить с помощью матрицы  $\|P_2\|$ , является ли отношение  $P_2$  рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} P_1 = \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 3), (c, 1), (c, 4)\} \\ P_2 = \{(1, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 4), (1, 4), (2, 4), (4, 2)\} \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} P_1 = \{(b, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 4)\} \\ P_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 4)\} \end{cases} \end{aligned}$$

1.3.11. Найти область определения, область значений отношения  $P$ . Является ли отношение  $P$  рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

а)  $P \subseteq R^2, (x, y) \in P \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ ; б)  $P \subseteq Z^2, (x, y) \in P \Leftrightarrow x - y$  четно.

1.3.12. Найти  $D_P, R_P, P^{-1}, P \circ P, P \circ P^{-1}, P^{-1} \circ P$  для отношений:

а)  $P = \{(x, y) / x, y \in N \text{ и } x \text{ делит } y\}$ ; б)  $P = \{(x, y) / x, y \in R \text{ и } 2x \geq 3y\}$ .

1.3.13. Пусть  $A$  и  $B$  – конечные множества, состоящие из  $m$  и  $n$  элементов соответственно.

а) Сколько существует бинарных отношений между элементами множеств  $A$  и  $B$ ?

б) Сколько имеется функций из  $A$  в  $B$ ?

1.3.14. Построить бинарное отношение:

а) рефлексивное, симметричное, нетранзитивное;

б) рефлексивное, антисимметричное, нетранзитивное;

в) рефлексивное, не симметричное, транзитивное;

г) нерефлексивное, антисимметричное, транзитивное.

1.3.15. На множествах  $N$  и  $N \times N$  определим  $P_m$  и  $S$  следующим образом:

а)  $(a, b) \in P_m \Leftrightarrow (a - b)$  делится на  $m (m > 0)$ ;

б)  $\{(a, b), (c, d)\} \in S \Leftrightarrow [(a \cdot d = b \cdot c) \text{ и } b \neq 0 \text{ и } d \neq 0] \text{ или } (a = c, b = 0, d = 0)$ .

Доказать, что  $P_m$  и  $S$  являются отношениями эквивалентности.

1.3.16. а) доказать, что всякое частично упорядоченное множество содержит не более одного наибольшего (наименьшего) элемента; б) построить пример частично упорядоченного множества, имеющего точно один минимальный элемент, но не имеющего наименьшего элемента.

#### 1.4. Эквивалентные, конечные и бесконечные множества

Множества  $A$  и  $B$  называются эквивалентными, если существует биекция  $f: A \leftrightarrow B$ . Как известно, биекция осуществляет взаимно однозначное соответствие между элементами множеств  $A$  и  $B$ . Эквивалентные или равномошные множества обозначаются  $A \sim B$ . По определению эквивалентность обладает свойствами:

- 1) рефлексивности  $A \sim A$  ( $id_A: A \leftrightarrow A$ );
- 2) симметричности. Если  $A \sim B$ , то  $B \sim A$  (так как если  $f: A \leftrightarrow B$ , то  $f^{-1}: B \leftrightarrow A$ );
- 3) транзитивности. Если  $A \sim B$  и  $B \sim C$ , то  $A \sim C$  (так как если  $f: A \leftrightarrow B$  и  $g: B \leftrightarrow C$ , то  $f \circ g: A \leftrightarrow C$ , см. подразд. 1.2).

При сравнении множеств по числу содержащихся в них элементов возникает понятие мощности множества. Мощностью множества  $A$  называется класс всех множеств, эквивалентных множеству  $A$ . Обозначение мощности  $|A|$ .

Множество  $A$  называется конечным, если существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$ . Тогда  $|A| = n$ . Таким образом, мощностью конечного множества является число его элементов. Если  $A \sim B$ , то множества  $A$  и  $B$  имеют одинаковую мощность.

Множество, не являющееся конечным, называется бесконечным. Если  $A \sim \mathbb{N}$ , то множество  $A$  называется счетным. Счетное множество – это такое множество  $A$ , все элементы которого могут быть занумерованы в бесконечную последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  так, чтобы при этом каждый элемент получил лишь один номер  $n$  и каждое натуральное число  $n$  было бы номером лишь одного элемента множества  $A$ . Таким образом, счетное множество это множество значений какой-нибудь последовательности  $f: \mathbb{N} \rightarrow B$ . Пустое множество по определению относится к счетным. Мощность счетных множеств принято обозначать через  $\aleph_0^*$ . Мощности произвольных множеств называются кардинальными числами. Кардинальные числа конечных множеств называются конечными, для бесконечных множеств – бесконечными.

Рассмотрим некоторые результаты, относящиеся к счетным множествам.

**Теорема 1.2. Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.**

*Доказательство.* Пусть  $A$  – счетное множество,  $B \subseteq A$ . Если  $B = \emptyset$ , то оно счетно по определению. Пусть  $B \neq \emptyset$ . На основании определения счетного множества все элементы множества  $A$  занумерованы, а само множество может быть представлено в виде бесконечной последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ . Если  $B \subseteq A$ , то  $a_{n_1}$  – первый элемент множества  $B$ , являющийся одновременно членом последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ,  $a_{n_2}$  – второй элемент и так далее.

Возможны два случая: после конечного числа шагов все элементы множества  $B$  будут исчерпаны либо получится бесконечная последовательность  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$ . В первом случае множество  $B$  будет конечным, во втором – счетным.

**Теорема 1.3. Объединение счетного числа счетных множеств счетно.**

**Пример 1.** Пусть дан некоторый алфавит  $\mathbf{A}$ , т.е. набор знаков, называемых буквами. Любая конечная последовательность букв называется словом. Пустое слово обозначается символом  $\Lambda$ . Если алфавит конечен, то множество  $B$  всех слов алфавита  $\mathbf{A}$  счетно.

Пусть  $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}, k \geq 1$ . Определим последовательность  $f: \mathbb{N} \rightarrow B$  таким образом:  $f(0) = \Lambda$ , если  $m > 0$ , то  $f(m) = A_{n_m} A_{n_{m-1}} \dots A_{n_2} A_{n_1}$ , где  $A_{n_i}$  –  $i$ -й разряд записи слова в

---

\*  $\aleph$  – первая буква древнееврейского алфавита, называется «алеф», выражение  $\aleph_0$  читается: «алеф-нуль».

$k$ -ичной системе счисления. Очевидно, что произвольное слово  $A_{n_m} A_{n_{m-1}} \dots A_{n_2} A_{n_1}$  является значением функции  $f(m)$  при значении аргумента  $n_1 + n_2 \cdot k^1 + \dots + n_{m-1} \cdot k^{m-1} + n_m \cdot k^m$ , т.е.  $R_f = B$ . Итак,  $f: N \rightarrow B$ ,  $R_f = B$ , следовательно, множество  $B$  счетно, так как  $B$  эквивалентно счетному множеству  $N$ .

**Пример 2.** Множество всех рациональных чисел  $Q$  счетно.

Всякое рациональное число записывается в виде несократимой дроби  $m/n$ , где  $m$  – целое число,  $n$  – положительное целое число. Следовательно, множество  $Q$  эквивалентно множеству таких дробей. Множество дробей вида  $m/n$ , в свою очередь, есть подмножество всех слов в алфавите  $\{0,1,2,\dots,9,-,/\}$ . Таким образом,  $Q$ , являясь подмножеством счетного множества, счетно.

**Теорема 1.4.** **Всякое бесконечное множество  $A$  содержит счетное множество  $B$ , притом такое, что  $A \setminus B$  есть бесконечное множество.**

**Теорема 1.5.** **Всякое бесконечное множество  $A$  содержит подмножество  $B \sim A$ , причем  $A \setminus B$  есть бесконечное множество.**

Так как никакое конечное множество не содержит части, эквивалентной всему множеству, то последняя теорема выражает свойство, присущее лишь бесконечным множествам и только им, и может служить условием, поясняющим определение бесконечных множеств. В случае бесконечных множеств понятие мощности – обобщение понятия количества элементов конечного множества. Однако любые количества либо равны, либо одно из них больше другого, поэтому возникает вопрос о сравнимости мощностей.

Пусть даны два множества  $A$  и  $B$ . При их сравнении возможны следующие случаи:

- существует взаимно-однозначное соответствие между  $A$  и  $B$ ;
- существует взаимно-однозначное соответствие между  $A$  и  $C \subseteq B$  и нет взаимно-однозначного соответствия между  $B$  и  $D \subseteq A$ ;
- существует взаимно-однозначное соответствие между  $A$  и  $C \subseteq B$ , а также взаимно-однозначное соответствие между  $B$  и  $D \subseteq A$ .

Третий случай невозможен, если  $A$  и  $B$  – конечные множества, и возможен для счетных множеств.

**Теорема 1.6 Кантора\* – Бернштейна\*\*.** **Если из двух множеств  $A$  и  $B$  каждое эквивалентно части другого, то эти два множества эквивалентны между собой, т.е. если  $|A| \leq |B|$  и  $|B| \leq |A|$ , то  $|A| = |B|$ .**

**Доказательство.** Пусть  $A \sim B_1 \subset B$  и  $B \sim A_1 \subset A$ . Тогда, если  $A \sim B_1$ , то  $B_1 \sim A_2$  и  $A \supset A_1 \supset A_2$  в силу взаимно-однозначного соответствия при эквивалентности. Одновременно  $B \sim A_1$ . Таким образом, показав, что  $A \sim A_1$ , докажем, что  $A \sim B$ , так как  $A_1 \sim B$ . Итак, рассмотрим какое-нибудь взаимно-однозначное отображение  $f$ . Так как  $A \sim B_1$ ,  $B_1 \sim A_2$ ,  $A \xrightarrow{f} A_2$  и  $A \sim A_2$ . Аналогично  $A_1 \xrightarrow{f} A_3 \subset A_2$  и  $A_1 \sim A_3$ ,  $A_2 \xrightarrow{f} A_4 \subset A_3$  и  $A_2 \sim A_4$  и так далее.

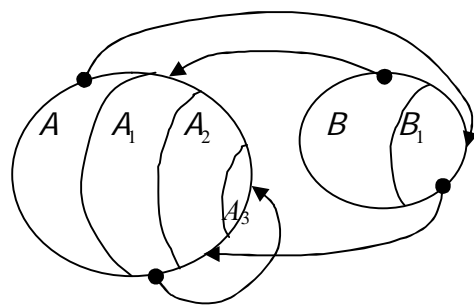


Рис. 1.12

В силу того же взаимно-однозначного соответствия  $A \setminus A_1 \xrightarrow{f} A_2 \setminus A_3$ ,  $A_1 \setminus A_2 \xrightarrow{f} A_3 \setminus A_4$ ,  $A_2 \setminus A_3 \xrightarrow{f} A_4 \setminus A_5$  (рис. 1.12). Но тогда  $(A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \dots \sim (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \dots$

\* Георг Кантор (1845 – 1918) – немецкий математик.

\*\* Сергей Натанович Бернштейн (1880 – 1966) – советский математик.



$\cup (A_6 \setminus A_7) \cup \dots$ . Введем вспомогательное множество  $D = A \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$ , тогда  $A = D \cup (A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup \dots$ ,  $A_1 = D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots$ , так как  $A = (A \cap A_1 \cap A_2 \cap \dots) \cup (A \cap \overline{A_1}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup \dots = ((A \cup A_1) \cap (A \cup A_2) \cap (A \cup A_3) \cap \dots \cap (A_1 \cup \overline{A_1}) \cap (A_2 \cup \overline{A_1}) \cap (A_3 \cup \overline{A_1}) \cap \dots) \cap (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup \dots = (A \cap (A_2 \cup \overline{A_1}) \cap (A_3 \cup \overline{A_1}) \cap \dots) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup \dots = ((A \cup A_1) \cap (A_2 \cup \overline{A_1} \cup A_1) \cap (A_3 \cup \overline{A_1} \cup A_1) \cap \dots \cap (A \cup \overline{A_2}) \cap (A_2 \cup \overline{A_1} \cup \overline{A_2}) \cap (A_3 \cup \overline{A_1} \cup \overline{A_2}) \cap \dots) \cup \dots = (A \cap (A_3 \cup \overline{A_1} \cup \overline{A_2}) \cap \dots) \cup \dots = A$ , аналогично выражается  $A_1$ . Но равенства для  $A$  и  $A_1$  можно переписать следующим образом:  $A = (D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \dots) \cup ((A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots)$ ,  $A_1 = (D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \dots) \cup ((A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \dots)$ . В этих выражениях первые скобки в правых частях одинаковы, а во вторых скобках стоят эквивалентные множества. Устанавливая между элементами множеств  $(A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots$  и  $(A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \dots$  взаимно-однозначное соответствие и заставляя соответствовать самому себе каждый элемент множества  $D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \dots$ , получаем взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств  $A$  и  $A_1$ , т.е.  $A \sim B$  и  $|A| = |B|$ .

Мы уже упоминали о том, что мощности бесконечных множеств должны быть сравнимы между собой, т.е. должны существовать различные бесконечные мощности. Это действительно так, для каждого множества  $A$  существует множество, мощность которого больше мощности множества  $A$ .

**Теорема 1.7. Множество всех подмножеств произвольного непустого множества  $A$  имеет мощность большую, чем мощность множества  $A$ .**

Эта теорема верна и для пустого множества  $A$ . Для  $A = \emptyset$  множество всех подмножеств имеет вид  $\{\emptyset\}$ , т.е. имеет мощность единицу, в то время как  $|\emptyset| = 0$ .

Рассмотрим множество всех отображений множества  $N$  в множество  $M = \{0, 1\}$ . Всякое такое отображение, ставя каждому натуральному числу в соответствие 0 или 1, приводит к построению бесконечной последовательности  $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$ , где  $i_n = 0$  или 1, т.е. бесконечной десятичной дробью  $0, i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$ . Таким образом, множество всех бесконечных двоичных дробей имеет мощность, равную мощности всех подмножеств множества  $N$ . Так как  $|N| = \aleph_0$ , тогда мощность множества всех бесконечных двоичных дробей равна  $2^{\aleph_0}$  (см. задачу 1.3.13 б).

Множество  $A$  называется несчетным, если его мощность больше мощности множества  $N$ . Нам известно, что множество всех рациональных чисел счетно (пример 2), далее мы покажем, что множество всех действительных чисел несчетно. Если  $A \sim 2^{\aleph_0}$ , то множество  $A$  называется континуальным или континуумом\* и обозначается через  $\mathfrak{c}$ . Эта мощность несчетна ( $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ ).

**Теорема 1.8. Множество всех действительных чисел имеет мощность континуума  $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$  и, следовательно, несчетно.**

**Доказательство.** Сначала докажем, что множество действительных чисел  $R$  находится во взаимно-однозначном соответствии с действительными числами интервала  $(0, 1)$ .

Рассмотрим две функции  $f_1(x) = \operatorname{tg} x$  и  $f_2(x) = a + (b - a)x$ . Очевидно, что  $(-\pi/2, \pi/2) \xleftrightarrow{f_1(x)=\operatorname{tg} x} R$ , аналогично,  $(0, 1) \xleftrightarrow{f_2(x)=a+(b-a)x} (-\pi/2, \pi/2)$  при  $a = -\pi/2$ ,  $b = \pi/2$ . Таким образом,  $R \sim (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $(-\pi/2, \pi/2) \sim (0, 1)$ , т.е.  $R \sim (0, 1)$ .

\* Continuum – непрерывное (лат.), поэтому мощность всех действительных чисел  $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$  называется мощностью континуума.

Обратим еще раз внимание на процесс разложения действительных чисел в двоичные дроби. Нами уже показано, что мощность множества всех бесконечных двоичных дробей равна мощности всех подмножеств множества  $N$ , т.е. мощности континуума (см. комментарий к теореме 1.7).

Рассмотрим процесс последовательного разбиения интервала  $(0,1)$  на две равные части  $\left(0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right); \left(0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right)$ . Длины этих отрезков, равные  $\frac{1}{2^n}$ , обозначим через  $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ , где  $i_1, i_2, \dots, i_n$  независимо друг от друга принимают значение 0 или 1, при этом  $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, 0}$  и  $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, 1}$  - левая и правая половина  $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}$ . Возьмем любое  $x \in (0,1)$ . Пусть сначала  $x$  не равен  $\frac{m}{2^n}, m \in N$ , т.е. не совпадает с концом или началом какого-нибудь отрезка. Тогда  $x$  представимо в виде  $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$ , где  $i_k = 0$  или 1, а последовательность  $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$  есть последовательность двоичных знаков числа  $x$ .

Пусть теперь  $x \in (0,1)$  и  $x = \frac{m}{2^n}$ , где дробь  $\frac{m}{2^n}$  несократима, тогда  $x$  - общий конец двух отрезков, следовательно,  $x$  можно представить в виде двух последовательностей двоичных знаков  $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, 0, 1, 1, 1, \dots$  и  $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, 1, 0, 0, 0, \dots$ .

Таким образом, каждое действительное число  $x \in (0,1)$  имеет либо одно двоичное разложение  $0.i_1 i_2 \dots i_n \dots$ , либо два двоичных разложения  $0.i_1 i_2 \dots i_{n-1} 0111 \dots$  и  $0.i_1 i_2 \dots i_{n-1} 1000 \dots$ , причем второй случай наступает тогда и только тогда, когда число  $x$  двоично-рационально.

Так как  $R \sim (0,1)$ , а множество двоично-рациональных чисел счетно (см. пример 2), то достаточно доказать, что множество всех не двоично-рациональных чисел интервала  $(0,1)$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$  (см. задачу 1.5.6). Но это множество находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством непериодических бесконечных двоичных дробей вида  $0.i_1 i_2 \dots i_n \dots$ , которое имеет мощность континуума. Таким образом,  $|R| = \mathfrak{c}$ .

## 1.5. Практическое занятие № 2. Кардинальные числа

### 1.5.1. Доказать, что

- а) всякое подмножество конечного множества конечно;
- б) объединение конечного числа конечных множеств конечно.

1.5.2. Доказать, что множество тогда и только тогда бесконечно, когда оно эквивалентно некоторому собственному подмножеству.

### 1.5.3. Доказать, что

- а) если  $A$  бесконечно и  $B$  - конечное или счетное множество, то  $A \cup B \sim A$ ;
- б) если  $A$  бесконечно и несчетно,  $B$  конечно или счетно, то  $A \setminus B \sim A$ .

### 1.5.4. Доказать, что множество целых чисел счетно.

1.5.5. Доказать, что множество многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами счетно.

### 1.5.6. Доказать, что

- а)  $(0,1) \sim [0,1] \sim (0,1] \sim [0,1)$ ;
- б)  $[a,b] \sim [c,d]$ , где  $a < b, c < d$ .

### 1.5.7. Доказать, что множества точек двух окружностей эквивалентны.



1.5.8. Доказать, что множество всех подмножеств  $P(A)$  множества  $A$  имеет мощность, большую чем  $A$ .

1.5.9. Доказать, что не существует множества, содержащего все множества.

1.5.10. Пусть  $A$  - счетное множество точек на действительной прямой. Можно ли выбрать  $a$  так, чтобы  $\{x + a / x \in A\} \cap A = \emptyset$ ?

## 1.6. Аксиомы теории множеств

Теория множеств является универсальным фундаментом для всего здания математики. Область исследования каждой математической дисциплины можно представить в виде набора множеств заданной структуры. Однако свободное использование понятий интуитивного теоретико-множественного универсума иногда приводит к противоречиям.

Приведем в качестве примера два из них. Парадокс Рассела\* заключается в следующем. Пусть  $R$  есть множество всех множеств, которые не являются элементами самих себя, т.е.  $R = \{x / x \notin x\}$ . Тогда для любого множества  $x$  будет  $x \in R \leftrightarrow x \notin x$ . Если подставить  $R$  вместо  $x$ , получится противоречие: оказывается  $R \in R$  выполняется тогда и только тогда, когда  $R \notin R$ .

Парадокс Кантора также связан с множеством всех множеств. Обозначим его  $A$ , тогда  $P(A)$  - семейство всех подмножеств данного множества  $A$  и  $P(A) \subseteq A$ , т.е.  $|P(A)| \leq |A|$ . Но с другой стороны для любого множества  $A$   $|P(A)| \geq |A|$ . Тогда по теореме Кантора – Бернштейна должно быть  $|P(A)| = |A|$ , что противоречит теореме 1.7.

Во многом эти парадоксы следствие аксиоматической теории множеств. Как известно, в любой аксиоматической теории сначала выбирают основные понятия, которые лишь поясняются, ибо должны быть интуитивно понятны, а затем составляются аксиомы для этих понятий. Основным понятием теории множеств является понятие самого множества. Множество образуется путем отбора определенных объектов и полностью ими определяется, при этом элементами множеств могут быть объекты любой природы. Можно конкретизировать первичное понятие элемента множества и наложить на него некоторые ограничения, которые позволят избежать парадоксов.

Например, парадоксов можно избежать, если ввести совокупности объектов двух сортов, одну из них называть классами, другую – множествами, причем множествами будут только те из классов, которые сами могут быть элементами других классов. Кроме того, следует считать, что множества строятся по шагам. Для каждого текущего шага предшествующие шаги, если они имеются, осуществляются раньше (в логическом, а не во временном смысле) текущего шага. Таким образом, отношение «раньше» упорядочивает шаги. Каждое множество будет построено после некоторого количества шагов и лишь после этого может быть использовано. Когда же множество еще строится путем выбора его элементов, то оно еще не готово как объект и его нельзя использовать в качестве элемента, например, самого себя.

Ограничения подобного рода позволяют избежать парадоксов, однако целесообразнее ограничиться рассмотрением только тех множеств, существование которых может быть доказано на основе некоторой системы аксиом.

Такая система предложена Э. Цермело\*\* в 1908 году, затем она была несколько расширена А. Френкелем\*\*\* и носит название системы аксиом Цермело-Френкеля (ZF).

В систему ZF входят следующие аксиомы.

1) *Аксиома объемности (экстенциональности)*. Всякое множество полностью опре-

\* Бертран Артур Уильям Рассел (1872 – 1970) – английский математик.

\*\* Эрнст Фридрих Фердинанд Цермело (1871 – 1953) – немецкий математик.

\*\*\* Абрахам Адольф Френкель (1891 – 1965) – израильский математик.

деляется своими элементами. Два множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одинаковых элементов:  $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \leftrightarrow A = B$ .

2) *Аксиома объединения (суммы)*. Объединение всех элементов любого множества  $A$  есть множество, т. е. для любого множества  $A$  существует множество  $\cup A$ , состоящее в точности из всех элементов, принадлежащих элементам множества  $A$ . Если  $\exists A$ , то  $\exists \cup A = \{a / a \in b \text{ для некоторого } b \in A\}$ .

3) *Аксиома степени (аксиома множества всех подмножеств)*. Совокупность всех подмножеств произвольного множества  $A$  является множеством. Если  $\exists A$ , то  $\exists P(A) = \{B / B \subseteq A\}$ .

4) *Аксиома подстановки (замены)*. Для каждого множества  $A$  и функции  $f$ , определенной на  $A$ , существует множество, содержащее в точности объекты  $f(x)$  для  $x \in A$   $\exists B = \{y / x \in A \wedge y = f(x)\}$ .

5) *Аксиома регулярности (фундирования)*. Множество  $A$  называется фундированным, если каждое множество, содержащее  $A$ , имеет минимальный элемент. Всякое непустое множество  $A$  имеет элемент  $a \in A$ , для которого  $a \cap A = \emptyset$ , т.е. этот элемент минимален. Действительно, пусть  $a \in A$ ; если  $a$  и  $A$  не пересекаются, то  $a$  и есть искомым минимальный элемент множества  $A$ . Эту аксиому можно сформулировать и таким образом: не существует бесконечно убывающей последовательности множеств  $a_1 \supseteq a_2 \supseteq \dots$

6) *Аксиома бесконечности*. Она гарантирует существование бесконечного множества – множества натуральных чисел  $\exists N = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ , где  $0 = \emptyset$ ,  $n+1 = n \cup \{n\}$ .

7) *Аксиома выделения*. Для любого множества  $A$  и свойства  $F$  такого, что для любого  $a \in A$  утверждение  $F(x)$  либо истинно, либо ложно, существует множество  $B = \{a / a \in A \wedge F(a) = 1\}$ , состоящее в точности из тех элементов множества  $A$ , для которых  $F$  истинно. Название аксиомы объясняется тем, что мы выделяем такие  $a \in A$ , которые удовлетворяют  $F(x)$ , из всех элементов множества  $A$ .

Иногда вместо аксиомы выделения в систему аксиом включают две аксиомы: а) *аксиому существования пустого множества*  $\exists \emptyset$  и б) *аксиому существования пары*: если  $\exists A$  и  $\exists B$ , то  $\exists \{A, B\}$ . Эти две аксиомы можно легко вывести из приведенных семи основных аксиом. Например,  $\emptyset = \{x / x \neq x\}$ . Пусть  $A$  – произвольное множество. Оно существует по аксиоме бесконечности. Тогда  $\forall x(x \neq x \rightarrow x \in A)$  и по аксиоме выделения  $\exists \emptyset = \{x / x \neq x, x \in A\}$ .

Для того чтобы система аксиом теории множеств была полной, т.е. адекватно формализовала все известные приемы математических рассуждений, необходимо к аксиомам системы ZF добавить еще одну из двух конкурирующих друг с другом аксиом: аксиому выбора (AC)\* или аксиому детерминированности (AD)\*. Система аксиом ZF с добавленной аксиомой выбора называется системой аксиом ZFC.

Аксиома выбора предложена Э. Цермело в 1904 году. Пусть для каждого  $x \in X$  задано множество  $A_x \neq \emptyset$ . Выбрав в каждом из множеств  $A_x$  некоторый элемент  $y \in A_x$ , получим функцию  $f$ , определенную на  $X$  и такую, что  $f(x) \in A_x$  для всех  $x \in X$ , т.е.  $f(x) = y$ . Эта функция называется функцией выбора.

**Аксиома выбора.** Для всякого семейства непустых множеств  $A_x$  существует функция выбора, т.е.  $\forall A_x \neq \emptyset \exists f : P(A_x) \rightarrow A_x$ , что  $f(X) \in X$  для  $\forall X \subseteq A_x, X \neq \emptyset$ .

Наиболее «прозрачная» формулировка аксиомы выбора такова: для любого непустого множества  $A_x$  попарно непересекающихся множеств существует некоторое множество, содержащее в качестве своих аргументов ровно по одному элементу из каждого элемента множества  $A_x$ .

---

\* AC – сокращение от axiom of choice, AD – сокращение от axiom of determinateness.

Эта аксиома вызвала много споров и серьезные возражения крупных математиков. Основные возражения касались неконструктивного характера самой аксиомы: о функции выбора, существование которой постулируется аксиомой, в общем случае ничего не известно, и нельзя сказать, чему равно значение  $f(x)$  для конкретных  $x \in X$ . Тем не менее, аксиома выбора играет ключевую роль в системе аксиом. Кроме того, она неявно присутствует в доказательстве многих важных утверждений из математического анализа и теории меры, например, в таком: если  $x$  - предельная точка множества действительных чисел  $X$ , то существует последовательность  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  точек множества  $X$ , сходящихся к  $x$ . Этот пример показывает, что два стандартных определения предельной точки (одно через окрестности, а другое через последовательности) не будут эквивалентными, если нет аксиомы выбора.

Альтернативной аксиоме выбора является предложенная в 1962 году Мычельским и Штейнгаузом\* аксиома детерминированности (AD).

Рассмотрим множество  $A$  бесконечных последовательностей натуральных чисел, определяющих следующую бесконечную игру  $G_A$  для двух игроков. Игрок I пишет натуральное число  $n_0$ , затем игрок II пишет натуральное число  $n_1$  и так далее по очереди. Если получающаяся в результате игры последовательность  $n_0, n_1, \dots, n_k, \dots$  принадлежит множеству  $A$ , то выигрывает игрок I, в противном случае игрок II. Игра  $G_A$  называется детерминированной, если либо игрок I, либо игрок II имеют выигрывающую стратегию.

*Аксиома детерминированности. Всякое множество  $A \subseteq I$  детерминировано.* Здесь  $I$  – бэровское\*\* пространство (множество всех бесконечных последовательностей натуральных чисел).

Аксиома детерминированности создана, чтобы получить более привлекательные следствия, чем те, которые дает аксиома выбора. В целом эти две конкурирующие аксиомы дают противоположные следствия в тех областях, где они применимы.

Аксиома выбора имеет ряд следствий, в определенной степени нежелательны или приводя к «парадоксальным» примерам множеств, противоречащим нашей интуиции, вроде парадокса Банаха\*\*\* – Тарского\*\*\*\*: используя аксиому выбора, можно разбить шар на конечное число частей, которые затем можно переставить так, что получится два шара такого же размера, как и исходный. Однако эта аксиома оказывает четкое организующее влияние на бесконечные мощности, делает более «регулярной» структуру бесконечных множеств, сравнивая их по величине и располагая в иерархию алефов. Ее роль особенно важна при изучении наиболее общих топологических пространств, произвольных множеств и порядковых чисел, где она органически входит в структуру большинства рассуждений и построений.

Аксиома детерминированности (AD) противоречит аксиоме выбора (AC). В свою очередь, AD в отличие от AC не дает ясной картины бесконечных мощностей и почти не используется в топологии. Зато многие следствия AD укладываются в естественный эвристический принцип: если нет «индивидуальных» примеров множеств с каким-либо свойством, то AD влечет отсутствие множеств, обладающих этим свойством. Кроме того, эта аксиома широко применяется в задачах из теории проективных множеств, неразрешимых с помощью AC.

Выбор между аксиомой детерминированности и аксиомой выбора возможен, очевидно, лишь со временем, путем сравнения красоты и богатства теорий, построенных на этих аксиомах.

\* Гуго Дионисий Штейнгауз (1887 - 1972) – австрийско-польский математик.

\*\* Рене Луи Бэр (1874 – 1932) – французский математик.

\*\*\* Стефан Банах (1892 – 1945) – польский математик.

\*\*\*\* Альфред Тарский (1902 – 1983) – польский математик.

## 2. КОМБИНАТОРИКА

### 2.1. Основные определения комбинаторного анализа

Бытует мнение, что комбинаторные задачи элементарны. Конечно, это не так. Число комбинаторных задач и их разнообразие быстро растет. К их решению прямо или косвенно приводят многие практические задачи. При этом оказывается, что, несмотря на заманчивую простоту постановки, комбинаторные задачи в большинстве очень трудны; многие из них не поддаются решению до сих пор. К числу современных задач, решаемых комбинаторными методами, относятся:

- 1) задачи на размещения – задачи о расположении, например, на плоскости предметов, обладающих свойствами дальнего действия;
- 2) задачи о покрытиях и заполнениях – задачи, например, о заполнении заданных пространственных фигур меньшими телами заданных форм и размеров;
- 3) задачи о маршрутах – задачи оптимального плана, например, задачи на отыскание кратчайшего пути и тому подобное;
- 4) комбинаторные задачи теории графов – задачи сетевого планирования, например, задачи транспортных и электрических сетей, задачи об окрашивании графов, задачи о перечислении вершин и тому подобные задачи;
- 5) перечислительные задачи, в которых речь идет о числе предметов, составляемых из данного набора элементов при соблюдении определенных правил.

В задачах комбинаторного анализа исследуются дискретные множества, то есть множества, составленные из отдельных обособленных элементов. В большинстве случаев эти множества конечные, но не исключается и рассмотрение множеств, состоящих из бесконечного числа элементов. Особенность комбинаторных задач заключается в том, что в них преимущественное внимание уделяется двум видам операций: отбору подмножеств и упорядочению элементов. Эти две операции и являются основными комбинаторными.

С операцией отбора множеств связано понятие выборки, с которым можно связать как осуществление операции отбора, так и ее результат – само выбранное подмножество.

Подмножество из  $r$  элементов, выбранное из множества  $S_n$ , состоящего из  $n$  элементов, называется  $(n, r)$ -выборкой, а  $r$ -объемом этой выборки. Если  $(n, r)$ -выборки рассматриваются с учетом порядка элементов в них, то они называются  $(n, r)$ -перестановками. Если же порядок элементов в выбранных подмножествах не важен, то соответствующие выборки называются  $(n, r)$ -сочетаниями.

В выборках могут допускаться и не допускаться повторения элементов. Упорядоченная  $(n, r)$ -выборка, в которой элементы могут повторяться, называется перестановкой с повторениями из  $n$  элементов по  $r$  или  $(n, r)$ -перестановкой с повторениями. Если элементы упорядоченной  $(n, r)$ -выборки попарно различны, то она называется  $(n, r)$ -перестановкой без повторений. Число  $(n, r)$ -перестановок обозначается символом  $P_{n,r}$  или  $P(n, r)$ , а число перестановок с повторениями  $\tilde{P}_{n,r}$  или  $\tilde{P}(n, r)$ .  $P$  – первая буква слова permutation – перестановка. До сих пор во многих учебниках  $(n, r)$ -перестановки называются размещениями и обозначаются символом  $A_n^r$ , собственно же перестановками называются упорядоченные  $(n, n)$ -выборки.  $A$  – первая буква слова arrangement – размещение, приведение в порядок. Неупорядоченная  $(n, r)$ -выборка, в которой элементы могут повторяться, называется сочетанием с повторениями из  $n$  элементов по  $r$ .

Число сочетаний без повторений обозначается символами  $C(n, r)$ ,  $C_n^r$ ,  $\binom{n}{r}$ , с повторениями  $\tilde{C}(n, r)$  или  $\tilde{C}_n^r$ .  $C$  – первая буква слова combination – сочетание. Наиболее употре-

бительным является обозначение  $C_n^r$ . Символ  $\binom{n}{r}$  называется символом Аппеля\*.

**Пример 1.** Пусть  $A = \{a, b, c\}$ ,  $r = 2$ . Указать все упорядоченные и неупорядоченные выборки с повторениями и без повторений из трех элементов по два.

1)  $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$  – девять перестановок с повторениями,  $P_{3,2} = 9$ .

2)  $ab, ac, ba, bc, ca, cb$  – шесть перестановок без повторений,  $P_{3,2} = 6$ .

3)  $ab, ac, bc$  – три сочетания без повторений,  $C_3^2 = 3$ .

4)  $aa, ab, ac, bb, bc, cc$  – шесть сочетаний с повторениями,  $C_3^2 = 6$ .

## 2.2. Правило суммы и правило произведения

Основной комбинаторной задачей является подсчет числа  $(n, r)$ -выборок при различных условиях. Опыт выполнения комбинаторных операций отбора подмножеств привел к следующим двум логическим правилам.

1) **Правило суммы.** Если из множества  $S$  подмножество  $A$  (которое может состоять и из одного элемента) можно выбрать  $n$  способами, а подмножество  $B$ , отличное от  $A$ ,  $m$  способами, и при этом выборы  $A$  и  $B$  таковы, что взаимно исключают друг друга и не могут быть получены одновременно, то выбор из множества  $S$  множества  $A \cup B$  можно получить  $n + m$  способами.

Прокомментируем это правило подробнее. Если  $A \cap B = \emptyset$ , то  $A$  и  $B$  называются непересекающимися множествами, в частности, если  $A_i \cap A_j = \emptyset$  при всех  $i, j = 1, 2, \dots, r$ ,  $i \neq j$ , то  $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r$  называется разбиением множества  $S$  на непересекающиеся подмножества или просто разбиением. Правило суммы можно сформулировать и в терминах теории множеств: если даны  $n$ -многообразие  $A$  и  $m$ -многообразие  $B$ , то при  $A \cap B = \emptyset$  объединение  $A \cup B$  будет  $n + m$ -многообразием. Если дано разбиение  $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r$ , где  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, r$ ,  $i \neq j$ , и если  $A_i$  есть  $n_i$ -многообразие ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), то множество  $S$  есть  $\sum_{i=1}^r n_i$ -многообразие.

2) **Правило произведения.** Если из множества  $S$  подмножество  $A$  может быть выбрано  $n$  способами, а после каждого такого выбора подмножество  $B$  можно выбрать  $m$  способами, то выбор  $A$  и  $B$  в указанном порядке можно осуществить  $n \times m$  способами.

В терминах теории множеств это правило соответствует понятию декартова произведения множеств: если  $A$  является  $n$ -многообразием, а  $B$   $m$ -многообразием, то  $A \times B$  окажется  $n \cdot m$ -многообразием. Пусть  $A_i$  суть  $n_i$ -многообразия,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Построим множества:  $M_1 = A_1$ ,  $M_2 = A_1 \times A_2 = M_1 \times A_2$ ,  $M_3 = M_2 \times A_3, \dots, M_r = M_{r-1} \times A_r$ . Тогда  $M_r$  будет  $(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r)$ -многообразием.

При решении практических задач правило произведения часто употребляется при подсчете числа вариантов при проведении  $(n, r)$ -выборок. В этом случае его формулировка может выглядеть, например, так.

2а) **Правило произведения.** Пусть требуется выполнить одно за другим  $r$  действий. Если первое действие можно выполнить  $n_1$  способами, второе действие –  $n_2$  способами и так до  $r$ -го действия, которое можно выполнить  $n_r$  способами, то все  $r$  действий вместе могут быть выполнены  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$  способами.

\* Поль Эмиль Аппель (1855 - 1930) - французский математик.



**Пример 1.** В классе изучают 10 предметов. В понедельник шесть уроков, причем все уроки различные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

Речь в задаче идет о 6 – перестановках без повторения из 10 элементов. Первый урок можно поставить в расписание десятью способами, второй девятью, третий – восемью и так далее. По правилу произведения число способов составления расписания будет равно  $A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$ .

**Пример 2.** Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на пять?

Вспомним признаки делимости. Число делится на пять, если оно оканчивается на нуль или на пять. В задаче речь идет о  $(n, r)$ -перестановках с повторениями. Первая цифра может быть выбрана из множества 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Нуль не может участвовать в выборке, ибо при его выборе число будет четырехзначным, а не пятизначным. Итого, девять вариантов выбора для первой цифры. Вторая, третья и четвертая цифры могут быть любыми из набора 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Последняя пятая цифра выбирается только из 0 и 5. Таким образом,  $N = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18000$ .

### 2.3. Формулы для расчета перестановок и сочетаний без повторений и с повторениями

Найдем сначала число всех возможных  $(n, r)$ -перестановок, то есть размещений. Задача сводится к последовательному применению правила произведения. В самом деле, в  $n$ -множестве  $S_n$  имеется  $n$  возможностей для выбора первого элемента  $(n, r)$ -перестановки; для выбора второго элемента останется  $n-1$  возможностей, так как речь сейчас идет о перестановках без повторения, то есть один раз выбранный элемент уже не участвует в дальнейшей выборке. Аналогично рассуждая, получаем, что для выбора  $r$ -го элемента останется  $n-r+1$  возможностей. Тогда

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}. \quad (2.3.1)$$

$$\text{Действительно, } \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-r) \cdot (n-r+1) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-r)} = (n-r+1) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Здесь принято  $0! = 1! = 1$ . Итак, доказана следующая теорема

**Теорема 2.1.** Число упорядоченных  $r$ -элементных подмножеств множества  $S_n$ , состоящего из  $n$  элементов равно  $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ .

В частном случае, когда  $n = r$ , получаем  $A_n^n = P_{n,n} = P_n = \frac{n!}{0!} = n!$  Это число способов упорядочения  $n$ -элементного подмножества.

Подсчитаем теперь число всех возможных  $(n, r)$ -перестановок с повторениями. В этом случае после выбора любого элемента  $(n, r)$ -перестановки остаются все те же  $n$  возможностей для выбора следующего элемента. Следовательно, по правилу произведения число  $(n, r)$ -перестановок с повторениями равно:

$$A_n^r = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{r \text{ раз}} = n^r. \quad (2.3.2)$$

Подсчитаем теперь число  $(n, r)$ -сочетаний. Пусть имеется ряд неупорядоченных  $(n, r)$ -выборок без повторения элементов. Обозначим количество элементов множества, состоящего из всех возможных  $(n, r)$ -сочетаний, через  $C_n^r$ . Сравним числа  $C_n^r$  и  $A_n^r$ .  $A_n^r$  – число упорядоченных выборок из  $n$  элементов по  $r$ ;  $C_n^r$  – число неупорядоченных выборок из

$n$  элементов по  $r$ . Очевидно, что каждую неупорядоченную выборку объема  $r$  можно упорядочить  $r!$  различными способами, то есть  $r! C_n^r = A_n^r$ . Тогда

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \quad (2.3.3)$$

Полученный результат формулируется в виде теоремы.

**Теорема 2.2.** Число всех неупорядоченных  $r$  - элементных подмножеств множества  $S_n$ , состоящего из  $n$  элементов, равно  $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ .

Рассмотрим более сложную задачу о числе  $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ -разбиений  $n$ -множества  $S_n$ , то есть разбиений вида  $S_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, k$ , причем  $A_i$  есть  $r_i$ -подмножество множества  $S_n$ . Очевидно,  $\sum_{i=1}^k r_i = n$ . Рассуждаем аналогично тому, как это делалось при нахождении числа  $A_n^r$ . Для выбора  $r_1$ -подмножества  $A_1$  из  $S_n$  имеется  $C_n^{r_1}$  возможностей, после этого  $r_2$ -подмножество  $A_2$  можно выбирать только из оставшихся  $n - r_1$  элементов, так как  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ . Этот выбор можно осуществить  $C_{n-r_1}^{r_2}$  способами и так далее. Применяя правило произведения, получаем, что искомое число  $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ -разбиений  $n$ -множества  $S_n$  равно

$$C_n^{r_1} C_{n-r_1}^{r_2} C_{n-r_1-r_2}^{r_3} \dots C_{n-\sum_{i=1}^{k-1} r_i}^{r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}. \quad (2.3.4)$$

Действительно,  $\frac{n!}{r_1!(n-r_1)!} \cdot \frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-r_1-r_2-\dots-r_{k-1})!}{r_k!(n-r_1-r_2-\dots-r_k)!} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$ .

Итак, число способов, которыми можно представить множество  $S_n$  из  $n$  элементов в виде суммы  $k$  неупорядоченных множеств  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , число элементов которых составляет соответственно  $r_1, r_2, \dots, r_k$ , равно  $\frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$ .

**Пример 1.** Найти число различных слов (бессмысленных), которое можно получить, переставляя буквы слова «математика».

Разные буквы слова математика представляют собой множества  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , на которые можно разбить исходное слово и различные объединения которых будут давать новые бессмысленные слова. Здесь  $k = 6$ ,  $A_1 = \{a, a, a\}$ ,  $A_2 = \{m, m\}$ ,  $A_3 = \{m, m\}$ ,  $A_4 = \{e\}$ ,  $A_5 = \{u\}$ ,  $A_6 = \{k\}$ . Отсюда  $r_1 = 3$ ,  $r_2 = 2$ ,  $r_3 = 2$ ,  $r_4 = r_5 = r_6 = 1$ . Исходное множество  $S_n = \{m, a, t, e, m, a, t, u, k, a\}$   $n = 10$ . Тогда по формуле (2.3.4)

$$N = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 151200.$$

Подсчитаем, наконец, число  $(n, r)$  - сочетаний с повторениями из множества  $S_n$ . Пусть элементы множества  $S_n$  занумерованы числами  $1, 2, \dots, n$ . Так как множество  $S_n$  конечно или счетно, то эта операция всегда возможна. Тогда вместо  $(n, r)$ -сочетаний множества  $S_n$  можно рассматривать  $(n, r)$ -сочетания из эквивалентного ему множества  $S' = \{1, 2, \dots, n\}$  в силу взаимно-однозначного соответствия.

Всякая  $(n, r)$ -выборка из  $S'$  может быть записана в виде  $\{n_1, n_2, \dots, n_r\}$ , где  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$ , причем равенство возможно в силу того, что рассматриваются выборки с

повторениями.  $r$ -выборке  $\{n_1, n_2, \dots, n_r\}$  поставим в соответствие  $r$ -множество  $\{n_1, n_2 + 1, n_3 + 2, \dots, n_r + r - 1\}$ , в котором все элементы, очевидно, различны. Соответствие между  $\{n_1, n_2, \dots, n_r\}$  и  $\{n_1, n_2 + 1, n_3 + 2, \dots, n_r + r - 1\}$  опять взаимно-однозначное, причем  $r$ -множества  $\{n_1, n_2 + 1, n_3 + 2, \dots, n_r + r - 1\}$  являются  $r$ -сочетаниями без повторений из  $n + r - 1$ -множества  $S' \cup \{1, 2, \dots, r - 1\}$ . По формуле (2.3.3) число  $(n + r - 1, r)$ -сочетаний без повторения равно  $C_{n+r-1}^r$ . Тогда

$$\mathcal{C}_n^r = C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \frac{n(n+1) \dots (n+r-1)}{r!}. \quad (2.3.5)$$

## 2.4. Бином Ньютона\* и полиномиальная теорема

а) *Бином Ньютона*. Исторически название «бином Ньютона» несправедливо, ибо формулу  $(a+b)^n$  знали еще среднеазиатские математики, начиная с Омара Хайяма\*\* (около 1100 г.); в Европе до Ньютона ее знал Паскаль\*\*\*. Заслуга Ньютона в том, что он обобщил эту формулу для нецелого показателя  $n$ . Итак,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \dots + C_n^l a^l b^{n-l} + \dots + C_n^n a^n b^0. \quad (2.4.1)$$

Формула (2.4.1) легко доказывается методом математической индукции. Действительно, при  $n=1$ :  $(a+b)^1 = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = a+b$ . Далее, предположив, что формула верна для  $n-1$ , получим

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b) = a \cdot (a+b)^{n-1} + b \cdot (a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{(n-1)-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{(n-1)-k+1}.$$

Заменим индекс суммирования,  $k=j-1$ ,  $j=k+1$ , тогда  $\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{(n-1)-k} = \sum_{j=1}^n C_{n-1}^{j-1} a^j b^{n-j}$ . От-

сюда  $(a+b)^n = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k}$ . Выровняем пределы изменения индексов суммирования в обеих суммах. Для этого введем дополнительно  $C_{n-1}^{-1} = 0$ ,  $C_{n-1}^n = 0$ ,

тогда  $\sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k}$  и  $\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_{n-1}^k a^k b^{n-k}$ . Отсюда

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k) a^k b^{n-k} = \left\langle \begin{aligned} &= \frac{C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k}{(k-1)(n-1-k+1)} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k \end{aligned} \right\rangle = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Для  $n$  нецелого при  $|x| < 1$  формула имеет вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-k+1)}{k!} x^k + \dots$$

\* Исаак Ньютон (1643 - 1727) - английский физик, астроном и математик.

\*\* Гийас ад-Дин Абу-л-Фатх Омар ибн Ибрахим Хайям (около 1048 - после 1122) - иранский математик, астроном и поэт.

\*\*\* Блез Паскаль (1623 - 1662) - французский математик.



Биномиальное разложение служит основой для многих комбинаторных формул, например:

1)  $a = b = 1$ . Получим  $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$ . Это число равно числу всех возможных неупорядоченных подмножеств множества  $S_n$ , состоящего из  $n$  элементов. Действительно, так как  $C_n^k$  число  $k$ -элементных подмножеств ( $(n, k)$ -сочетаний) множества  $S_n$ , то сумма в левой части есть число всех подмножеств;

2)  $a = 1, b = -1$ . Отсюда  $\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k = 0$ . Из этого равенства вытекает, что суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на четных и на нечетных местах, равны между собой и каждая равна  $2^{n-1}$ .

б) *Полиномиальная теорема* – обобщение формулы бинома на случай  $k$  слагаемых:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, \dots, r_k \geq 0, \\ r_1 + r_2 + \dots + r_k = n}} \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_k^{r_k}, \quad (2.4.2)$$

где суммирование проводится по всем решениям уравнения  $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$  в целых неотрицательных числах, т.е. выражение  $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$  равно сумме всех возможных слагаемых вида  $\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_k^{r_k}$ ;  $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ .

**Пример 1.** Вычислить  $(x + y + z)^3$ . Раскрывая скобки последовательно, производя умножение многочлена на многочлен и приводя подобные члены, получаем  $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz$ . Всего в выражении десять членов. Этот же результат легко найти по полиномиальной формуле (2.4.2) при  $n = 3, k = 3$ . Система условий суммирования здесь имеет вид  $\begin{cases} r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, r_3 \geq 0, \\ r_1 + r_2 + r_3 = 3. \end{cases}$  Различных

числовых коэффициентов тоже три:  $\frac{3!}{3! \cdot 0! \cdot 0!} = 1$ ,  $\frac{3!}{2! \cdot 1! \cdot 0!} = 3$ ,  $\frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = 6$ . Для более удобного написания конечного результата лучше составить таблицу всех возможных комбинаций индексов  $r_1, r_2$  и  $r_3$ .

$r_1$	$r_2$	$r_3$
3	0	0
0	3	0
0	0	3
2	1	0
2	0	1
1	2	0
0	2	1
1	0	2
0	1	2
1	1	1

Тогда  $(x + y + z)^3 = 1 \cdot (x^3 + y^3 + z^3) + 3 \cdot (x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2) + 6 \cdot xyz$ , что то же самое, что было получено раньше.

## 2.5. Практическое занятие № 3. Правила суммы и произведения. Перестановки и сочетания. Свойства биномиальных коэффициентов

2.5.1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую из них можно использовать не более одного раза?

2.5.2. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5?

2.5.3. На одной из боковых сторон треугольника взято  $n$  точек, на другой  $m$  – точек. Каждая из вершин при основании треугольника соединена прямыми с точками, взятыми на противоположной стороне. а) Сколько точек пересечения этих прямых образуется внутри треугольника? б) На сколько частей делят треугольник эти прямые?

2.5.4. Сколько есть двузначных чисел, у которых обе цифры четные?

2.5.5. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

2.5.6. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется: а) хотя бы один туз; б) ровно один туз; в) не менее двух тузов; г) ровно два туза?

2.5.7. Дано  $n$  точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

2.5.8. В соревнованиях по гимнастике две команды имели одинаковое число участников. В итоге общая сумма баллов, полученных всеми участниками, равна 156. Сколько было участников, если каждый из них получил оценки только 8 или 9 баллов?

2.5.9. Расстояние от  $A$  до  $B$  - 999 км. Вдоль дороги стоят километровые столбы, на которых расстояния от  $A$  до  $B$  записаны так:

0	999
---	-----

, 

1	998
---	-----

, 

2	997
---	-----

, ..., 

999	0
-----	---

. Сколько среди этих столбов таких, на которых есть только две различные цифры?

2.5.10. В некотором царстве каждые два человека отличаются набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения царства (максимальное количество зубов у человека – 32).

2.5.11. В роте имеется три офицера и сорок солдат. Сколькими способами может быть выделен наряд, состоящий из одного офицера и трех солдат?

2.5.12. На рояле 88 клавиш. Сколько существует последовательностей из шести попарно различных звуков? (В последовательности звуки идут один за другим.) Сколько существует аккордов из шести звуков? (Аккорд получается, если любые 6 клавиш нажаты одновременно).

2.5.13. Сколько членов получится после раскрытия всех скобок в выражении  $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)(f+1)(g+1)$ ?

2.5.14. Сколько существует чисел от 0 до  $10^n$ , в которые не входят две подряд идущие друг за другом одинаковые цифры?

2.5.15. Сколькими способами можно выбрать 6 карт из колоды, содержащей 52 карты, так, чтобы среди них были карты каждой масти?

2.5.16. Какова вероятность, купив один билет, угадать в спортлото (из 49): а)  $k$  номеров ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ); б) хотя бы  $k$  номеров?

2.5.17. Сколькими способами можно посадить за круглый стол  $n$  мужчин и  $n$  женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

2.5.18. Сколькими способами можно разложить в два кармана девять монет различного достоинства?

2.5.19. Сколько различных делителей имеет число а) 2310; б)  $10!$ ?

2.5.20. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дадут не более трех имен, а общее число имен равно 300?

2.5.21. На перекрестке  $A$  автомобилист разбил стекло левой фары (рис. 2.1), и теперь ему надо кратчайшим путем попасть в ремонтную мастерскую  $B$ , не попав при этом в пункт  $M$ . Сколькими способами он может выбрать маршрут?

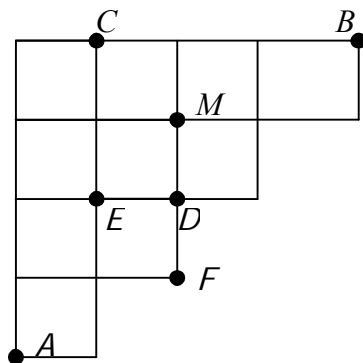


Рис. 2.1

2.5.22. Международная комиссия состоит из 9 человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей для них нужно изготовить и как их разделить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберутся не менее 6 членов комиссии.

2.5.23. Определить сколько рациональных членов содержится в разложении:

а)  $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{20}$ ; б)  $(\sqrt{6} + \sqrt[4]{2})^{100}$ .

2.5.24. Найти коэффициент при  $t^k$  в разложении: а)  $(2 + t^4 + t^7)^{15}$ ,  $k = 17$ ;

б)  $(2 + t - 2t^3)^{20}$ ,  $k = 10$ .

2.5.25. Какое число больше  $99^{50} + 100^{50}$  или  $101^{50}$ ?

2.5.26. Пусть  $n$  и  $m$  - целые положительные числа. Доказать а)  $\sum_{k=1}^n k C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$ ;

б)  $\sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k = n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2}$ ; в)  $\sum_{k=0}^n (2k+1) C_n^k = (n+1) \cdot 2^n$ .

2.5.27. Доказать, что для любого  $m = 0, 1, 2, \dots, n$  справедливо тождество

$$C_n^r = \sum_{k=0}^n C_{n-m}^k \cdot C_m^{r-k}.$$

2.5.28. Доказать, что  $\sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} \cdot 2^{n-2i} = \frac{3^n + 1}{2}$ .

2.5.29. Доказать тождества: а)  $C_{2n-1}^{n-1} = \sum_{i=1}^n C_{2n-i-1}^{n-1}$ ; б)  $C_{2n}^{n-1} = \sum_{i=1}^n C_{2n-i}^n$ .

2.5.30. Доказать, что  $\sum_{i=1}^n \frac{C_{n-1}^{i-1}}{C_{2n-1}^i} = \frac{2}{n+1}$ ,  $n \geq 1$ .

## 2.6. Метод рекуррентных соотношений

В комбинаторном анализе существует целый ряд подходов для изучения комбинаторных объектов и чисел.

**1. Теоретико-множественный подход.** Связан с вычислениями мощностей конечных множеств. Для решения таких вопросов необходима дополнительная информация, т.е. надо заранее знать мощности некоторых подмножеств. К этому пункту относится, например, теорема и формула включений и исключений.

**2. Алгебраический подход.** Основан на использовании вспомогательных, просто получаемых комбинаторных тождеств для нахождения интересующих исследователя комбинаторных чисел. Пример – метод рекуррентных соотношений.

**3. Применение формул обращения.** Формулы обращения связывают между собой различные комбинаторные числа и могут быть получены самыми различными способами.

**4. Метод производящих функций.** Используется для перечисления комбинаторных чисел и установления комбинаторных тождеств.

Рассмотрим один пример алгебраического подхода - метод рекуррентных соотношений. Он состоит в том, что решение комбинаторной задачи с  $n$  предметами выражается через решение аналогичной задачи с меньшим числом предметов с помощью некоторого соотношения, которое называется рекуррентным (recurrence - возвращение). Пользуясь этим соотношением, искомую величину можно вычислить исходя из того, что для небольшого количества предметов (одного, двух) решение задачи обычно очевидно или легко находится.

В качестве примера найдем число сочетаний из  $n$  по  $r$  с повторениями. Соответствующая формула уже известна, она имеет вид  $\mathcal{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$ . Получим ее теперь методом рекуррентных соотношений.

Докажем вначале вспомогательную формулу, выражающую одно из многочисленных свойств биномиальных коэффициентов:

$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + C_{n-3}^{r-1} + \dots + C_{r-1}^{r-1}. \quad (2.6.1)$$

Покажем, что справедливо равенство  $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$ . Здесь  $C_n^r$  - общее число  $(n, r)$ -выборок из множества  $S_n$  с  $n$  элементами,  $C_{n-1}^r$  - число  $(n-1, r)$ -выборок, т.е. число выборов, не содержащих один (например, первый) элемент из множества  $S_n$  с  $n$  элементами (рис. 2.2). В этом случае  $n$ -множество  $S_n$  становится  $(n-1)$ -множеством, так как первый элемент не выбирается, он фиксирован.  $C_{n-1}^{r-1}$  - число  $r$ -выборок из  $n$ -множества, содержащих первый элемент. Этот элемент в  $r$  множестве содержится всякий раз, т.е. фактически выбираются из  $r-1$  элементов, кроме того первый элемент опять фиксирован и в множестве  $S_n$ , как в предыдущем случае, и он не выбирается из  $n$ -множества, которое становится  $(n-1)$ -множеством.

По правилу суммы  $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$ . Применим

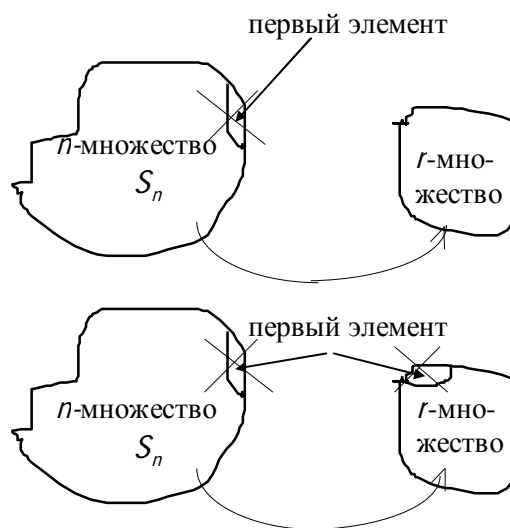


Рис. 2.2

эту формулу последовательно  $n-r$  раз, получим:  $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$ ,  $C_{n-1}^r = C_{n-2}^r + C_{n-2}^{r-1}$ ,  $C_{n-2}^r = C_{n-3}^r + C_{n-3}^{r-1}, \dots$ ,  $C_{r+1}^r = C_r^r + C_r^{r-1}$ . Но  $C_r^r = C_{r-1}^{r-1} = 1$ , тогда окончательно  $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + C_{n-3}^{r-1} + \dots + C_r^{r-1} + C_{r-1}^{r-1}$ .

Вернемся к доказательству исходного соотношения  $\mathcal{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$ . Зададим начальные условия. Для этого рассмотрим число сочетаний с повторениями для малых значений индексов. Очевидно, что  $\mathcal{C}_n^1 = n$  и  $\mathcal{C}_1^r = 1$ . Действительно,  $\mathcal{C}_n^1$  – число сочетаний из  $n$  элементов по одному. Ясно, что из  $n$  элементов можно выбрать ровно  $n$  различных выборов, состоящих из одного элемента.  $\mathcal{C}_1^r$  – число  $r$ -сочетаний из одного элемента. Для любого  $r > 0$  из одного элемента можно получить только одно  $r$ -сочетание, именно выборку, составленную из  $r$  одинаковых элементов. Элементы здесь могут быть одинаковыми, так как рассматриваются выборки с повторениями.

Для вывода общей формулы нам потребуется еще одно вспомогательное соотношение  $\mathcal{C}_n^r = \mathcal{C}_{n-1}^r + \mathcal{C}_n^{r-1}$ . Иллюстрацией дальнейших рассуждений служит тот же рис. 2.2. Зафиксируем в  $S_n$  некоторый элемент. Тогда при выборе каждое  $r$ -сочетание либо содержит этот элемент, либо не содержит его. Если  $r$ -сочетание не содержит этот элемент, то он не должен вообще попасть в  $r$ -сочетание, следовательно, его надо исключить из множества  $S_n$ , т.е. в  $S_n$  остаются для выбора  $n-1$  элементов. Отсюда число  $r$ -сочетаний с повторениями из  $n-1$  элементов равно  $\mathcal{C}_{n-1}^r$ . Если  $r$ -сочетание уже содержит этот элемент, тогда остальные  $r-1$  элементов можно выбрать из тех же  $n$  элементов множества  $S_n$ , так как допускаются любые повторения. Число способов такого выбора равно  $\mathcal{C}_n^{r-1}$ .

По правилу суммы  $\mathcal{C}_n^r = \mathcal{C}_{n-1}^r + \mathcal{C}_n^{r-1}$ . Применим теперь эту формулу для доказываемого исходного соотношения  $\mathcal{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$ . Именно  $\mathcal{C}_n^2 = \mathcal{C}_{n-1}^2 + \mathcal{C}_n^1$ ,  $\mathcal{C}_{n-1}^2 = \mathcal{C}_{n-2}^2 + \mathcal{C}_{n-1}^1$ ,  $\mathcal{C}_{n-2}^2 = \mathcal{C}_{n-3}^2 + \mathcal{C}_{n-2}^1, \dots$ ,  $\mathcal{C}_2^2 = \mathcal{C}_1^2 + \mathcal{C}_2^1$ . Отсюда  $\mathcal{C}_n^2 = \mathcal{C}_n^1 + \mathcal{C}_{n-1}^1 + \mathcal{C}_{n-2}^1 + \dots + \mathcal{C}_2^1 + \mathcal{C}_1^2 =$   
 $= \underbrace{n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1}_{\text{арифметическая прогрессия, } d=1} = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2$ . Аналогично  $\mathcal{C}_n^3 = \mathcal{C}_{n-1}^3 + \mathcal{C}_n^2$ ,  $\mathcal{C}_{n-1}^3 = \mathcal{C}_{n-2}^3 + \mathcal{C}_{n-1}^2$ ,

$\mathcal{C}_{n-2}^3 = \mathcal{C}_{n-3}^3 + \mathcal{C}_{n-2}^2, \dots$ ,  $\mathcal{C}_3^3 = \mathcal{C}_2^3 + \mathcal{C}_3^2$ ,  $\mathcal{C}_2^3 = \mathcal{C}_1^3 + \mathcal{C}_2^2$ . Отсюда можно получить формулу для  $\mathcal{C}_n^3$ . Выполним аналогичные подстановки как в предыдущем случае:  $\mathcal{C}_n^3 = \mathcal{C}_n^2 + \mathcal{C}_{n-1}^2 + \mathcal{C}_{n-2}^2 + \dots + \mathcal{C}_2^2 + \mathcal{C}_1^3$ . В данном случае лучше не суммировать отрезок числового ряда, а воспользоваться только что полученной формулой для предыдущего индекса  $\mathcal{C}_n^2 = C_{n+1}^2$ . Тогда  $\mathcal{C}_n^3 = C_{n+1}^2 + C_n^2 + C_{n-1}^2 + \dots + C_3^2 + C_2^2$ , так как  $\mathcal{C}_1^3 = 1 = C_2^2$ . Но  $C_{n+1}^2 + C_n^2 + \dots + C_3^2 + C_2^2 = C_{n+2}^3$  по выведенной формуле (2.6.1). Таким образом, получена очередная формула  $\mathcal{C}_n^3 = C_{n+2}^3$ . Формулы для последующих индексов находятся совершенно аналогично. Видно, что доказательства с помощью рекуррентных соотношений весьма громоздкое и утомительное занятие.

## 2.7. Метод производящих функций

Этот метод не является элементарным, так как при его использовании приходится иметь дело с некоторыми понятиями теории функциональных рядов. Метод производящих функций – один из самых развитых теоретических методов комбинаторного анализа и один из самых сильных в приложениях. Его главные идеи были высказаны в конце XVIII в. в ра-

ботах Лапласа\* по теории вероятностей. Для случаев с конечным числом исходов аппарат теории вероятностей чисто комбинаторный.

Рассмотрим произведение конечного числа линейных биномов  $\prod_{k=1}^n (1 + x_k t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ .

В правой части равенства коэффициенты имеют вид  $a_k = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k=1, \\ i_1 < i_2 < \dots < i_k}} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \dots \cdot x_{i_k}$ . Это легко про-

верить, например, для случая малых  $n$ . Пусть  $n = 2$ . Тогда  $(1 + x_1 t)(1 + x_2 t) = 1 + \underbrace{x_1 t}_{i_1=1, i_2 \text{ нет}} + \underbrace{x_2 t}_{i_2=1, i_1 \text{ нет, так как нет } i_1 < 1} + \underbrace{x_1 x_2 t^2}_{i_1=1, i_2=2, i_1 < i_2}$ . Для  $n > 2$  проверка аналогична. В частном

случае, когда  $x_k = 1$ ,  $k = \overline{1, n}$ , в качестве коэффициентов  $a_k$  получим числа  $k$ -сочетаний, т.е.

$$(1 + t)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k. \quad (2.7.1)$$

Здесь функция  $f(t) = (1 + t)^n$  и числа  $C_n^k$  связаны взаимно-однозначно. Функцию  $f(t) = (1 + t)^n$  есть производящая функция последовательности  $C_n^k$ . Производящей функцией

последовательности  $\{a_k\}$  называется сумма степенного ряда  $f_a(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ .

Оперировать с такой функцией гораздо удобнее и проще, особенно когда ее можно представить в простой аналитической форме. В то же время эти операции доставляют (производят) необходимую информацию о последовательности  $t$ -сочетаний. Идея применения метода производящих функций такова: необходимо вычислить все члены некоторой последовательности  $\{a_k\}$ . С помощью рекуррентного соотношения для  $a_k$  или непосредственно из

некоторых комбинаторных соображений вычисляют производящую функцию  $f_a(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ .

Раскладывая затем  $f_a(t)$  в ряд и находя коэффициенты при  $t^k$ , тем самым находят  $a_k$ .

**Пример 1.** Из формулы бинома Ньютона  $f_a(t) = (1 + t)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k$ . Таким образом, последовательность биномиальных коэффициентов имеет производящую функцию  $(1 + t)^n$ , т.е.

$$\{C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n\} \rightarrow (1 + t)^n. \quad (2.7.2)$$

**Пример 2.** Пусть  $a_k = a^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Тогда  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a^k t^k = 1 + at + a^2 t^2 + \dots + a^k t^k + \dots = 1 + (at) + (at)^2 + \dots + (at)^k + \dots$ . Это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем  $q = at$ . Если  $|q| = |at| < 1$ , то ряд сходится и его сумма  $S = f_a(t) = 1/(1 - at)$ . Итак,

$$\{1, a, a^2, a^3, \dots, a^k, \dots\} \rightarrow 1/(1 - at) \text{ при } |at| < 1. \quad (2.7.3)$$

**Пример 3.** Рассмотрим формулу бинома Ньютона при действительном показателе  $\alpha \in R$   $(1 + t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} t^k + \dots$ . Пусть  $t = -t$  и  $\alpha = -1$ ,

$$\text{тогда } \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^k + \dots, \text{ т.е. } \{1, 1, 1, \dots, 1, \dots\} \rightarrow \frac{1}{1-t}. \quad (2.7.4)$$

\* Пьер Симон Лаплас (1749 - 1827) - французский математик, механик и астроном.

Если  $t = -t$  и  $\alpha = -n$ , то  $\frac{1}{(1-t)^n} = 1 + nt + \frac{n(n+1)}{2!}t^2 + \dots + \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}t^k + \dots$ . Но  $n = C_n^1$ ,  $\frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2$ ,  $\frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} = C_{n+k-1}^k$  и так далее. Тогда  $\frac{1}{(1-t)^n} = 1 + C_n^1 t + C_{n+1}^2 t^2 + C_{n+2}^3 t^3 + \dots + C_{n+k-1}^k t^k + \dots$ , т.е.

$$\{C_n^1, C_{n+1}^2, C_{n+2}^3, \dots, C_{n+k-1}^k, \dots\} \rightarrow \frac{1}{(1-t)^n}. \quad (2.7.5)$$

**Пример 4.** Пусть  $a_k = \begin{cases} 0, & 0 \leq k < r, \\ C_k^r, & k \geq r. \end{cases}$  Тогда  $f_a(t) = \frac{t^r}{(1-t)^{r+1}}$ . Действительно,

$$\begin{aligned} f_a(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=r}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=r}^{\infty} C_k^r t^k = \left\langle \begin{matrix} k = r+i, \\ k = r, i=0. \end{matrix} \right\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} C_{r+i}^r t^{r+i} = t^r \sum_{i=0}^{\infty} C_{r+i}^r t^i = \left\langle \begin{matrix} C_k^r = C_k^{k-r}, \\ C_{r+i}^r = C_{r+i}^i. \end{matrix} \right\rangle = \\ &= t^r \sum_{i=0}^{\infty} C_{r+i}^i t^i = \left\langle \begin{matrix} \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k t^k = \frac{1}{(1-t)^n}, \\ \sum_{i=0}^{\infty} C_{r+i}^i t^i = \frac{1}{(1-t)^{r+1}}. \end{matrix} \right\rangle = \frac{t^r}{(1-t)^{r+1}}. \end{aligned}$$

Итак, для такой числовой последовательности получена производящая функция.

В комбинаторном анализе чаще всего используют три вида производящих функций: 1) обычные степенные; 2) экспоненциальные; 3) функции Дирихле\*. Обычные производящие функции (см. примеры 1-3), представляемые в виде  $f_a(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ , соответствуют семействам последовательностей, элементы которых являются числами неупорядоченных  $(n, k)$ -выборок или функциями от них.

Введем несколько операций в классе производящих функций:  $\{f_a(t)\}$  – класс обычных производящих функций  $f_a(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ .

Суммой последовательностей  $\{a\} = \{a_0, a_1, \dots\}$  и  $\{b\} = \{b_0, b_1, \dots\}$  называется последовательность  $\{c\} = \{a+b\} = \{a_0+b_0, a_1+b_1, \dots\} = \{c_0, c_1, \dots\}$ , а суммой производящих функций  $f_a(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$  и  $f_b(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^k$  производящую функцию

$$f_c(t) = f_a(t) + f_b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k. \quad (2.7.6)$$

Произведением (или сверткой) последовательностей  $\{a\}$  и  $\{b\}$  называется последовательность  $\{d\} = \{a \times b\} = \{d_0, d_1, \dots\}$ , у которой

$$d_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + \dots + a_r b_0, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.7.7)$$

а произведением (сверткой) производящих функций  $f_a(t)$  и  $f_b(t)$  – производящую функцию

$$f_d(t) = f_a(t) \times f_b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k. \quad (2.7.8)$$

Формулы (2.7.7) нуждаются в пояснении. Эти коэффициенты получаются при перемножении рядов следующим образом:

\* Петер Густав Дирихле (1805 – 1859) – немецкий математик.



$$\left\{ \begin{array}{l} r=0, d_0 = a_0 b_0, \\ r=1, d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ r=2, d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ ..... \\ r=k, d_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_{k-1} b_1 + a_k b_0, \\ ..... \end{array} \right. \quad (2.7.9)$$

Нуль в классе производящих функций  $\{f_a(t)\}$  это  $f_0(t)=0$ ; ей соответствует нулевая последовательность  $\{0, 0, 0, ..., 0, ...\}$ .

Единица в классе производящих функций  $\{f_a(t)\}$  это  $f_e(t)=1$ ; ей соответствует единичная последовательность  $\{1, 0, 0, \dots, 0, \dots\} = e$ .

Обратный относительно сложения (противоположный) элемент в классе производящих функций есть следующая функция  $-f_a(t) = f_{-a}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-a_k) t^k$ , которой соответствует последовательность  $\{-a_0, -a_1, \dots, -a_k, \dots\}$ .

Обратный элемент относительно умножения в классе производящих функций есть функция  $f_a^{-1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k t^k$ , ей соответствует последовательность  $\{\tilde{a}\} = \{\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots\}$  причем  $a \cdot \tilde{a} = e$ ,  $a \neq 0$ . Так как  $a \cdot \tilde{a} = e$ ,  $a \neq 0$ , то, учитывая формулы (2.7.9), получаем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \tilde{a}_0 = 1, \\ a_1 \tilde{a}_0 + a_0 \tilde{a}_1 = 0, \\ a_2 \tilde{a}_0 + a_1 \tilde{a}_1 + a_0 \tilde{a}_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_k \tilde{a}_0 + a_{k-1} \tilde{a}_1 + a_{k-2} \tilde{a}_2 + \dots + a_0 \tilde{a}_k = 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Неизвестные здесь  $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_k, \dots$ , количество неизвестных равно количеству уравнений.

Умножение производящей функции на действительное число  $\alpha$  определяется по формуле

$$\alpha f_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha \cdot a_k) t^k. \quad (2.7.10)$$

$$\alpha f_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha \cdot a_k) t^k. \quad (2.7.10)$$

## 2.8. Производящие функции для некоторых схем выбора

**Производящая функция для  $(n, r)$ -сочетаний с ограниченным числом повторений.** В этом случае для получения производящей функции нельзя воспользоваться произведением биномов вида  $1 + x_k t$ , то есть формулой  $\prod_{k=1}^n (1 + x_k t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ , поскольку всякий такой бином отражает лишь две возможности: элемент  $x_k$  множества либо не появляется в  $r$ -сочетании, либо появляется ровно один раз.

Пусть элемент  $x_k$  появляется в  $l$ -сочетаниях с повторениями  $0, 1, 2, \dots, j$  раз, тогда точно  $i$  появлениям элемента  $x_k$  будет соответствовать одночлен  $x_k^i t^i$ , а по правилу суммы появлению элемента  $x_k$  либо 0, либо 1, ..., либо  $j$  раз должен соответствовать многочлен  $1 + x_k t + x_k^2 t^2 + x_k^3 t^3 + \dots + x_k^j t^j$ . Тогда производящая функция будет иметь вид



$$f(t) = \prod_{k=1}^n (1 + x_k t + x_k^2 t^2 + \dots + x_k^j t^j). \quad (2.8.1)$$

Если нужно найти лишь число  $a_r$  соответствующих  $(n, r)$ -сочетаний, то необходимо положить  $x_1 = x_2 = \dots = x_j = 1$  и

$$f(t) = (1 + t + t^2 + \dots + t^j)^n = \sum_{k=1}^j a_k t^k. \quad (2.8.2)$$

Коэффициенты  $a_k$  будут здесь равны числу сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  с  $j$  повторениями.

**Пример 1.** Рассмотрим сочетания из трех предметов 1, 2, 3; причем 1 и 2 могут встречаться не более двух раз, а 3 - не более одного раза.

Составим производящую функцию по формуле (2.8.1):

$$f(t) = (1 + x_1 t + x_1^2 t^2)(1 + x_2 t + x_2^2 t^2)(1 + x_3 t) = 1 + (x_1 + x_2 + x_3)t + (x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_2^2)t^2 + (x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3)t^3 + (x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3)t^4 + x_1^2 x_2^2 x_3 t^5.$$

Если положить  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ , то получим  $f(t) = 1 + 3t + 5t^2 + 5t^3 + 3t^4 + t^5$ . Здесь коэффициент  $a_1$  равен числу сочетаний из трех по одному элементу не более чем с двумя повторениями,  $a_2$  - из трех элементов по два не более чем с двумя повторениями,  $a_3$  - из трех по три элемента с ограничениями, что первый и второй элемент могут встречаться не более двух раз, а третий не более одного раза. Если же не приравнять  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ , то, например, коэффициент при  $t^3$ , равный  $x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$ , показывает «качественный» состав  $t$ -сочетаний с указанными повторениями: 112, 113, 122, 123, 223. Аналогично коэффициент при  $t^5$  - число  $t$ -сочетаний из трех элементов по пять, но с повторениями, тогда такое возможно:  $a_5 = x_1^2 x_2^2 x_3 : 11223$ .

**Производящая функция для  $(n, r)$ -сочетаний с неограниченным числом повторений.** Найдем производящую функцию для  $(n, r)$ -сочетаний с условием, что хотя бы один элемент каждого вида появится в выборке. Очевидно, что  $f_a(t)$  в этом случае будет иметь

$$\text{вид } f_a(t) = (t + t^2 + \dots + t^k + \dots)^n = [t(1 + t + \dots + t^{k-1} + \dots)]^n = t^n (1 - t)^{-n} = t^n \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k t^k. \quad (2.8.3)$$

Упростим полученную формулу, сделав в ней замену индекса суммирования  $n + k = r$ , получим

$$f_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k t^{n+k} = \sum_{r=n}^{\infty} C_{r-1}^{r-n} t^r = \left\langle \begin{matrix} \text{так как} \\ C_n^r = C_n^{n-r} \end{matrix} \right\rangle = \sum_{r=n}^{\infty} C_{r-1}^{(r-1)-(r-n)} t^r = \sum_{r=n}^{\infty} C_{r-1}^{n-1} t^r = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} t^k. \text{ Здесь}$$

$\sum_{k=0}^{n-1} C_{k-1}^{n-1} t^k = 0$ . Следовательно, число искомых  $r$ -сочетаний равно нулю при  $r < n$  и  $C_{r-1}^{n-1}$  при  $r \geq n$ . Подобным же образом в производящей функции можно учесть и другие требования, налагаемые на  $(n, r)$ -выборки.

## 2.9. Применение производящих функций для получения комбинаторных чисел

Применим теорию производящих функций и получим явные выражения чисел Фибоначчи\*. Числа Фибоначчи  $B_n$  равны числу способов расположения  $n$  знаков, из которых каждый нуль или единица, в последовательность, не содержащую двух нулей подряд. Эта последовательность задается рекуррентной формулой

\* Леонардо Фибоначчи Пизанский (1180 – 1240) – итальянский математик.

$$\begin{cases} B_0 = 1, B_1 = 2, \\ B_n = B_{n-1} + B_{n-2}, n \geq 2. \end{cases} \quad (2.9.1)$$

Рассмотрим производящую функцию последовательности чисел Фибоначчи  $f_B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k \rightarrow \{B_0, B_1, \dots, B_k, \dots\}$ . Умножим рекуррентное уравнение в формуле (2.9.1) на  $t^k$  и просуммируем полученное выражение от двух до бесконечности. Два числа  $B_0$  и  $B_1$  известны из начальных данных, поэтому необходимо отбросить индексы  $k=0$  и  $k=1$ . В результате получим уравнение

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} B_k t^k &= \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-1} t^k + \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-2} t^k \text{ или } \sum_{k=2}^{\infty} B_k t^k = t \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-1} t^{k-1} + t^2 \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-2} t^{k-2}. \text{ Так как} \\ f_B(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \dots + B_k t^k + \dots, \text{ то } \sum_{k=2}^{\infty} B_k t^k = f_B(t) - B_0 - B_1 t = f_B(t) - 1 - 2t. \\ \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-1} t^{k-1} &= \left\langle \begin{matrix} k-1 = n, \\ k = 2, n = 1. \end{matrix} \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} B_n t^n = f_B(t) - B_0 = f_B(t) - 1. \quad \text{Аналогично} \quad \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-2} t^{k-2} = \\ &= \left\langle \begin{matrix} k-2 = n, \\ k = 2, n = 0 \end{matrix} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n = f_B(t). \quad \text{Тогда} \quad f_B(t) - 1 - 2t = t(f_B(t) - 1) + t^2 f_B(t) \quad \text{или} \\ f_B(t)(1 - t - t^2) &= 1 + 2t - t = 1 + t. \text{ Окончательно производящая функция последовательности} \\ \text{чисел Фибоначчи равна} \quad f_B(t) &= \frac{1+t}{1-t-t^2}. \end{aligned} \quad (2.9.2)$$

Так как обычный степенной ряд, представляющий производящую функцию, есть ряд Тейлора\* в окрестности точки  $t=0$ , то приведенное выражение можно разложить по общему правилу в ряд Тейлора и получить формулу общего члена  $B_k$ . При этом выгоднее использовать замены переменных и уже существующие разложения функций в степенные ряды. Поступим именно таким образом. Разложим дробь  $\frac{1}{1-t-t^2}$  на простые слагаемые, для чего

$$\begin{aligned} \text{найдем сначала корни знаменателя: } 1-t-t^2 &= 0, \quad t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ t_1 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{Тогда} \quad \frac{1}{1-t-t^2} = -\frac{1}{(t-t_1)(t-t_2)} = \left( -\frac{1}{t-t_1} + \frac{1}{t-t_2} \right) \cdot \frac{1}{t_1-t_2} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{t_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{t_1}} - \frac{1}{t_2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{t_2}} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } \frac{1}{1-\frac{t}{t_1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{t}{t_1} \right)^k, \quad \left| \frac{t}{t_1} \right| < 1; \quad \frac{1}{1-\frac{t}{t_2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{t}{t_2} \right)^k, \quad \left| \frac{t}{t_2} \right| < 1. \text{ Тогда } \frac{1}{t_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{t_1}} = \frac{1}{t_1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{t}{t_1} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{t_1^{k+1}} \right) t^k.$$

$$\text{Точно таким же образом } \frac{1}{t_2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{t_2}} = \frac{1}{t_2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{t}{t_2} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{t_2^{k+1}} \right) t^k. \text{ Теперь можно записать раз-}$$

\* Брук Тейлор (1685 – 1731) – английский математик.

ложение исходной дроби  $\frac{1}{1-t-t^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{t_2^{k+1}} \right) t^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{t_1^{k+1}} \right) t^k \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{t_2^{k+1}} - \frac{1}{t_1^{k+1}} \right) t^k$ . Умножим полученное выражение на  $1+t$ , тогда

$$\frac{1+t}{1-t-t^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{t_2^{k+1}} - \frac{1}{t_1^{k+1}} \right) t^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{t_2^{k+1}} - \frac{1}{t_1^{k+1}} \right) t^{k+1} \right].$$

Поэтому коэффициент при  $t^k$  в разложении будет иметь вид  $B_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1}{t_2^{k+1}} - \frac{1}{t_1^{k+1}} \right) + \left( \frac{1}{t_2^k} - \frac{1}{t_1^k} \right) \right]$ . Упростим эту формулу, подставив числовые значения  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_2^{k+1}} - \frac{1}{t_1^{k+1}} &= \frac{t_1^{k+1} - t_2^{k+1}}{(t_1 t_2)^{k+1}} = \frac{(-1-\sqrt{5})^{k+1} - (-1+\sqrt{5})^{k+1}}{2^{k+1} (-1)^{k+1}} = \frac{(1+\sqrt{5})^{k+1} - (1-\sqrt{5})^{k+1}}{2^{k+1}}, \text{ аналогично} \\ \frac{1}{t_2^k} - \frac{1}{t_1^k} &= \frac{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}{2^k}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[ \frac{(1+\sqrt{5})^{k+1} - (1-\sqrt{5})^{k+1}}{2^{k+1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(1+\sqrt{5})^k - 2(1-\sqrt{5})^k}{2^{k+1}} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[ \frac{(1+\sqrt{5})^k (1+\sqrt{5}+2) - (1-\sqrt{5})^k (1-\sqrt{5}+2)}{2^{k+1}} \right] = \\ &= \left\langle \frac{(1-\sqrt{5})^k}{6-2\sqrt{5}} = 1-2\sqrt{5}+5 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{(1+\sqrt{5})^k (1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})^k (1-\sqrt{5})}{2^{k+1+1}} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right]. \end{aligned}$$

Итак, окончательно  $B_0 = 1, B_1 = 2, B_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right]$ . (2.9.3)

## 2.10. Однородные и неоднородные линейные рекуррентные соотношения

Рассмотрим последовательность  $\{a_n\}, n=0,1,2,\dots$ . Последовательность  $\{a_n\}$  называется возвратной, если для некоторого  $k$  и всех  $n$  выполняется соотношение вида

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + p_2 a_{n+k-2} + \dots + p_k a_n = 0, \quad (2.10.1)$$

где постоянные коэффициенты  $p_i, i=1,2,\dots,k$  не зависят от  $n$ . Многочлен

$$P(t) = t^k + p_1 t^{k-1} + \dots + p_k \quad (2.10.2)$$

называется характеристическим многочленом для возвратной последовательности  $\{a_n\}$ .

Перепишем (2.10.1) следующим образом:

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n, \quad c_i = -p_i, \quad i=\overline{1,k}. \quad (2.10.3)$$

Выражение (2.10.3) позволяет вычислять очередной член последовательности по предыдущим  $k$  членам. Если задать начальные значения  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ , то можно определить все другие члены последовательности. Соотношение (2.10.3) часто называют однородным линейным рекуррентным соотношением.

Найдем формулу общего члена  $a_n$  из (2.10.3). Для этого достаточно найти производящую функцию последовательности  $\{a_n\}$ -функцию  $f_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ . Введем вспомогатель-

ный многочлен  $L(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_k t^k$  и рассмотрим произведение  $f_a(t) \cdot L(t) = C(t)$ . Так как  $f_a(t) \cdot L(t) = (a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k + \dots + a_n t^n + \dots)(1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_k t^k) = a_0 + (a_1 - c_1 a_0)t + (a_2 - c_1 a_1 - c_2 a_0)t^2 + \dots + (a_k - c_1 a_{k-1} - c_2 a_{k-2} - \dots - c_k a_0)t^k + \dots + (a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \dots - c_k a_{n-k})t^n + \dots$ , то видно, что степень  $C(t)$  не превышает  $k-1$ , так как коэффициенты при  $t^{n+k}$ ,  $k=0,1,\dots$ , будут равны нулю в силу уравнения (2.10.3).

Пусть характеристическое уравнение (2.10.2) имеет простые (может быть кратные) корни, т.е. допускает разложение вида  $P(t) = (t - t_1)^{\alpha_1} (t - t_2)^{\alpha_2} \dots (t - t_k)^{\alpha_k}$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = k$ .

Тогда  $P\left(\frac{1}{t}\right) \cdot t^k = \left[\left(\frac{1}{t}\right)^k + p_1 \left(\frac{1}{t}\right)^{k-1} + \dots + p_{k-1} \frac{1}{t} + p_k\right] t^k = 1 - c_1 t - \dots - c_k t^k = L(t)$ . Отсюда

$L(t) = t^k \left(\frac{1}{t} - t_1\right)^{\alpha_1} \left(\frac{1}{t} - t_2\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{1}{t} - t_k\right)^{\alpha_k} = (1 - t_1 t)^{\alpha_1} (1 - t_2 t)^{\alpha_2} \dots (1 - t_k t)^{\alpha_k}$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = k$  и характеристическую функцию можно представить в виде

$$f_a(t) = C(t)/L(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\alpha_i} \frac{\beta_{i,n}}{(1 - t_i t)^n}. \quad (2.10.4)$$

Так как по формуле (2.7.5)  $\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k t^k$ , то  $\frac{1}{(1-t_i t)^n} = \beta \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k t_i^k t^k$ , и, следовательно,

$$f_a(t) = C(t)/L(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\alpha_i} \beta_{i,n} \sum_{j=0}^{\infty} C_{n+j-1}^j t_i^j t^j. \quad (2.10.5)$$

Формула (2.10.5) дает разложение производящей функции последовательности  $\{a_n\}$ . Для нахождения формулы общего члена  $a_n$  необходимо найти коэффициент при  $t^n$  в разложении (2.10.5).

**Пример 1.** Найти общий член последовательности  $\{a_n\}$ , удовлетворяющей рекуррентному соотношению  $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ ,  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 1$ .

Перепишем исходное рекуррентное соотношение в виде (2.10.3)  $a_{n+1} = 4a_{n+1} - 3a_n$ ,  $n=0,1,2,\dots$ . Характеристический многочлен  $L(t)$  имеет вид  $L(t) = 1 - 4t + 3t^2$ . Найдем  $C(t)$ .  $C(t) = f_a(t) \cdot L(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots - 4a_0 t - 4a_1 t^2 - \dots - 4a_n t^{n+1} - \dots + 3a_0 t^2 + 3a_1 t^3 + \dots + 3a_n t^{n+2} + \dots = a_0 + (a_1 - 4a_0)t = 2 - 7t$ , так как  $a_0 = 2$  и  $a_1 = 1$ . Тогда

$$f_a(t) = C(t)/L(t) = \frac{2-7t}{(1-t)(1-3t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1-3t}.$$

$$\text{Методом неопределенных коэффициентов получим } (A+B) + (-3A-B)t \equiv 2-7t \rightarrow \begin{cases} A+B=2, \\ 3A+B=7 \end{cases} \rightarrow A=2.5, B=-0.5, \quad f_a(t) = \frac{2.5}{1-t} - \frac{0.5}{1-3t} =$$

$$= 2.5 \sum_{k=0}^{\infty} t^k - 0.5 \sum_{k=0}^{\infty} 3^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2.5 - 0.5 \cdot 3^k) t^k. \text{ Отметим, что этот пример может быть решен ме-}$$

тодом, изложенным в подразд. 2.9. Действительно, если  $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ , то

$$\frac{1}{t^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} t^{n+2} - \frac{4}{t} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} t^{n+1} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0, \quad \frac{1}{t^2} \sum_{j=2}^{\infty} a_j t^j - \frac{4}{t} \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0,$$

$$\frac{1}{t^2} (f_a(t) - a_0 - a_1 t) - \frac{4}{t} (f_a(t) - a_0) + 3 f_a(t) = 0, \quad f_a(t) - 2 - t - 4t f_a(t) + 8t + 3t^2 f_a(t) = 0,$$

$$f_a(t) = \frac{2-7t}{1-4t+3t^2} = \frac{2-7t}{(1-t)(1-3t)}, \text{ т.е. получен тот же самый результат.}$$

Created with novaPDF Printer ([www.novaPDF.com](http://www.novaPDF.com))

**Пример 2.** Найдем общее решение для примера 1. Характеристический многочлен  $P(t) = t^2 - 4t + 3$  имеет корни  $t_1 = 1, t_2 = 3$ . Тогда по формуле (2.10.6) получаем  $a_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n = c_1 + c_2 \cdot 3^n$ .

Неоднородное линейное рекуррентное соотношение имеет вид

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + b_n, \quad (2.10.9)$$

где  $b_n$  есть функция от  $n$ . Как и в теории линейных дифференциальных уравнений общее решение соотношения (2.10.9) есть сумма любого частного его решения и общего решения уравнения (2.10.1). Общих способов определения частного решения нет, можно решить уравнение (2.10.9) лишь для некоторых специальных значений  $b$ .

Способ решения реконструирует производящую функцию последовательности  $\{a_n\}$  и похож на способ, изложенный в подразд. 2.9.

**Пример 3.** Решить неоднородное рекуррентное соотношение

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = (-1)^n, \quad a_0 = 1, a_1 = 2.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} t^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} t^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad \frac{1}{t^2} \sum_{j=2}^{\infty} a_j t^j - \frac{3}{t} \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n,$$

$$\frac{1}{t^2} (f_a(t) - a_0 - a_1 t) - \frac{3}{t} (f_a(t) - a_0) + 2 f_a(t) = \frac{1}{1+t}, \quad f_a(t) - 1 - 2t - 3t(f_a(t) - 1) + 2t^2 f_a(t) = \frac{t^2}{1+t},$$

$$f_a(t) = \frac{1}{(1+t)(1-3t+2t^2)} = \frac{1}{(1+t)(t-1)(t-0.5)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-0.5}, \quad A - 3At + 2At^2 + Bt^2 +$$

$$+ 0.5Bt - 0.5B + Ct^2 \equiv 1 \rightarrow \begin{cases} A - 0.5B - C = 1, \\ -3A + 0.5B = 0, \\ 2A + B + C = 0 \end{cases} \rightarrow A = \frac{1}{12}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{2}{3};$$

$$f_a(t) = \frac{1}{12(t+1)} + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{2}{3(t-0.5)} = \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} t^n + \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{12} (-1)^n + \frac{1}{2} + \frac{2^{n+2}}{3} \right] t^n. \text{ Отсюда } a_n = \frac{(-1)^n + 6 + 2^{n+4}}{12}.$$

## 2.11. Экспоненциальные производящие функции

Они соответствуют упорядоченным  $(n, r)$ -выборкам или  $(n, r)$ -перестановкам. Из определения упорядоченных и неупорядоченных  $(n, r)$ -выборок ясно, что первых в  $r!$  раз больше чем вторых. Поэтому производящая функция в этом случае записывается

$$\text{в виде} \quad (1+t)^r = \sum_{k=0}^n P(n, k) \frac{t^k}{k!}, \quad (2.11.1)$$

где  $P(n, r)$  – число  $(n, k)$ -перестановок из  $n$  элементов, то есть  $P(n, k) = A_n^k$  в принятых обозначениях.

В случаях, когда допускаются повторения элементов, необходимо в левой части формулы (2.11.1) биномы  $(1+t)$  заменить на соответствующие многочлены вида

$$1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots, \text{ если никакие ограничения на повторные появления не наложены, или}$$

$$\text{многочлены вида} \quad \left(1 + \frac{t_1}{1!} + \dots + \frac{t_1^{k_1}}{k_1!}\right) \left(1 + \frac{t_2}{1!} + \dots + \frac{t_2^{k_2}}{k_2!}\right) \dots \left(1 + \frac{t_l}{1!} + \dots + \frac{t_l^{k_l}}{k_l!}\right) = \prod_{j=1}^l \left(1 + \frac{t_j}{1!} + \dots + \frac{t_j^{k_j}}{k_j!}\right),$$

если соответствующий элемент допускает  $k_1, k_2, \dots, k_l$  повторений в выборках. Представление

этого произведения в виде ряда по степеням  $t$  дает в качестве коэффициентов при  $\frac{t^k}{k!}$  числа  $k$ -перестановок, допускающих указанные выше повторения.

Название экспоненциальная применяется в силу того, что производящая функция для  $k$ -перестановок с неограниченным числом повторений из  $n$  элементов имеет вид

$$\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots\right)^n = (e^t)^n = e^{nt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nt)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{t^k}{k!}. \quad (2.11.2)$$

Так как производящие функции (и простая и экспоненциальная) представляют собой степенной ряд, то в области его сходимости  $(-R, R)$  этот ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать и, следовательно, получать новые степенные ряды и новые производящие функции. Например, возьмем  $1 + t + t^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}$ . Почленным интегрированием этого ряда в области  $|t| < 1$  получаем выражение для производящей функции

$$-\ln(1-t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}, \quad (2.11.3)$$

то есть  $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, \dots\right\} \rightarrow -\ln(1-t)$

## 2.12. О приложениях теории производящих функций к теории вероятностей

Исторически сложилось так, что прежде всего комбинаторные методы нашли применение в теории вероятностей и математической статистике. В современной аксиоматической теории вероятностей сами вероятности мыслятся лишь в связи с пространствами элементарных событий. Комбинаторные методы находят себе место в теории вероятностей именно в той ее части, в которой пространства элементарных событий дискретны. Можно даже говорить о теоретико-вероятностных интерпретациях определенной части комбинаторного анализа.

В самом деле  $(n, r)$ -выборки могут быть интерпретированы различными урновыми схемами. Случаи, когда допускаются повторения элементов в выборках, соответствуют урновым схемам с возвращением. Одна из простейших производящих функций в теории вероятностей связана с бросанием монеты и другими событиями с двумя исходами:  $q + pt$ ,  $p + q = 1$ . Для  $n$  независимых испытаний с двумя исходами (схема Бернулли\*) производящей функцией будет  $f(t) = (q + pt)^n$ ,  $p + q = 1$ .

Производящая функция бросания одной шестигранной кости с равновероятными выпадениями очков имеет вид  $f(t) = \frac{1}{6}(t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6) = \frac{t}{6} \cdot \frac{1-t^6}{1-t}$ .

Комбинаторные задачи о размещениях в их теоретико-вероятностной трактовке приводят к введению различных моментов и функций накопления. Это также верно и для теоретико-числовых интерпретаций и для задач технической автоматики.

## 2.13. Практическое занятие № 4. Производящие функции и рекуррентные соотношения

### 2.13.1. Найти производящие функции следующих последовательностей:

\* Яков Бернулли (1654 – 1705) – швейцарский математик.



$$\begin{aligned} \text{а) } a_n &= n\alpha^n, n=0,1,2,\dots; \text{б) } a_n = \begin{cases} 0, n=0, \\ \frac{\alpha^n}{n!}, n=1,2,\dots \end{cases}; \text{в) } a_n = n^2, n=0,1,2,\dots; \\ \text{г) } a_n &= \begin{cases} 1, n=0,1,\dots,N, \\ 0, n>N \end{cases}; \text{д) } a_n = \sin \alpha n, n=0,1,2,\dots \end{aligned}$$

2.13.2. Найти производящую функцию последовательности  $\{a_n\}$  через производящую функцию последовательности  $\{b_n\}$ , если

$$\begin{aligned} \text{а) } a_n &= \begin{cases} 0, n=0, \\ b_{n-1}, n=1,2,\dots \end{cases}; \text{б) } a_n = \sum_{i=0}^n b_i, n=0,1,2,\dots; \text{в) } a_n = \begin{cases} 0, n=0,1,\dots,k-1, \\ b_{n-k}, n \geq k \end{cases}; \\ \text{г) } a_n &= b_{n+1} - b_n, n=0,1,2,\dots \end{aligned}$$

2.13.3. Найти производящую функцию последовательности  $\{2(n-5) + 7^{n+2}\}$ .

2.13.4. Найти экспоненциальную производящую функцию последовательности  $\{a_n\}$ , выраженную через производящую функцию последовательности  $\{b_n\}$ , если а)  $a_n = b_{n+1}$ ,

$$n=0,1,2,\dots; \text{б) } a_n = \sum_{r=0}^n C_n^r \cdot b_{n-r} \cdot g_r.$$

2.13.5. С помощью тождеств, связывающих производящие функции, вывести следующие тождества для биномиальных коэффициентов: а)  $(1+t)^n \cdot (1+t)^m = (1+t)^{n+m}$ ,  $\sum_{r=0}^k C_n^r \cdot C_m^{k-r} = C_{n+m}^k$ ; б)  $(1-t)^{-1-n} \cdot (1-t)^{-1-m} = (1-t)^{-2-n-m}$ ,  $\sum_{r=0}^k C_{n+r}^n \cdot C_{m+k-r}^m = C_{n+m+k+1}^k$ .

2.13.6. Найти общий член  $a_n$  последовательности, для которой функция  $f_a(t)$  является производящей: а)  $f_a(t) = (q + pt)^m$ ; б)  $f_a(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-m}$ ; в)  $f_a(t) = \arctg t$ ; г)  $f_a(t) = \int_0^t e^{-x^2} dx$ .

2.13.7. Применить технику производящих функций для нахождения суммы чисел:

$$\text{а) } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=0}^n i^2; \text{б) } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=0}^n i^3.$$

2.13.8. Сколькими способами можно разменять 10-копеечную монету монетами 1, 2, 3 и 5 копеек при условии, что каждая из разменных монет присутствует в двух экземплярах?

2.13.9. Сколькими способами выпуклый  $(n+2)$ -угольник можно разбить на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри  $(n+2)$ -угольника? Вывести рекуррентное соотношение для  $\{a_n\}$ , где  $a_n$  - число способов разбиения  $(n+2)$ -угольника и разрешить это соотношение.

2.13.10. Решить рекуррентные соотношения:

$$\text{а) } a_{n+3} = 3a_{n+2} - a_{n+1} + 3a_n, a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 8;$$

$$\text{б) } a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0, a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3;$$

$$\text{в) } a_{n+2} \pm 9a_n = 0, a_0 = 1, a_1 = 0.$$

2.13.11. Решить неоднородные рекуррентные соотношения:

$$\text{а) } a_{n+1} = a_n + n, a_0 = 1; \text{б) } a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n + 2^{-n}, a_0 = 1, a_1 = \frac{3}{2}.$$



2.13.12. Найти общее решение рекуррентных соотношений:

а)  $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ ; б)  $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n$ .

2.13.13. Пусть  $f_a(t)$  и  $f_b(t)$  – производящие функции последовательностей  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  соответственно и пусть  $f_a(t) \cdot f_b(t) = 1$ . Найти  $\{b_n\}$  и  $f_b(t)$ , если  $a_n = C_m^n$ .

2.13.14. Найти производящую функцию  $f_a(t)$  для последовательности  $\{a_n\}$ , если  $a_n$  – число решений в целых неотрицательных числах уравнения  $2x + 3y + 5z = n$ .

2.13.15. Пусть  $a_n = \sum_{j=0}^n C_{n+j}^{2j}$ ,  $b_n = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n+j}^{2j+1}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а  $f_a(t)$  и  $f_b(t)$  – соответствующие производящие функции. Показать, что а)  $a_n$  и  $b_n$  связаны соотношениями вида

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_{n+1}, \\ b_{n+1} = b_n + a_n, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } f_a(t) \text{ и } f_b(t) \text{ удовлетворяют системе уравнений}$$

$$\begin{cases} f_a(t) - 1 = t f_a(t) + f_b(t), \\ f_b(t) = t f_a(t) + t f_b(t) \end{cases} \text{ и найти } f_a(t) \text{ и } f_b(t).$$

## 2.14. Метод включений и исключений

Содержание комбинаторного анализа не исчерпывается подсчетом числа решений соответствующих задач. Не менее важное место в нем занимают проблемы возможности или невозможности осуществления требуемых выборок или расположений элементов. Логическая сущность метода включения и исключения определяется тем, что он применяется к важной задаче разделения множеств на подмножества в зависимости от того, обладают ли их элементы определенной совокупностью свойств или нет.

**Подсчет числа элементов объединения множеств.** Рассмотрим сначала простую задачу о нахождении числа элементов объединения множеств. Будем обозначать через  $n(A)$  количество элементов множества  $A$ . Основная формула, которой пользуются при нахождении числа элементов объединения двух множеств, такова (рис. 2.3):

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \quad (2.14.1)$$

Эта формула совершенно очевидна из диаграммы Эйлера - Венна. С ее помощью можно получить формулу для числа элементов объединения любого числа множеств. Например, для трех

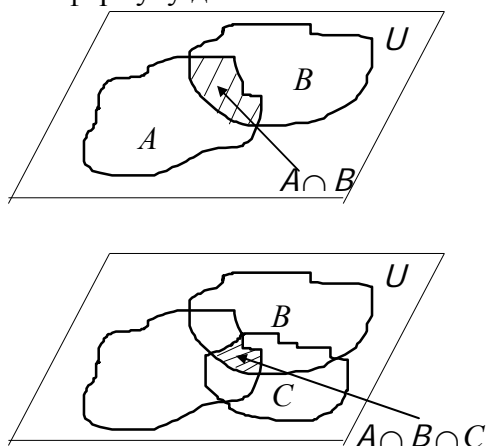


Рис. 2.3

элементов имеем

$$\begin{aligned} N(A \cup B \cup C) &= N\{A \cup (B \cup C)\} = N(A) + \\ &+ N(B \cup C) - N\{A \cap (B \cup C)\} = N(A) + \\ &+ N(B \cup C) - N\{(A \cap B) \cup (A \cap C)\} = N(A) + \\ &+ N(B) + N(C) - N(B \cap C) - \{N(A \cap B) + \\ &+ N(A \cap C) - N((A \cap B) \cap (A \cap C))\} = N(A) + \\ &+ N(B) + N(C) - N(B \cap C) - N(A \cap B) - \\ &- N(A \cap C) + N(A \cap B \cap A \cap C) = N(A) + \\ &+ N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - \\ &- N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Эту формулу тоже можно изобразить с помощью диаграммы (рис. 2.3).

Для случая  $n$  слагаемых аналогичная формула доказывается методом математической индукции.

**Теорема 2.3.** Если  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – некоторые множества и  $N(A_1) = |A_1|, N(A_2) = |A_2|, \dots, N(A_n) = |A_n|$ , то  $N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = N(A_1) + N(A_2) + \dots + N(A_n) - \{N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + \dots + N(A_{n-1} \cap A_n)\} + \{N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \dots + N(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)\} + \dots + (-1)^{n-1} N(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$ . (2.14.2)

Формулу (2.14.2) можно обобщить и подсчитать не только количество элементов заданных множеств. Пусть дано  $n$ -множество  $S_n$  некоторых элементов и  $k$ -множество свойств  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , которыми элементы множества  $S_n$  могут как обладать, так и не обладать. Выделим какую-либо  $r$ -выборку свойств  $(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r})$ .

Число элементов  $s \in S_n$ , обладающих всеми  $r$  выбранными свойствами обозначим через  $n(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r})$ . Отсутствие у элемента какого-либо свойства  $p_i$  будем обозначать  $\overline{p_i}$ . Тогда, например, запись  $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, p_3)$  означает число элементов, обладающих свойствами  $p_1$  и  $p_3$  и не обладающих свойством  $p_2$ .

а) Пусть имеется одно свойство  $p$ , тогда  $n(\overline{p}) = n - n(p)$ .

б) Имеется конечное число свойств  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , несовместимых друг с другом. Тогда опять  $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_k}) = n - \sum_{i=1}^k n(p_i)$

в) Элементы обладают комбинациями различных свойств. Тогда справедлива теорема, аналогичная 2.3.

**Теорема 2.4.** Если даны  $n$  - множество элементов и  $k$  - множество свойств  $p_i, i = \overline{1, k}$ , совместимых между собой, тогда

$$n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_k}) = n - \sum_{i=1}^k n(p_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} n(p_i, p_j) - \sum_{1 \leq i < j < l \leq k} n(p_i, p_j, p_l) + \dots + (-1)^k n(p_1, p_2, \dots, p_k). \quad (2.14.3)$$

**Доказательство.** Теорема может быть доказана с помощью простейших рассуждений, состоящих в попеременном отбрасывании и возвращении подмножеств. Применим, однако, метод математической индукции.

$k = 1, n(\overline{p}) = n - n(p)$ . Эта формула очевидна. Пусть теорема верна для  $k - 1$  свойств, т.е.

$$n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_{k-1}}) = n - \sum_{i=1}^{k-1} n(p_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k-1} n(p_i, p_j) - \sum_{1 \leq i < j < l \leq k-1} n(p_i, p_j, p_l) + \dots + (-1)^{k-1} n(p_1, p_2, \dots, p_{k-1}) \quad (2.14.4)$$

Перейдем к случаю, когда имеется  $k$  свойств. Так как  $n(\overline{p}) = n - n(p)$ , то по аналогии можно записать  $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_{k-1}}, \overline{p_k}) = n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_{k-1}}) - n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_{k-1}}, p_k)$ . Применим соотношение (2.14.4) для числа  $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_{k-1}}, p_k)$ . Получим следующую формулу:

$$n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_{k-1}}, p_k) = n(p_k) - \sum_{i=1}^{k-1} n(p_i, p_k) + \sum_{1 \leq i < j \leq k-1} n(p_i, p_j, p_k) + \dots + (-1)^{k-1} n(p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, p_k) \quad (2.14.5)$$

Прокомментируем ее. В ней  $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_{k-1}}, p_k)$  – число элементов, обладающих свойством  $p_k$  и одновременно не обладающих свойствами  $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$ ;  $n(p_k)$  – число элементов, обладающих только свойством  $p_k$ .  $\sum_{i=1}^{k-1} n(p_i, p_k)$  – число элементов, обладающих свойствами  $p_i$  и  $p_k$  одновременно и так далее. Ясно, что для того чтобы получить  $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_{k-1}}, p_k)$  из общего числа элементов со свойством  $p_k$ , надо вычесть сначала число

элементов, обладающих свойствами  $p_i$  и  $p_k$ . Однако при этом элементы, имеющие три свойства, именно:  $p_k$  и, скажем,  $p_i$  и  $p_j$  будут исключены дважды (сначала как элементы со свойствами  $p_i$  и  $p_k$ , затем как элементы со свойствами  $p_j$  и  $p_k$ ). Значит, надо возратить все элементы, обладающие тремя свойствами, то есть прибавить  $\sum_{1 \leq i < j \leq k-1} n(p_i, p_j, p_k)$  и так далее. Вычтем теперь из (2.14.4) формулу (2.14.5), получим

$$\begin{aligned} n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_{k-1}}) - n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_{k-1}}, p_k) &= n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_k}) = n - \left[ \sum_{i=1}^{k-1} n(p_i) + n(p_k) \right] + \\ &+ \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq k-1} n(p_i, p_j) + \sum_{i=1}^{k-1} n(p_i, p_k) \right] + \dots - (-1)^{k-1} n(p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, p_k) = \\ &= n - \sum_{i=1}^k n(p_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} n(p_i, p_j) + \dots + (-1)^k n(p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, p_k). \end{aligned}$$

Характер доказательства этой теоремы таков, что его можно применить для любой комбинации свойств, как выполняющихся, так и не имеющих места. Таким образом, в левой части доказанной формулы может стоять не только  $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_k})$ , но и, например,  $n(p_1, \overline{p_2}, p_3, \overline{p_4})$ . Теорема формулируется при этом относительно совокупности свойств  $p_2$  и  $p_4$  с обязательным выполнением свойств  $p_1$  и  $p_3$  следующим образом:

$$n(p_1, \overline{p_2}, p_3, \overline{p_4}) = n(p_1, p_3) - n(p_1, p_3, p_2) - n(p_1, p_3, p_4) + n(p_1, p_3, p_2, p_4). \quad (2.14.6)$$

**Пример 1.** В комнате несколько человек, знающих хотя бы один из трех языков. Шестеро знают английский, шестеро - немецкий, семеро - французский. Четверо знают английский и немецкий, трое - немецкий и французский, двое - французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек в комнате? Сколько из них знают только английский язык?

Задачу можно решить традиционным способом «вычерпывания» множеств без применения формулы включений и исключений. Перепишем условие задачи более компактно в виде таблицы

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
6	6	7	4	3	2	1

Пусть из комнаты ушел человек, знающий все три языка, тогда получим

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
5	5	6	3	2	1	0

Пусть теперь ушли три человека (из оставшихся), знающие одновременно английский и немецкий языки; число людей, знающих другие пары языков, не изменится.

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
2	2	6	0	2	1	0

Пусть уйдут двое, знающие немецкий и французский.

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
2	0	4	0	0	1	0

Наконец, уходит человек, знающий французский и английский языки. Окончательно получим

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
---	---	---	----	----	----	-----

1	0	3	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---

Итак, в комнате остался один человек, знающий только английский язык, и трое, знающих только французский язык. Кроме того, вышло семь человек, значит, сначала в комнате было одиннадцать человек.

Решим теперь эту же задачу методом включений и исключений. Пусть свойство  $p_A$  – знать английский язык, аналогично  $p_H$  и  $p_F$  – свойства, характеризующие знание немецкого и французского языков. По условию задачи общее число людей составляют все, знающие хотя бы один язык; не знающих хотя бы один язык в задаче нет. По формуле (2.14.2) имеем

$$n = n(p_A) + n(p_H) + n(p_F) - n(p_A, p_H) - n(p_A, p_F) - n(p_H, p_F) + n(p_A, p_H, p_F) = 6 + 6 + 7 - (4 + 3 + 2) + 1 = 19 - 9 + 1 = 11.$$

Число людей, знающих только английский язык, это  $n(p_A, \bar{p}_H, \bar{p}_F)$ . По формуле (2.14.6)  $n(p_A, \bar{p}_H, \bar{p}_F) = n(p_A) - n(p_A, p_H) - n(p_A, p_F) + n(p_A, p_H, p_F) = 6 - 4 - 2 + 1 = 1$ . Так же легко может быть найден ответ и на другие подобные вопросы.

### 2.15. Учет весов элементов в формуле включений и исключений

Дальнейшие усложнения метода связаны с введением весов элементов. Как и прежде, будем считать, что веса – это числовые характеристики элементов рассматриваемых множеств.

Итак, пусть задано  $n$ -множество  $S_n$  и каждому элементу  $s_i \in S_n, i = 1, 2, \dots, n$  приписан вес  $\omega(s_i)$  из  $k$ -множества свойств  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Тогда

$$p_j(s_i) = \begin{cases} 1, & \text{если элемент } s_i \text{ обладает свойством } p_j, \\ 0, & \text{если элемент } s_i \text{ обладает не свойством } p_j, \end{cases} \quad \text{а } \omega(p_j) = \sum_{s_i \in S} p_j(s_i) \cdot \omega(s_i) - \text{сумма весов}$$

элементов со свойством  $p_j$ . Произведем  $r$ -выборку свойств  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}$  и обозначим сумму весов элементов, обладающих всеми  $r$  выбранными свойствами, через  $\omega(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r})$ , т.е.  $\omega(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r})$  – это сумма весов элементов множества  $S_n$ , которые обладают каждым из свойств  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Сумму, распространенную на все возможные  $r$ -выборки свойств, обозначим  $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k} \omega(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}) = \omega(r)$ . Здесь суммирование распространяется на все сочетания

$(i_1, i_2, \dots, i_r)$  длины  $r$  из  $k$  свойств, количество сочетаний равно  $C_k^r$ . Таким образом, в  $\omega(r)$  суммируются веса только тех элементов, которые имеют как минимум  $r$  свойств. Пусть элемент  $s_i \in S_n$  обладает  $t$  свойствами и  $t \geq r$ , тогда его вес  $\omega(s_i)$  в  $\omega(r)$  войдет  $C_t^r$  раз. Например,  $\omega(1) = \sum_{i_1} \omega(p_{i_1}) = \omega(p_1) + \omega(p_2) + \dots + \omega(p_k)$  содержит  $C_k^1 = k$  членов, а

$\omega(2) = \sum_{(i_1, i_2)} \omega(p_{i_1}, p_{i_2}) = \omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + \dots + \omega(p_{k-1}, p_k)$  содержит  $C_k^2 = k(k+1)/2$  членов и

так далее. Через  $\omega(0)$  обозначим сумму весов всех элементов множества  $S_n$ . Данное определение  $\omega(0)$  корректно, так как сумма  $\omega(0)$  должно включать элементы, обладающие нуль свойствами и более. Действительно, любой из элементов множества  $S_n$  удовлетворяет этим условиям. Положим  $\omega_k(r)$  – сумма весов элементов, обладающих ровно  $r$  свойствами из  $k$  имеющихся, тогда  $\omega_k(0)$  – сумма весов элементов, которые не имеют ни одного из указанных свойств. При таких обозначениях теорема включений и исключений с учетом весов будет формулироваться следующим образом.

**Теорема 2.5. Сумма весов элементов, обладающих точно  $r$  свойствами из  $k$  свойств  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , равна**

$$\begin{aligned}
\omega_k(r) &= C_r^0 \omega(r) - C_{r+1}^1 \omega(r+1) + C_{r+2}^2 \omega(r+2) + \dots + (-1)^{k-r} C_{r-(k-r)}^r \omega(r+(k-r)) = \\
&= C_r^0 \omega(r) - C_{r+1}^1 \omega(r+1) + C_{r+2}^2 \omega(r+2) + \dots + (-1)^{k-r} C_k^r \omega(k) = \\
&= \sum_{i=0}^{k-r} (-1)^i C_{r+i}^r \omega(r+i) = \sum_{i=r}^k (-1)^{i-r} C_i^r \omega(i)
\end{aligned} \tag{2.15.1}$$

*Доказательство.* Покажем, что вклад веса  $\omega(s_i)$  произвольного элемента  $s_i \in S_n$  в правую и левую часть формулы (2.15.1) одинаков. Пусть  $s_i \in S_n$  обладает точно  $t$  свойствами. Тогда а) если  $t < r$ , то  $\omega(s)$  не входит в  $\omega_k(r)$  и не входит в  $\omega(r+i)$ , т.е. равенство (2.15.1) примет вид  $0=0$ ;

б) если  $t = r$ , то  $\omega(s)$  входит один раз в  $\omega_k(r)$  и один раз в  $\omega(r+i)$ ;

в) если  $t > r$ , то в  $\omega_k(r)$   $\omega(s)$  не входит и левая часть формулы (2.15.1) в этом случае равна нулю. В  $\omega(r+i)$  вес  $\omega(s)$  входит  $C_{r+i}^{r+i}$  раз,  $r+i \leq t$ . Правая часть формулы (2.15.1) для веса  $\omega(s)$  одного элемента  $s_i \in S_n$  примет вид  $C_r^r \omega(r) - C_{r+1}^r \omega(r+1) + \dots + (-1)^{t-r} C_t^{t-r} \omega(t) = C_r^r \omega(s) C_t^r - C_{r+1}^r \omega(s) C_t^{r+1} + \dots + (-1)^{t-r} C_t^{t-r} \omega(s) C_t^t = \omega(s) \sum_{i=0}^{t-r} (-1)^i C_{r+i}^r C_t^{r+i}$ . Но  $C_{r+i}^r C_t^{r+i} = \frac{(r+i)!}{r! i!} \cdot \frac{t!}{(r+i)!(t-r-i)!} = \frac{t!}{r! (t-r)!} \cdot \frac{(t-r)! r}{i! (t-r-i)!} = C_t^r C_{t-r}^i$ , тогда  $\omega(s) \sum_{i=0}^{t-r} (-1)^i C_{r+i}^r C_t^{r+i} = \omega(s) \sum_{i=0}^{t-r} (-1)^i C_t^r C_{t-r}^i = \omega(s) C_t^r \sum_{i=0}^{t-r} (-1)^i C_{t-r}^i = \omega(s) C_t^r (1-1)^{t-r} = 0$ . Таким образом, и в этом случае формула (2.15.1) верна.

Если все элементы  $s_i \in S_n, i=1,2,\dots,n$  имеют единичный вес, т.е.  $\omega(p_i)=1$ , то  $\omega(k)=n(k)$  и сумма весов равна числу слагаемых в сумме  $\omega(r)=n(r)$ , тогда формула (2.15.1) превращается в

$$n_k(r) = C_r^r n(r) - C_{r+1}^r n(r+1) + \dots + (-1)^{k-r} C_k^r n(k) = \sum_{i=r}^k (-1)^{i-r} C_i^r n(i) \tag{2.15.2}$$

Следующая теорема является, по сути, следствием теоремы 2.5.

**Теорема 2.6.** Если даны  $n$  - множество  $S_n$ , каждый элемент которого имеет вес, и  $k$  - множества свойств, то сумма  $\omega_k(0)$  весов элементов, не удовлетворяющих ни одному из заданных свойств, определяется по формуле

$$\omega_k(0) = \omega(0) - \omega(1) + \omega(2) + \dots + (-1)^k \omega(k) = \sum_{m=0}^k (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k} \omega(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}) \tag{2.15.3}$$

Итак, сумма весов множества из  $n$  элементов, не удовлетворяющих ни одному из  $k$  свойств, равна сумме весов всех элементов множества  $\omega(0)$  минус сумма весов элементов, обладающих хотя бы одним свойством, плюс сумма весов элементов, имеющих не менее двух свойств и так далее.

Если все элементы  $s_i \in S_n, i=1,2,\dots,n$  имеют единичный вес, то  $\omega(k)=n(k)$  и сумма весов равна числу слагаемых в сумме. В этом случае  $\omega(0)=n$ ,  $\omega_k(0)$  равно числу элементов множества  $S_n$ , не удовлетворяющих ни одному из указанных  $k$  свойств. Тогда формула (2.15.3) переходит в формулу

$$\begin{aligned}
n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_k}) &= n - \sum_{i=1}^k n(p_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} n(p_i, p_j) - \sum_{1 \leq i < j < l \leq k} n(p_i, p_j, p_l) + \dots \\
&+ (-1)^k n(p_1, p_2, \dots, p_k) = \sum_{m=0}^k (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k} n(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})
\end{aligned} \tag{2.15.4}$$

Метод включения и исключения применяется везде, где речь идет о разделении дискретных множеств, производимом в зависимости от наличия (или отсутствия) у элементов определенных свойств. К числу задач, решаемых с помощью этого метода, относятся, например, задачи о встречах или беспорядках, разновидности задач теории чисел и ее приложений, где применяются специальные функции Эйлера и Мебиуса\*.

**Пример 1. Задача о беспорядках или задача о встречах.** Пусть имеется конечное упорядоченное множество чисел  $1, 2, \dots, n$ . Для них могут быть образованы перестановки  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Число всех перестановок, очевидно,  $n!$ . Среди этих перестановок имеются такие, где ни один из элементов не сохранил своего первоначального места:  $a_i \neq i, i = 1, 2, \dots, n$ . Такие перестановки называются беспорядками. Найдем число беспорядков.

Множество  $n$  элементов рассматривается по отношению к множеству свойств элементов оставаться на своих местах  $p_i: \{a_i = i, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Очевидно, что если  $k$  элементов закрепляются на своих местах, то число  $N(k)$  соответствующих перестановок равно  $(n-k)!$ . Число способов, которыми можно выбрать  $k$  закрепленных элементов из общего количества  $n$  элементов, равно  $C_n^k$ . Число беспорядков, где ни один элемент не сохранил своего первоначального места, тогда находится по формуле, аналогичной формуле (2.15.3),

$$\begin{aligned} N(0) &= n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! + \dots + (-1)^k C_n^k(n-k)! + \dots + (-1)^n C_n^n(n-n)! = \\ &= n! - n(n-1)! + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!} + \dots + (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} (n-k)! + \dots = \quad (2.15.5) \\ &= n! \left[ 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{1}{k!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] \approx \left[ \frac{n!}{e} \right]. \end{aligned}$$

Здесь выражение  $[...]$  обозначает целую часть заданного числа, а  $e$  - основание натуральных логарифмов.

**Пример 2. Задача о числе перестановок, в которых остаются на своих местах  $k$  элементов.** В этой задаче из  $n$  элементов  $k$  должно быть неподвижных. Число способов, которыми можно выбрать эти  $k$  неподвижных элементов равно  $C_n^k$ . Оставшиеся  $n-k$  элементов могут образовывать беспорядки, их число подсчитаем по формуле (2.15.5). Тогда по правилу произведения

$$N(k) = C_n^k(n-k)! \left[ 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} \right] = \frac{n!}{k!} \left[ \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} \right]. \quad (2.15.6)$$

## 2.16. Функция Эйлера

**Функцией Эйлера** называется функция  $\varphi(n)$ , определенная на множестве  $N$ , значения которой равны числу  $k$  натуральных, может быть и составных целых чисел, взаимно простых с  $n$  и не превосходящих  $n$ , то есть  $0 < k < n, (k, n) = 1$ . Для  $n = 1$  полагают  $\varphi(1) = 1$ .

Знаком  $(a, b)$  обозначается наибольший общий делитель натуральных чисел  $a$  и  $b$ . Взаимно простыми называются числа, наибольший общий делитель которых равен единице.

Например, натуральные числа 5 и 7 взаимно просты, так как  $(5, 7) = 1$ . Таким образом, взаимно простые числа друг на друга нацело не делятся.

Функция Эйлера аналитически выражается следующим образом:

$$\varphi(n) = n - \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{n}{q_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{n}{q_i q_j} + \dots + (-1)^k \frac{n}{q_1 q_2 \dots q_k}, \quad (2.16.1)$$

\* Август Фердинанд Мебиус (1790 - 1868) - немецкий математик.



где  $k$  – есть число простых делителей  $q_i$  числа  $n$ ,  $i=1,2,...,k$ . Чаше функция Эйлера приводится в несколько другом виде

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) = n \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_k}\right), \quad n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}. \quad (2.16.2)$$

Формулы (2.16.1) и (2.16.2) рассмотрим позже, а сейчас посчитаем значения  $\varphi(n)$  для  $n=1,2,...,10$ . Разложим числа с 1 до 10 на простые делители.

$1 = 1^1$	$6 = 2^1 \cdot 3^1$
$2 = 2^1$	$7 = 7^1$
$3 = 3^1$	$8 = 2^3$
$4 = 2^2$	$9 = 3^2$
$5 = 5^1$	$10 = 2^1 \cdot 5^1$

1)  $\varphi(1) = 1$  по определению.

2)  $\varphi(2) = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$ ,  $(1,2) = 1$ . Это число 1.

3)  $\varphi(3) = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2$ ,  $(1,3) = 1$ ,  $(2,3) = 1$ . Два числа не превосходят 3 и взаимно просты с числом 3; это числа 1 и 2.

4)  $\varphi(4) = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2$ ,  $(1,4) = 1$ ,  $(3,4) = 1$ . Это числа 1 и 3.

5)  $\varphi(5) = 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4$ ,  $(1,5) = 1$ ,  $(2,5) = 1$ ,  $(3,5) = 1$ ,  $(4,5) = 1$ . Четыре числа удовлетворяют условию существования функции Эйлера. Это числа 1, 2, 3 и 4.

6)  $\varphi(6) = 6 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2$ ,  $(1,6) = 1$ ,  $(5,6) = 1$ . Это числа 1 и 5.

7)  $\varphi(7) = 7 \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 6$ ,  $(1,7) = 1$ ,  $(2,7) = 1$ ,  $(3,7) = 1$ ,  $(4,7) = 1$ ,  $(5,7) = 1$ ,  $(6,7) = 1$ . Значение функции Эйлера в этом случае равно шести, так как шесть чисел удовлетворяют условию существования функции Эйлера. Это числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

8)  $\varphi(8) = 8 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4$ ,  $(1,8) = 1$ ,  $(3,8) = 1$ ,  $(5,8) = 1$ ,  $(7,8) = 1$ . Значение функции Эйлера равно четырем. Это числа 1, 3, 5 и 7.

9)  $\varphi(9) = 9 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6$ ,  $(1,9) = 1$ ,  $(2,9) = 1$ ,  $(4,9) = 1$ ,  $(5,9) = 1$ ,  $(7,9) = 1$ ,  $(8,9) = 1$ . Это числа 1, 2, 4, 5, 7 и 8.

10)  $\varphi(10) = 10 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4$ ,  $(1,10) = 1$ ,  $(3,10) = 1$ ,  $(7,10) = 1$ ,  $(9,10) = 1$ . Это числа 1, 3, 7 и 9.

Таким образом, функция Эйлера для первых десяти значений аргумента может быть задана следующей таблицей.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4



Выведем теперь формулы, представляющие функцию Эйлера. Для этого решим сначала такую вспомогательную задачу. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_k$  – взаимно простые натуральные числа, то есть  $(a_i, a_j) = 1, i \neq j$ , а  $n$  – некоторое натуральное число. Найдем число натуральных чисел, не превышающих  $n$  и не делящихся ни на одно из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Пусть  $A_i$  – множество натуральных чисел, не превышающих  $n$  и делящихся на  $a_i$ . Тогда количество чисел, делящихся по крайней мере на одно из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , равно  $n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k)$

Очевидно,  $n(A_i) = \left[ \frac{n}{a_i} \right]$ , где опять  $[x]$  – наибольшая целая часть  $x$ , не превосходящая  $x$ . Множество  $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$  – это множество тех чисел, которые делятся на  $a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_k}$ , то есть  $n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \left[ \frac{n}{a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_k}} \right]$ , поскольку числа  $a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_k}$  взаимно простые. По формуле (2.14.2) получим

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{1 \leq i \leq k} n(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots + (-1)^{k-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k)$$

Тогда количество чисел, не превышающих  $n$  и делящихся, по крайней мере, на одно из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , равно

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{1 \leq i \leq k} \left[ \frac{n}{a_i} \right] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} \left[ \frac{n}{a_{i_1} a_{i_2}} \right] + \dots + (-1)^{k-1} \left[ \frac{n}{a_1 a_2 \dots a_k} \right].$$

Количество чисел, не превышающих  $n$  и не делящихся ни на одно из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , равно  $n - n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = n - \sum_{1 \leq i \leq k} \left[ \frac{n}{a_i} \right] + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} \left[ \frac{n}{a_{i_1} a_{i_2}} \right] - \dots + (-1)^k \left[ \frac{n}{a_1 a_2 \dots a_k} \right]$ . Эта формула аналогична формуле (2.14.3) и представляет собой по сути формулу включений и исключений. Ее можно было сразу написать, если ввести  $\frac{n}{a_i} = p_i$  – свойство числа  $n$  делиться на  $a_i$ .

Тогда  $\left[ \frac{n}{a_i} \right]$  – количество чисел не превосходящих  $n$  и обладающих свойством  $p_i$ . Пусть теперь  $n$  – натуральное число, разложение которого на простые множители имеет вид  $n = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot q_k^{\alpha_k}$ , где  $q_1, q_2, \dots, q_k$  – простые числа. Если  $\varphi(n)$  – число натуральных целых чисел, взаимно простых с  $n$ , то по только что полученной формуле имеем

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{n}{q_i} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} \frac{n}{q_{i_1} q_{i_2}} - \dots + (-1)^k \frac{n}{q_1 q_2 \dots q_k} = n \left( 1 - \frac{1}{q_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{q_2} \right) \dots \left( 1 - \frac{1}{q_k} \right) = \\ &= n \prod_{i=1}^k \left( 1 - \frac{1}{q_i} \right). \end{aligned}$$

Преобразования сумм в произведения очень громоздки и связаны с разложением многочлена на множители. Например, для  $k=2$  соответствующие преобразования будут иметь вид

$$\begin{aligned} n - \left( \frac{n}{q_1} + \frac{n}{q_2} \right) + \frac{n}{q_1 q_2} &= n \left[ 1 - \frac{q_2 + q_1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2} \right] = n \left[ \frac{q_1 q_2 - q_1 - q_2 + 1}{q_1 q_2} \right] = \\ &= n \frac{(q_1 - 1)(q_2 - 1)}{q_1 q_2} = n \frac{q_1 - 1}{q_1} \cdot \frac{q_2 - 1}{q_2} = n \left( 1 - \frac{1}{q_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{q_2} \right). \end{aligned}$$

Перечислим в заключение без доказательства свойства функции Эйлера.

1. Если  $(a, b) = 1$ , то  $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ . Например,  $(3, 7) = 1$ ,  $\varphi(3 \cdot 7) = \varphi(21) = 21 \cdot \prod_{i=1}^2 \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) = 21 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 21 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = 12$ ;  $\varphi(21) = \varphi(3) \cdot \varphi(7) = 2 \cdot 6 = 12$ .

2.  $\varphi(q^\alpha) = q^\alpha - q^{\alpha-1} = q^\alpha \left(1 - \frac{1}{q}\right)$ . Возьмем  $n = 8$ ,  $n = 2^3$ ,  $\varphi(8) = 4 = 2^3 - 2^2 = 2^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4$ .

3.  $\varphi(n) = \prod_{i=1}^k \varphi(q_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^k q_i^{\alpha_i} \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{q_i}\right)$ .

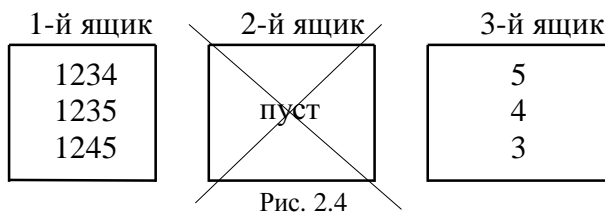
4.  $\sum_{d|n} \varphi(d) = \prod_{i=1}^k \sum_{d|q_i^{\alpha_i}} \varphi(d) = \prod_{i=1}^k q_i^{\alpha_i} = n$ , где  $d$  – различные делители числа  $n$ . Напри-

мер, если  $n = 10 = 2^1 \cdot 5^1$ , то  $\sum_{d|10} \varphi(d) = \prod_{i=1}^2 q_i^{\alpha_i} = 2 \cdot 5 = 10$ . Выражение  $\sum_{d|10} \varphi(d)$  означает, что суммирование ведется по всем делителям числа 10, т.е.  $\sum_{d|10} \varphi(d) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(5) + \varphi(10) = 1 + 1 + 4 + 4 = 10$ .

5.  $x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ , где  $n > 0$  и  $(x, n) = 1$ . Например,  $x = 3$ ,  $n = 7$ ,  $3^{\varphi(7)} = 3^6 = 729 = 104 \cdot 7 + 1 = 1 \pmod{7}$  или  $x = 3$ ,  $n = 10$ ,  $3^{\varphi(10)} = 3^4 = 81 = 8 \cdot 10 + 1 = 1 \pmod{10}$ .

**Пример 1.** Найти число способов разложения  $n$  шаров по  $m$  ящикам так, чтобы  $r$  ( $0 \leq r < m$ ) ящиков остались пустыми.

Рассмотрим простейший пример. Пусть  $m = 3$ ,  $n = 5$ ,  $r = 1$ . Из рис. 2.4 сразу ясно, что



порядок, т.е. номер шаров важен, следовательно, речь идет о  $n$  – перестановках. В данном опыте выбирается ящик. Это выборка с повторениями, так как ящики могут повторяться, например, первый шар положен в первый ящик, второй шар положен в первый ящик и

так далее. На основе такого простого примера ясно, что речь идет о выборке  $m$  ящиков  $n$  раз ( $n$  шаров) с повторениями (рис. 2.4). Таким образом, число способов, которыми можно разместить  $n$  шаров по  $m$  ящикам равно  $m^n$ .

Пусть  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) – свойство, состоящее в том, что при данной раскладке ящик с номером  $i$  остался пустым. Тогда количество раскладок, обладающих свойствами  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}$  ( $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m$ ) при одном способе выбора  $r$  пустых ящиков, равно  $n(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}) = (m - r)^n$ , а общее количество раскладок, распространенное на все возможные способы выбора пустых ящиков, будет равно  $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m} n(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}) = C_m^r (m - r)^n$ .

Применим теперь формулу включений и исключений типа (2.15.2), получим

$$n_m(r) = \sum_{k=r}^m (-1)^{k-r} C_k^r \omega(k) = \sum_{k=r}^m (-1)^{k-r} C_k^r C_m^k (m - k)^n = \left\langle \begin{matrix} k = r + l, \\ k = r, l = 0, \\ k = m, l = m - r. \end{matrix} \right\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{m-r} (-1)^l C_{r+l}^r C_m^{r+l} (m-r-l)^n = \left\langle \begin{array}{l} C_{r+l}^r C_m^{r+l} = \frac{m!}{r! l! (m-r-l)!}, \\ C_m^r C_{m-r}^l = \frac{m!}{r! l! (m-r-l)!} \end{array} \right\rangle = \sum_{l=0}^{m-r} (-1)^l C_m^r C_{m-r}^l (m-r-l)^n = \\
&= C_m^r \sum_{l=0}^{m-r} (-1)^l C_{m-r}^l (m-r-l)^n.
\end{aligned}$$

## 2.17. Функция Мебиуса

Функция Мебиуса  $\mu(n)$  определяется для всех  $n \in \mathbb{N}$  и равна

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n=1, \\ 0, & \text{если } n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k} \text{ и } \exists \alpha_i > 1, \\ (-1)^k, & \text{если } n = q_1 q_2 \dots q_k, \end{cases} \quad (2.17.1)$$

где  $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$  – разложение аргумента на простые сомножители, такое же как для функции Эйлера (см. подразд. 2.16).

Функция Мебиуса для первых десяти значений аргумента задается следующей таблицей.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

Рассмотрим некоторые свойства функции  $\mu(n)$  и ее связь с функцией Эйлера.

$$1) \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 0, & \text{если } n > 1, \\ 1, & \text{если } n = 1, \end{cases} \quad (2.17.2)$$

причем суммирование идет по всем делителям  $d$  числа  $n$ . Итак, если  $n=1$ , то  $\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) = 1$ . Если же  $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k} \neq 1$ , тогда  $\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n, \mu(d) \neq 0} \mu(d) = \sum_{i=1}^k C_k^i (-1)^i = (1-1)^k = 0$ , так как все делители  $d$ , для которых  $\mu(d) \neq 0$ , имеют по формуле (2.17.1) вид  $q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r}$ , т.е.  $\mu(q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r}) = (-1)^r$ . Количество таких делителей  $q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r}$ , выбираемых из  $q_1 q_2 \dots q_k$ , равно  $C_k^r$ .

$$2) \text{ Если } f(n) = \sum_{d|n} g(d), \text{ то } g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right), \quad (2.17.3)$$

где  $f(n)$  и  $g(n)$  определены на множестве  $\mathbb{N}$ . Формула (2.17.3) называется формулой обращения Мебиуса.

$$3) \frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}. \quad (2.17.4)$$

Формула (2.17.4) устанавливает связь между функциями Эйлера и Мебиуса. Если

$$n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}, \text{ то } \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{q_i}\right).$$

## 2.18. Практическое занятие № 5. Формула включений и исключений

2.18.1. Из урны, содержащей  $m$  различных шаров, одновременно извлекают  $s$  ( $1 \leq s \leq m$ ) шаров, записывают их номера, а затем шары возвращаются обратно в урну. Можно составить  $(C_m^s)^d$  различных наборов, получающихся в результате  $d$  извлечений. Найти число наборов, в которых а) встречаются все шары; б) ровно  $r$  ( $0 \leq r \leq m$ ) шаров не встречается.

2.18.2. Вычислить  $S = \sum_{k'} \left( 2 / 2^{k'} \right)$ , где суммирование проводится по всем натуральным  $k'$ , некратным 2, 3 и 5.

2.18.3. Четыре человека сдают свои шляпы в гардероб. В предположении, что шляпы возвращаются наугад, найти вероятность того, что в точности  $k$  человек получают свои шляпы назад. Рассмотреть все значения  $k$  ( $0 \leq k \leq 4$ ).

2.18.4. При обследовании читательских вкусов оказалось, что 60% студентов читают журнал  $A$ , 50% – журнал  $B$ , 50% – журнал  $C$ , 30% – журналы  $A$  и  $B$ , 20% – журналы  $B$  и  $C$ , 40% – журналы  $A$  и  $C$ , 10% – журналы  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Сколько процентов студентов:

- а) не читает ни одного журнала;
- б) читает в точности два журнала;
- в) читает не менее двух журналов.

2.18.5. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 100 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5 и 7.

2.18.6. Показать, что если  $n = 30m$ , то количество целых положительных чисел, не превосходящих  $n$  и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15, равно  $22m$ .

2.18.7. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 учащихся не посещают ни один из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический и физический кружок? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

2.18.8. Сколькими способами можно расположить за круглым столом  $n$  супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

2.18.9. В букинистическом магазине лежат 6 экземпляров романа И.С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра его же романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую не менее чем по одному экземпляру каждого из этих романов?

2.18.10. Вычислить: а)  $\varphi(100)$ ; б)  $\varphi(1000)$ ; в)  $\varphi(p)$ , где  $p$  – простое число.

### 3. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

#### 3.1. Основные понятия и определения

Теория графов применяется при анализе функционирования сложных систем, таких как сети железных дорог, телефонных или компьютерных сетей, ирригационных систем. Эта теория традиционно является эффективным аппаратом формализации задач экономической и планово-производственной практики, применяется в автоматизации управления производством, в календарном и сетевом планировании.

Основное понятие теории – граф. Пусть  $S$  – непустое множество,  $V^{(2)}$  – множество всех его двухэлементных подмножеств,  $U \subset V^{(2)}$ . Тогда пара  $(S, U)$  называется неориентированным графом. Элементы множества  $S$  называются вершинами графа, а элементы множества  $U$  – ребрами. Итак,  $G = (S, U)$  граф – это конечное множество вершин  $S$  и множество ребер  $U$ .

Вершины графа обозначают по-разному: или большими буквами, или малыми с индексами; для ребер наиболее употребительное обозначение –  $u$  с индексом, например,  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Взаимное расположение, форма и длина ребер значения не имеют. Важно лишь то, что они соединяют две данные вершины множества  $S$ .

Если в паре вершин  $x_i$  и  $x_j$  указано направление связи, т. е. какая из вершин является первой, то соединяющий их отрезок  $u_k$  называется дугой, а вершины, определяющие дугу  $u_k$ , называют концевыми вершинами. Если концевые вершины совпадают, то дугу называют петлей. В графе  $G$  могут существовать дуги (ребра) с одинаковыми концевыми вершинами. Такие дуги называются параллельными.

Если в графе  $G = (S, U)$  все элементы множества  $U$  изображаются дугами, то граф называется ориентированным или орграфом, если ребрами, то неориентированным. Два ребра называются смежными, если они имеют общий конец.

Вершина  $x_i$  и ребро  $u_i$  называются инцидентными, если  $x_i$  является концом ребра  $u_i$ , и неинцидентными в противном случае. Таким образом, смежность есть отношение между однородными элементами графа, тогда как инцидентность – отношение между разнородными элементами.

Число вершин графа называется его порядком. Число дуг (ребер) графа  $G$ , инцидентных данной вершине, – степенью  $P(x_i)$  вершины  $x_i$ . Если степень равна нулю, вершина называется изолированной, а если единице – висячей.

Граф  $G$  называется простым, если он не содержит петель и параллельных дуг. Простой граф, в котором каждая пара вершин смежна, называется полным. Граф, содержащий хотя бы две параллельные дуги (ребра), называется мультиграфом, граф, содержащий петли – псевдографом.

Граф называется двудольным, если существует такое разбиение множества его вершин на две части (доли), что концы каждого ребра принадлежат разным частям. Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, то граф называется полным двудольным. Полный двудольный граф, доли которого состоят из  $p$  и  $q$  вершин, обозначается символом  $K_{p,q}$ .

Графы удобно изображать в виде рисунков, состоящих из точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек. Полные графы порядка 1, 2, 3 и 4 (рис. 3.1) обозначаются  $K_n$ . Число ребер в полном графе  $C_n^2$ . На рис. 3.2 изображены двудольные графы  $K_{1,4}$  и  $K_{3,3}$ . Два графа  $G$  и  $G_1$  называются изоморфными, если между множеством их вершин существует такое взаимно-однозначное соответствие, при котором в одном из графов ребрами соедине-

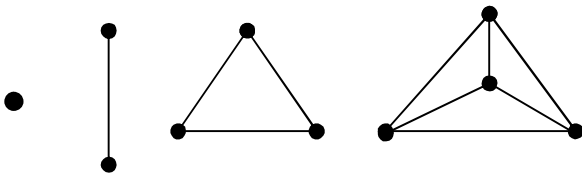


Рис. 3.1

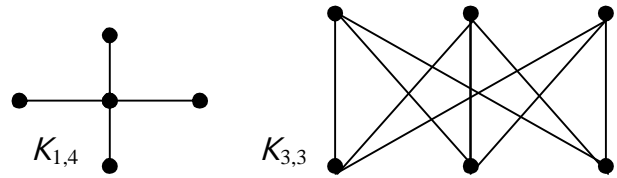


Рис. 3.2

ны вершины в том и только в том случае, если в другом графе ребрами соединены те же вершины. Для орграфов ориентация дуг также должна быть одинаковой.

Очевидно, что отношение изоморфизма графов является эквивалентностью, т.е. оно симметрично, транзитивно и рефлексивно. Следовательно, множество всех графов разбивается на классы так, что графы из одного класса попарно изоморфны, а графы из разных классов не изоморфны.

Способов задания графов – великое множество. Самый простой способ – задание множеств  $S$  и  $U$ . Граф также может быть задан просто рисунком. В силу изоморфизма один и тот же граф может быть изображен разными рисунками. Например, на рис. 3.3 изображение одного и того же графа, так как в обоих случаях содержится одна и та же информация о вершинах и дугах графа и их взаимном расположении. В некоторых случаях все же приходится различать изоморфные графы, тогда полезно понятие помеченный граф.

Граф  $G_n$  порядка  $n$  называется помеченным, если его вершинам присвоены некоторые метки, например, 1, 2, 3... Пусть  $n = 3$ , тогда, например, на рис. 3.4 изображены три

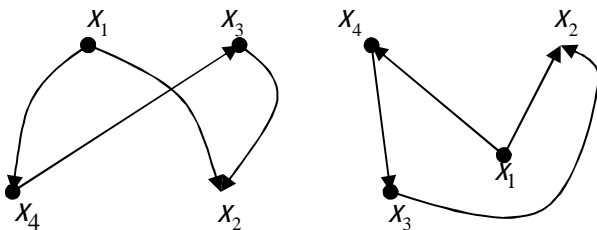


Рис. 3.3

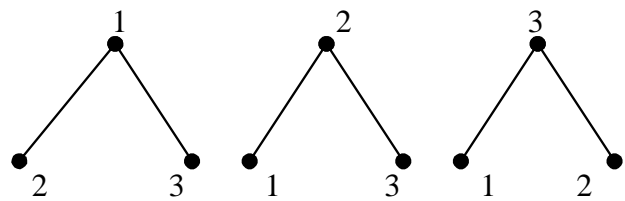


Рис. 3.4

разных графа. Строго говоря, абстрактный или непомеченный граф – это класс изоморфных графов. Число  $g_n$  непомеченных графов порядка  $n$  определяется очень сложно. Известна формула Пойа\*

$$g_n \cong \frac{2^{C_n^2}}{n!}, \quad (3.1.1)$$

дающая лишь асимптотику числа  $g_n$ , то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1$ , где  $g(n) = g_n$ ,  $f(n) = \frac{2^{C_n^2}}{n!}$ .

Граф называется плоским (планарным), если он может быть изображен на плоскости так, что

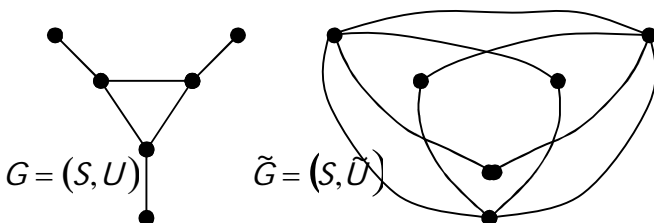


Рис. 3.5

все пересечения ребер являются его вершинами. Другим образом определяется дополнительный граф (дополнение)  $\tilde{G} = (S, \tilde{U})$ . В этом графе  $\tilde{G}$  вершин столько же, сколько в графе  $G$ , причем любые две несовпадающие вершины смежны в  $\tilde{G}$  тогда и только тогда, когда они не смежны в  $G$  (рис. 3.5). Граф, изоморфный своему дополнению, называется самодополнительным.

Пусть  $G = (S, U)$ . Граф  $G' = (S', U')$  называется подграфом графа  $G$ , если  $S' \subset S$  и  $U' \subset U$ .

\* Дьердь Пойа (1887 – 1985) – американский математик.

### 3.2. Операции над графами

Определим операции, позволяющие из имеющихся графов получать другие графы с большим или меньшим числом элементов.

1. Операция объединения графов. Граф  $G = (S, U)$  называется объединением (или наложением) графов  $G_1 = (S_1, U_1)$  и  $G_2 = (S_2, U_2)$ , если  $S = S_1 \cup S_2$  и  $U = U_1 \cup U_2$ . Объединение  $G = G_1 \cup G_2$  называется дизъюнктивным, если  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ .

2. Произведение графов. Пусть даны графы  $G_1 = (S_1, U_1)$  и  $G_2 = (S_2, U_2)$ . Граф  $G = (S, U)$  называется произведением  $G_1 \times G_2$  графов  $G_1$  и  $G_2$ , причем  $S = S_1 \times S_2$  – декартово произведение множеств вершин исходных графов, а множество ребер получается следующим образом: вершины  $(x_1, x_2)$  и  $(y_1, y_2)$  смежны в графе  $G$  тогда и только тогда, когда или  $x_1 = y_1$ , а  $x_2$  и  $y_2$  смежны в  $G_2$ , или  $x_2 = y_2$ , а  $x_1$  и  $y_1$  смежны в  $G_1$  (рис. 3.6). С помощью операции произведения вводятся  $n$ -мерные кубы – один из классов графов.  $n$ -мерный куб  $Q_n$  вводится рекуррентно:

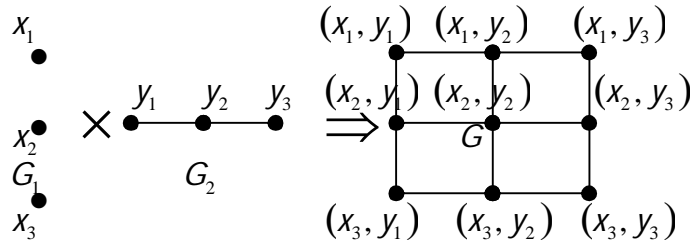


Рис. 3.6

по-прежнему операции произведения вводятся  $n$ -мерные кубы – один из классов графов.  $n$ -мерный куб  $Q_n$  вводится рекуррентно:

$$Q_1 = K_2, \quad Q_n = K_2 \times Q_{n-1}, \quad n > 1. \quad (3.2.1)$$

Таким образом,  $Q_n$  – граф порядка  $2^n$ , вершины которого можно представить векторами длины  $n$ , причем такими, что векторы, смежные одной вершине, будут различаться ровно в одной координате. На рис. 3.7 представлены кубы  $Q_2$  и  $Q_3$ . Видно, что каждая вершина  $n$ -мерного куба инцидентна  $n$  ребрам, следовательно, число ребер  $n$ -мерного куба равно  $n \cdot 2^{n-1}$ .

3. Слияние (отождествление) вершин. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – две произвольные вершины графа  $G$ , а  $G_1 = G \setminus \{x_1\} \setminus \{x_2\}$ . К графу  $G_1$  присоединим новую вершину  $y_1$ , соединив ее ребром с каждой из вершин, входящих в объединение окружений вершин  $x_1$  и  $x_2$  в графе  $G$ . Построенный граф  $G_1$  получен из  $G$  отождествлением вершин  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 3.8).

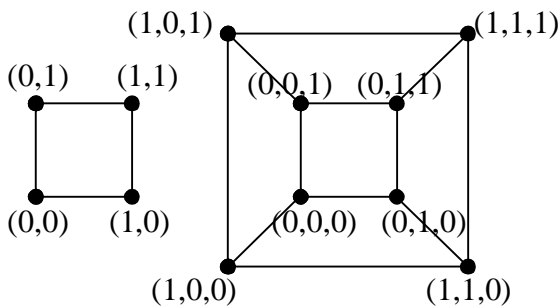


Рис. 3.7

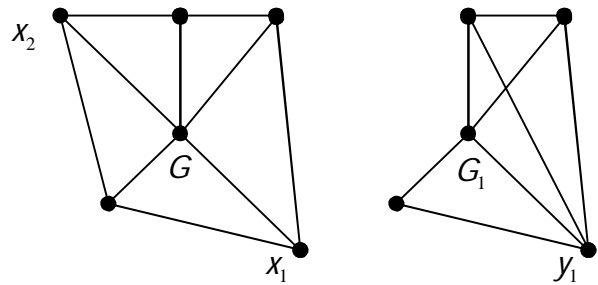


Рис. 3.8

Операция стягивания ребра означает отождествление двух смежных вершин. Граф  $G$  называется стягиваемым к графу  $G_1$ , если  $G_1$  получается из  $G$  в результате некоторой последовательности стягиваний ребер.

4. Расщепление вершин. Пусть  $x_1$  – одна из вершин графа  $G$ . Разобьем ее окружение на две части  $N_1$  и  $N_2$ ; удалим вершину  $x_1$  вместе с инцидентными ей ребрами; добавим новые вершины  $x_2$  и  $x_3$ , и соединяющее их ребро  $(x_2, x_3)$ ; вершину  $x_2$  соединим с каждой



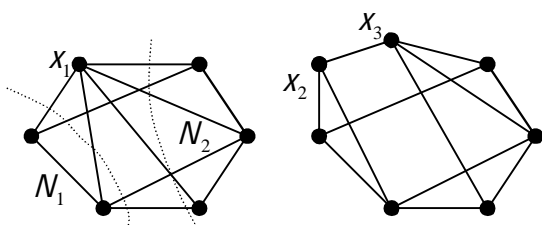


Рис. 3.9

вершиной из множества  $N_1$ , а вершину  $x_3$  с каждой вершиной из множества  $N_2$ . В результате получим граф  $\tilde{G}$ . Этот граф построен из исходного графа  $G$  расщеплением вершины  $x_1$  (рис. 3.9).

### 3.3. Маршруты, цепи, циклы

Чередующая последовательность  $x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, x_k, u_k, x_{k+1}$  вершин и ребер графа, такая что  $u_i = x_i x_{i+1}$ ,  $i = \overline{1, k}$ , называется маршрутом, соединяющим вершины  $x_1$  и  $x_{k+1}$ . Очевидно, что маршрут можно задать последовательностью его вершин  $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$  или последовательностью ребер  $u_1, u_2, \dots, u_k$ . Маршрут называется цепью, если все его ребра различны, и простой цепью, если все его вершины, кроме, возможно, крайних, различны. Гамильтоновой цепью называется простая цепь, содержащая все вершины графа.

Маршрут называется циклическим, если  $x_1 = x_{k+1}$ . Циклическая цепь называется циклом, а циклическая простая цепь – простым циклом. Число ребер в маршруте называется длиной маршрута. Гамильтоновым циклом называется простой цикл, содержащий все вершины графа. Длина всякого цикла не менее трех в графе без петель и кратных ребер. Минимальная из длин циклов графа называется его обхватом.

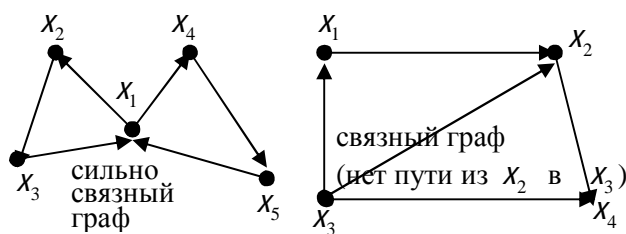


Рис. 3.10

Важным понятием теории графов является связность. Граф называется связным, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом. Для орграфа существует еще понятие сильной связности. Для этого определим понятие пути. Путь – это ориентированный маршрут. Поэтому если для установления простой (или слабой) связности графа ориентацию его дуг принимать в расчет не следует, то для установления сильной связности это необходимо (рис. 3.10). Орграф называется сильно связным, если для любых двух вершин  $x_i, x_j \in S$  найдется путь с началом в  $x_i$  и концом в  $x_j$ . Для неориентированного графа понятие пути и маршрута совпадают.

Теорема 3.1. Для любого графа  $G$  либо он сам, либо его дополнение является связным.

**Доказательство.** Пусть  $G$  – несвязный граф (рис. 3.11),  $A$  – одна из его областей связности и  $B = G \setminus A$ . Тогда для  $\forall x \in A$  и  $\forall y \in B$  в дополнительном графе  $\tilde{G}$  есть ребро  $(x, y)$ , т.е. произвольная вершина из  $B$  соединена с  $x$  маршрутом единичной длины, а про-

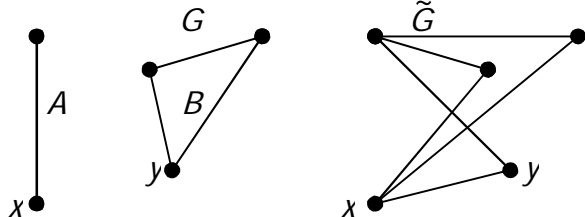


Рис. 3.11

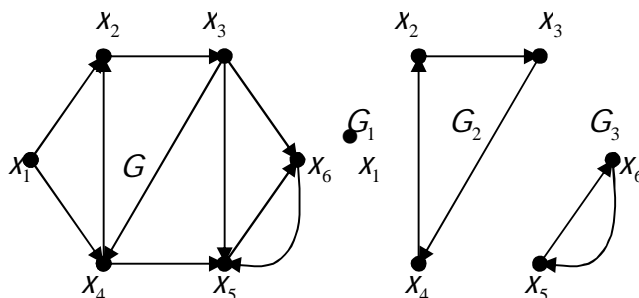


Рис. 3.12

извольная вершина из  $A$ , отличная от  $x$ , соединена с  $x$  маршрутом длиной не более чем два ребра, т.е. граф  $\tilde{G}$  связан.

Рассмотрим  $S = \bigcup_i S_i$  разложение множества вершин графа  $G = (S, U)$  на попарно непересекающиеся подмножества, причем такое, что все вершины в каждом  $S_i$  связаны, а вершины из различных  $S_i$  не связаны. Тогда можно написать разложение  $G = \bigcup_i G_i(S_i, U_i)$  графа  $G$  на непересекающиеся связные подграфы  $G_i(S_i, U_i)$ . Такое разложение называется прямым, а сами подграфы – компонентами связности графа  $G$ .

**Теорема 3.2. Любой граф представляется в виде объединения непересекающихся связных (сильно связных) компонент. Разложение графа на связные (сильно связные) компоненты определяется однозначно.**

На рис. 3.12 изображен орграф, разлагающийся на три сильно связных компоненты: подграфы  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$ .

**Теорема 3.3. Пусть  $G = (S, U)$  является  $n$ -вершинным неориентированным графом с  $k$  компонентами связности. Тогда число ребер в таком графе  $m(G)$  удовлетворяет условию**

$$n - k \leq m(G) \leq C_{n-k+1}^2, \quad (3.3.1)$$

**причем обе эти оценки достижимы.**

Например, на рис. 3.13 изображен неориентированный граф, у которого  $n=7$ ,  $m=6$ ,  $k=2$ . Тогда  $7-2=5 < 6 < C_6^2=15$ , т.е. оценка теоремы 3.3 справедлива.

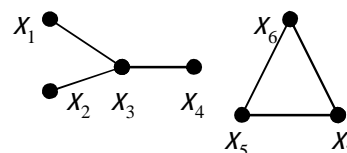


Рис. 3.13

В различных приложениях теории графов дугам (ребрам) графов, моделирующих реальные процессы, обычно сопоставляются какие-либо числовые характеристики. Например, если дугами изображаются транспортные магистрали, то числовой характеристикой дуги может быть пропускная способность соответствующей магистрали и тому подобное. В таких случаях говорят, что дугам графа приписаны определенные веса.

Пусть  $G = (S, U)$  - орграф. Если каждой дуге  $(x_i, x_j) \in U$  поставлено в соответствие некоторое число  $\omega(x_i, x_j)$ , то граф  $G$  называется графом со взвешенными дугами или сетью. При этом вершины графа называются узлами сети. Число  $\omega(x_i, x_j)$  называется весом дуги  $(x_i, x_j)$ .

Весом пути ? (длиной, стоимостью и так далее в зависимости от контекста) сети  $G_\omega$  называется число

$$\omega(?) = \sum_{(x_i, x_j) \in ?} \omega(x_i, x_j) \quad (3.3.2)$$

Понятие сети и веса маршрута для неориентированного графа определяется аналогично.

### 3.4. Способы задания графов

В подавляющем большинстве случаев граф задается матрицей. Для расчетов на ЭВМ – это единственный способ. Существует редко применяемый сейчас метод задания графа в виде латинской матрицы. В этом способе направление дуг задается порядком букв в их названии. Например, рассмотрим граф, изображенный на рис. 3.14. Для него латинская матрица имеет следующий вид:

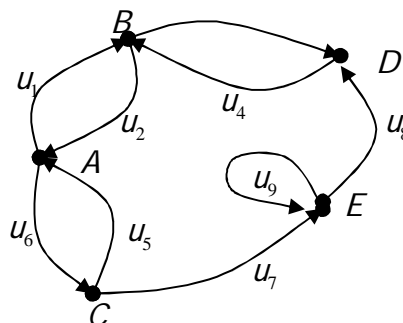


Рис. 3.14

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<i>A</i>		<i>AB</i>	<i>AC</i>		
<i>B</i>	<i>BA</i>			<i>BD</i>	
<i>C</i>	<i>CA</i>				<i>CE</i>
<i>D</i>		<i>DB</i>			
<i>E</i>				<i>ED</i>	<i>EE</i>

Если граф неориентированный, то в латинской матрице просто штрихуют соответствующую клеточку в таблице. Наиболее часто граф задают с помощью матриц смежности и инцидентий. Рассмотрим изображенный на рис. 3.14 граф. Как для орграфов, так и для неориентированных графов можно определить матрицу смежности вершин. Это квадратная матрица

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$n \times n$  порядка, где  $n$  – число вершин. Ее строки и столбцы соответствуют вершинам графа. Элементы  $p_{ij}$  матрицы смежности вершин равны числу дуг, идущих из  $i$ -й вершины в  $j$ -ю. Если орграф не содержит параллельных дуг, то матрица является бинарной и состоит только из нулей и единиц. В случае неориентированного графа ему вместе с ребром  $x_j x_i$  принадлежит и ребро  $x_i x_j$ , поэтому матрица смежности вершин будет симметрической. Матрица смежности вершин однозначно определяет структуру графа.

**Теорема 3.4. Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности вершин получаются друг из друга одновременными перестановками строк и столбцов (т.е. одновременно с перестановкой  $i$ -й и  $j$ -й строк переставляются  $i$ -й и  $j$ -й столбцы).**

*Доказательство.* Рассмотрим два графа  $G$  и  $G_1$ , отличающихся лишь нумерацией вершин. Это значит, что в этих графах существует подстановка  $s$  на множестве вершин, сохраняющая их смежность: вершины  $x_i$  и  $x_j$  тогда и только тогда смежны в  $G$ , когда их образы  $y_i = s(x_i)$  и  $y_j = s(x_j)$  смежны в  $G_1$ . Тогда, если  $P(G) = P$  и  $P(G_1) = P^{(1)}$ , то  $p_{s(i)s(j)}^{(1)} = p_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Из доказанной теоремы следует, что ранги матриц смежности изоморфных графов равны. Это позволяет ввести для графа следующее определение ранга: рангом графа называется ранг его матрицы смежности вершин. Обозначается ранг графа –  $\text{rank } G$ .

Аналогично можно определить и матрицу смежности дуг. Это также квадратная матрица  $m \times m$  порядка, где  $m$  – число дуг. Рассмотрим тот же граф без петли  $u_9$ . Элементы  $q_{ij}$  этой матрицы равны единице, если дуга  $u_i$  непосредственно предшествует дуге  $u_j$ , и равны нулю в остальных случаях. Для неориентированного графа элемент  $q_{ij}$  равен единице, если  $u_i$  и  $u_j$  смежны, и нулю в остальных случаях.

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Определим для рассматриваемого графа матрицу инцидентий. Это прямоугольная матрица размерности  $n \times m$ , где  $n$  – число вершин, а  $m$  – число дуг. Элементы  $r_{ij}$  этой матрицы равны плюс единице, если дуга  $u_j$  исходит из  $i$ -й вершины (начальная вершина), минус единице, если дуга  $u_j$  входит в  $i$ -ю вершину (конечная вершина), нулю, если дуга не инцидентна  $i$ -й вершине. В случае неориентированного графа элементами матрицы будут числа единица и нуль, т.е.  $r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } u_j, \\ 0, & \text{вершина } x_i \text{ не инцидентна ребру } u_j. \end{cases}$

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Строки матрицы инцидентий называют векторами инцидентий графа  $G$ . Матрица инцидентий также однозначно определяет структуру графа. Для матрицы инцидентий справедлива теорема, аналогичная теореме 3.4.

**Теорема 3.5. Графы (орграфы) изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инцидентий получаются друг из друга произвольными перестановками строк и столбцов.**

Простой взвешенный граф (сеть) может быть представлен также своей матрицей весов  $\Omega = (\omega_{ij})$ , где  $\omega_{ij}$  – вес ребра, соединяющего вершины  $x_i$  и  $x_j$ . Веса несуществующих ребер полагают равными нулю или бесконечности в зависимости от приложений. Очевидно, что матрица весов является простым обобщением матрицы смежности вершин.

Определим теперь матрицу Кирхгофа\*. Матрицей Кирхгофа графа  $G$  называется матрица  $B_{n \times n}$ ,  $n = |S|$ , если  $b_{ij} = \begin{cases} -1, & x_i \text{ и } x_j \text{ смежны,} \\ 0, & x_i \text{ и } x_j \text{ не смежны и } i \neq j, \\ P(x_i), & i = j. \end{cases}$  Сумма элементов в каждой стро-

ке и каждом столбце этой матрицы равна нулю, т.е.  $\sum_{j=1}^n b_{ij} = 0, j = \overline{1, n}, \sum_{j=1}^n b_{ij} = 0, i = \overline{1, n}$ .

Кроме того, из этого следует, что алгебраические дополнения всех элементов матрицы  $B$  равны между собой.

\* Густав Роберт Кирхгоф (1824 – 1887) – немецкий физик.

Определим матрицы связности и достижимости. Пусть  $P(G)$  – матрица смежности вершин графа  $G = (S_n, U)$ , а  $B = E + P + P^2 + \dots + P^n$ . Введем матрицу  $C = (c_{ij})$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  по правилу  $c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } b_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{если } b_{ij} = 0. \end{cases}$  Матрица  $C$  называется матрицей связности, если  $G$  – неорграф, и матрицей достижимости, если  $G$  – орграф. Это значит, что в графе  $G$  тогда и только тогда существует маршрут из вершины  $x_i$  в вершину  $x_j$ , когда  $c_{ij} = 1$ . Таким образом, в матрице  $C$  содержится информация о существовании связей между различными элементами графа  $G$  посредством маршрутов.

Матрица контрдостижимости  $L = (l_{ij})$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , определяется следующим образом:

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ достижима из вершины } x_j, \\ 0, & \text{если вершина } x_i \text{ не достижима из вершины } x_j. \end{cases} \quad \text{Можно показать, что } L = C^T.$$

Матрицы  $C$  и  $L$  используются для нахождения сильных компонент графа. Пусть  $F = C * L$ , где операция  $*$  означает поэлементное произведение матриц  $C$  и  $L$ :  $f_{ij} = c_{ij} \cdot l_{ij}$  (см. подразд. 1.2). Элемент  $f_{ij}$  матрицы  $F$  равен единице тогда и только тогда, когда вершины  $x_i$  и  $x_j$  взаимно достижимы, т.е.  $x_i$  достижима из  $x_j$ , а  $x_j$  – из  $x_i$ . Таким образом, сильная компонента орграфа, содержащая вершину  $x_i$ , состоит из элементов  $x_j$ , для которых  $f_{ij} = 1$ .

**Пример 1.** Матрицы достижимости  $C$  и контрдостижимости  $L$  для графа, изображенного на рис. 3.12, равны

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = E + P + P^2 + P^3 + P^4 + P^5 + P^6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 10 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 13 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L = C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = C * L = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1} \end{matrix}.$$

По матрице  $F$  легко определить состав вершин трех подграфов, образующих сильно связанные компоненты исходного графа.

### 3.5. Метрические характеристики графа

Рассмотрим связный граф  $G = (S, U)$ , пусть  $x_1$  и  $x_2$  – две его вершины. Длина кратчайшего  $(x_1, x_2)$  – маршрута называется расстоянием между вершинами  $x_1$  и  $x_2$ , обозначается через  $d(x_1, x_2)$ . Очевидно, что расстояние между вершинами является простой цепью и  $d(x_i, x_i) = 0$ . Для любой вершины  $x$  величина

$$e(x) = \max_{y \in S} d(x, y) \quad (3.5.1)$$

называется эксцентриситетом вершины  $x$ . Максимальный из всех эксцентриситетов вершин называется диаметром графа и обозначается  $d(G)$ , т.е.

$$d(G) = \max_{x \in S} e(x) = \max_{x \in S} \max_{y \in S} d(x, y). \quad (3.5.2)$$

Минимальный из эксцентриситетов вершин графа называется его радиусом и обозначается через  $r(G)$ :

$$r(G) = \min_{x \in S} e(x) = \min_{x \in S} \max_{y \in S} d(x, y). \quad (3.5.3)$$

Вершина  $x$  называется периферийной, если ее эксцентриситет равен диаметру графа, т.е.  $e(x) = d(G)$ . Простая цепь, расстояние между концами которой равно  $d(G)$ , называется диаметральной цепью.

**Теорема 3.6.** Для любого связного графа  $G$  справедливо неравенство  $d(G) \leq \text{rank } G$ .

**Доказательство.** Пусть  $d(G) = d$  и  $x_1, x_2, \dots, x_{d+1}$  – одна из диаметральных цепей графа  $G$ . Рассмотрим матрицу смежности вершин  $P(G)$  и выберем нумерацию вершин так, чтобы вершины  $x_1, x_2, \dots, x_{d+1}$  имели номера  $1, 2, \dots, d+1$  соответственно. Так как цепь

$x_1, x_2, \dots, x_{d+1}$  является подграфом  $G' \subset G$ , то  $P(G) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  представляет собой клеточную

матрицу, в левом верхнем углу которой из-за выбранной нумерации вершин расположена матрица смежности подграфа  $G'$ . Этот подграф – простая цепь, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{– симметрическая матрица порядка } d+1, \text{ все элементы которой,}$$

за исключением двух ближайших к главной диагонали полос, равны нулю. Минор порядка  $d$  матрицы  $A$ , остающийся после вычеркивания первого столбца и последней строки, равен единице. Следовательно,  $\text{rank } G = \text{rank } P(G) \geq \text{rank } A \geq d = d(G)$ , т.е.  $\text{rank } G \geq d(G)$ .

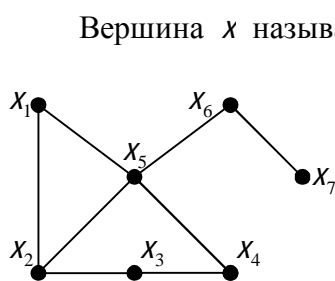


Рис. 3.15

Вершина  $x$  называется центральной, если  $e(x) = r(G)$ . Множество всех центральных вершин графа называется его центром. Центром может быть единственная вершина графа или несколько вершин (рис. 3.15). Здесь  $e(x_1) = e(x_2) = e(x_4) = e(x_6) = 3$ ,  $e(x_3) = e(x_7) = 4$ ,  $e(x_5) = 2$ . Таким образом,  $d(G) = 4$ ,  $r(G) = 2$ . Периферийные вершины:  $x_3$  и  $x_7$ , диаметральные цепи:  $x_3 - x_2 - x_5 - x_6 - x_7$  и  $x_3 - x_2 - x_5 - x_6 - x_7$ , центральная вершина  $x_5$ .

### 3.6. Упорядочивание дуг и вершин орграфа

Расчеты в задачах, связанных с графами, заметно упрощаются, если их элементы упорядочены. Под упорядочиванием вершин связного орграфа без контуров, то есть циклических цепей, понимают такое разбиение его вершин на группы, при котором:

- 1) вершины первой группы не имеют предшествующих вершин, а вершины последней группы последующих;
- 2) вершины любой другой группы не имеют предшествующих в следующей группе;
- 3) вершины одной и той же группы дугами не соединяются.

Такое разбиение всегда возможно. В результате подобного упорядочивания получается граф, изоморфный исходному. Упорядочивание элементов выполняется графическим или матричным способом. Графический способ носит название алгоритма Фалкерсона и состоит из следующих шагов.

1. Найти вершины графа, в которые не входит ни одна дуга. Они образуют первую группу. Пронумеровать вершины группы в произвольном порядке.
2. Вычеркнуть все пронумерованные вершины и дуги, из них исходящие. В получившемся графе найдется, по крайней мере, одна вершина, в которую не входит ни одна дуга. Этой вершине, входящей во вторую группу, присвоить очередной номер и так далее. Второй шаг повторять до тех пор, пока не будут упорядочены все вершины.

Аналогичным образом упорядочиваются дуги орграфа. Рассмотрим несколько примеров. Упорядочим вершины графа, изображенного на рис. 3.16,а. Вершина  $B$  не содержит входящих дуг, отнесем ее к первой группе. Вычеркиваем все дуги, исходящие из  $B$ . Полу-

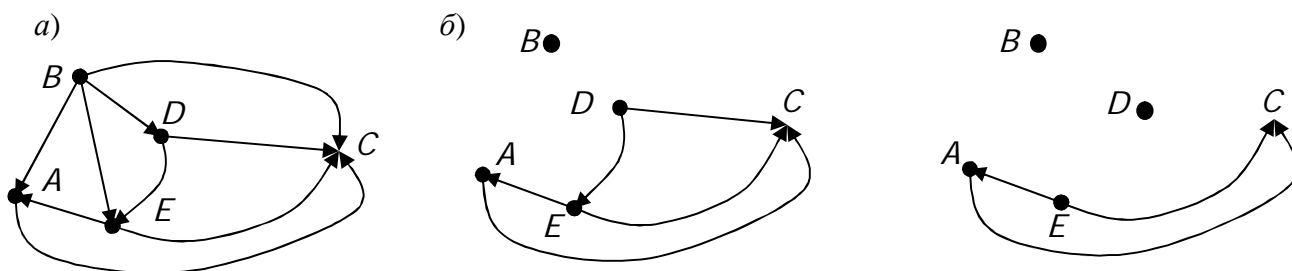


Рис. 3.16

чим граф, приведенный на рис. 3.16,б. В нем опять находим одну вершину, в которую не заходит ни одна дуга. Это вершина  $D$ . Вычеркиваем дуги, исходящие из  $D$ . Появится еще одна вершина – вершина  $E$ , в которую не заходит ни одна дуга. После вычеркивания дуг  $EC$  и  $EA$  получим вершину  $A$ , которая входит, таким образом, в четвертую группу, а вершина  $C$  – в пятую. Изоморфный граф с упорядоченными вершинами изображен на рис. 3.17.



В данном примере в каждую группу входит только по одной вершине. Однако в общем случае в каждую такую группу могут входить несколько вершин, если граф большой и содержит много вершин. Упорядочим теперь вершины этого графа матричным способом. Для этого составим матрицу смежности вершин  $P$ . Вычислим компоненты вектора

$$v_1 = \sum_{i=1}^5 P^+(x_i),$$

представляющие собой полу-

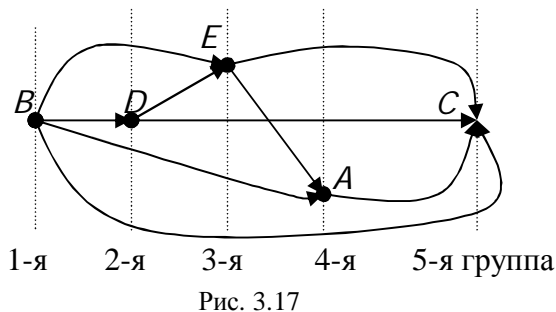


Рис. 3.17

степени захода вершин графа. Для орграфов различают полустепень захода  $P^+(x_i)$  вершины  $x_i$  (количество дуг, заходящих в  $x_i$ ) и полустепень выхода  $P^-(x_i)$  (количество дуг, исходящих из  $x_i$ ). Полустепень захода вершины  $B$  оказалась равной нулю. Это значит, что в эту вершину не заходит ни одна дуга, и вершина  $B$  образует первую группу. Исключим из рас-

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

	A	B	C	D	E
$v_1$	2	0	4	1	2
$v_2$	1	-	3	0	1
$v_3$	1	-	2	-	0
$v_4$	0	-	1	-	-
$v_5$	-	-	0	-	-
Группа	4	1	5	2	3

смотрения вершину  $B$  и дуги, из нее исходящие, вычеркнув соответствующую строку матрицы  $P$ . Затем вычислим компоненты вектора  $v_2 = v_1 - v_B$ . Нулевая компонента теперь будет соответствовать вершине  $D$ , т.е. вершина  $D$  образует вторую группу. Так продолжается до получения вектора  $v_i$ , у которого будет часть только нулевых компонент, а остальные вычеркнуты. В нашем случае это вектор  $v_5$  и вершина  $C$ , которая образует последнюю пятую группу.

При упорядочивании дуг получается та же картина, а сами дуги нумеруются подобным же образом. Используем опять граф на рис. 3.16, а).

1. Найдем дуги, не имеющие непосредственно предшествующих дуг (они образуют первую группу).

2. Вычеркнем найденные дуги. После этого найдется, по крайней мере, одна новая дуга, не имеющая непосредственно предшествующей (в графе без дуг первой группы). Эти дуги составят вторую группу. Вторым шагом повторяется до тех пор, пока все дуги не будут разбиты на группы. На рис. 3.18 изображен граф с упорядоченными по описанному алгоритму дугами. Штриховыми линиями показаны связи между дугами, существующие в исходном орграфе.

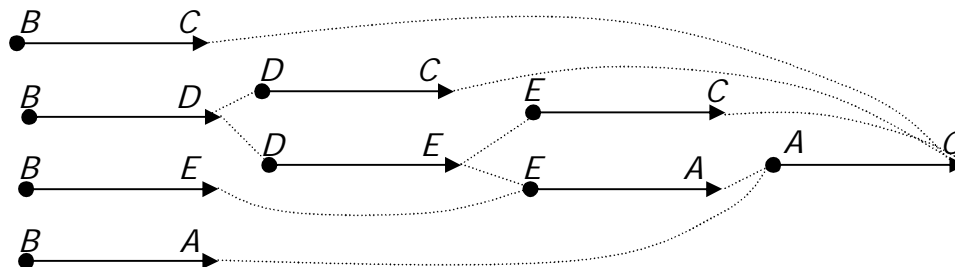


Рис. 3.18

### 3.7. Выявление маршрутов с заданным количеством ребер

С помощью матрицы смежности вершин можно найти все маршруты, содержащие заданное количество ребер (дуг). Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.7.** Для определения количества маршрутов, состоящих из  $k$  ребер (дуг), необходимо возвести в  $k$ -ю степень матрицу смежности вершин. Тогда элемент  $p_{ij}^{(k)}$  даст количество маршрутов длины  $k$  (состоящих из  $k$  ребер) из вершины  $x_i$  в вершину  $x_j$ .

**Пример 1.** Рассмотрим неориентированный граф, изображенный на рис. 3.19. Составим матрицу смежности вершин и возведем ее в квадрат. Резуль-

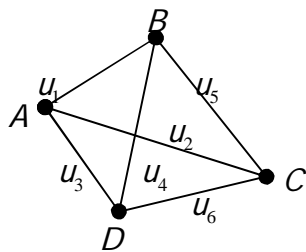


Рис. 3.19

тат возведения.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим первую строку. Элемент  $p_{11}^{(2)} = 3$ . Это значит, что существуют три маршрута из  $A$  в  $A$  длиной в два ребра. Действительно, это маршруты  $Au_1Bu_1A$ ,  $Au_2Cu_2A$ ,  $Au_3Du_3A$ . Из  $A$  в  $B$  существуют два маршрута:  $Au_2Cu_5B$ ,  $Au_3Du_4B$ . Если использовать числовую матрицу смежности вершин, то для нахождения самих маршрутов необходимо работать с графом. Если же воспользоваться модифицированной матрицей смежности, в ячейки которой записаны названия ребер, то можно получить не только количество маршрутов, но и сами маршруты. Действительно, для данного примера имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & 0 & u_5 & u_4 \\ u_2 & u_5 & 0 & u_6 \\ u_3 & u_4 & u_6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & 0 & u_5 & u_4 \\ u_2 & u_5 & 0 & u_6 \\ u_3 & u_4 & u_6 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 & u_2u_5 + u_3u_4 & u_1u_5 + u_3u_6 & u_1u_4 + u_2u_6 \\ u_5u_2 + u_4u_3 & u_1u_1 + u_5u_5 + u_4u_4 & u_1u_2 + u_4u_6 & u_1u_3 + u_5u_6 \\ u_5u_1 + u_6u_3 & u_1u_2 + u_6u_4 & u_2u_2 + u_5u_5 + u_6u_6 & u_2u_3 + u_5u_4 \\ u_4u_1 + u_2u_6 & u_3u_1 + u_5u_6 & u_3u_2 + u_4u_5 & u_3u_3 + u_4u_4 + u_6u_6 \end{pmatrix}.$$

Аналогично обстоит дело и с орграфом. У него матрица смежности вершин несимметрическая. Рассмотрим оргграф на рис. 3.20 и определим все маршруты с тремя ребрами. Матрица смежности и результаты ее возведения в квадрат и куб имеют следующий вид:

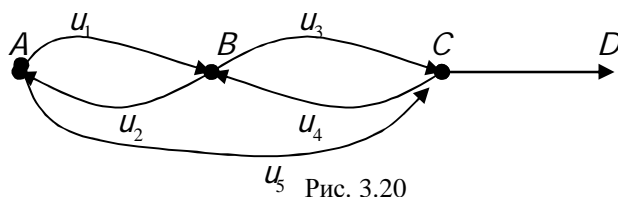


Рис. 3.20

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим элемент  $p_{22}^{(2)}$  после возведения матрицы смежности вершин в квадрат.  $p_{22}^{(2)} = 2$ , т.е. из вершины  $B$  в вершину  $B$  есть два маршрута длиной две дуги. Это маршруты  $Bu_3Cu_4B$  и  $Bu_2Au_1B$ . После возведения матрицы в куб сохраняется та же картина. Например,  $p_{12}^{(3)} = 2$ ; это значит, что есть два маршрута длиной три дуги из вершины  $A$  в вершину  $B$ . Это маршруты  $Au_1Bu_2Au_1B$  и  $Au_1Bu_3Cu_4B$ . Для получения цепей (маршрутов, в которых каждое ребро встречается один раз) нужно в модифицированной матрице  $P^3$  вычеркнуть те слагаемые, в которых какой-либо сомножитель встречается более одного раза.

Из теоремы 3.7 следуют два важных следствия, позволяющие определять наличие маршрутов и циклов в графе.

**Следствие 1.** В графе  $G$  мощности  $n$  тогда и только тогда существует  $(x_i, x_j)$ -маршрут  $(x_i \neq x_j)$ , когда  $(i, j)$ -й элемент матрицы  $P + P^2 + \dots + P^{n-1}$  не равен нулю.

**Следствие 2.** В графе  $G$  мощности  $n$  тогда и только тогда существует цикл, содержащий вершину  $x_i$ , когда  $(i, i)$ -й элемент матрицы  $P + P^2 + \dots + P^n$  не равен нулю.

В рассмотренном примере 1 имеем  $n = 4$ ,  $P^4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A = P + P^2 + P^3 =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = P + P^2 + P^3 + P^4 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим элементы матрицы  $A$ . Например,  $a_{24} = 2 \neq 0$ . Это значит, что в исходном графе (см. рис. 3.20) существуют маршруты из вершины  $B$  в вершину  $D$ . Это маршруты:  $BCD$ ,  $BACD$ ,  $BCBACD$ . Аналогично,  $b_{22} = 7 \neq 0$ . Таким образом, существуют циклы, проходящие через вершину  $B$ , например, циклы  $BACB$ ,  $BAB$  и  $BCB$ . Так как  $b_{44} = 0$ , то через вершину  $D$  не проходит ни один цикл. Это хорошо видно на рис. 3.20.

### 3.8. Определение экстремальных путей на графах. Метод Шимбелла

Введем, следуя Шимбеллу, специальные операции над элементами матрицы смежности вершин, позволяющие находить кратчайшие или максимальные пути между вершинами, состоящие из заданного количества ребер. Эти операции таковы.

1. Операция умножения двух величин  $a$  и  $b$  при возведении матрицы в степень соответствует их алгебраической сумме, то есть

$$\begin{cases} a \cdot b = b \cdot a \Rightarrow a + b = b + a, \\ a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \Rightarrow a + 0 = 0. \end{cases} \quad (3.8.1)$$

2. Операция сложения двух величин  $a$  и  $b$  заменяется выбором из этих величин минимального (максимального) элемента, то есть

$$a + b = b + a = \min(\max) \{a, b\} \quad (3.8.2)$$

нули при этом игнорируются. Минимальный или максимальный элемент выбирается из ненулевых элементов. Нуль в результате операции (3.8.2) может быть получен лишь тогда, когда все элементы из выбираемых – нулевые.

С помощью этих операций длины кратчайших или максимальных путей между всеми вершинами определяются возведением в степень весовой матрицы  $\Omega$ , содержащей веса ребер. Например, элементы матрицы  $\Omega^2$  вычисляются следующим образом:

$\omega_{ij}^{(2)} = \min(\max) \{(\omega_{i1}^{(1)} + \omega_{1j}^{(1)}), (\omega_{i2}^{(1)} + \omega_{2j}^{(1)}), \dots, (\omega_{in}^{(1)} + \omega_{nj}^{(1)})\}$  Аналогично находят элементы  $k$ -й степени матрицы  $\Omega$ . Рассмотрим пример. Составим для приведенного на рис. 3.21 графа матрицу весов. Она определяет все маршруты, состоящие из одного ребра. Найдём кратчайшие пути из двух ребер, для этого возведем эту матрицу в квадрат с учетом операций Шимбелла ( $\min$  – кратчайшие пути):

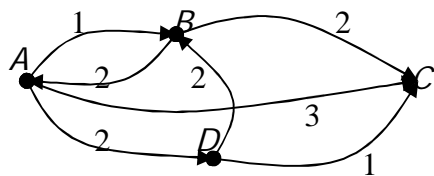


Рис. 3.21

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Например,  $\omega_{11}^{(2)} = \min \{(\omega_{11}^{(1)} + \omega_{11}^{(1)}), (\omega_{12}^{(1)} + \omega_{21}^{(1)}), (\omega_{13}^{(1)} + \omega_{31}^{(1)}), (\omega_{14}^{(1)} + \omega_{41}^{(1)})\} = \min \{0+0, (1+2), (3+0), (2+0)\} = \min \{0, 3, 0, 0\} = 0$ .

Аналогично, кратчайшие пути из трех ребер будут

$$P^3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \text{ и так далее. Например, длина кратчайшего}$$

пути из трех ребер из вершины  $D$  в вершину  $C$  равна семи. Это путь  $DBAC$ .

### 3.9. Практическое занятие № 6. Способы задания графов. Операции над графами. Метрические характеристики графов. Упорядочение элементов орграфов

3.9.1 Показать, что для произвольного графа  $G=(S,U)$  справедливо равенство  $\sum_{x \in S} P(x) = 2|U|$ .

3.9.2. Для изображенных графов на рис. 3.22 составить матрицы смежности вершин, смежности дуг и инцидентий.

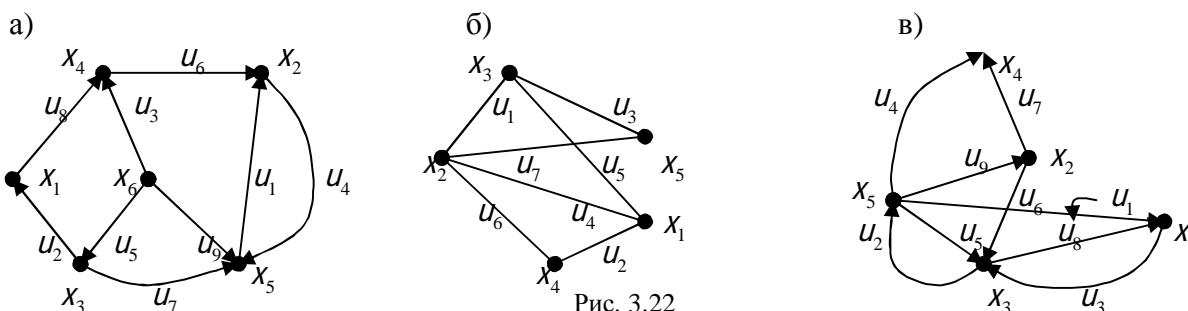


Рис. 3.22

3.9.3. По матрице смежности вершин построить наглядные изображения графов:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ г) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.9.4. На рис. 3.23 приведены графы  $G_1$  и  $G_2$ . Найти  $G_1 \cup G_2$  и  $G_1 \times G_2$  если:

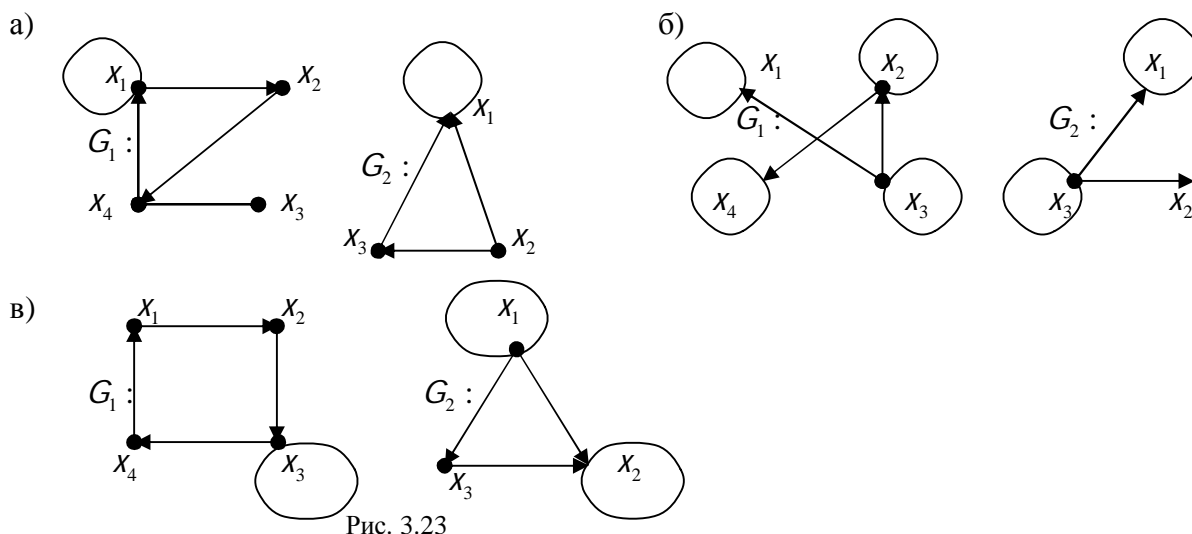


Рис. 3.23

3.9.5. Найти матрицы сильных компонент и маршрутов длины три дуги (ребра), исходящих из вершины  $x_1$  для графов, изображенных на рис. 3.24:

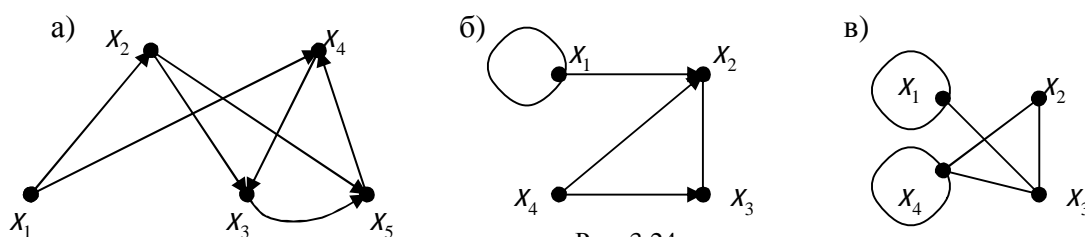


Рис. 3.24

3.9.6. Найти эксцентриситеты вершин, радиусы и диаметры графов, периферийные, центральные вершины и диаметральные цепи графов, приведенных на рис. 3.25:

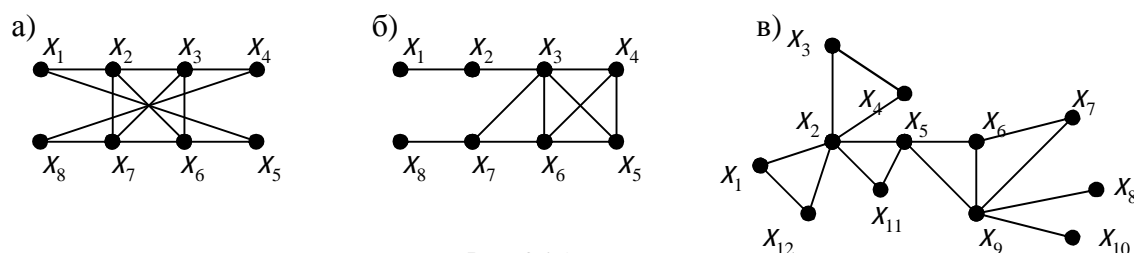


Рис. 3.25

3.9.7. Упорядочить вершины и дуги орграфов, изображенных на рис. 3.26, графическим и матричным способом (дуги – только графическим способом).

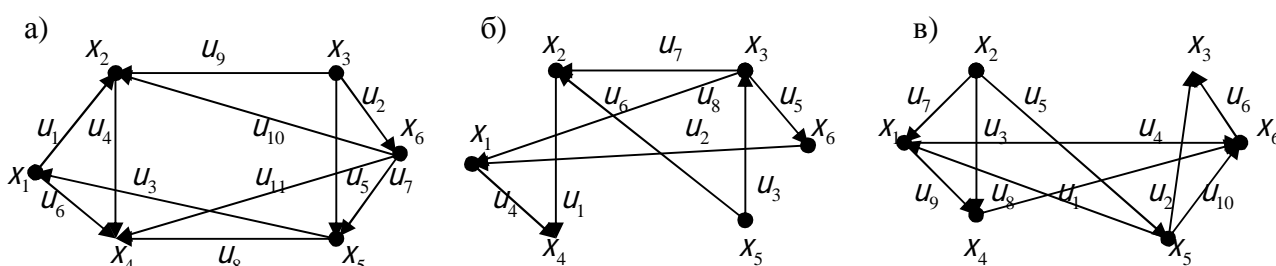


Рис. 3.26

3.9.8. Доказать, что три графа, изображенных на рис. 3.27, изоморфны, а графы на рис. 3.28 не изоморфны.

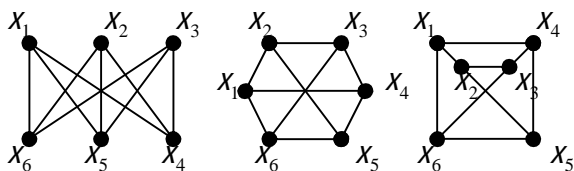


Рис. 3.27

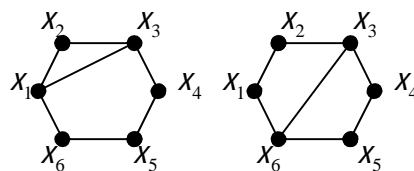


Рис. 3.28

3.9.9. Построить граф, центр которого:

- состоит ровно из одной вершины;
- состоит ровно из трех вершин и не совпадает с множеством всех вершин;
- совпадает с множеством всех вершин.

3.9.10. Показать, что в любом графе без петель и кратных ребер, содержащем не менее двух вершин, найдутся две вершины с одинаковыми степенями.

### 3.10. Нахождение кратчайших путей. Алгоритм Дейкстры\*

Рассмотрим еще несколько алгоритмов нахождения кратчайшего пути между двумя заданными вершинами в ориентированной сети. Пусть  $G = \{S, U, \Omega\}$  - ориентированный граф со взвешенными дугами. Обозначим  $s$ -вершину – начало пути и  $t$ -вершину – конец пути.

Общий подход к решению задачи о кратчайшем пути был развит американским математиком Ричардом Беллманом\*\*, который предложил название «динамическое программирование». Задача о кратчайшем пути – частный случай следующей задачи: найти в заданном графе пути, соединяющие две заданные вершины и доставляющие минимум или максимум некоторой аддитивной функции, определенной на путях. Чаще всего эта функция трактуется как длина пути, и задача называется задачей о кратчайших путях. Алгоритм Дейкстры – одна из реализаций этой задачи. Его часто называют алгоритмом расстановки меток. В процессе работы этого алгоритма узлам сети  $x_i \in S$  приписываются числа (метки)  $d(x_i)$ , которые служат оценкой длины (веса) кратчайшего пути от вершины  $s$  к вершине  $x_i$ . Если вершина  $x_i$  получила на некотором шаге метку  $d(x_i)$ , это означает, что в графе  $G$  существует путь из  $s$  в  $x_i$ , имеющий вес  $d(x_i)$ . Метки могут находиться в двух состояниях – быть временными или постоянными. Превращение метки в постоянную означает, что кратчайшее расстояние от вершины  $s$  до соответствующей вершины найдено.

Алгоритм Дейкстры содержит одно ограничение – веса дуг должны быть положительными. Сам алгоритм состоит из двух этапов. На первом находится длина кратчайшего пути, на втором строится сам путь от вершины  $s$  к вершине  $t$ .

**Этап 1.** Нахождения длины кратчайшего пути.

*Шаг 1.* Присвоение вершинам начальных меток.

Полагаем  $d(s) = 0^*$  и считаем эту метку постоянной (постоянные метки помечаются сверху звездочкой). Для остальных вершин  $x_i \in S$ ,  $x_i \neq s$  полагаем  $d(x_i) = \infty$  и считаем эти метки временными. Пусть  $\tilde{x} = s$ ,  $\tilde{x}$  – обозначение текущей вершины.

*Шаг 2.* Изменение меток.

Для каждой вершины  $x_i$  с временной меткой, непосредственно следующей за вершиной  $\tilde{x}$ , меняем ее метку в соответствии со следующим правилом:

$$d_{\text{нов.}}(x_i) = \min \{d_{\text{стар.}}(x_i), d(\tilde{x}) + \omega(\tilde{x}, x_i)\} \quad (3.10.1)$$

\* Едсгер Дейкстра (1930 - 2002) – нидерландский математик.

\*\* Ричард Эрнест Беллман (1920 – 1984) – американский математик.

**Шаг 3.** Превращение метки из временной в постоянную.

Из всех вершин с временными метками выбираем вершину  $x_j^*$  с наименьшим значением метки  $d(x_j^*) = \min \{d(x_j) \mid x_j \in S, d(x_j) - \text{временная}\}$ .

$$(3.10.2)$$

Превращаем эту метку в постоянную и полагаем  $\tilde{x} = x_j^*$ .

**Шаг 4.** Проверка на завершение первого этапа.

Если  $\tilde{x} = t$ , то  $d(\tilde{x})$  – длина кратчайшего пути от  $s$  до  $t$ . В противном случае происходит возвращение ко второму шагу.

**Этап 2.** Построение самого кратчайшего пути.

**Шаг 5.** Последовательный поиск дуг кратчайшего пути.

Среди вершин, непосредственно предшествующих вершине  $\tilde{x}$  с постоянными метками, находим вершину  $x_i$ , удовлетворяющую соотношению

$$d(\tilde{x}) = d(x_i) + \omega(x_i, \tilde{x}) \quad (3.10.3)$$

Включаем дугу  $(x_i, \tilde{x})$  в искомый путь и полагаем  $\tilde{x} = x_i$ .

**Шаг 6.** Проверка на завершение второго этапа.

Если  $\tilde{x} = s$ , то кратчайший путь найден – его образует последовательность дуг, полученных на пятом шаге и выстроенных в обратном порядке. В противном случае возвращаемся к пятому шагу.

**Пример 1.** Задана весовая матрица  $\Omega$  сети  $G$ . Найти минимальный путь из вершины  $x_1$  в вершину  $x_6$  по алгоритму Дейкстры.

На рис. 3.29 изображен сам граф по данной матрице весов. Поскольку в данном графе есть цикл между вершинами  $x_2$ ,  $x_3$  и  $x_5$ , то вершины графа нельзя упорядочить по алгоритму Фалкерсона. На рисунке графа временные и постоянные метки указаны над соответствующей вершиной. Итак, распишем подробно работу алгоритма Дейкстры по шагам.

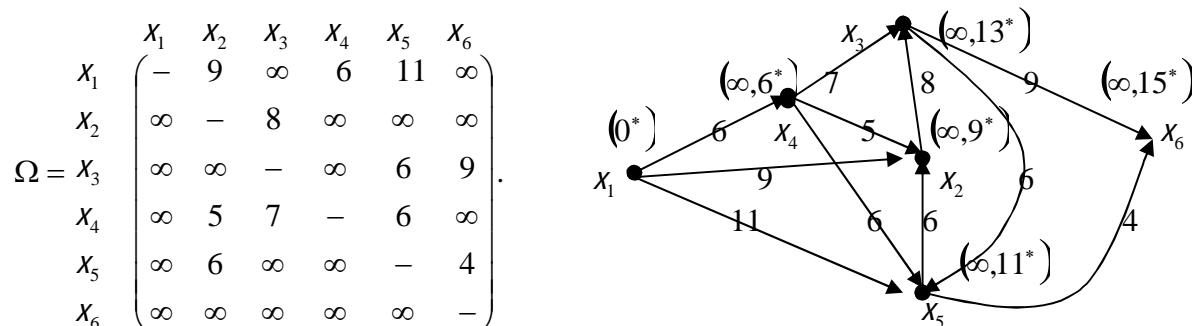


Рис. 3.29

**Этап 1. Шаг 1.** Полагаем  $d(x_1) = 0^*$ ,  $\tilde{x} = x_1$ ,  $d(x_2) = d(x_3) = d(x_4) = d(x_5) = d(x_6) = \infty$ .

**1-я итерация. Шаг 2.** Множество вершин, непосредственно следующих за  $\tilde{x} = x_1$  с временными метками  $\tilde{S} = \{x_2, x_4, x_5\}$ . Пересчитываем временные метки этих вершин:  $d(x_2) = \min \{\infty, 0^* + 9\} = 9$ ,  $d(x_4) = \min \{\infty, 0^* + 6\} = 6$ ,  $d(x_5) = \min \{\infty, 0^* + 11\} = 11$ .

**Шаг 3.** Одна из временных меток превращается в постоянную  $\min \{9, \infty, 6, 11, \infty\} = 6^* = d(x_4)$ ,  $\tilde{x} = x_4$ .

**Шаг 4.**  $\tilde{x} = x_4 \neq t = x_6$ , происходит возвращение на второй шаг.

**2-я итерация. Шаг 2.**  $\tilde{S} = \{x_2, x_3, x_5\}$ ,  $d(x_2) = \min \{9, 6^* + 5\} = 9$ ,  $d(x_3) = \min \{9, 6^* + 7\} = 13$ ,  $d(x_5) = \min \{11, 6^* + 6\} = 11$ .

**Шаг 3.**  $\min \{d(x_2), d(x_3), d(x_5), d(x_6)\} = \min \{9, 13, 11, \infty\} = 9^* = d(x_2)$ ,  $\tilde{x} = x_2$ .



Шаг 4.  $x_2 \neq x_6$ , возвращение на второй шаг.

3-я итерация. Шаг 2.  $\tilde{S} = \{x_3\}$ ,  $d(x_3) = \min \{3, 9^* + 8\} = 13$ .

Шаг 3.  $\min \{d(x_3), d(x_5), d(x_6)\} = \min \{13, 11, \infty\} = 11^* = d(x_5)$ ,  $\tilde{x} = x_5$ .

Шаг 4.  $x_5 \neq x_6$ , возвращение на второй шаг.

4-я итерация. Шаг 2.  $\tilde{S} = \{x_6\}$ ,  $d(x_6) = \min \{\infty, 11^* + 4\} = 15$ .

Шаг 3.  $\min \{d(x_3), d(x_6)\} = \min \{13, 15\} = 13^* = d(x_3)$ ,  $\tilde{x} = x_3$ .

Шаг 4.  $x_3 \neq x_6$ , возвращение на второй шаг.

5-я итерация. Шаг 2.  $\tilde{S} = \{x_6\}$ ,  $d(x_6) = \min \{5, 13^* + 9\} = 15$ .

Шаг 3.  $\min \{d(x_6)\} = \min \{15\} = 15^*$ ,  $\tilde{x} = x_6$ .

Шаг 4.  $x_6 = t = x_6$ , конец первого этапа.

**Этап 2.** Шаг 5. Составим множество вершин, непосредственно предшествующих  $\tilde{x} = x_6$  с постоянными метками  $\tilde{S} = \{x_3, x_5\}$ . Проверим для этих двух вершин выполнение равенства (3.10.3):  $d(\tilde{x}) = 15 = 11^* + 4 = d(x_5) + \omega(x_5, x_6)$ ,  $d(\tilde{x}) = 15 \neq 13^* + 9 = d(x_3) + \omega(x_3, x_6)$ . Включаем дугу  $(x_5, x_6)$  в кратчайший путь.  $\tilde{x} = x_5$ .

Шаг 6.  $\tilde{x} \neq s = x_1$ , возвращение на пятый шаг.

2-я итерация. Шаг 5.  $\tilde{S} = \{x_1, x_4\}$

$d(\tilde{x}) = 11 = 0^* + 11 = d(x_1) + \omega(x_1, x_5)$ ,  $d(\tilde{x}) = 11 \neq 6^* + 6 = d(x_4) + \omega(x_4, x_5)$ . Включаем дугу  $(x_1, x_5)$  в кратчайший путь.  $\tilde{x} = x_1$ .

Шаг 6.  $\tilde{x} = s = x_1$ , завершение второго этапа.

Итак, кратчайший путь от вершины  $x_1$  до вершины  $x_6$  построен. Его длина (вес) равна 15, сам путь образует следующая последовательность дуг:  $\pi = (x_1, x_5) - (x_5, x_6)$

### 3.11. Нахождение кратчайших путей. Алгоритм Беллмана - Мура\*

Если веса – произвольные числа и граф  $G$  не содержит ориентированных циклов отрицательного веса, то минимальный путь может быть найден по алгоритму Беллмана – Мура, похожему на алгоритм Дейкстры и часто называемому алгоритмом корректировки меток. Как и в алгоритме Дейкстры, всем вершинам приписываются метки, однако здесь нет деления меток на временные и постоянные. Корректировка меток осуществляется по старому правилу (3.10.1), однако выполнение условия (3.10.2) теперь не гарантирует, что длина кратчайшего пути от  $s$  до  $x_j$  найдена, так как наличие в графе  $G$  дуг с отрицательными весами может уменьшить эту метку на последующих шагах. Поэтому в алгоритме Беллмана – Мура вместо процедуры превращения временной метки в постоянную формируется очередь вершин, в которых нужно проанализировать по правилу (3.10.1) возможности уменьшения меток вершин, не находящихся в данный момент в очереди, но достижимых из нее за один шаг. В процессе работы алгоритма одна и та же вершина может несколько раз вставать в очередь, а затем покидать ее.

Алгоритм Беллмана – Мура состоит из двух этапов. На первом находят длины кратчайших путей от вершины  $s$  до всех остальных вершин графа. Этот этап заканчивается при отсутствии вершин в очереди.

---

\* Элиаким Гастингс Мур (1862 – 1932) – американский математик.

Второй этап – построение кратчайшего пути от  $s$  до  $t$  совпадает с соответствующим этапом в алгоритме Дейкстры и выполняется по формуле (3.10.3). Опишем подробно все шаги алгоритма.

**Этап 1.** Нахождение длин кратчайших путей от вершины  $s$  до всех остальных вершин графа.

*Шаг 1.* Присвоение начальных значений.  $d(s)=0$ ,  $d(x_j)=\infty$ ,  $x_j \in S$ ,  $\tilde{x} = s$ ,  $Q = \{\tilde{x}\}$  – множество вершин в очереди.

*Шаг 2.* Корректировка меток и очереди.

Удаляем из очереди  $Q$  вершину, находящуюся в самом начале очереди. Для каждой вершины  $x_i$ , непосредственно достижимой из  $\tilde{x}$ , корректируем ее метку по формуле (3.10.1). Если при этом  $d_{\text{нов.}}(x_i) < d_{\text{стар.}}(x_i)$ , то корректируем очередь вершин, иначе продолжаем перебор вершин и корректировку временных меток.

Корректировка очереди. Если  $x_i$  не была ранее в очереди и не находится в ней в данный момент, то вершину  $x_i$  ставим в конец очереди. Если же  $x_i$  уже была когда-нибудь ранее в очереди или находится там в данный момент, то переставляем ее в начало очереди.

*Шаг 3.* Проверка на завершение первого этапа. Если  $Q \neq \emptyset$ , то возвращаемся к началу второго шага, если же  $Q = \emptyset$ , то первый этап закончен, то есть минимальные расстояния от  $s$  до всех вершин графа найдены.

**Пример 1.** Пусть граф  $G$  задан весовой матрицей  $\Omega$ .

На рис. 3.30 изображен исходный граф по матрице весов. Рассчитаем кратчайший путь от узла  $x_1$  до узла  $x_6$ .

$$\Omega = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 7 & -8 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -7 & 5 \\ \infty & \infty & 8 & - & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

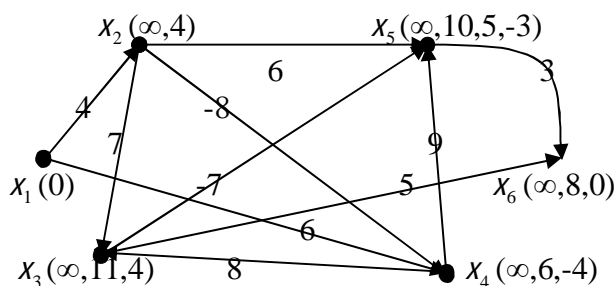


Рис. 3.30

**Этап 1.** *Шаг 1.*  $\tilde{x} = x_1$ ,  $d(x_1)=0$ ,  $d(x_j)=\infty$ ,  $j = \overline{2,6}$ ,  $Q = \{x_1\}$

*Шаг 2.*  $\tilde{x} = x_1$ ,  $Q = Q \setminus \{x_1\} = \emptyset$ . Пусть  $\tilde{S}$  – множество вершин, непосредственно достижимых из вершины  $\tilde{x}$ .  $\tilde{S} = \{x_2, x_4\}$ ,  $d(x_2) = \min\{\infty, 0 + 4\} = 4$ .

$4 < \infty$ ? Да.  $Q = \{x_2\}$ ,  $x_2$  надо было поставить в конец очереди, но  $Q$  было пусто, поэтому конец очереди совпал с началом.

$$d(x_4) = \min\{\infty, 0 + 6\} = 6.$$

$$6 < \infty? \text{ Да. } Q = \{x_2, x_4\}$$

*Шаг 3.*  $Q = \emptyset$ ? Нет. Переход на начало второго шага.

*Вторая итерация.* *Шаг 2.*  $\tilde{x} = x_2$ ,  $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \{x_4\}$ ,  $\tilde{S} = \{x_3, x_4, x_5\}$

$$d(x_3) = \min\{\infty, 4 + 7\} = 11.$$

$$11 < \infty? \text{ Да. } Q = \{x_4, x_3\}$$

$$d(x_4) = \min\{6, 4 - 8\} = -4.$$

-4 < 6? Да.  $Q = \{x_4, x_3\}$  Вершину  $x_4$  надо поставить в начало очереди, но она уже стоит там.

$$d(x_5) = \min \{\infty, 4 + 6\} = 10.$$

$$10 < \infty? \text{ Да. } Q = \{x_4, x_3, x_5\}$$

Шаг 3.  $Q = O$ ? Нет, переход на третью итерацию второго шага.

Третья итерация. Шаг 2.  $\tilde{x} = x_4$ ,  $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \{x_3, x_5\}$ ,  $\tilde{S} = \{x_3, x_5\}$

$$d(x_3) = \min \{1, -4 + 8\} = 4.$$

4 < 11? Да.  $Q = \{x_3, x_5\}$  Вершину  $x_3$  надо поставить в начало очереди, но она уже там.

$$d(x_5) = \min \{10, -4 + 9\} = 5.$$

5 < 10? Да.  $Q = \{x_5, x_3\}$  Вершину  $x_5$  передвигаем из конца очереди в начало.

Шаг 3.  $Q = O$ ? Нет, переход на четвертую итерацию второго шага.

Четвертая итерация. Шаг 2.  $\tilde{x} = x_5$ ,  $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \{x_3\}$ ,  $\tilde{S} = \{x_6\}$

$$d(x_6) = \min \{\infty, 5 + 3\} = 8.$$

$$8 < \infty? \text{ Да. } Q = \{x_3, x_6\}$$

Шаг 3.  $Q = O$ ? Нет.

Пятая итерация. Шаг 2.  $\tilde{x} = x_3$ ,  $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \{x_6\}$ ,  $\tilde{S} = \{x_5, x_6\}$

$$d(x_5) = \min \{5, 4 - 7\} = -3.$$

$$-3 < 5? \text{ Да. } Q = \{x_5, x_6\}$$

$$d(x_6) = \min \{8, 4 + 5\} = 8.$$

9 < 8? Нет.

Шаг 3.  $Q = O$ ? Нет.

Шестая итерация. Шаг 2.  $\tilde{x} = x_5$ ,  $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \{x_6\}$ ,  $\tilde{S} = \{x_6\}$

$$d(x_6) = \min \{8, -3 + 3\} = 0.$$

0 < 8? Да.  $Q = \{x_6\}$   $Q$  содержало только вершину  $x_6$  и она встала в начало очереди.

Шаг 3.  $Q = O$ ? Нет.

Седьмая итерация. Шаг 2.  $\tilde{x} = x_6$ ,  $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = O$ .  $\tilde{S} = O$ .

Шаг 3.  $Q = O$ . Конец первого этапа. Найдены минимальные расстояния до всех вершин от первой. Эти расстояния таковы:  $d(x_2) = 4$ ,  $d(x_3) = 4$ ,  $d(x_4) = -4$ ,  $d(x_5) = -3$ ,  $d(x_6) = 0$ .

**Второй этап.** Шаг 4. Полагаем  $\tilde{x} = x_6$ . Пусть  $\tilde{S}$  - множество вершин, непосредственно предшествующих  $\tilde{x}$ .  $\tilde{S} = \{x_3, x_5\}$

Первая итерация.  $d(\tilde{x}) = d(x_6) = 0 \neq 4 + 5 = d(x_3) + \omega(x_3, x_6)$   
 $d(\tilde{x}) = d(x_6) = 0 \neq -3 + 3 = d(x_5) + \omega(x_5, x_6)$  Включаем дугу  $(x_5, x_6)$  в

кратчайший путь.  $\tilde{x} = x_5$ . Возвращаемся на четвертый шаг.

Вторая итерация.  $\tilde{x} = s$ ? Нет.

$$\tilde{S} = \{x_2, x_3, x_4\} \quad d(\tilde{x}) = d(x_5) = -3 = 4 - 7 = d(x_3) + \omega(x_3, x_5)$$

$$d(\tilde{x}) = d(x_5) = -3 \neq 4 + 6 = d(x_2) + \omega(x_2, x_5)$$

$d(\tilde{x}) = d(x_5) = -3 \neq -4 + 9 = d(x_4) + \omega(x_4, x_5)$  Включаем дугу  $(x_3, x_5)$  в кратчайший путь.  $\tilde{x} = x_3$ . Возвращаемся на четвертый шаг.

*Третья итерация.*  $\tilde{x} = s$ ? Нет.  $\tilde{S} = \{x_2, x_4\}$

$$d(\tilde{x}) = d(x_3) = 4 \neq 4 + 7 = d(x_2) + \omega(x_2, x_3)$$

$d(\tilde{x}) = d(x_3) = 4 = -4 + 8 = d(x_4) + \omega(x_3, x_4)$  Включаем дугу  $(x_3, x_4)$  в кратчайший путь.  $\tilde{x} = x_4$ . Возвращаемся на четвертый шаг.

*Четвертая итерация.*  $\tilde{x} = s$ ? Нет.  $\tilde{S} = \{x_1, x_2\}$

$$d(\tilde{x}) = d(x_4) = -4 \neq 0 + 6 = d(x_1) + \omega(x_1, x_4)$$

$d(\tilde{x}) = d(x_4) = -4 = 4 - 8 = d(x_2) + \omega(x_2, x_4)$  Включаем дугу  $(x_2, x_4)$  в кратчайший путь.  $\tilde{x} = x_2$ . Возвращаемся на четвертый шаг.

*Пятая итерация.*  $\tilde{x} = s$ ? Нет.  $\tilde{S} = \{x_1\}$

$$d(\tilde{x}) = d(x_2) = 4 = 0 + 4 = d(x_1) + \omega(x_1, x_2)$$
 Включаем дугу  $(x_1, x_2)$  в кратчайший путь.

$\tilde{x} = x_1$ . Возвращаемся на четвертый шаг.

*Шестая итерация.*  $\tilde{x} = s$ ? Да. Задача закончена. Искомый кратчайший путь от вершины  $x_1$  до вершины  $x_6$  имеет нулевой вес и состоит из следующих дуг:  $(x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6)$

### 3.12. Алгоритм нахождения максимального пути

Для нахождения максимального пути граф  $G$  (сеть) должен быть ациклическим, ибо в противном случае может оказаться, что длины некоторых путей не ограничены сверху. Если  $G_n$  – ациклический граф, то для любых двух его вершин  $x_i \neq x_j$  выполняется одно из трех условий:

- 1)  $x_i$  предшествует  $x_j$ ,  $x_i \in S_{\text{предш}}(x_j)$ ;
- 2)  $x_i$  следует за  $x_j$ ,  $x_i \in S_{\text{след}}(x_j)$ ;
- 3) нет пути между  $x_i$  и  $x_j$ .

Первое и второе условия одновременно не выполнимы из-за требуемой ациклическости графа.

Перед вычислением максимального пути в орграфе необходимо упорядочить вершины графа по алгоритму Фалкерсона. Сам алгоритм вычисления максимального пути чисто перечислительный. Он перебирает все возможные пути от текущей вершины до всех последующих, достижимых из текущей вершины.

Пусть  $d_j$  – длина максимального пути от вершины  $x_1$  до вершины  $x_j$ , тогда величина  $d_j$  удовлетворяет следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{cases} d_1 = 0, \\ d_j = \max(d_i + \omega_{ij} / x_i \in S_{\text{предш}}(x_j), j = 2, 3, \dots, k+1) \\ d_j = \infty, j = k+2, k+3, \dots, n \end{cases} \quad (3.12.1)$$

Соотношения (3.12.1) позволяют легко вычислить длины максимальных путей от  $s = x_1$  до вершин, достижимых из вершины  $s$ . Сами пути могут быть построены методом последовательного возвращения (второй этап в алгоритме Дейкстры).

**Пример 1.** Граф (сеть, см. рис. 3.31) задан матрицей весов. Найти длину максимального пути из вершины  $x_1$  в  $x_6$  и сам этот путь.

$$\Omega = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 7 & 8 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 7 & 5 \\ \infty & \infty & 8 & - & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

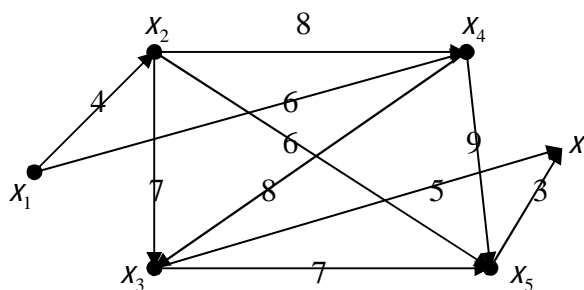


Рис. 3.31

Этот граф ациклический, поэтому возможно упорядочение его вершин по алгоритму Фалкерсона. Сделаем это графическим способом.

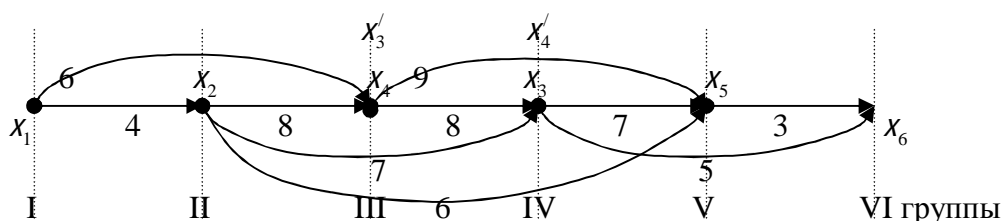


Рис. 3.32

Переобозначим две вершины:  $x_4$  назовем  $x_3'$ , а  $x_3 - x_4'$  и применим рекуррентные формулы (3.12.1). Тогда

**Этап 1.**  $d_1 = 0$ ,

$$d_2 = \max(d_1 + 4) = 4,$$

$$d_3' = \max(d_1 + 6, d_2 + 8) = \max(0 + 6, 4 + 8) = 12,$$

$$d_4' = \max(d_3' + 8, d_2 + 7) = \max(12 + 8, 4 + 7) = 20,$$

$$d_5 = \max(d_4' + 7, d_3' + 9, d_2 + 6) = \max(20 + 7, 12 + 9, 4 + 6) = 27,$$

$$d_6 = \max(d_5 + 3, d_4' + 5) = \max(27 + 3, 20 + 5) = 30.$$

Итак, длина максимального пути из  $x_1$  в  $x_6$  равна 30.

**Этап 2.**  $x_6$ :  $d_6 = 30 = d_5 + 3 = 27 + 3$  - включаем дугу  $(x_5, x_6)$  в максимальный путь,

$$d_6 = 30 \neq d_4' + 5 = 20 + 5.$$

$x_5$ :  $d_5 = 27 = d_4' + 7 = 20 + 7$  - включаем дугу  $(x_4', x_5)$  в максимальный путь,

$$d_5 = 27 \neq d_3' + 9 = 12 + 9,$$

$$d_5 = 27 \neq d_2 + 6 = 4 + 6.$$

$x_4'$ :  $d_4' = 20 = d_3' + 8 = 12 + 8$  - включаем дугу  $(x_3', x_4')$  в максимальный путь,

$$d_4' = 20 \neq d_2 + 7 = 4 + 7.$$

$x_3'$ :  $d_3' = 12 = d_2 + 8 = 4 + 8$  - включаем дугу  $(x_2, x_3')$  в максимальный путь,

$$d_3' = 12 \neq d_1 + 6 = 0 + 6.$$

$x_2$ :  $d_2 = 4 = d_1 + 4 = 0 + 4$  - включаем дугу  $(x_1, x_2)$  в максимальный путь.

Итак, искомым путь таков:  $?_{\max} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3') - (x_3', x_4') - (x_4', x_5) - (x_5, x_6)$  или в старых обозначениях  $?_{\max} = (x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6)$ .

### 3.13. Особенности алгоритмов теории графов

Рассмотрение предыдущих задач позволяет сформулировать следующие свойства алгоритмов теории графов.

1. Каждый алгоритм состоит из совокупности конечного числа правил и предписаний. Действия над графом (матрицей), производимые в соответствии с правилами, должны быть достаточно просты.

2. Алгоритм применяется в дискретном времени, правила алгоритма по шагам, число шагов – конечно.

3. Какое из правил будет применено на данном шаге или какое действие будет совершено в соответствии с некоторым правилом, зависит только от результатов предыдущих шагов.

4. Алгоритмы обладают свойством локальности: действие в соответствии с правилом или установление непротиворечивости некоторого действия правилам алгоритма происходит на основе анализа дуг, инцидентных данной вершине, или вершин, смежных с данной.

5. Алгоритмы обладают свойством массовости: применяются либо для всех, либо для некоторого бесконечного множества графов.

#### 3.14. Практическое занятие № 7. Нахождение минимальных и максимальных путей на орграфах

3.14.1. По заданной матрице весов  $\Omega$  графа  $G$  найти величину минимального пути и сам путь от вершины  $s = x_1$  до вершины  $t = x_6$  или  $t = x_7$  по алгоритму Дейкстры, а затем величину максимального пути и сам путь между теми же вершинами:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ - & 5 & 10 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & 8 & 9 & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & 3 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} & 2) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ - & 11 & \infty & 14 & 15 & \infty \\ \infty & - & 13 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 13 \\ \infty & 7 & 11 & - & 9 & \infty \\ \infty & 11 & 10 & \infty & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} & 3) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ - & 5 & 8 & 7 & 18 & \infty \\ \infty & - & 11 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 17 \\ \infty & 10 & 12 & - & 6 & \infty \\ \infty & 7 & 8 & \infty & - & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \\
 4) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ - & 6 & 8 & 11 & 10 & \infty \\ \infty & - & \infty & 9 & 7 & 15 \\ \infty & 8 & - & 7 & 4 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & 6 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} & 5) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & \infty & 11 & 15 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 14 & 18 & \infty \\ \infty & 9 & - & 13 & 7 & 11 & 22 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 11 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 23 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 19 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} & 6) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ - & 5 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 3 & \infty & 14 \\ \infty & 3 & - & 3 & 4 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \\
 7) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ - & 7 & 9 & \infty & 11 & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & \infty & 13 \\ \infty & 6 & - & 5 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 7 \\ \infty & 4 & \infty & 6 & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} & 8) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ - & 7 & 15 & \infty & 14 & \infty \\ \infty & - & 7 & 16 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 19 & \infty & 21 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 17 \\ \infty & 13 & 14 & 15 & - & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} & 9) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ - & 10 & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 11 & 9 & \infty & 19 \\ \infty & \infty & - & \infty & 10 & \infty \\ \infty & \infty & 13 & - & 11 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}
 \end{array}$$

10)

11)

12)

13)

14

15

16)

17)

18)

19)

20

2.

22)

23

5	2
---	---

25)

26

27)



[illegible]

3.14.2. По заданной матрице весов  $\Omega$  графа  $G$  найти минимальный путь по алгоритму Беллмана – Мура между начальной вершиной  $s = x_1$  и конечной вершиной  $t = x_6$  или  $t = x_7$ :

$$\begin{array}{l}
 1) \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ -15 & \infty & 12 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & -4 & -6 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & -\infty & -4 & 2 & -3 \\ \infty & \infty & 10 & -7 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & -5 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & -6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \\
 2) \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ -3 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & -5 & \infty & 5 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & -4 & -6 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & -8 & 6 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & -6 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & -3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \\
 3) \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ -2 & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & -\infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ \infty & 2 & -3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & -7 & \infty & -\infty & \infty & 4 \\ \infty & -4 & \infty & 8 & -\infty & 11 \\ \infty & \infty & \infty & -3 & -5 & -3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7
\end{array} \left( \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 3 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 7 & \infty & 10 & \infty \\ \infty & 4 & - & \infty & 7 & 6 & 10 \\ \infty & \infty & -5 & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & -9 & \infty & 12 & - & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array} \right)$$

$$7) \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \left( \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 4 & 7 & 14 & -6 & 11 & \infty \\ \infty & - & -3 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -8 & 7 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 & \infty \\ \infty & 12 & \infty & 5 & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
10) \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{array} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \\ - & 6 & 11 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & 7 & 6 \\ \infty & -5 & - & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & -4 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \\
11) \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{array} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 \\ - & 4 & \infty & 15 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 9 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 4 & - & 10 & -6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 16 \\ \infty & -18 & 7 & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \\
12) \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{array} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 \\ - & 6 & 12 & 16 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & \infty & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & -5 & \infty & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\ \infty & -7 & \infty & \infty & - & 5 & 15 \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}
\end{array}$$



### 3.15. Деревья (основные определения)

Существует один простой и важный тип графов, которому разные авторы дали одинаковое название – деревья. Деревья отличаются предельной простотой строения. Существует несколько определений дерева.

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Любой граф без циклов называется лесом. Таким образом, деревья являются компонентами леса.

Пусть  $G = (S, U)$  и  $|S| = n$ ,  $|U| = m$ . Тогда справедлива эквивалентность следующих утверждений (рис. 3.33):

- 1)  $G$  – дерево;
- 2)  $G$  – связный граф и  $m = n - 1$ ;
- 3)  $G$  – ациклический граф и  $m = n - 1$ ;
- 4) любые две несовпадающие вершины графа соединяет единственная простая цепь;
- 5)  $G$  – ациклический граф, обладающий тем свойством, что если какую-либо пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Ориентированный граф называется ориентированным деревом (ордеревом), если: 1) существует ровно одна вершина  $x_1 \in S$ , называемая корнем, которая не имеет предшествующих вершин, т.е.  $P(x_1) = 0$ ; 2) любой вершине  $x_j \neq x_1$  в графе  $G$  непосредственно предшествует ровно одна вершина, т.е.  $P(x_j) = 1$ . Неориентированное дерево можно превратить в ориентированное, выбрав в качестве корня произвольную вершину. На рис. 3.34 ко-

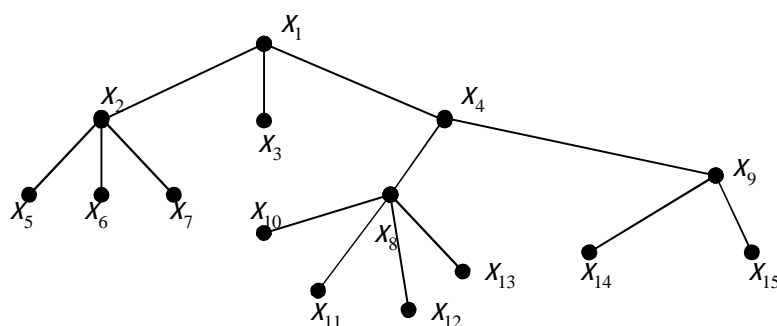


Рис. 3.33

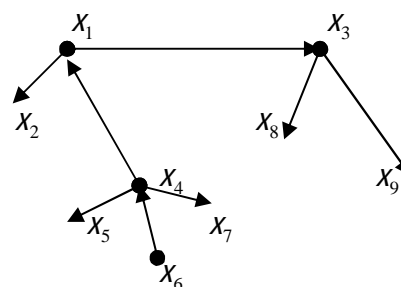


Рис. 3.34

рень графа – вершина  $x_6$ . Подграф  $G' = (S', U)$  графа  $G = (S, U)$  называется остовным подграфом, если  $S' = S$ . Подграф  $G'$  графа  $G$  называется остовным поддеревом (остовным каркасом), если  $S' = S$  и  $G'$  – дерево.

**Теорема 3.8 (Теорема Кэли\*).** Число различных деревьев, которые можно построить на  $n$  различных вершинах, равно  $t_n = n^{n-2}$ .

В этой формуле подсчитывается число всех деревьев с данными  $n$  вершинами. Многие из этих деревьев изоморфны, и возникает вопрос о числе неизоморфных деревьев среди них. Это более трудная задача, она решается для каждого конкретного случая по алгоритму теории Пойа. Для подсчета числа остовов в графе используется матрица Кирхгофа.

**Теорема 3.9 (Теорема Кирхгофа).** Число остовных деревьев в связном графе  $G$  порядка  $n \geq 2$  равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа  $B(G)$ .

Подсчитаем, например, по этой теореме число всех остовов графа, изображенного на рис. 3.15. Напомним, что матрица Кирхгофа  $B$  определяется следующим образом:

\* Артур Кэли (Кейли) (1821 – 1895) – английский математик.

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & x_i \text{ и } x_j \text{ смежны,} \\ 0, & x_i \text{ и } x_j \text{ не смежны и } i \neq j, \\ P(x_i), & i = j. \end{cases}$$

Тогда

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Определим алгебраическое дополнение элемента  $b_{11}$ .

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3(12 + 0 + 0 - 0 - 2 - 3) +$$

$+ (-1 - 4 + 0 + 1 - 0 - 0) + (-6 - 1 + 0 - 0 + 1 - 1) = 11$ . Таким образом, у этого графа существует 11 различных остовов. Все они изображены на рис. 3.35.

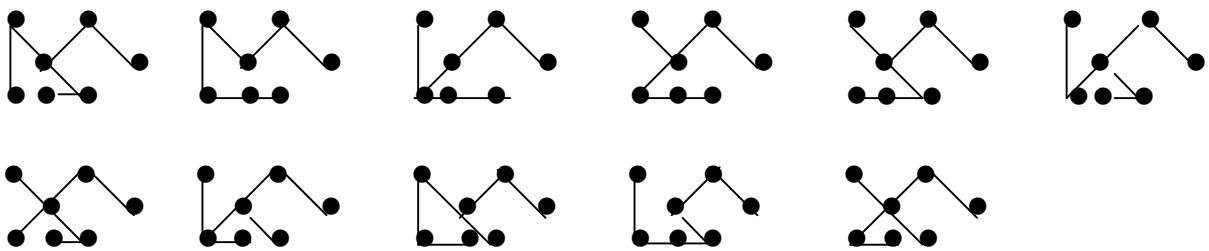


Рис. 3.35

*Из определения дерева вытекает следующая теорема.*

**Теорема 3.10.** Число ребер произвольного неориентированного графа  $G$ , которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно  $m - n + k$ , где  $m$  – число ребер,  $n$  – число вершин и  $k$  – число компонент связности графа  $G$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $i$ -ю компоненту связности  $G_i$  графа  $G$ . Пусть  $G_i$  содержит  $n_i$  вершин. Тогда остов  $G_i^*$  графа  $G_i$ , являясь деревом, содержит  $n_i - 1$  ребро. Сле-

довательно, для получения  $G_i^*$  из компоненты  $G_i$  нужно удалить  $m_i - (n_i - 1)$  ребер, где  $m_i$  – число ребер в  $G_i$ .

Просуммируем удаляемые ребра по всем компонентам связности, получим  $\sum_{i=1}^k m_i = m$ ,

$$\sum_{i=1}^k n_i = n, \quad \sum_{i=1}^k (m_i - n_i + 1) = m - n + k.$$

Число  $\nu(G) = m - n + k$  называется цикломатическим числом или циклическим рангом графа  $G$ , число  $\nu^*(G) = n - k$  – коциклическим рангом или корангом.  $\nu^*(G)$  равно числу ребер, входящим в любой остов графа  $G$ . Очевидно, что  $\nu(G) + \nu^*(G) = m$ .

Из теоремы 3.10 вытекают два следующих следствия.

**Следствие 1.** Неориентированный граф  $G$  является лесом тогда и только тогда, когда  $\nu(G) = 0$ .

**Следствие 2.** Неориентированный граф  $G$  имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда  $\nu(G) = 1$ .

### 3.16. Задача об остове экстремального веса

Пусть  $G = (S, U)$  – связная сеть. В приложениях часто возникает задача о построении остова графа  $G$ , имеющего наименьший вес. Пусть, например,  $G = (S, U, \Omega)$  служит моделью железнодорожной сети, соединяющей пункты  $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ , а  $\omega(x_i, x_j)$  – расстояние между пунктами  $x_i$  и  $x_j$ . Требуется проложить сеть телеграфных линий вдоль железнодорожной сети так, чтобы все пункты  $x_1, x_2, \dots, x_n$  были связаны между собой телеграфной сетью и общая протяженность линий телеграфной сети была наименьшей.

Известно несколько алгоритмов построения экстремального остова. Рассмотрим алгоритм Прима (алгоритм ближайшего соседа), представляющий собой итерационную процедуру, состоящую из двух шагов и выполняющуюся  $n-1$  раз на графе  $G$  с  $n$  вершинами. Алгоритм может получать минимальное или максимальное по весу дерево, разница заключается лишь в том, что в формуле (3.16.1) находится либо максимум, либо минимум.

Пусть  $S' \subset S$ ,  $S'' \subset S$  и  $S = S' \cup S''$ ,  $S' \cap S'' = \emptyset$ , т. е.  $S'$  и  $S''$  – разбиение множества узлов сети  $G$  на два непересекающихся подмножества. Определим пошаговое расстояние между множествами  $S'$  и  $S''$  следующим образом:

$$d(S', S'') = \min \{ \omega(x_i, x_j) \mid x_i \in S', x_j \in S'' \} \quad (3.16.1)$$

где  $(x_i, x_j)$  – дуга, соединяющая вершины  $x_i$  и  $x_j$ .

В алгоритме Прима остовое дерево строится в результате последовательного расширения исходного поддерева. На каждой итерации число вершин и ребер поддерева увеличивается на единицу. Основные шаги алгоритма таковы.

**Шаг 1.** Присвоение начальных значений. Полагают  $S' = \{x_1\}$ , где  $x_1$  – произвольная вершина,  $S'' = S \setminus S'$ ,  $U' = \emptyset$ .

**Шаг 2.** Обновление данных. Находится ребро  $(x_i, x_j)$  такое, что  $x_i \in S'$ ,  $x_j \in S''$  и  $\omega(x_i, x_j) = \min \{ \omega(x_i, x_j) \mid x_i \in S', x_j \in S'' \}$ . Полагают  $S' = S' \cup \{x_j\}$ ,  $S'' = S \setminus S'$ ,  $U' = U' \cup \{(x_i, x_j)\}$ .

**Шаг 3.** Проверка на завершение. Если  $S' = S$ , то  $G' = (S', U')$  – искомый остов. В противном случае переходят ко второму шагу.

**Пример 1.** Построить остов с наименьшим весом для сети, заданной матрицей весов  $\Omega$ . Построим по этой матрице сеть. Поскольку матрица симметрическая, то дан неориенти-

рованный граф. Исходный граф изображен на рис. 3.36 слева.

$$\Omega = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 5 & 10 & 14 & \infty & \infty \\ 5 & - & 5 & 6 & \infty & \infty \\ 10 & 5 & - & 7 & 8 & 9 \\ 14 & 6 & 7 & - & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 8 & 4 & - & 12 \\ \infty & \infty & 9 & \infty & 12 & - \end{pmatrix} \end{matrix}. \text{ Шаг 1. } S' = \{x_1\}, S'' = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, U' = \emptyset.$$

Первая итерация. Шаг 2.  $d(S', S'') = \omega(x_1, x_2) = 5$ ,  $S' = \{x_1, x_2\}$ ,  $S'' = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ ,  $U' = \{(x_1, x_2)\}$ .

Шаг 3.  $S' \neq S$ , переход на начало второго шага.

Вторая итерация. Шаг 2.  $d(S', S'') = \omega(x_2, x_3) = 5$ ,  $S' = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $S'' = \{x_4, x_5, x_6\}$ ,  $U' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3)\}$ .

Шаг 3.  $S' \neq S$ , переход на начало второго шага.

Третья итерация. Шаг 2.  $d(S', S'') = \omega(x_2, x_4) = 6$ ,  $S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ,  $S'' = \{x_5, x_6\}$ ,  $U' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4)\}$ .

Шаг 3.  $S' \neq S$ , переход на начало второго шага.

Четвертая итерация. Шаг 2.  $d(S', S'') = \omega(x_4, x_5) = 4$ ,  $S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ,  $S'' = \{x_6\}$ ,  $U' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_5)\}$ .

Шаг 3.  $S' \neq S$ , переход на начало второго шага.

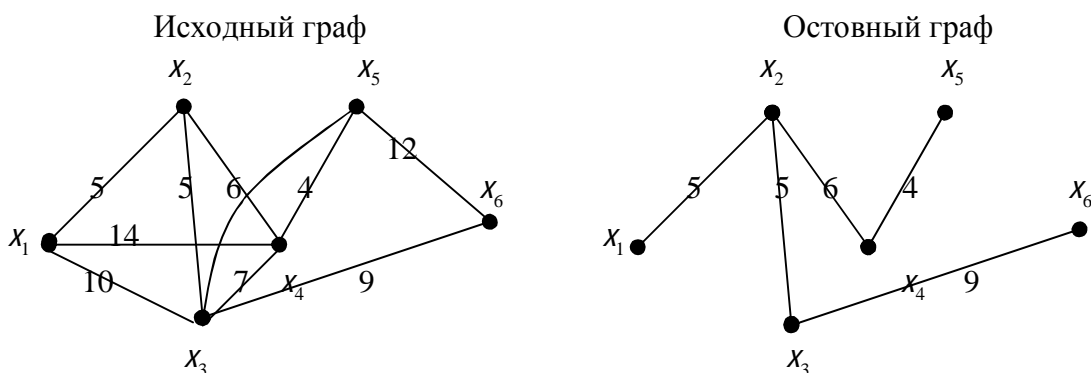


Рис. 3.36

Пятая итерация. Шаг 2.  $d(S', S'') = \omega(x_3, x_6) = 9$ ,  $S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ ,  $S'' = \emptyset$ ,  $U' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_5), (x_3, x_6)\}$ .

Шаг 3.  $S' = S$ . Итак, получен остовный граф  $G' = (S', U')$ , изображенный на рис. 3.36 справа, его вес  $\omega(G') = 5 + 5 + 6 + 4 + 9 = 29$ .

### 3.17. Обходы графов. Фундаментальные циклы

Рассмотрим вопросы, связанные с существованием в графе эйлеровых или гамильтоновых цепей и циклов. При решении прикладных задач часто возникает необходимость отбора вершин или ребер графа, связанная с поисками элемента с определенным свойством.

Напомним, что связный граф называется эйлеровым, если он содержит цикл, включающий все ребра графа. Такой граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий. Граф называется гамильтоновым, если в нем имеется простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа.

Задачи о нахождении эйлеровых и гамильтоновых циклов в графе внешне похожи, однако вторая задача значительно сложнее первой. Принадлежность графа к классу эйлеровых легко устанавливается следующей теоремой:

**Теорема 3.11. Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.**

**Доказательство.** 1. Необходимость. Пусть  $G$  - эйлеров граф. Тогда цикл этого графа проходит через каждую вершину, причем входит в нее по одному ребру, а выходит по другому. Это значит, что каждая вершина инцидентна четному числу ребер. Таким образом, степени всех вершин четны, так как эйлеров цикл должен содержать все ребра графа  $G$ .

2. Достаточность. Пусть степени всех вершин графа четны. Начнем построение цепи  $P_1$  из произвольной вершины  $x_1$  (рис. 3.37). Попад в очередную вершину  $x_i$ , мы всегда можем из нее выйти по другому ребру, так как степени всех вершин четны. Продолжив таким образом, мы закончим цепь  $P_1$  в вершине  $x_1$ , т.е.  $P_1$  будет циклом. Если при этом окажется, что  $P_1$  содержит все вершины, то граф будет эйлеровым.

Если  $P_1$  содержит не все вершины графа  $G$ , то удалим из  $G$  все ребра цикла  $P_1$ . Граф  $G_1 = G \setminus P_1$  также будет эйлеровым. Кроме того, так как  $G$  - связный граф, то графы  $G_1$  и  $P_1$  будут иметь хотя бы одну общую вершину  $x_2$  (рис. 3.37). Повторим процедуру построения цикла, начав с вершины  $x_2$ . Получим новый цикл  $P_3 = P_1' \cup P_2 \cup P_1''$ , который, начиная с  $x_1$ , проходит по ребрам цепи  $P_1'$  до  $x_2$ , затем обходит все ребра цепи  $P_2$  и возвращается в  $x_1$  по ребрам цепи  $P_1''$ .

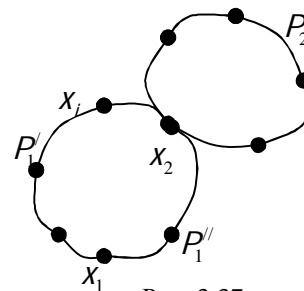


Рис. 3.37

Если  $P_3$  не эйлеров цикл, то повторяя описанную процедуру, получим еще больший цикл и так далее до тех пор, пока не получится эйлеров цикл.

Для эйлеровых графов существует процедура, называемая алгоритмом Флери, которая позволяет очень быстро построить один из существующих эйлеровых циклов. Этот алгоритм задается следующими правилами:

1) произвольно выбираем некоторую вершину  $x_1$  и ребро  $u_1$ , инцидентное  $x_1$ . Этому ребру присваивают номер 1. Вычеркивают это ребро  $u_1$  и переходят в вершину  $x_2$  по ребру  $u_1 = (x_1, x_2)$ ;

2) находясь в вершине  $x_i$ , следует не выбирать ребро, соединяющее  $x_i$  с  $x_1$ , если имеется возможность иного выбора;

3) находясь в вершине  $x_i$ , следует не выбирать ребро, которое является перешейком, (т.е. ребром, при удалении которого граф, образованный невычеркнутыми ребрами, распадается на две компоненты связности, каждая из которых имеет хотя бы по одному ребру);

4) после того, как в графе будут занумерованы все ребра, образуется эйлеров цикл, причем порядок нумерации соответствует последовательности обхода ребер.

**Пример 1.** Построить эйлеров цикл в графе  $G$ , изображенном на рис. 3.38. Граф  $G$  эйлеров, ибо  $P(x_1) = P(x_4) = P(x_5) = P(x_8) = 2$ ,  $P(x_2) = P(x_3) = P(x_6) = P(x_7) = 4$ .

1. Выберем  $x_1$  и ребро  $u_1 = (x_1, x_7)$  и присвоим ему номер 1, затем перейдем в вершину  $x_i = x_7$ .

2. Находясь в  $x_7$ , не выбираем вычеркнутое ребро 1. Из оставшихся трех ребер ни одно не является перешейком, поэтому выбираем любое, например,

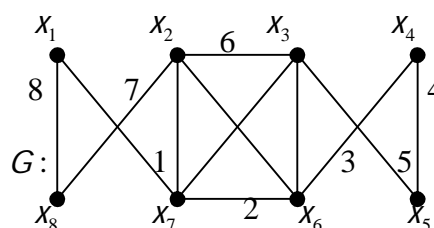


Рис. 3.38



$u_2 = (x_7, x_6)$ , присваиваем ему номер 2 и переходим в вершину  $x_7 = x_6$ .

3. После восьми шагов опять приходим в вершину  $x_1$ . Построенный цикл:  $(x_1, x_7) - (x_7, x_6) - (x_6, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_3) - (x_3, x_2) - (x_2, x_8) - (x_8, x_1)$ .

Если каждое ребро графа  $G$  входит в одну из существующих реберно-непересекающихся цепей этого графа, то говорят, что набор таких цепей покрывает граф  $G$ . Пусть связный граф  $G$  содержит  $k$  вершин нечетной степени. Заметим, что по лемме о рукопожатиях (см. задачу 3.9.1) число  $k$  четно. В этом случае справедлива теорема о минимальном числе реберно-непересекающихся цепей.

**Теорема 3.12.** Если связный граф содержит ровно  $k$  вершин нечетной степени, то минимальное число покрывающих его реберно-непересекающихся цепей равно  $k/2$ .

Вопрос о принадлежности графов к классу гамильтоновых решается, как правило, очень трудно. Рассмотрим несколько теорем такого рода (достаточных условий гамильтоновости).

**Теорема 3.13.** Граф со степенной последовательностью (списком степеней его вершин)  $P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_n$  является гамильтоновым, если для всякого  $k$ , удовлетворяющего неравенствам  $1 \leq k < n/2$ , истинна импликация  $(P_k \leq k) \Rightarrow (P_{n-k} \geq n - k)$ .

На основе теоремы 3.13 были получены другие достаточные условия гамильтоновости. Эти условия проще в практическом применении, но слабее теоремы 3.13.

**Теорема 3.14 (теорема Оре\*).** Если для любой пары  $x$  и  $y$  несмежных вершин графа  $G$  порядка  $n \geq 3$  выполняется условие  $P(x) + P(y) \geq n$ , то  $G$  - гамильтонов граф.

Из этой теоремы вытекает следующее следствие.

Если  $|G| = n \geq 3$  и для любой вершины  $x$  графа  $G$  выполняется неравенство  $P(x) \geq n/2$ , то  $G$  - гамильтонов граф.

Все эти теоремы дают достаточные условия гамильтоновости. На практике для построения примеров негамильтоновых графов с заданными свойствами были бы полезны необходимые условия гамильтоновости. Однако для графов общего вида необходимые условия неизвестны за исключением некоторых особых типов графов.

Для ориентированных эйлеровых и гамильтоновых графов получены результаты, похожие на вышеприведенные. Следующие две теоремы характеризуют эйлеровы орграфы.

**Теорема 3.15.** Для связного ориентированного графа  $G$  следующие утверждения равносильны:

- 1) граф  $G = (S, U)$  эйлеров;
- 2) для любой вершины  $x \in S$  верно равенство  $P^+(x) = P^-(x)$ ;
- 3) граф  $G$  является объединением контуров, попарно не имеющих общих ребер.

**Теорема 3.16.** Связный орграф  $G$  содержит открытую эйлерову цепь тогда и только тогда, когда в нем есть две такие вершины  $x$  и  $y$ , что  $P^-(x) = P^+(x) + 1$ ,  $P^-(y) = P^+(y) - 1$  и  $P^+(z) = P^-(z)$  для любой вершины  $z$ , отличной от  $x$  и  $y$ .

Вопросы, связанные с распознаванием гамильтоновости орграфа и построением гамильтоновых контуров или путей, столь же сложны, как и аналогичные вопросы для неориентированных графов. Следующая теорема дает достаточные условия гамильтоновости неориентированного графа.

**Теорема 3.17.** Пусть  $G$  - сильно связный орграф порядка  $n > 1$  без петель и параллельных дуг. Если для любой пары  $x$  и  $y$  его несовпадающих несмежных вершин справедливо неравенство  $P(x) + P(y) \geq 2n - 1$ , то в  $G$  есть гамильтонов контур.

---

\* Ойстин Оре (1899 - 1968) – норвежский математик.

Пусть  $G=(S,U)$  - неориентированный граф, содержащий  $n$  вершин,  $m$  ребер и  $k$  компонент связности,  $G'$  - остов графа  $G$ .  $G'$  имеет  $v^*(G)=n-k$  ребер  $u_1, u_2, \dots, u_{n-k}$ . Эти ребра называются ветвями остова  $G'$ . Оставшиеся  $m-n+k$  ребер  $v_1, v_2, \dots, v_{m-n+k}$ , не входящие в  $G'$ , называются хордами остова  $G'$ .

По определению дерева, если к остоу  $G'$  добавить произвольную хорду  $v_i$ , то в полученном графе  $G' \cup \{v_i\}$  найдется ровно один цикл  $C_i$ , состоящий из хорды  $v_i$  и некоторых ветвей остова  $G'$ . Цикл  $C_i$  называется фундаментальным циклом графа  $G$  относительно хорды  $v_i$  остова  $G'$ . Множество  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_{m-n+k}\}$  всех фундаментальных циклов относительно хорд остова  $G'$  называется фундаментальным множеством циклов графа  $G$  относительно остова  $G'$ . Ясно, что  $|C| = \mathcal{I}(G) = m - n + k$ .

Пусть  $w_1, w_2, \dots, w_m$  - последовательность  $v_1, v_2, \dots, v_{m-n+k}, u_1, u_2, \dots, u_{n-k}$  всех ребер графа  $G$ . Фундаментальному циклу  $C_i$  соответствует вектор  $\bar{c} = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{im})$ , определенный следующим образом:  $c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } w_j \in C_i, \\ 0, & \text{если } w_j \notin C_i. \end{cases}$  Тогда фундаментальное множество циклов  $C$  зада-

ется матрицей фундаментальных циклов  $C^* = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{\mathcal{I}(G),1} & c_{\mathcal{I}(G),2} & \dots & c_{\mathcal{I}(G),m} \end{pmatrix}$ , которая имеет вид

$$C^* = \left( \begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{1,\mathcal{I}(G)+1} & c_{1,\mathcal{I}(G)+2} & \dots & c_{1,m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{2,\mathcal{I}(G)+1} & c_{2,\mathcal{I}(G)+2} & \dots & c_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{\mathcal{I}(G),\mathcal{I}(G)+1} & c_{\mathcal{I}(G),\mathcal{I}(G)+2} & \dots & c_{\mathcal{I}(G),m} \end{array} \right) = (C_1^* | C_2^*), \text{ где } C_1^* - \text{единичная матрица}$$

порядка  $\mathcal{I}(G)$  - содержит лишь хорды фундаментальных циклов  $C_i$ .

**Пример 2.** Найти матрицу фундаментальных циклов графа  $G$ , изображенного на рис. 3.39. Здесь  $m=10$ ,  $n=7$ ,  $k=1$ . Так как цикломатическое число равно  $\mathcal{I}(G)=10-7+1=4$ , то для получения остова  $G'$  необходимо удалить четыре ребра. Пусть это будут ребра 1, 2, 3 и 4 (остов на рис. 3.39 выделен жирными линиями). Остальные ребра графа  $G$  занумеруем цифрами от 5 до 10. Из рисунка видно, что фундаментальный цикл  $C_1$ , соответствующий хорде 1, состоит из ребер 1, 6, 7, 8, цикл  $C_2$  - из ребер 2, 7, 9, цикл  $C_3$  - из ребер 3, 5, 7, цикл  $C_4$  - из ребер 4, 5, 7, 10. Тогда  $C^*$  имеет вид

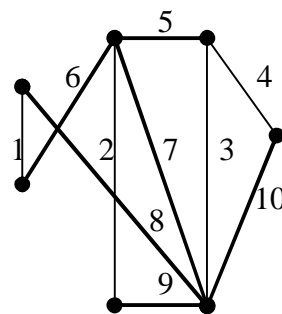


Рис. 3.39

$$C^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{matrix} & \left( \begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

### 3.18. Клики, независимые множества

Множество вершин графа называется независимым (внутренне устойчивым), если никакие две вершины из этого множества не смежны. Очевидно, что граф, порожденный вершинами независимого множества, будет пустым.

Независимое множество называется максимальным, если оно не является собственным подмножеством некоторого другого независимого множества. Наибольшее по мощности независимое множество называется наибольшим.

Как установил Шеннон\*, теория независимых множеств в графе имеет большое значение для фундаментальных проблем теории информации. Сам процесс передачи информации может быть представлен в виде графа, причем максимальное число безошибочных сигналов соответствует максимальному независимому множеству графа.

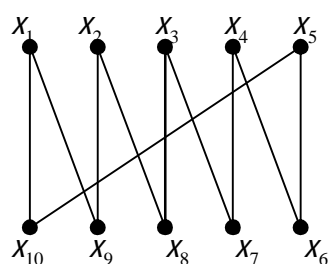


Рис. 3.40

Число вершин в наибольшем независимом множестве графа  $G$  называется числом (вершинной) независимости или неплотностью этого графа и обозначается  $\alpha_0(G)$ . Для графа, изображенного на рис. 3.40, наибольшими независимыми множествами будут:  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  и  $\{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ , максимальными независимыми  $\{x_1, x_8, x_7, x_6\}$ ,  $\{x_2, x_{10}, x_7, x_6\}$  и так далее. Задачи отыскания наибольшего независимого множества и определения числа независимости, как правило, очень трудны, поэтому полезны оценки их величин.

**Теорема 3.18.** Для любого графа  $G = (S, U)$  верно неравенство  $\alpha_0(G) \geq \sum_{x \in S} (1 + P(x))^{-1}$ .

Доказательство теоремы 3.18, которое здесь опущено, дает алгоритм построения независимого множества  $M$ , такого что  $|M| \geq \sum_{x \in S} (1 + P(x))^{-1}$ . Множество  $M$  строится следующим образом: всякий раз в графе  $G$  выбирается вершина минимальной степени и заносится в множество  $M$ , после чего эта вершина и все смежные с ней удаляются из графа. Далее процесс повторяется. Построенное таким способом множество  $M$  иногда принимают в качестве первого приближения при отыскании наибольшего независимого множества вершин графа.

С понятием независимости в графе связано понятие доминирования. Подмножество  $S' \subset S$  вершин графа  $G = (S, U)$  называется доминирующим (внешне устойчивым), если каждая вершина из  $S \setminus S'$  смежна с некоторой вершиной из  $S'$ , т.е. каждая вершина графа находится на расстоянии в одно ребро от доминирующего множества. Доминирующее множество называется минимальным, если никакое его собственное подмножество не является доминирующим. Доминирующее множество, имеющее наименьшую мощность, называется наименьшим.

Число доминирования  $\delta(G)$  графа  $G$  есть наименьшее число вершин, составляющих минимальное доминирующее множество. Отыскание наименьшего доминирующего множества является содержанием многих прикладных задач. Например, задача размещения предприятий в ряде населенных пунктов при условии, чтобы расстояние от каждого из населенных пунктов до какого-либо предприятия не превосходило заданной величины, сводится к построению наименьшего доминирующего множества, если предположить, что вершины графа – предприятия смежны тогда и только тогда, когда расстояние между соответствующими пунктами не превышает заданной величины.

\* Клод Элвуд Шеннон (1916 – 2001) – американский математик.

**Теорема 3.19. Независимое множество максимально тогда и только тогда, когда оно доминирующее.**

*Доказательство.* Пусть  $S' \subseteq S$  – максимальное независимое множество. Тогда не может быть вершины  $k \in S \setminus S'$ , не соединенной с ребром, так как в противном случае множество  $k \cup S'$  также было бы независимым, но  $S'$  – максимальное по условию. Отсюда  $S'$  – доминирующее множество.

Пусть теперь  $S'$  – независимое доминирующее множество. Тогда никакую вершину  $k$  нельзя перевести из  $S \setminus S'$  в  $S'$  так, чтобы множество  $k \cup S'$  осталось независимым. Следовательно,  $S'$  – максимальное множество.

Антиподом понятия независимого множества является понятие клики. Подмножество  $S'$  вершин графа  $G = (S, U)$  называется кликой, если любые две входящие в него вершины смежны. Это значит, что подграф  $G' = (S', U')$  является полным. Определение клик графа полезно в кластерном анализе, при информационном поиске и так далее.

Клика называется максимальной, если она не содержится в клике с большим числом вершин, и наибольшей, если число вершин в ней наибольшее среди всех клик. Число вершин в наибольшей клике графа называется кликовым числом или плотностью графа и обозначается через  $\phi(G)$ .

Практически очевидна следующая теорема.

**Теорема 3.20. Подмножество вершин графа  $G$  является кликой тогда и только тогда, когда оно независимо в дополнительном графе  $\bar{G}$ , т.е.  $\phi(G) = \alpha_0(\bar{G})$ .**

Клика графа представляет «естественные» группировки вершин в максимально полные подграфы. На рис. 3.41 представлен граф и все его клики.

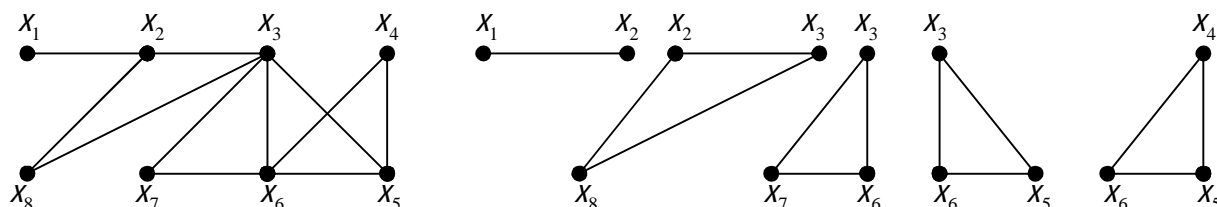


Рис. 3.41

Опишем алгоритм выделения клик в графе. Этот алгоритм представляет собой поиск с возвращением по специальному дереву поиска. Каждый узел этого дерева соответствует полному подграфу исходного графа, а само дерево поиска строится следующим образом. Корень дерева поиска – пустое начальное множество  $S = \emptyset$ . Пусть теперь  $S$  – произвольная вершина дерева поиска какого-либо уровня. Тогда вершиной следующего уровня дерева будет вершина  $S \cup \{x\}$ , если  $x \notin S$  и смежна с каждой вершиной из  $S$ . В дереве поиска вершины  $S$  и  $S \cup \{x\}$  соединяются ребром, которое соответствует вершине  $x$ . На рис. 3.42 показано дерево поиска для графа  $G$ , изображенного на рис. 3.41 (вершины обозначены только цифрами, буква  $x$  опущена).

Каждая клика мощностью  $n$  порождается в дереве поиска  $n!$  раз. При построении дерева все тонкие ребра можно оборвать, они не приводят к новым кликам. При этом необходимо руководствоваться двумя правилами:

1) если все поддеревья узла  $S \cup \{x\}$  в дереве поиска клик уже исследованы, то необходимо лишь исследовать только те вершины из  $S \cup \{y\}$ , для которых вершина  $y$  не смежна с  $x$ ;

2) если  $S$  – узел в дереве поиска, а  $\tilde{S}$  – узел предыдущего уровня и все поддеревья узла  $\tilde{S} \cup \{x\}$  уже исследованы, то все неисследованные поддеревья узла  $S \cup \{x\}$  можно опустить.

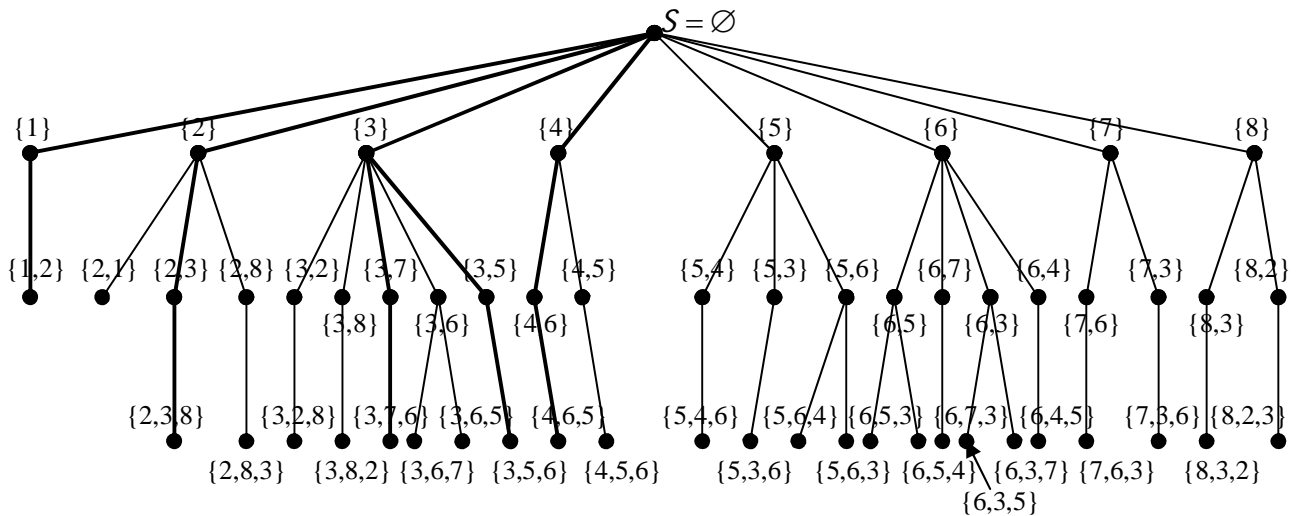


Рис. 3.42

Иногда полезно понятие матрицы клик. Пусть  $G=(S,U)$  – произвольный граф,  $Q=\{Q_1, Q_2, \dots, Q_p\}$  – множество всех его максимальных клик и  $S=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Определим бинарную  $p \times n$ -матрицу  $C=C(G)$ , строки которой соответствуют кликам из множества  $Q$ , а столбцы – вершинам графа  $G$ , причем  $c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \in Q_i, \\ 0, & \text{если } x_j \notin Q_i. \end{cases}$  Матрица  $C(G)$  называется матрицей клик графа  $G$ . Для графа, изображенного на рис. 3.41, матрица клик имеет сле-

дующий вид:  $C(G) =$

		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$Q_1$	$\begin{pmatrix}$	1	1	0	0	0	0	0	0
$Q_2$		0	1	1	0	0	0	0	1
$Q_3$		0	0	1	0	0	1	1	0
$Q_4$		0	0	1	0	1	1	0	0
$Q_5$	$\begin{pmatrix}$	0	0	0	1	1	1	0	0
	$\end{pmatrix}$								

### 3.19. Практическое занятие № 8. Остовы графов, фундаментальные циклы. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Доминирующие множества и клики

3.19.1. Для графа  $G$ , заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов  $G'$  и найти его вес  $\omega(G')$ .

1)	$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 10 & \infty & 5 & \infty & \infty & 14 \\ 10 & - & 6 & 2 & 4 & 8 & \infty \\ \infty & 6 & - & 3 & 1 & 1 & \infty \\ 5 & 2 & 3 & - & 6 & \infty & 3 \\ \infty & 4 & 1 & 6 & - & 5 & \infty \\ \infty & 8 & 1 & \infty & 5 & - & 2 \\ 14 & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & - \end{pmatrix} \end{matrix}$	2)	$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 7 & 15 & 12 & \infty & 10 & \infty \\ 7 & - & 13 & 9 & \infty & \infty & 8 \\ 15 & 13 & - & 7 & 15 & 7 & \infty \\ 12 & 9 & 7 & - & 9 & \infty & 11 \\ \infty & \infty & 15 & 9 & - & 10 & \infty \\ 10 & \infty & 7 & \infty & 10 & - & 12 \\ \infty & 8 & \infty & 11 & \infty & 12 & - \end{pmatrix} \end{matrix}$	3)	$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 10 & 11 & \infty & 14 & \infty & 12 \\ 10 & - & 10 & 9 & \infty & \infty & 7 \\ 11 & 10 & - & 12 & 10 & \infty & 6 \\ \infty & 9 & 12 & - & 9 & 12 & \infty \\ 14 & \infty & 10 & 9 & - & 11 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 12 & 11 & - & \infty \\ 12 & 7 & 6 & \infty & 12 & \infty & - \end{pmatrix} \end{matrix}$
----	--	----	--	----	--

5)

6)

8)

9)

1

12

1

15

1

18

2

21

$$\begin{array}{ll}
22) \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{pmatrix} - & \infty & \infty & 10 & 11 & \infty & 6 \\ \infty & - & \infty & 12 & 10 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & - & 3 & 3 & \infty & 8 \\ 10 & 12 & 3 & - & 6 & \infty & 7 \\ 11 & 10 & 3 & 6 & - & 9 & \infty \\ \infty & 5 & \infty & \infty & 9 & - & 11 \\ 6 & \infty & 8 & 7 & \infty & 11 & - \end{pmatrix} \end{matrix} & 
23) \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{pmatrix} - & \infty & 12 & 10 & 14 & \infty & \infty \\ \infty & - & 12 & \infty & 5 & \infty & 7 \\ 5 & 12 & - & 7 & 6 & 8 & \infty \\ 10 & \infty & 7 & - & 4 & 9 & 9 \\ 14 & 5 & 6 & 4 & - & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 8 & 9 & 8 & - & 7 \\ \infty & 7 & \infty & 9 & \infty & 7 & - \end{pmatrix} \end{matrix} & 
24) \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{pmatrix} - & 3 & 8 & 12 & 7 & \infty & 16 \\ 3 & - & 4 & \infty & 9 & \infty & \infty \\ 8 & 4 & - & 5 & 7 & 11 & \infty \\ 12 & \infty & 5 & - & 10 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 7 & 10 & - & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 6 & 5 & - & 5 \\ 16 & \infty & \infty & 4 & 8 & 5 & - \end{pmatrix} \end{matrix} \\
25) \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{pmatrix} - & \infty & 7 & \infty & \infty & 11 & \infty \\ \infty & - & \infty & 17 & 8 & 15 & \infty \\ 7 & \infty & - & 5 & 6 & \infty & 10 \\ \infty & 17 & 5 & - & 12 & 5 & 3 \\ \infty & 8 & 6 & 12 & - & 4 & 9 \\ 11 & 15 & \infty & 5 & 4 & - & \infty \\ \infty & \infty & 10 & 3 & 9 & \infty & - \end{pmatrix} \end{matrix} & 
26) \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{pmatrix} - & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & 9 & 5 & 8 & 11 \\ \infty & 6 & - & 2 & 5 & 6 & 6 \\ \infty & 9 & 2 & - & \infty & 4 & \infty \\ 7 & 5 & 5 & \infty & - & 4 & 12 \\ \infty & 8 & 6 & 4 & 4 & - & 3 \\ \infty & 11 & 6 & \infty & 12 & 3 & - \end{pmatrix} \end{matrix} & 
27) \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{pmatrix} - & 3 & 8 & \infty & 9 & \infty & \infty \\ 3 & - & \infty & 11 & 6 & \infty & 15 \\ 8 & \infty & - & 4 & 5 & 7 & 10 \\ \infty & 11 & 4 & - & 13 & 8 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 13 & - & 6 & 12 \\ \infty & \infty & 7 & 8 & 6 & - & 3 \\ \infty & 15 & 10 & 7 & 12 & 3 & - \end{pmatrix} \end{matrix} \\
28) \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & \infty & 7 & \infty & 20 \\ 4 & - & 3 & \infty & 5 & 14 & 15 \\ \infty & 3 & - & 6 & 7 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & - & 12 & 10 & 4 \\ 7 & 5 & 7 & 12 & - & 8 & \infty \\ \infty & 14 & 11 & 10 & 8 & - & 5 \\ 20 & 15 & \infty & 4 & \infty & 5 & - \end{pmatrix} \end{matrix} & 
29) \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{pmatrix} - & 2 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & - & 1 & 8 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 1 & - & \infty & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & \infty & - & \infty & 3 & \infty \\ \infty & 4 & 5 & \infty & - & 4 & 10 \\ \infty & \infty & 6 & 3 & 4 & - & 4 \\ \infty & 10 & 9 & \infty & 10 & 4 & - \end{pmatrix} \end{matrix} & 
30) \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{pmatrix} - & 10 & 5 & 2 & 16 & \infty & \infty \\ 10 & - & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 4 & - & 8 & 15 & 13 & \infty \\ 2 & \infty & 8 & - & 8 & 5 & 7 \\ 16 & \infty & 15 & 8 & - & 11 & 18 \\ \infty & \infty & 13 & 5 & 11 & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 7 & 18 & 4 & - \end{pmatrix} \end{matrix}
\end{array}$$

3.19.2. Используя матричную теорему Кирхгофа, найти число остовных деревьев в полном двудольном графе  $K_{m,n}$ .

3.19.3. Найти матрицы фундаментальных циклов, радиусы и диаметры графов, изображенных на рис. 3.43. Являются ли изображенные графы эйлеровыми или гамильтоновыми?

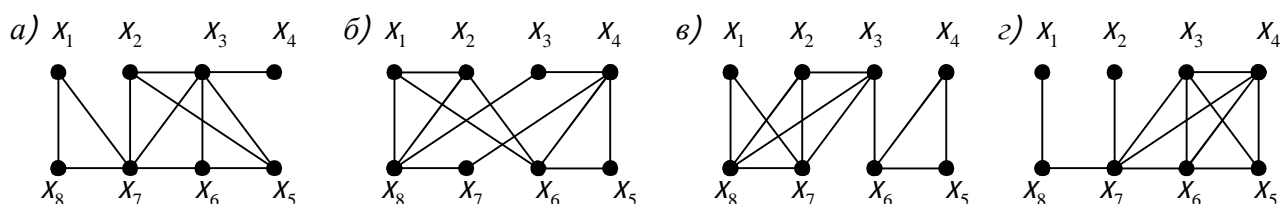
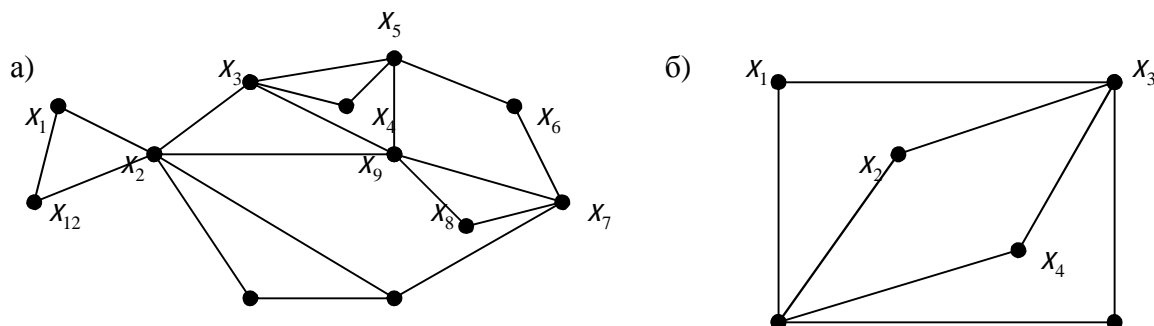


Рис. 3.43

3.19.4. Доказать, что если для любых двух несмежных вершин  $x$  и  $y$  связного  $n$ -вершинного графа выполняется условие  $P(x) + P(y) \geq n$ , то граф имеет гамильтонов цикл.

3.19.5. По алгоритму Флери найти эйлеров цикл в графах, изображенных на рис. 3.44.





$x_{11}$  $x_{10}$  $x_6$  $x_5$ 

Рис. 3.44

3.19.6. Найти наибольшее независимое множество вершин в графе Петерсена\* (рис. 3.45).

3.19.7. Показать, что граф Петерсена не гамильтонов.

3.19.8. Найти число доминирования  $\delta(G)$  и наименьшее доминирующее множество следующих графов:

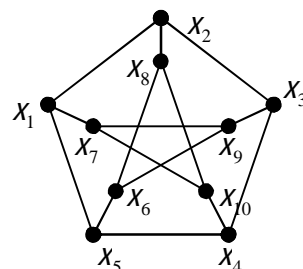


Рис. 3.45

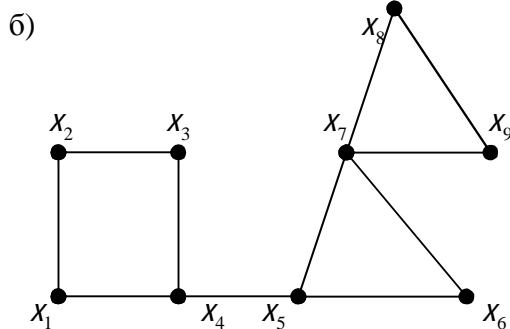
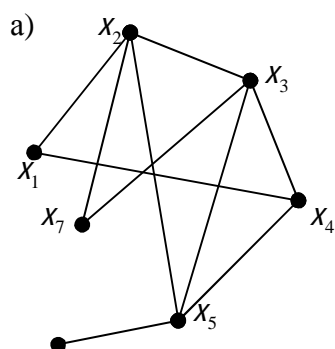
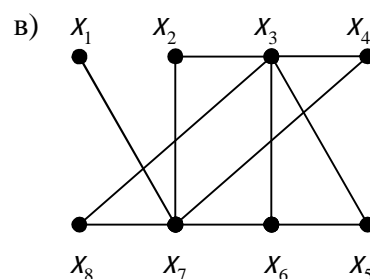


Рис. 3.46



3.19.9. Построить дерево поиска клик, матрицу клик и найти наибольшие клики графов, изображенных на рисунках 3.44, а, 3.45 и 3.46, б, в.

3.19.10. Приведите пример графа, в котором наименьшее доминирующее множество не является независимым.

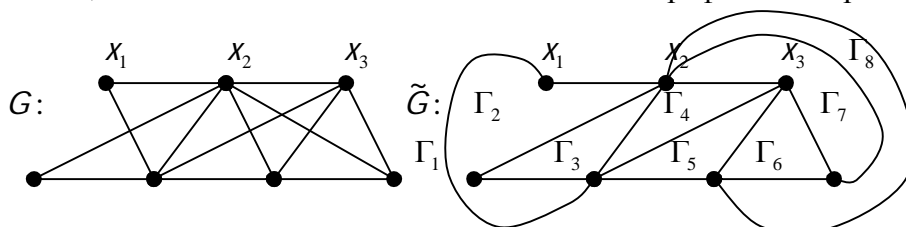
### 3.20. Планарность графов

Ранее уже отмечалось, что возможно несколько изображений одного графа, поскольку все изоморфные графы несут одну и ту же информацию. На практике при изготовлении микросхем необходимо выяснить, можно ли схему радиоэлектронного устройства, которая представляет собой граф, изобразить на плоскости без пересечений проводников. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды.

Таким образом, возникает задача построения и исследования плоского графа. Плоским называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, причем никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины. Любой граф, изоморфный плоскому графу, называется планарным.

Все планарные графы укладываются на плоскости (имеют плоскую укладку). На рис. 3.47 изображен планарный граф  $G$  и его плоская укладка  $\tilde{G}$ .

Очевидно, что 1) всякий подграф планарного графа планарен и 2) граф планарен тогда и только тогда, когда каждая связная компонента этого графа – планарный граф.



\* Джулиус Петер Христиан Петерсен (1839 - 1910) – датский математик

$x_7 \quad x_6 \quad x_5 \quad x_4 \quad x_7 \quad x_6 \quad x_5 \quad x_4$

Рис. 3.47

Гранью планарного графа называется множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена плоской кривой, не пересекающей ребер этого графа. Границей грани называется множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани. Например, граф  $\tilde{G}$  на рис. 3.47 имеет восемь граней:  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_8$ . Неограниченная грань  $\Gamma_1$  называется внешней, а остальные грани  $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_8$  – внутренними.

Пусть  $n, m, f$  – соответственно число вершин, ребер и граней планарного графа.

**Теорема 3.21 (теорема Эйлера).** Для всякого связного планарного графа верно равенство

$$n - m + f = 2. \quad (3.20.1)$$

*Доказательство.* Пусть  $G$  – связный планарный  $n$ -вершинный граф. Рассмотрим некоторый остов  $G'$  этого графа. Остов имеет всего одну внешнюю грань,  $n$  вершин и  $n-1$  ребер, поэтому формула (3.20.1) для остова  $G'$  выполняется. Будем поочередно добавлять к остову  $G'$  недостающие ребра графа  $G$ . При каждом добавлении число вершин не изменится, число ребер увеличится на единицу, так же как и число граней, поскольку при добавлении к остову ребра, связывающего две несмежные вершины, получается цикл, разделяющий текущую грань на две.

Таким образом, формула (3.20.1) будет верна для всякого графа, получающегося в результате таких операций, а поскольку графом  $G$  заканчивается вся эта процедура, то формула (3.20.1) будет верна и для него.

Имеется несколько критериев планарности и найдены эффективные алгоритмы, осуществляющие плоскую укладку планарного графа. Для формулировки критерия планарности введем понятие гомеоморфизма графов. Рассмотрим операцию

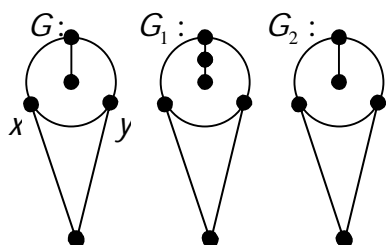


Рис. 3.48

подразбиения ребра в графе  $G = (S, U)$ . После подразделения ребра  $(x, y) \in U$  получается граф  $G' = (S', U')$ , где  $S' = S \cup \{xy\}$ ,  $U' = (U \setminus \{(x, y)\}) \cup \{(x, xy), (xy, y)\}$ , т.е. ребро  $(x, y)$  заменяется на  $(x, y)$  – цепь длины два. Два графа называются гомеоморфными, если они оба могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер. На рис. 3.48 изображены исходный граф  $G$  и два гомеоморфных графа  $G_1$  и  $G_2$ .

**Теорема 3.22 (теорема Понтрягина\*-Куратовского\*\*).** Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных  $K_5$  или  $K_{3,3}$ . Эквивалентная форма критерия планарности описана в следующей теореме.

**Теорема 3.23.** Граф планарен тогда и только тогда, когда в нем нет подграфов, стягиваемых (т.е. получаемых последовательностью отождествлений вершин, связанных ребрами) к графам  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .

Для непланарных графов вводятся характеристики, представляющие ту или иную меру непланарности. Если граф непланарен, то для его геометрической реализации удаляют отдельные ребра (переносят их на другую плоскость). Наименьшее число ребер, удаление которых приводит к планарному графу, называется числом планарности или искаженностью  $sk(G)$  графа  $G$ . Для числа планарности полного графа справедлива следующая формула:

$$sk(G) = C_n^2 - 3n + 6, \quad n \geq 3. \quad (3.20.2)$$

\* Лев Семенович Понтрягин (1908 – 1988) – советский математик.

\*\* Казимеж Куратовский (1896 – 1980) – польский математик.

Важнейшая характеристика непланарного графа – его толщина  $t(G)$  – наименьшее число планарных подграфов графа  $G$ , объединение которых дает сам граф. Толщина графа равна минимальному числу плоскостей  $l$ , при котором граф  $G$  разбивается на плоские части  $G_1, G_2, \dots, G_l$ . Очевидно, что толщина планарного графа равна единице. Для толщины связанного  $(n, m)$ - графа справедливы такие оценки

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil, \quad t(G) \geq \left\lceil \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rceil, \quad (3.20.3)$$

где  $[..]$  – целая часть числа, а  $]\dots[ = [..] + 1$ .

### 3.21. Алгоритм укладки графа на плоскости

Критерии планарности в практическом применении не всегда просты и не дают информации о том, как строить укладку графа на плоскости, если он планарен. Все это вызвало появление алгоритмов, которые проверяют граф на планарность и строят его плоскую укладку. Рассмотрим один из таких алгоритмов.

Этот алгоритм представляет собой процесс последовательного присоединения к некоторому уложенному подграфу  $\tilde{G}$  графа  $G$  новой цепи  $L$ , оба конца которой принадлежат  $G$ . После этого в качестве подграфа  $\tilde{G}$  выбирается любой простой цикл графа  $G$  и процесс присоединения новых цепей продолжается до тех пор, пока не будет построен плоский граф, изоморфный  $G$  или присоединение новой простой цепи на некотором этапе окажется невозможным, что свидетельствует о непланарности исходного графа  $G$ .

Введем несколько определений. Пусть имеется некоторая плоская укладка подграфа  $\tilde{G}$  графа  $G$ . Сегментом  $G_i$  относительно  $\tilde{G} = (\tilde{S}, \tilde{U})$  называется подграф графа  $G = (S, U)$  следующих двух видов:

- 1) ребро  $u = (x, y) \in U$  такое, что  $u \notin \tilde{U}$ ,  $x, y \in \tilde{S}$ ;
- 2) связная компонента графа  $G \setminus \tilde{G}$ , дополненная всеми ребрами графа  $G$ , инцидентными вершинам взятой компоненты, и концами этих ребер.

Вершина  $u$  сегмента  $G_i$  называется контактной, если  $u \in \tilde{S}$ . Граф  $\tilde{G}$  – плоский, следовательно, он разбивает плоскость на грани. Допустимой гранью для сегмента  $G_i$  относительно  $\tilde{G}$  называется грань  $\Gamma$  графа  $\tilde{G}$ , содержащая все контактные вершины сегмента  $G_i$ . Обозначим через  $\Gamma(G_i)$  – множество допустимых граней для  $G_i$ . Для непланарных графов может быть  $\Gamma(G_i) = \emptyset$ . Рассмотрим простую цепь  $L$  сегмента  $G_i$ , соединяющую две различные контактные вершины и не содержащую других контактных вершин. Такие цепи называются  $\alpha$ -цепями. Всякая  $\alpha$ -цепь может быть уложена в любую грань, допустимую для данного сегмента.

Два сегмента  $G_1$  и  $G_2$  относительно  $\tilde{G}$  называются конфликтующими, если

- 1)  $\theta = \Gamma(G_1) \cap \Gamma(G_2) \neq \emptyset$ ,
- 2) существуют две  $\alpha$ -цепи  $L_1 \in G_1$  и  $L_2 \in G_2$ , которые без пересечений нельзя уложить одновременно ни в какую грань  $\Gamma \in \theta$ .

Пусть  $\tilde{G}$  – плоская укладка некоторого подграфа графа  $G$ . Для каждого сегмента  $G_i$  относительно  $\tilde{G}$  находим множество допустимых граней. Тогда могут осуществляться только следующие три случая:

- 1) существует сегмент  $G_i$ , для которого  $\Gamma(G_i) = \emptyset$ . В этом случае исходный граф  $G$  непланарен;

2) для некоторого сегмента  $G_i$  существует единственная допустимая грань  $\Gamma$ . Тогда можно расположить любую  $\alpha$ -цепь сегмента  $G_i$  в грани  $\Gamma$ . При этом грань  $\Gamma$  разобьется на две грани;

3)  $\Gamma(G_i) \geq 2$  для  $\Gamma_i$ . В этом случае можно расположить  $\alpha$ -цепь в любой допустимой грани.

Сам алгоритм укладки планарного графа  $G$  на плоскость состоит из следующих шагов.

*Шаг 1.* Выбираем любой простой цикл  $C$  графа  $G$ . Этот цикл укладывается на плоскости и полагается  $\tilde{G} = C$ .

*Шаг 2.* Находим все грани графа  $\tilde{G}$  и все сегменты  $G_i$  относительно  $\tilde{G}$ . Если множество сегментов пусто, происходит переход на шаг 7.

*Шаг 3.* Для каждого сегмента  $G_i$  определяем множество допустимых граней  $\Gamma(G_i)$ . Если найдется сегмент  $G_i$ , для которого  $\Gamma(G_i) = \emptyset$ , то исходный граф  $G$  непланарен; конец алгоритма, иначе переход на шаг 4.

*Шаг 4.* Если существует сегмент  $G_i$ , для которого имеется единственная допустимая грань  $\Gamma$ , то происходит переход на шаг 6, иначе на шаг 5.

*Шаг 5.* Для некоторого сегмента  $G_i$ , для которого  $\Gamma(G_i) > 1$ , выбираем произвольную допустимую грань.

*Шаг 6.* Произвольная  $\alpha$ -цепь  $L$  сегмента  $G_i$  помещается в грань  $\Gamma$ ,  $\tilde{G}$  заменяется на  $\tilde{G} \cup L$  и происходит переход к шагу 1.

*Шаг 7.* Построена укладка  $\tilde{G}$  графа  $G$  на плоскости. Конец алгоритма.

**Пример 1.** Пусть граф  $G$  изображен на рис. 3.49. *Шаг 1.* Выберем простой цикл  $C = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , который разбивает плоскость на две грани  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Положим  $\tilde{G} = C$ .

*Шаг 2.* На рисунке 3.50 изображен граф  $\tilde{G} = C$  и сегменты  $G_1, G_2$  исходного графа  $G$  относительно  $\tilde{G}$ . Контактные вершины обведены кружками.  $\Gamma(G_i) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ ,  $i = 1, 2$ .

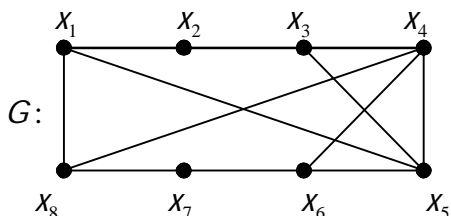


Рис. 3.49

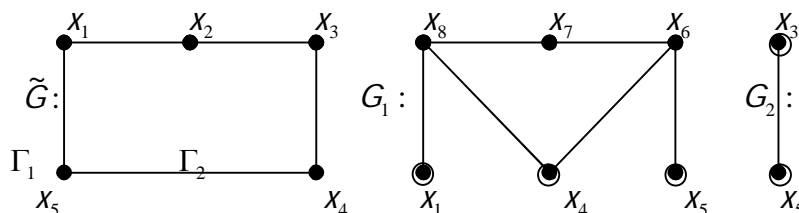


Рис. 3.50

*Шаг 3.*  $\Gamma(G_i) \neq \emptyset$ ,  $i = 1, 2$ .

*Шаг 4.* Нет сегмента, для которого бы существовала единственная допустимая грань.

*Шаг 5.* Любую  $\alpha$ -цепь можно уложить в  $\Gamma_1$  или в  $\Gamma_2$ . Выберем для укладки грань  $\Gamma_1$ .

*Шаг 6.* Пусть  $L = \{x_1, x_8, x_7, x_6, x_5\}$ . Поместим эту  $\alpha$ -цепь в  $\Gamma_1$ . Возникает новый граф  $\tilde{G}$  и его сегменты (рис. 3.51)  $G_1, G_2, G_3$ . Появляется и новая грань  $\Gamma_3$ . Переходим к первому шагу.

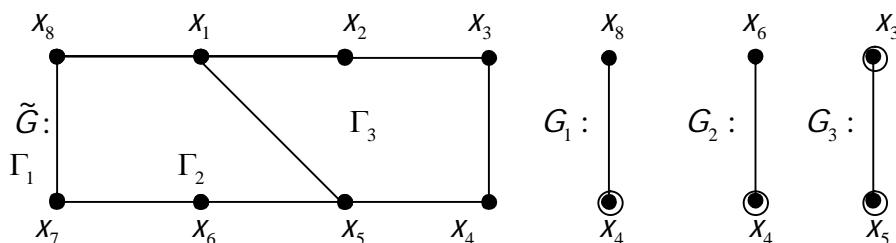


Рис. 3.51

Шаг 1. Новых сегментов три:  $G_1, G_2, G_3$ .

Шаг 2.  $\Gamma(G_1) = \{\Gamma_1\}$ ,  $\Gamma(G_2) = \{\Gamma_1\}$ ,  $\Gamma(G_3) = \{\Gamma_1, \Gamma_3\}$ .

Шаг 3.  $\Gamma(G_i) \neq \emptyset, i=1,2,3$ .

Шаг 4.  $\Gamma(G_1) = \Gamma(G_2) = \{\Gamma_1\}$ , переход на шаг 6.

Шаг 6.  $\alpha$ -цепь  $L_1 = \{x_4, x_8\}$  поместим в грань  $\Gamma_1$ ,  $\alpha$ -цепь  $L_2 = \{x_4, x_6\}$  также помещаем в эту же грань. В результате возникает новый граф  $\tilde{G}$ , изображенный на рис. 3.52. Этот граф имеет пять граней и один сегмент.

Шаг 1.  $G_1$  – ребро  $(x_3, x_5)$ .

Шаг 2.  $\Gamma(G_1) = \{\Gamma_3\}$ .

Шаг 3.  $\Gamma(G_1) \neq \emptyset$ .

Шаг 4.  $\Gamma(G_1) = \{\Gamma_3\}$ , переход на шестой шаг.

Шаг 6.  $\alpha$ -цепь  $L_1 = \{x_3, x_5\}$  поместим в грань  $\Gamma_3$ . Новый граф  $\tilde{G}$  на рис. 3.53 является плоской укладкой исходного планарного графа.

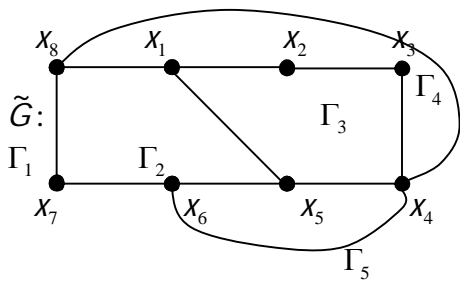


Рис. 3.52

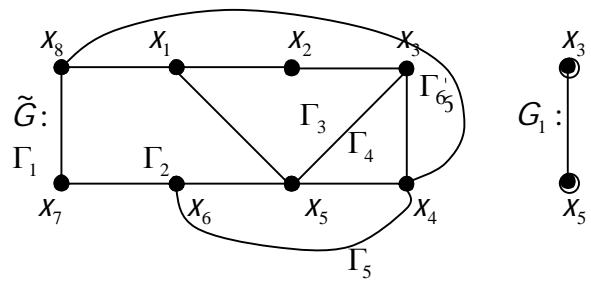


Рис. 3.53

**Пример 2.** Попробуем получить плоскую укладку графа  $K_5$ , изображенного на рис. 3.54. Поскольку известно, что граф непланарен, алгоритм должен закончить работу на третьем шаге.

Шаг 1. Выберем простой цикл  $C = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ,  $\tilde{G} = C$ .

Шаг 2. Граней у графа  $\tilde{G}$  две:  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , сегментов пять, все они показаны на рис. 3.55.

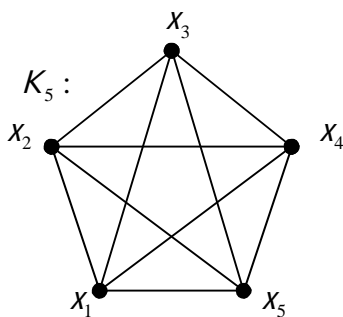


Рис. 3.54

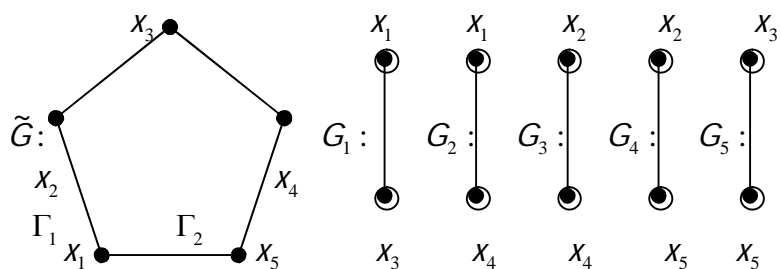


Рис. 3.55

Шаг 3.  $\Gamma(G_i) = 2, i=1,5$ .

Шаг 4.  $\Gamma(G_i) \neq 1, i=1,5$ .

Шаг 5. Выберем для  $G_1$  и  $G_5$  грань  $\Gamma_2$  в качестве допустимой грани.

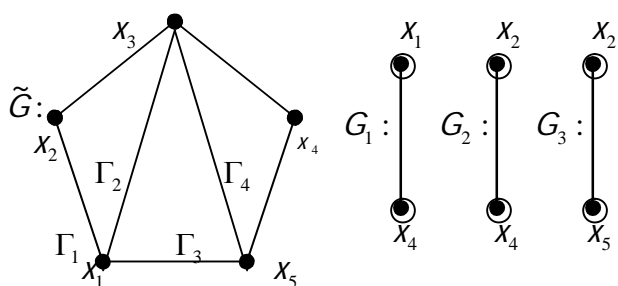


Рис. 3.56

Шаг 6.  $\alpha$ -цепи  $L_1 = \{x_1, x_3\}$  и  $L_2 = \{x_3, x_5\}$  присоединим к графу  $\tilde{G}$ . Получим новый граф  $\tilde{G}$  и три сегмента  $G_1, G_2, G_3$ . (рис. 3.56).

Шаг 1-2. Новых граней у графа  $\tilde{G}$  четыре:  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ .

Шаг 3.  $\Gamma(G_1) = \{\Gamma_1\}$ ,  $\Gamma(G_2) = \{\Gamma_1\}$ ,  $\Gamma(G_3) = \{\Gamma_1\}$ .

Шаг 4. Для  $G_1$  и  $G_2$  выберем грань  $\Gamma_1$ .

Шаг 6.  $\alpha$ -цепи  $L_1 = \{x_1, x_4\}$  и  $L_2 = \{x_2, x_4\}$  поместим в грань  $\Gamma_1$  и присоединим к  $\tilde{G}$ .

Шаг 1.  $\tilde{G}$  и сегмент  $G_1$  показаны на рис. 3.57.

Шаг 2. Граней у графа  $\tilde{G}$  теперь шесть:  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ .

Шаг 3.  $\Gamma(G_1) = \emptyset$ . Исходный граф  $G$  непланарен, конец алгоритма.

В заключение найдем число планарности и толщину полного графа  $K_5$ . По формуле (3.20.2)  $sk(K_5) = C_5^2 - 3 \cdot 5 + 6 = 10 - 15 + 6 = 1$ . Это соответствует действительности, у графа  $\tilde{G}$  остался один неприсоединенный сегмент  $G_1$  (рис. 3.57).

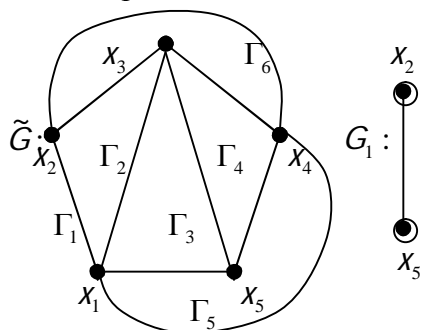


Рис. 3.57

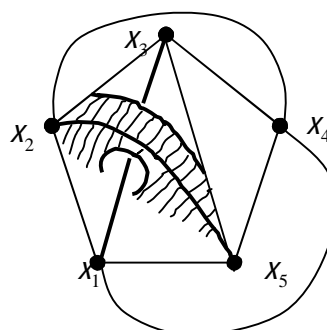


Рис. 3.58

Для толщины полного графа модификация формул (3.20.3) дает точную оценку  $t(K_5) = \left\lceil \frac{n+7}{6} \right\rceil = \left\lceil \frac{5+7}{6} \right\rceil = 2$ . Таким образом, этот граф можно представить в виде объединения планарных графов на двух плоскостях (рис. 3.58).

### 3.22. Хроматические графы. Раскраски графов

Пусть  $G = (S, U)$  – неориентированный граф. Раскраской графа называется такое приписывание цветов его вершинам, что никакие две смежные вершины не получают одинакового цвета. Таким образом, множество вершин одного цвета является независимым множеством. Хроматическим числом  $\chi(G)$  графа  $G$  называется минимальное число цветов, требующееся для раскраски  $G$ . Если  $\chi(G) = k$ , то граф называется  $k$ -хроматическим.

Задачи раскраски вершин и ребер графа занимают важное место в истории развития теории и в самой теории графов. К построению раскрасок сводится целый ряд практических задач, например, задачи составления расписаний, распределения оборудования, проектирования некоторых технических изделий.



В теории хроматических графов существует так называемая гипотеза четырех красок, которую некоторые авторы с полным основанием называют «болезнью четырех красок». Попытки обосновать эту гипотезу привели к ряду интересных результатов не только по раскраске графов, но и по ряду других разделов теории графов.

Легко найти хроматические числа некоторых известных графов, например,  $\chi(K_n) = n$ ,  $\chi(\overline{K_n}) = 1$ ,  $\chi(K_{n,m}) = 2$ ,  $\chi(T) = 2$ , где  $\overline{K}$  – дополнительный граф, а  $T$  – дерево. Однако эффективные методы определения хроматического числа произвольных графов до сих пор не найдены. В такой ситуации актуальны оценки хроматического числа, выражаемые в терминах более или менее просто вычисляемых параметров графа.

Обозначим через  $P(G)$  наибольшую из степеней вершин графа  $G$ .

**Теорема 3.24.** Для любого неориентированного графа  $G$  выполняется неравенство

$$\chi(G) \leq P(G) + 1. \quad (3.22.1)$$

Следующая теорема связывает хроматическое число графа с количеством его вершин и ребер.

**Теорема 3.25.** Для любого связного  $(n, m)$ - графа  $G$  верны неравенства

$$-\left\lceil -n / \left\lceil \frac{n^2 - 2m}{n} \right\rceil \left( 1 - \left\{ \frac{n^2 - 2m}{n} \right\} / \left( 1 + \left\lceil \frac{n^2 - 2m}{n} \right\rceil \right) \right) \right\rceil \leq \chi(G) \leq \left\lceil \frac{3 + \sqrt{9 + 8(m - n)}}{2} \right\rceil, \quad (3.22.2)$$

где  $[..]$  – целая часть, а  $\{..\}$  – дробная часть числа.

Наконец, теорема 3.26 оценивает хроматическое число в терминах числа независимости  $\alpha_0(G)$  графа  $G$ .

**Теорема 3.26.** Для любого  $n$ - вершинного графа  $G$  верно неравенство

$$\frac{n}{\alpha_0(G)} \leq \chi(G) \leq n - \alpha_0(G) + 1. \quad (3.22.3)$$

Проблема раскраски планарных графов является одной из самых знаменитых проблем теории графов. Она возникла из задачи раскраски географической карты, при которой любые две соседние страны должны быть окрашены в различные цвета. Эта задача легко сводится к задаче раскраски планарного графа.

В 1879 году английский математик Кэли четко сформулировал гипотезу четырех красок.

**Гипотеза четырех красок.** **Всякий планарный граф 4-раскрашиваем.**

Попытки доказать эту гипотезу привели в 1890 году к появлению теоремы Хивуда\*.

**Теорема 3.27.** **Всякий планарный граф 5-раскрашиваем.**

**Доказательство.** Воспользуемся методом математической индукции по числу вершин графа. Совершенно очевидно, что если у графа не более пяти вершин, то теорема справедлива. Предположим, что она верна для графов порядка  $n, n \geq 5$ .

Рассмотрим планарный граф  $G$  с  $n+1$  вершиной и докажем сначала несколько вспомогательных соотношений. Во-первых, из теоремы 3.21 следует, что если в связном плоском  $(n, m)$  – графе граница каждой грани является  $r$ -циклом,  $r \geq 3$ , то  $m(r-2) = r(n-2)$ .

Действительно, так как каждая грань графа ограничена  $r$ -циклом, то каждое ребро принадлежит двум граням, т.е.  $f \cdot r = 2m$ , где  $f$  – число граней, но  $f = 2 - n + m$  из теоремы 3.21, тогда  $(2 - n + m) \cdot r = 2m$  и  $m(r-2) = r(n-2)$ . При  $r = 3$  получим  $m = 3n - 6$ .

Далее убедимся в том, что если число вершин у максимального плоского графа не менее четырех, то степень каждой вершины не менее трех (рис. 3.59). Рассмотрим вершину  $x_1$ .

\* Перси Джон Хивуд (1861 - 1955) – английский математик.



Пусть  $x_3$  – смежная с ней вершина. Ребро  $(x_1, x_3)$  принадлежит двум граням – треугольникам  $(x_1, x_3, x_2)$  и  $(x_1, x_3, x_4)$ , причем  $x_2 \neq x_4$ , так как число вершин не менее четырех. Таким образом,  $x_1$  смежна по крайней мере с тремя вершинами  $x_2, x_3$  и  $x_4$  (рис. 3.59).

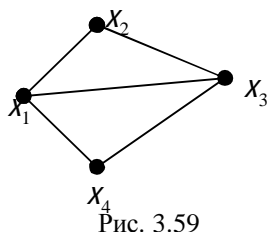


Рис. 3.59

Итак, для максимального плоского графа с учетом двух предыдущих замечаний и лемме о рукопожатиях (см. задачу 3.9.1) будем иметь  $m = 3n - 6$ ,  $2m = 2(3n - 6) = 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \dots \geq 3(n_3 + n_4 + n_5) + 6 \sum_{i \geq 6} n_i$ , где

$n_i$  – число вершин степени  $i$  у максимального плоского графа. Но  $n = \sum_{i \geq 3} n_i = n_3 + n_4 + n_5 + \sum_{i \geq 6} n_i$ ,

тогда  $6n - 12 = 6(n_3 + n_4 + n_5) + 6 \sum_{i \geq 6} n_i - 12 \geq 3(n_3 + n_4 + n_5) + 6 \sum_{i \geq 6} n_i$ . Отсюда  $n_3 + n_4 + n_5 \geq 4$ , т.е.

всякий планарный граф с  $n \geq 4$  вершинами имеет, по крайней мере, четыре вершины со степенями, не превосходящими пяти.

Максимальный плоский граф  $G'$  отличается от исходного  $G$  лишь наличием дополнительных ребер, соединяющих несмежные вершины без пересечения с прочими ребрами. Если в графе  $G'$  имеется по крайней мере четыре вершины со степенями не больше пяти, то в исходном графе  $G$  такие вершины и подавно имеются.

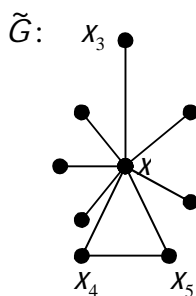
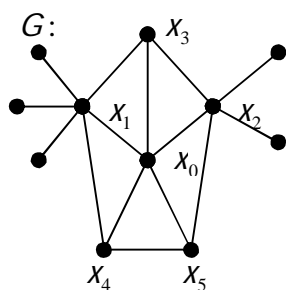


Рис. 3.60

Вернемся теперь к основному доказательству.

В графе порядка  $n+1$  содержится вершина  $x_0$ , степень которой не превосходит пяти. Пусть  $S = S(x_0)$  – окружение вершины  $x_0$  в графе  $G$  (рис. 3.60). Возможны два случая.

1.  $|S| = 4$ . В этом случае граф  $G \setminus \{x_0\}$  5-раскрашиваем по индуктивному предположению. Рас-

красим вершины графа  $G \setminus \{x_0\}$  пятью цветами, а вершину  $x_0$  окрасим в тот цвет, который не был использован при раскраске вершин из  $S$ .

2.  $|S| = 5$ . В множестве  $S$  существуют две несмежные вершины  $x_1$  и  $x_2$ , иначе  $G(S) = K_5$  и граф  $G$  не будет планарным (рис. 3.60). Граф  $\tilde{G}$ , полученный из  $G \setminus \{x_0\}$  слиянием вершин  $x_1$  и  $x_2$  в вершину  $x$ , плоский и 5-раскрашиваемый по индуктивному предположению.

Рассмотрим какую-либо из его 5-раскрасок. В графе  $G$  окрасим вершины  $x_1$  и  $x_2$  в цвет вершины  $x$ , а остальные отличные от  $x$  вершины – в те же цвета, что и соответствующие вершины графа  $\tilde{G}$ . Затем припишем вершине  $x_0$  цвет, не используемый при раскраске вершин из  $S$ . Таким образом, получится правильная 5-раскраска графа  $G$ .

Трудность проблемы четырех красок привела к появлению большого числа равносильных ей формулировок. В конце 60-х годов прошлого века эта проблема была сведена к исследованию большого, но конечного множества так называемых неустраимых конфигураций, число которых оказалось равно 1482.

В 1976 году научному коллективу под руководством К. Апеля и В. Хейкена удалось с использованием ЭВМ правильно раскрасить все графы из множества неустраимых конфигураций, затратив на это около 2000 часов машинного времени. Таким образом, хотя такое доказательство очень сложно повторить, можно считать, что формально гипотеза четырех красок доказана.

В заключение рассмотрим очень простой алгоритм последовательной раскраски графа. Этот алгоритм в общем случае не приводит к минимальной раскраске. Только для некоторых классов графов, например полных  $k$ -дольных, последовательная раскраска минимальна.

Алгоритм последовательной раскраски содержит два правила:

1) произвольной вершине  $x$  графа  $G$  присваивается цвет 1;

2) если вершины  $x_1, x_2, \dots, x_i$  раскрашены  $k$  цветами  $1, 3, \dots, k, k \leq i$ , то новой произвольно взятой вершине  $x_{i+1}$  приписывается минимальный цвет, не использованный при раскраске вершин из ее окружения.

**Пример 1.** Оценить и найти хроматическое число графа, изображенного на рис. 3.61,а), и раскрасить его вершины по алгоритму последовательной раскраски. Является ли полученная раскраска минимальной?

Плоская укладка этого графа, полученная по описанному в подразд. 3.21 алгоритму, изображена на рис. 3.61,б). Исходный граф  $G$  – планарный.

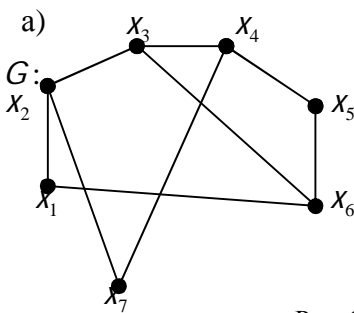


Рис. 3.61

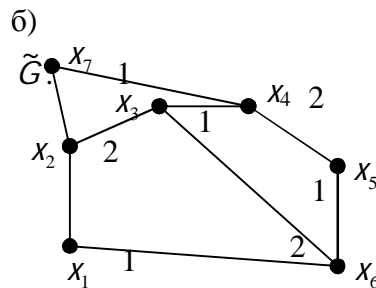


Рис. 3.62

Оценим его хроматическое число. Формула (3.22.1) дает  $n=7$ ,  $m=9$ ,  $P(G)=3$ ,  $\chi(G) \leq 3+1=4$ . Аналогично, по (3.22.2) получим

$$\left[ \frac{7}{\left\lceil \frac{49-18}{7} \right\rceil} \cdot \frac{1 - \left\lceil \frac{49-18}{7} \right\rceil}{1 + \left\lceil \frac{49-18}{7} \right\rceil} \right] \leq \chi(G) \leq \left\lceil \frac{3 + \sqrt{9 + 8 \cdot 2}}{2} \right\rceil, \quad \text{т.е.} \quad 0 \leq \chi(G) \leq 4. \quad \text{Наконец, так как}$$

$\alpha_0(G)=4$ , по формуле (3.22.3) будем иметь  $7/4 \leq \chi(G) \leq 7-4+1$ , т.е.  $1.75 \leq \chi(G) \leq 4$ .

На самом деле  $\chi(G)=2$ . Раскрасим вершины этого графа по алгоритму последовательной раскраски. Выберем в качестве начальной вершину  $x_7$  и присвоим ей цвет 1.  $S(x_7)=\{x_2, x_4\}$ , поэтому обеим вершинам присваиваем цвет 2. Далее выберем, например, вершину  $x_3$ . Ее окружение  $S(x_3)=\{x_2, x_4, x_6\}$ . Вершины  $x_2$  и  $x_4$  уже окрашены, вершина  $x_6$  еще нет. Минимальным цветом, не использованным при раскраске вершин из окружения вершины  $x_3$ , является цвет 1, поэтому вершине  $x_3$  присвоим этот цвет.

После нескольких этапов работы алгоритма получится раскраска, показанная на рис. 3.61,б). Эта раскраска минимальна, так как граф  $G$  двуцветен и представляет собой не-полный двудольный граф (рис. 3.62). Двуцветные графы удовлетворяют следующей теореме.

**Теорема 3.28 (теорема Кенига\*)** **Граф двуцветен тогда и только тогда, когда он не содержит нечетных простых циклов.** Это условие выполняется для графа  $\tilde{G}$  (рис. 3.61,б).

\* Денез Кениг (1884 - 1944) – венгерский математик.

## 3.23. Практическое занятие № 9. Планарные и хроматические графы

3.23.1. Определим графы  $G_n$  следующим образом. Пусть  $G_n$  – граф, множество вершин которого совпадает с отрезком натурального ряда  $\{1, 2, \dots, 10\}$ , а множество ребер определяется следующим условием: несовпадающие вершины  $x$  и  $y$  смежны тогда, когда числа  $x$  и  $y$  взаимно просты. При каких значения  $n$  графы  $G_n$  планарны?

3.23.2. Доказать, что любой граф можно уложить в трехмерном пространстве  $R^3$ .

3.23.3. Какие из графов, изображенных на рис. 3.63, являются планарными?

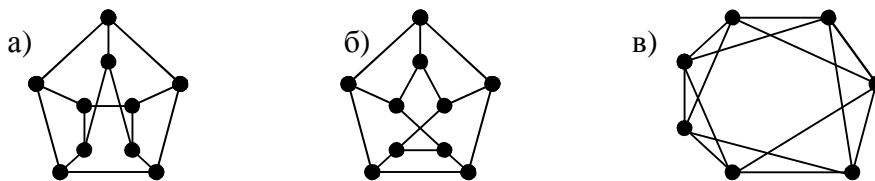


Рис. 3.63

3.23.4. При каких  $n$  графы порядка  $2n$ , изображенные на рис. 3.64, являются планарными?

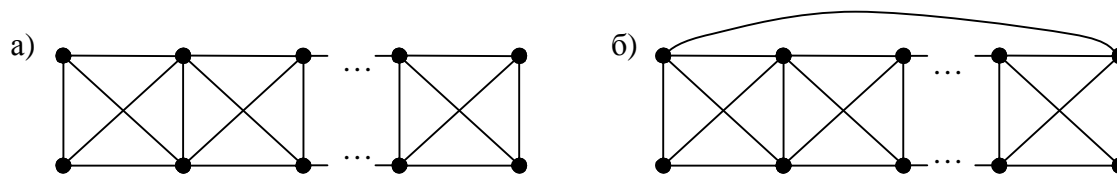


Рис. 3.64

3.23.5. С помощью алгоритма укладки графа на плоскость построить плоские укладки или установить непланарность графов, изображенных на рис. 3.65.

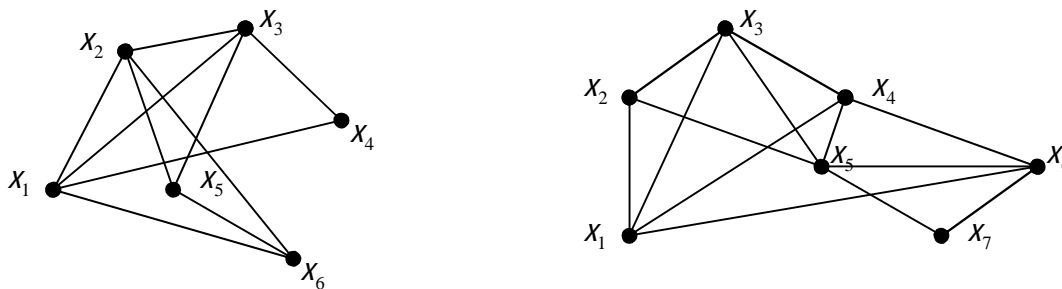


Рис. 3.65

3.23.6. Найти число планарности и толщину графов а)  $K_5$ ; б)  $K_{3,3}$  и в) графа Петерсена.

3.23.7. Уложить графы а)  $K_5$  и б)  $K_{3,3}$  на торе.

3.23.8. Определить хроматические числа графов, изображенных на рис. 3.66.

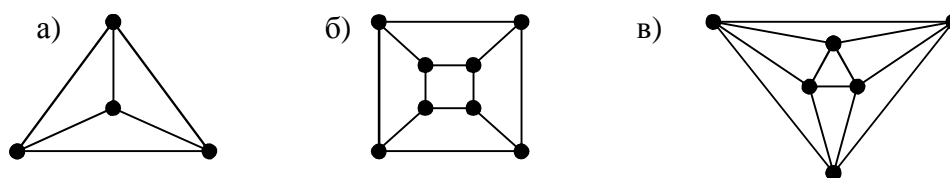


Рис. 3.66

3.23.9. Граф называется критическим, если удаление любой из его вершин приводит к графу с меньшим хроматическим числом. Показать, что  $K_n$  является критическим графом при  $n > 1$ , а  $C_n$  – тогда и только тогда, когда  $n$  нечетно.  $C_n$  – простой цикл, содержащий  $n$  вершин.

3.23.10. Приведите пример графа, последовательная раскраска вершин которого не является минимальной.

## 3.24. Потоки в сетях

Функциональное назначение большинства физически реализованных сетей состоит в том, что они служат носителями систем потоков, то есть систем, в которых некоторые объекты текут, движутся или транспортируются по системе каналов (дуг сети) ограниченной пропускной способности. Примерами могут служить потоки автомобильного транспорта по сети автодорог, грузов по участку железнодорожной сети, воды в городской сети водоснабжения, электрического тока в электросети, телефонных или телеграфных сообщений по каналам связи, программ в вычислительной сети. Ограниченная пропускная способность означает, что интенсивность перемещения соответствующих предметов по каналу ограничена сверху определенной величиной.

Наиболее часто в сети решается задача о максимальном потоке и минимальном разрезе. При этом граф  $G = (S, U)$  должен удовлетворять следующим условиям:

- 1)  $G$  – связный граф без петель;
- 2) существует ровно одна вершина, не имеющая предшествующих; эта вершина называется источником и обозначается  $s$ ;
- 3) существует ровно одна вершина, не имеющая последующих; эта вершина называется стоком и обозначается  $t$ ;
- 4) каждой дуге  $(x_i, x_j) \in U$  поставлено в соответствие неотрицательное число  $c(x_i, x_j)$ ,  $c(x_i, x_j) \in \Omega$ , называемое пропускной способностью дуги.

Функция  $\varphi(x_i, x_j)$ , определенная на множестве дуг сети  $G = (S, U, \Omega)$ , называется потоком, если  $0 \leq \varphi(x_i, x_j) \leq c(x_i, x_j) \forall (x_i, x_j) \in U$  и  $\sum_{x_i \in S_{np}(x_j)} \varphi(x_i, x_j) = \sum_{x_j \in S_{cl}(x_i)} \varphi(x_i, x_j)$  для

любой вершины  $x_i \in S$  и  $x_i \notin \{s, t\}$ . Последнее условие называется условием сохранения потока, в промежуточных вершинах потока не создаются и не исчезают.

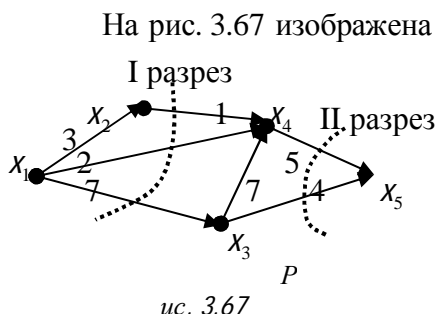
Величина  $\Delta(x_i, x_j) = c(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_j)$  называется остаточной пропускной способностью дуги  $(x_i, x_j)$ . Если  $\varphi(x_i, x_j) = c(x_i, x_j)$ , то дуга называется насыщенной.

Максимальный поток определяется с помощью одного из основных понятий теории сетей – разреза. Разрез может быть представлен как множество дуг, исключение которых из сети отделило бы некоторое множество узлов от остальной сети. Предположим, что множество вершин сети  $S$  разбито на два непустых непересекающихся подмножества  $S = S' \cup S''$  и  $S' \cap S'' = \emptyset$ . Множество дуг, начала которых лежат в  $S'$ , а концы в  $S''$ , называется ориентированным разрезом и обозначается  $(S' \rightarrow S'')$ . Следовательно,

$$(S' \rightarrow S'') = \{(x_i, x_j) \mid x_i \in S', x_j \in S''\}. \quad (3.24.1)$$

Пропускной способностью или величиной разреза  $(S' \rightarrow S'')$  называется сумма пропускных способностей входящих в него дуг, то есть

$$c(S' \rightarrow S'') = \sum_{x_i \in S', x_j \in S''} c(x_i, x_j) \quad (3.24.2)$$



На рис. 3.67 изображена сеть, на которой около каждого ребра указана его пропускная способность. Произведены два разреза I и II. При разрезе I вершины оказались разбиты на подмножества  $S' = \{x_1, x_2\}$  и  $S'' = \{x_3, x_4, x_5\}$ , а ребрами, образующими разрез, стали ребра  $(x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_4)$ . При разрезе II  $S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ , а  $S'' = \{x_5\}$ , разрез образуют ребра  $(x_3, x_5), (x_4, x_5)$ .

## 3.25. Теорема Форда – Фалкерсона

**Теорема 3.29.** Для любой сети с одним источником и одним стоком величина максимального потока в сети от источника к стоку равна пропускной способности минимального разреза.

*Доказательство. Алгоритм Форда – Фалкерсона построения максимального потока и минимального разреза основан на следующих обстоятельствах.*

1. Предположим, что в сети имеется некоторый поток и путь из  $s$  в  $t$ , состоящий из ненасыщенных дуг. Тогда очевидно, что поток в сети можно увеличить на величину  $\Delta$ , равную минимальной из остаточных пропускных способностей дуг, входящих в этот путь. Перебирая все возможные пути из  $s$  в  $t$  и проводя такую процедуру увеличения потока пока это возможно, получаем в результате полный поток, т.е. такой поток, для которого каждый путь из  $s$  в  $t$  содержит по крайней мере одну насыщенную дугу.

2. Рассмотрим произвольный маршрут (неориентированный путь) из  $s$  в  $t$ . Дуги, образующие этот маршрут, естественным образом делятся на два типа: прямые (ориентированные от  $s$  к  $t$ ) и обратные (ориентированные от  $t$  к  $s$ ). Пусть существует путь, в котором прямые дуги не насыщены, а потоки на обратных дугах положительны;  $\Delta_1$  – минимальная из остаточных пропускных способностей прямых дуг, а  $\Delta_2$  – минимальная из величин потоков обратных дуг. Тогда поток в сети можно увеличить на величину  $\Delta = \min \{\Delta_1, \Delta_2\}$ , прибавляя

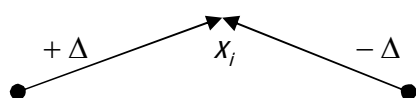


Рис. 3.68

$\Delta$  к потокам на прямых дугах и вычитая  $\Delta$  из потоков на обратных дугах (рис. 3.68). Очевидно, что при этом условие баланса (условие сохранения потока)

нарушится. Ясно, что если множество обратных дуг не пусто, то при такой процедуре увеличения потока в сети фактического перемещения объектов вдоль рассматриваемого маршрута не происходит, так как оно в принципе нереально. Однако эта процедура уменьшает потоки на некоторых дугах, которые, возможно, были перед этим насыщенными, образуя таким образом новые пути из ненасыщенных дуг, вдоль которых и происходит фактическое перемещение потока величины  $\Delta$ .

Ясно также, что первая процедура является частным случаем второй.

**Пример 1.** Пропускные способности дуг заданы следующей матрицей.

	$s$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$t$
$s$	—	12	—	13	—	—
$x_1$	—	—	11	14	15	—
$x_2$	—	—	—	—	—	8
$x_3$	—	—	—	—	7	15
$x_4$	—	—	8	—	—	—
$t$	—	—	—	—	—	—

Построить максимальный поток от  $s$  к  $t$  и указать минимальный разрез, отделяющий  $s$  от  $t$ .

**Этап 1.** Путь  $s \xrightarrow{12} x_1 \xrightarrow{14} x_3 \xrightarrow{15} t$ .  $\delta = \min(12, 14, 15) = 12$ . Увеличим по этому пути поток до 12 единиц, ребро  $(s, x_1)$  становится насыщенным. Поставим величину потока на дугах  $(x_1, x_3)$  и  $(x_3, t)$ .

Путь  $s \xrightarrow{13} x_3 \xrightarrow{12(15)} t$ .  $\delta = \min(13, 15 - 12) = 3$ . Поток можно увеличить на три единицы. Дуга  $(x_3, t)$  станет насыщенной. Путь  $s \xrightarrow{3(13)} x_3 \xrightarrow{7} x_4 \xrightarrow{8} x_2 \xrightarrow{8} t$ . Можно увеличить поток на семь единиц; дуга  $(x_3, x_4)$  станет насыщенной, потоки на дугах примут вид как на рис. 3.69:  $s \xrightarrow{10(13)} x_3 \xrightarrow{7(7)} x_4 \xrightarrow{7(8)} x_2 \xrightarrow{7(8)} t$ .

Больше путей нет. Конец первого этапа.

**Этап 2.** Рассмотрим теперь маршруты, содержащие противоположные дуги. Маршрут

$s \xrightarrow{10(13)} x_3 \xleftarrow{12(14)} x_1 \xrightarrow{11} x_2 \xrightarrow{7(8)} t$ . Поток

можно увеличить на единицу на дуге  $(x_2, t)$ . Тогда

потоки по дугам этого маршрута станут такими  $s \xrightarrow{11(13)} x_3 \xleftarrow{11(14)} x_1 \xrightarrow{1(11)} x_2 \xrightarrow{8(8)} t$ .

Дуга  $(x_2, t)$  стала насыщенной.

Больше маршрутов нет. Поток максимален. Делаем разрез вокруг  $t$  по насыщенным дугам и получаем его величину  $15 + 8 = 23$  единицы.

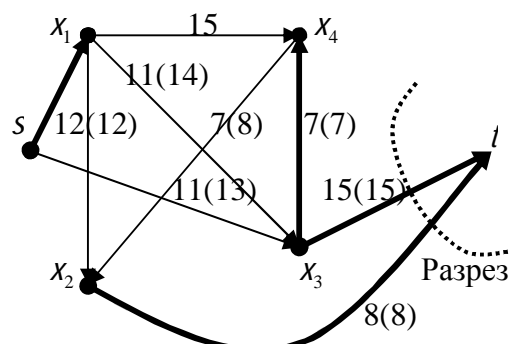


Рис. 3.69

## 3.26. Поток минимальной стоимости

Рассмотрим задачу определения потока, заданной величины  $\theta$  от  $s$  к  $t$  в сети  $G = (S, U, \Omega, D)$ , в которой каждая дуга  $(x_i, x_j)$  характеризуется пропускной способностью  $c(x_i, x_j) \in \Omega$  и неотрицательной стоимостью  $d(x_i, x_j) \in D$  пересылки единичного потока из  $x_i$  в  $x_j$  вдоль дуги  $(x_i, x_j)$ .

Если  $\theta > \varphi_{\max}$ , где  $\varphi_{\max}$  – величина максимального потока в сети  $G$  от  $s$  к  $t$ , то решения нет. Если же  $\theta \leq \varphi_{\max}$ , то может быть определено несколько различных потоков величины  $\theta$  от  $s$  к  $t$ . Математическая модель задачи выглядит следующим образом. Минимизировать

$$\sum_{(x_i, x_j) \in U} d(x_i, x_j) \cdot \varphi(x_i, x_j), \quad (3.26.1)$$

где  $\varphi(x_i, x_j)$  – поток по дуге  $(x_i, x_j)$  при ограничениях:

1)  $0 \leq \varphi(x_i, x_j) \leq c(x_i, x_j) \quad \forall (x_i, x_j) \in U$ ;

2) для начальной вершины  $s \in S \quad \sum_{x_j \in S} \varphi(s, x_j) - \sum_{x_j \in S} \varphi(x_j, s) = \theta$  – уравнение истока;

3) для конечной вершины  $t \in S \quad \sum_{x_j \in S} \varphi(t, x_j) - \sum_{x_j \in S} \varphi(x_j, t) = -\theta$  – уравнение стока;

4) для любой другой вершины  $x_j \neq s, t \quad \sum_{x_i \in S} \varphi(x_j, x_i) - \sum_{x_i \in S} \varphi(x_i, x_j) = 0$  – условие сохранения потока.

Если  $?^*$  – кратчайший путь от  $s$  к  $t$  в сети  $G = (S, U, D)$ ,  $c_{\min}(?^*)$  – минимальная из пропускных способностей дуг, входящих в путь  $?^*$ , и если  $\theta < c_{\min}(?^*)$ , то задача имеет тривиальное решение – весь поток  $\theta$  направляется вдоль пути  $?^*$ . Общее решение задачи о потоке минимальной стоимости строится следующим образом. Сначала находится кратчайший путь  $?^*$  от  $s$  к  $t$  и величина  $\varphi_{\max}(?^*)$  максимально возможного потока вдоль этого пути. Ес-



ли окажется, что  $\theta \leq \varphi_{\max}(?)^*$ , то задача решена. В противном случае сеть модифицируют специальным образом. Затем опять находят кратчайший путь от  $s$  к  $t$  и максимально возможный поток вдоль этого пути в модифицированной сети. Процедуры модификации сети и нахождения кратчайшего пути в ней повторяются до тех пор, пока либо нужное количество  $\theta$  не будет переправлено, либо возникнет сеть, в которой нет пути от  $s$  к  $t$ , что означает отсутствие решения у исходной задачи.

Модификация сети допускается только определенного порядка. Пусть  $G = (S, U, \Omega, D)$  – исходная сеть,  $S$  – множество вершин,  $U$  – множество ребер,  $\Omega$  – множество весов (пропускных способностей дуг),  $D$  – набор стоимостей пересылки единичного потока из  $x_i$  в  $x_j$  вдоль дуги  $(x_i, x_j)$ .

Модифицированная относительно данного потока  $\varphi$  сеть  $\tilde{G} = (\tilde{S}, \tilde{U}, \tilde{\Omega}, \tilde{D})$  строится следующим образом.

1.  $\tilde{S} = S$ , то есть число и набор вершин в модифицированной сети не изменяется.
2.  $\tilde{U} = U \cup V$ , где  $V$  – некоторое множество фиктивных дуг. Таким образом, после модификации число дуг сети увеличивается.
3. Если  $(x_j, x_i) \in S$  и  $\varphi(x_j, x_i) > 0$ , то дуга  $(x_i, x_j)$  включается в множество  $V$ . При этом полагается  $\tilde{c}(x_i, x_j) = \varphi(x_j, x_i)$ ,  $\tilde{d}(x_i, x_j) = -d(x_j, x_i)$ . Этот пункт применяется только к дугам, по которым проходит поток  $\varphi$ , относительно которого происходит модификация сети.
4. Для всех ненасыщенных дуг, где нет противоположного потока, в том числе и для ненасыщенных дуг с потоком, относительно которого происходит модификация сети, то есть для  $(x_i, x_j) \in S$ ,  $\varphi(x_i, x_j) < c(x_i, x_j)$  и  $\varphi(x_j, x_i) = 0$  полагают  $\tilde{c}(x_i, x_j) = c(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_j)$ ,  $\tilde{d}(x_i, x_j) = d(x_i, x_j)$ .
5. Для всех насыщенных дуг  $(x_i, x_j) \in S$ ,  $\varphi(x_i, x_j) = c(x_i, x_j)$  и  $\varphi(x_j, x_i) = 0$  полагают  $\tilde{c}(x_i, x_j) = 0$ ,  $\tilde{d}(x_i, x_j) = \infty$ .

Это довольно сложный и «длительный» алгоритм. Нахождение кратчайшего пути как в исходной, так особенно в модифицированной сети может потребовать использования алгоритма Беллмана – Мура. Кроме того, решение типичных учебных задач требует три – четыре итерации алгоритма.

**Пример 1.** Пусть матрицами  $\Omega$  и  $D$  заданы пропускные способности дуг сети и стоимости транспортировки единичного потока вдоль всех дуг. Требуется: 1) построить максимальный поток от  $s$  к  $t$  и указать минимальный разрез, отделяющий  $s$  от  $t$ ; 2) построить поток величины  $\theta = \lfloor 3/4 \varphi_{\max} \rfloor$ , имеющий минимальную стоимость, здесь  $\lfloor \dots \rfloor$  – целая часть числа.

Построим рисунок соответствующей сети (рис. 3.70). Первое число на дугах – стоимость транспортировки единичного потока вдоль этой дуги; второе – пропускная способность дуги.

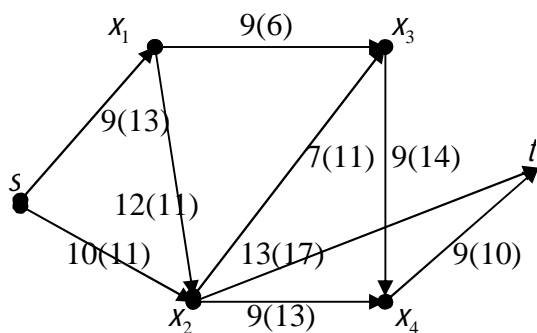


Рис. 3.70

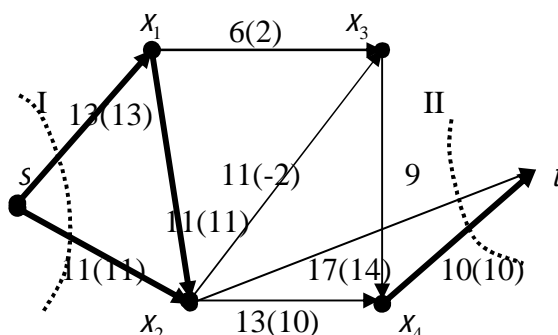


Рис. 3.71



Найдем максимальный поток от вершины  $s$  к вершине  $t$  по алгоритму Форда – Фалкерсона.

$$\Omega = \begin{matrix} & s & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & t \\ \begin{matrix} s \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ t \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 13 & 11 & - & - & - \\ - & - & 11 & 6 & - & - \\ - & - & - & 11 & 13 & 17 \\ - & - & - & - & 9 & - \\ - & - & - & - & - & 10 \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad D = \begin{matrix} & s & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & t \\ \begin{matrix} s \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ t \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 9 & 10 & - & - & - \\ - & - & 12 & 9 & - & - \\ - & - & - & 7 & 9 & 13 \\ - & - & - & - & 14 & - \\ - & - & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

**Этап 1.** Путь  $s \xrightarrow{11} x_2 \xrightarrow{17} t$ .  $\delta = \min(11, 17) = 11$ . Увеличим по этому пути поток до 11 единиц, ребро  $(s, x_2)$  станет насыщенным. Второй возможный путь  $s \xrightarrow{13} x_1 \xrightarrow{11} x_2 \xrightarrow{13} x_4 \xrightarrow{10} t$ .  $\delta = \min(13, 11, 13, 10) = 10$ . Поток по этому пути равен 10 единицам. Дуга  $(x_4, t)$  станет насыщенной. Третий путь, по которому возможен ненулевой поток – это путь  $s \xrightarrow{3} x_1 \xrightarrow{1} x_2 \xrightarrow{6} t$ . Здесь  $\delta = \min(3, 1, 6) = 1$ . По этому пути можно увеличить поток лишь на единицу, при этом дуга  $(x_1, x_2)$  станет насыщенной. Больше путей нет.

**Этап 2.** Рассмотрим маршруты с противоположными ребрами. Маршрут  $s \xrightarrow{2} x_1 \xrightarrow{6} x_3 \xleftarrow{11} x_2 \xrightarrow{5} t$ . Поток можно увеличить на две единицы на дуге  $(s, x_1)$ . Эта дуга станет насыщенной. Тогда потоки по этому маршруту будут такими:  $s \xrightarrow{13(13)} x_1 \xrightarrow{6(2)} x_3 \xleftarrow{11(-2)} x_2 \xrightarrow{17(14)} t$ . Больше маршрутов нет. Поток максимален. На рис. 3.71 на дугах графа стоят две цифры: первая – пропускная способность дуги, вторая – поток по дуге (насыщенные дуги выделены). Теперь можно сделать несколько разрезов, например, отделяя исток и сток. И по первому I, и по второму II разрезу поток одинаков  $\varphi_{\max} = 24$ .

Построим теперь поток величины  $\theta = \left\lfloor \frac{3}{4} \varphi_{\max} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{4} \cdot 24 \right\rfloor = 18$  единиц. По рассмотрен-

ному алгоритму для этого надо построить кратчайший путь от  $s$  к  $t$  на графе  $G = (S, U, D)$ . Этот граф изображен на рис. 3.72, веса всех дуг в нем положительны, можно использовать алгоритм Дейкстры.

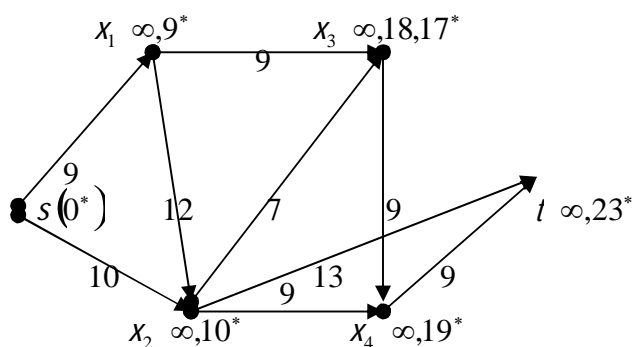


Рис. 3.72

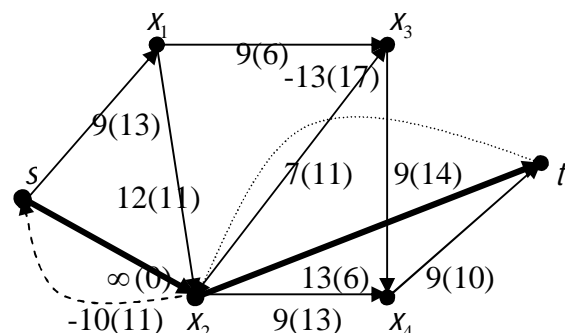


Рис. 3.73

**Этап 1. Шаг 1.**  $d(s) = 0^*$ ,  $d(x_1) = d(x_2) = \dots = d(t) = \infty$ ,  $\tilde{x} = s$ .

Первая итерация. Шаг 2.  $\tilde{S} = \{x_1, x_2\}$ ,  $d(x_1) = \min(\infty, 0^* + 9) = 9$ ,

$d(x_2) = \min(\infty, 0^* + 10) = 10$ .

Шаг 3.  $\min(9, 10, \infty, \infty, \infty) = 9^* = d(x_1)$ .  $\tilde{x} = x_1$ .

Шаг 4.  $\tilde{x} = t$ ? Нет. Переход на начало второго шага.

Вторая итерация. Шаг 2.  $\tilde{S} = \{x_2, x_3\}$ ,  $d(x_2) = \min(10, 9^* + 12) = 10$ ,  
 $d(x_3) = \min(\infty, 9^* + 9) = 18$ .

Шаг 3.  $\min(10, 18, \infty, \infty) = 10^* = d(x_2)$ .  $\tilde{x} = x_2$ . Шаг 4.  $\tilde{x} = t$ ? Нет.

Третья итерация. Шаг 2.  $\tilde{S} = \{x_3, x_4, t\}$ ,  $d(x_3) = \min(18, 10^* + 7) = 17$ ,  
 $d(x_4) = \min(\infty, 10 + 9) = 19$ ,  $d(t) = \min(\infty, 10 + 13) = 23$ .

Шаг 3.  $\min(17, 19, 23) = 17^* = d(x_3)$ .  $\tilde{x} = x_3$ .

Шаг 4.  $\tilde{x} = t$ ? Нет. Переход на начало второго шага.

Четвертая итерация. Шаг 2.  $\tilde{S} = \{x_4\}$ ,  $d(x_4) = \min(19, 17^* + 14) = 19$ .

Шаг 3.  $\min(19, 23) = 19^* = d(x_4)$ ,  $\tilde{x} = x_4$ .

Шаг 4.  $\tilde{x} = t$ ? Нет. Переход на начало второго шага.

Пятая итерация. Шаг 2.  $\tilde{S} = \{t\}$ ,  $d(t) = \min(23, 19^* + 9) = 23$ .

Шаг 3.  $\min(23) = 23^* = d(t)$ ,  $\tilde{x} = t$ .

Шаг 4.  $\tilde{x} = t$ ? Да. Конец первого этапа.

**Этап 2.** Кратчайший путь здесь очевиден, это путь  $\pi_1^* = (s, x_2) - (x_2, t)$ . Максимальный поток по этому пути  $\varphi_{\max} = c_{\min}(\pi_1^*) = \min(11, 17) = 11$ . Так как  $\theta = 18$ , то  $\varphi_{\max} < \theta$ ; требуется модификация сети.

Положим  $\varphi(s, x_2) = \varphi(x_2, t) = 11$  и  $\varphi(x_i, x_j) = 0$  для остальных дуг. Тогда по третьему пункту правил модификации сети включим обратные дуги  $(x_2, s)$  и  $(t, x_2)$ . При этом  $\tilde{c}(x_2, s) = 11$ ,  $\tilde{d}(x_2, s) = -10$ ,  $\tilde{c}(t, x_2) = 11$ ,  $\tilde{d}(t, x_2) = -13$ .

По четвертому пункту правил характеристики всех дуг, где нет потока, останутся без изменений, для дуг потока  $\varphi = 11$ , т.е. только для дуги,  $(x_2, t)$  изменятся характеристики  $\tilde{d}(x_2, t) = 13$ ,  $\tilde{c}(x_2, t) = 17 - 11 = 6$ . По пятому пункту правил для насыщенной дуги  $(s, x_2)$   $\tilde{c}(s, x_2) = 0$ ,  $\tilde{d}(s, x_2) = \infty$ . В результате имеем новую сеть  $G = (S, U, D)$  (рис. 3.73). Необходимо найти кратчайший путь между  $s$  и  $t$  в этой сети. Так как теперь есть дуги с отрицательным весом, следует применить алгоритм Беллмана – Мура.

**Этап 1.**  $d(s) = 0$ ,  $d(x_1) = d(x_2) = \dots = d(t) = \infty$ ,  $Q = \{s\}$

Первая итерация. Шаг 2.  $\tilde{x} = s$ ,  $Q = \emptyset$ ,  $\tilde{S} = \{x_1, x_2\}$ ,

$d(x_1) = \min(\infty, 0 + 9) = 9$ ,

$9 < \infty$ ? Да, корректировка очереди.  $Q = \{x_1\}$ ,

$d(x_2) = \min(\infty, 0 + \infty) = \infty$ ,

$\infty < \infty$ ? Нет, корректировка очереди не проводится.

Шаг 3.  $Q = \emptyset$ ? Нет.

Вторая итерация. Шаг 2.  $\tilde{x} = x_1$ ,  $Q = Q / \{x_1\} = \emptyset$ ,  $\tilde{S} = \{x_2, x_3\}$ ,

$d(x_2) = \min(\infty, 9 + 12) = 21$ ,

$21 < \infty$ ? Да, корректировка очереди.  $Q = \{x_2\}$ ,

$d(x_3) = \min(\infty, 9 + 9) = 18$ ,

$18 < \infty$ ? Да.  $Q = \{x_2, x_3\}$ .

Шаг 3.  $Q = \emptyset$ ? Нет.

Третья итерация. Шаг 2.  $\tilde{x} = x_2$ ,  $Q = \{x_3\}$ ,  $\tilde{S} = \{s, x_3, x_4\}$ ,

$0 < 0$ ? Нет, корректировка очереди не проводится,

$d(x_3) = \min(18, 21 + 7) = 18$ ,

$18 < 18$ ? Нет,  
 $d(x_4) = \min(\infty, 21 + 9) = 30$ ,  
 $30 < \infty$ ? Да, корректировка очереди.  $Q = \{x_3, x_4\}$ ,  
 $d(t) = \min(\infty, 21 + 13) = 34$ ,  
 $34 < \infty$ ? Да, корректировка очереди.  $Q = \{x_3, x_4, t\}$ .  
 Шаг 3.  $Q = O$ ? Нет.

Четвертая итерация. Шаг 2.  $\tilde{x} = x_3$ ,  $Q = \{x_4, t\}$ ,  $\tilde{S} = \{x_4\}$ ,  
 $d(x_4) = \min(30, 18 + 13) = 30$ ,  
 $30 < 30$ ? Нет, очередь не корректируется.  
 Шаг 3.  $Q = O$ ? Нет.

Пятая итерация. Шаг 2.  $\tilde{x} = x_4$ ,  $Q = \{t\}$ ,  $\tilde{S} = \{t\}$ ,  
 $d(t) = \min(34, 30 + 9) = 34$ ,  
 $34 < 34$ ? Нет, очередь не корректируется.  
 Шаг 3.  $Q = O$ ? Нет.

Шестая итерация. Шаг 2.  $\tilde{x} = t$ ,  $Q = O$ ,  $\tilde{S} = O$ .

Шаг 3.  $Q = O$ ? Да. Конец первого этапа алгоритма Беллмана – Мура.

Итак, кратчайший путь найден. Это путь  $p_2^* = (s, x_1) - (x_1, x_2) - (x_2, t)$ . Его вес  $d(p_2^*) = 9 + 12 + 13 = 34$ .  $\varphi_{\max} = c_{\min}(p_2^*) = \min(13, 11, 6) = 6$ . Общий поток по двум уже рассмотренным путям  $\varphi_{\text{общ}} = 11 + 6 = 17 < 18 = \theta$ , т.е. требуется еще одна модификация сети.

Положим опять  $\varphi(s, x_1) = \varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_2, t) = 6$ ,  $\varphi(s, x_2) = 11$  и  $\varphi(x_i, x_j) = 0$  для остальных дуг. По третьему пункту правил включаем обратные дуги  $(x_1, s)$ ,  $(x_2, x_1)$  и  $(t, x_2)$ , причем последняя дуга уже присутствует. Полагаем

$\tilde{c}(x_1, s) = 6$ ,  $\tilde{d}(x_1, s) = -9$ ,  $\tilde{c}(x_2, x_1) = 6$ ,  $\tilde{d}(x_2, x_1) = -12$ ,  
 $\tilde{c}(t, x_2) = 17$ ,  $\tilde{d}(t, x_2) = -13$ . По четвертому пункту правил все ненасыщенные дуги, где нет потока, остаются без изменений, кроме дуг с потоком  $(x_1, s)$ ,  $(x_1, x_2)$ . Здесь  $\tilde{c}(s, x_1) = 13 - 6 = 7$ ,  $\tilde{d}(s, x_1) = 9$ ,

$\tilde{c}(x_1, x_2) = 11 - 6 = 5$ ,  $\tilde{d}(x_1, x_2) = 12$ . По пункту пять правил для насыщенной дуги  $(x_2, t)$   $\tilde{c}(x_2, t) = 0$ ,  $\tilde{d}(x_2, t) = \infty$ .

В полученной после второй модификации сети  $G = (S, U, D)$  необходимо найти кратчайший путь между вершинами  $s$  и  $t$ . Так как опять имеются отрицательные веса, то снова придется применить алгоритм Беллмана – Мура (рис. 3.74).

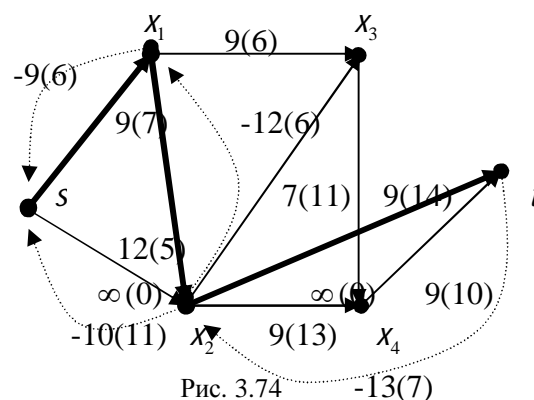


Рис. 3.74

Этап 1. Шаг 1.  $d(s) = 0$ ,  $d(x_1) = \dots = d(t) = \infty$ .  $Q = \{s\}$ .

Шаг 2.  $\tilde{x} = s$ ,  $Q = O$ ,  $\tilde{S} = \{x_1, x_2\}$ ,  
 $d(x_1) = \min(\infty, 0 + 9) = 9$ ,  $9 < \infty$ ? Да.  $Q = \{x_1\}$ ,  
 $d(x_2) = \min(\infty, 0 + \infty) = \infty$ .

Шаг 3.  $Q \neq O$ . Переход на второй шаг.

Вторая итерация. Шаг 2.  $\tilde{x} = x_1$ ,  $Q = O$ ,

$\tilde{S} = \{s, x_2, x_3\}$ ,  $d(s) = \min(0, 9 - 9) = 0$ ,

$0 < 0$ ? нет корректировки очереди,

$d(x_2) = \min(\infty, 9 + 12) = 21$ ,  $21 < \infty$ ? Да.  $Q = \{x_2\}$ ,

$$d(x_3) = \min(\infty, 9 + 9) = 18, 18 < \infty? \text{ Да. } Q = \{x_2, x_3\}.$$

Шаг 3.  $Q \neq \emptyset$ . Переход на второй шаг.

Третья итерация. Шаг 2.  $\tilde{X} = x_2$ ,  $Q = \{x_3\}$ ,  $\tilde{S} = \{s, x_1, x_3, x_4, t\}$ ,

$$d(s) = \min(0, 21 - 10) = 0, \text{ нет корректировки очереди,}$$

$$d(x_1) = \min(9, 21 - 12) = 9, \text{ нет корректировки очереди,}$$

$$d(x_3) = \min(18, 21 + 7) = 18, \text{ нет корректировки очереди,}$$

$$d(x_4) = \min(\infty, 21 + 9) = 30, Q = \{x_3, x_4\},$$

$$d(t) = \min(\infty, 21 + \infty) = \infty, \text{ нет корректировки очереди.}$$

Шаг 3.  $Q \neq \emptyset$ . Переход на второй шаг.

Четвертая итерация. Шаг 2.  $\tilde{X} = x_3$ ,  $Q = \{x_4\}$ ,  $\tilde{S} = \{x_4\}$ ,

$$d(x_4) = \min(30, 18 + 14) = 30, \text{ нет корректировки очереди.}$$

Шаг 3.  $Q = \emptyset$ .

Пятая итерация. Шаг 2.  $\tilde{X} = x_4$ ,  $Q = \emptyset$ ,  $\tilde{S} = \{t\}$ ,

$$d(t) = \min(\infty, 30 + 9) = 39, Q = \{t\}.$$

Шаг 3.  $Q = \emptyset$ .

Шестая итерация. Шаг 2.  $\tilde{X} = t$ ,  $Q = \emptyset$ ,  $\tilde{S} = \emptyset$ .

Шаг 3.  $Q = \emptyset$ . Конец первого этапа. Критический путь найден.

$\pi_3^* = (s, x_1) - (x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, t)$ . Его вес  $d(\pi_3^*) = 9 + 12 + 9 + 9 = 39$ .  $\varphi_{\max} = c_{\min}(\pi_3^*) = \min(7, 5, 13, 10) = 5$ . Таким образом, по этому пути можно пустить поток в пять единиц. Тогда общий поток будет  $\varphi_{\text{общ}} = 17 + 5 = 22 > \theta = 18$ . Для того чтобы сформировать поток требуемой величины  $\theta = 18$ , необходимо по пути  $\pi_3^*$  направить поток величиной всего в одну единицу.

Тогда  $\varphi(s, x_1) = 7$ ,  $\varphi(x_1, x_2) = 7$ ,  $\varphi(x_2, x_4) = 1$ ,  $\varphi(x_4, t) = 1$ . Кроме того, два предыдущих потока дали  $\varphi(s, x_2) = 11$ ,  $\varphi(x_2, t) = 17$ . Таким образом, минимальная стоимость всего потока  $\theta = 18$  равна  $\sum_{(x_i, x_j) \in S} d(x_i, x_j) \cdot \varphi(x_i, x_j) = 9 \cdot 7 + 12 \cdot 7 + 10 \cdot 11 + 13 \cdot 17 + 9 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 496$ .

### 3.27. Элементы сетевого планирования. Критические пути, работы, резервы

При планировании и управлении сложными комплексами работ используют их графические модели – сетевые графики. С математической точки зрения сетевой график – это связный орграф без петель и контуров. Основными понятиями сетевого планирования являются понятия работы и события.

Работа – это любые действия, сопровождающиеся затратами ресурсов и времени и приводящие к определенным результатам. Событие – результат завершения одной или нескольких работ – является предпосылкой для выполнения работ, следующих за ним. Любая работа на сети может быть определена двумя событиями, между которыми она находится. Событием может начинаться или заканчиваться несколько работ. Работы на сети изображаются дугами, а события – вершинами сети.

Сетевой график обладает рядом особенностей, в частности он имеет только одно исходное событие (исток сети) и только одно завершающее событие – окончание всех работ. Рассмотрим пример построения сети по приведенной ранее таблице последовательности работ.

Последовательность работ		
Исходная работа	Опирается на работу	Продолжительность работ
$a_1$	-	3
$a_2$	-	6
$a_3$	-	4
$a_4$	$a_1$	5
$a_5$	$a_2$	1
$a_6$	$a_2$	9
$a_7$	$a_3, a_5$	6
$a_8$	$a_4, a_6, a_7$	8

Работы  $a_1, a_2$  и  $a_3$  не имеют предшествующих, поэтому реализация проекта начинается с этих работ, которые они дугами, выходящими из одной вершины – события  $x_1$ . Работе  $a_4$  предшествует работа  $a_1$ , поэтому дуга  $a_4$  на сети изображена вслед за дугой  $a_1$ . То же самое с дугами  $a_5$  и  $a_6$ . Далее надо изобразить дуги  $a_7$  и  $a_8$ . Работа  $a_7$  опирается на работы  $a_3$  и  $a_5$ . Итоговая работа  $a_8$  опирается на  $a_4, a_6$  и  $a_7$  (рис. 3.75). На рисунках сети не рекомендуется во избежание путаницы изображать одновременно выполняемые работы параллельными дугами. Однако можно вводить дополнительные события и фиктивные работы (нулевой продолжительности), которые изображаются штриховыми линиями. Если бы, к примеру, работа  $a_5$  опиралась бы еще на  $a_1$ , то между событиями  $x_2$  и  $x_3$  пришлось бы ввести штриховую дугу.

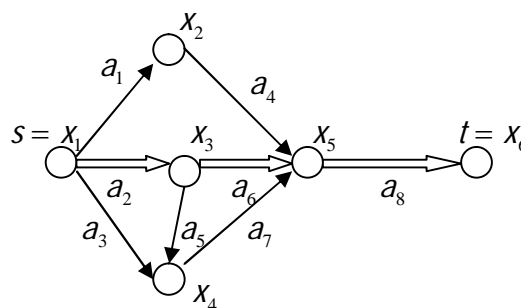


Рис. 3.75

Имея сеть работ некоторого проекта, мы можем посчитать время выполнения всего проекта и различных его частей, состоящих из разного набора работ. Для этого введем еще несколько определений. Сначала определим минимальное время, за которое можно выполнить все работы комплекса. Для этого найдем продолжительность  $t(?)_i$  всех полных путей  $?_i$ . В нашем случае таких путей четыре:  $?_1: 1-2-5-6$ ;  $?_2: 1-3-5-6$ ;  $?_3: 1-4-5-6$ ;  $?_4: 1-3-4-5-6$ . Их продолжительности  $t(?)_1)=16$ ,  $t(?)_2)=23$ ,  $t(?)_3)=18$ ,  $t(?)_4)=21$ . Наиболее продолжителен второй путь, который называют критическим. Он определяет минимальное время выполнения всех работ комплекса. Минимальное время называют критическим сроком и обозначают  $t_{кр}$ . Итак, в рассматриваемом примере  $t_{кр} = 23$ .

*Все работы и события, лежащие на критическом пути, называют критическими, все остальные работы и события – некритическими. Задержка любой критической работы вызывает задержку выполнения всего комплекса. Следовательно, чтобы уменьшить время выполнения комплекса работ, надо сократить сроки критических работ. Некритические работы допускают некоторое запаздывание их выполнения без нарушения критического срока. Это запаздывание измеряется резервом времени событий и работ.*

Свершением события называется момент, к которому заканчиваются все входящие в него работы и может быть начата любая выходящая работа. Некоторые события можно совершать в разные моменты, то есть варьировать свершение этих событий. Например, событие  $x_2$  может свершиться через три дня (по окончании работы  $a_1$ ), но может наступить и позже на срок до семи дней, поскольку на пути  $?_1$ , где лежит это событие, есть резерв времени  $t_{кр} - t(?_1) = 23 - 16 = 7$  дней. Поэтому для событий различают ранний и поздний сроки свершения.

Ранним сроком  $t_p(x_j)$  свершения события  $x_j$  называется самый ранний момент времени, к которому завершатся все работы, предшествующие этому событию. Ранние сроки для всех событий могут быть рассчитаны по формуле

$$t_p(x_j) = \max_{(x_i, x_j) \in U_j^+} (t_p(x_i) + t(x_i, x_j)) \quad (3.27.1)$$

где  $U_j^+$  – множество работ, входящих в  $x_j$  событие;  $t_p(x_i)$  – ранний срок свершения начального события работы  $(x_i, x_j)$ ;  $t(x_i, x_j)$  – продолжительность работы  $(x_i, x_j)$ .

Поздним сроком  $t_n(x_i)$  свершения события  $x_i$  называется самый поздний момент времени, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за этим событием.

В нашем случае  $t_n(x_6) = 23$ . Чтобы не нарушался критический срок, событие  $x_5$  должно произойти, в крайнем случае, на восемь дней раньше, поэтому  $t_n(x_5) = 23 - 8 = 15$ . Аналогично,  $t_n(x_2) = 15 - 5 = 10$ . Таким образом, поздние сроки событий рассчитываются по формуле

$$t_n(x_i) = \min_{(x_i, x_j) \in U_i^-} (t_n(x_j) - t(x_i, x_j)) \quad (3.27.2)$$

где  $U_i^-$  – множество работ, выходящих из  $x_i$  события,  $t_n(x_j)$  – поздний срок свершения конечного события работы  $(x_i, x_j)$ .

Разности между поздним и ранним сроками свершения события  $x_i$  составляет резерв времени  $R(x_i)$  этого события:

$$R(x_i) = t_n(x_i) - t_p(x_i) \quad (3.27.3)$$

Резерв показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события  $x_i$  без изменения срока наступления итогового события  $t$ . У критических событий ранние и поздние сроки свершения совпадают, ибо резерв времени у них равен нулю.

Зная сроки свершения событий, можно найти ранние и поздние сроки начала и окончания работы  $(x_i, x_j)$ . Очевидно, что

$$\begin{cases} t_{п.н}(x_i, x_j) = t_p(x_i) & t_{п.о}(x_i, x_j) = t_p(x_i) + t(x_i, x_j) \\ t_{н.о}(x_i, x_j) = t_n(x_j) & t_{н.н}(x_i, x_j) = t_n(x_j) - t(x_i, x_j) \end{cases} \quad (3.27.4)$$

Для работ определяют два резерва времени. Полный резерв времени работы – это максимальное количество времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность, не нарушая критический срок,

$$R_n(x_i, x_j) = t_n(x_j) - t_p(x_i) - t(x_i, x_j) \quad (3.27.5)$$

Формулу (3.27.5) можно проиллюстрировать рис. 3.76

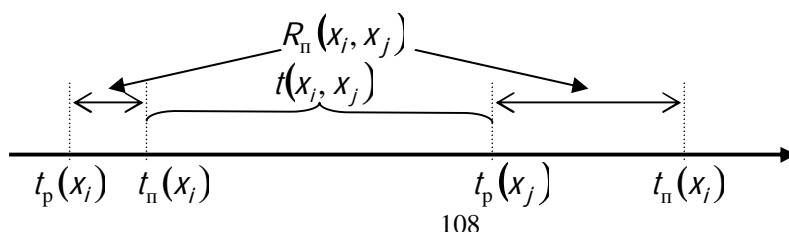


Рис. 3.76



Отдельные работы, помимо полного резерва, имеют свободный резерв времени, составляющий часть полного резерва, остающуюся после исключения резерва времени  $R(x_j)$  конечного события  $x_j$  данной работы,

$$R_c(x_i, x_j) = t_p(x_j) - t_p(x_i) - t(x_i, x_j) \quad (3.27.6)$$

Свободный резерв времени – это запас времени, на который можно отсрочить начало работы или увеличить ее продолжительность при условии, что она начнется в свой ранний срок и при этом ранние сроки начала последующих работ не изменятся. Понятно, что все резервы критических работ равны нулю.

Рассчитаем все резервы времени для событий и работ исходного примера.

Все расчеты проводят в четыре этапа: 1) вычисляют  $t_p(x_i)$ ; 2)  $t_n(x_i)$ ; 3)  $R(x_i)$ ; 4) критический путь.

*Этап 1.* При вычислении  $t_p(x_i)$  перемещаются по сети от события  $s = x_1$  к событию  $l$  в порядке возрастания номеров. Именно,  $t_p(x_1) = 0$ . Для события  $x_2$  по формуле (3.27.1)  $t_p(x_2) = t_p(x_1) + t(x_1, x_2) = 0 + 3 = 3$ . Аналогично,  $t_p(x_3) = t_p(x_1) + t(x_1, x_3) = 0 + 6 = 6$ . Для вершин  $x_4$  и  $x_5$  формулу (3.27.1) необходимо применять в полном объеме, то есть  $t_p(x_4) = \max_{\substack{(x_1, x_4) \\ (x_3, x_4)}} (t_p(x_1) + t(x_1, x_4), t_p(x_3) + t(x_3, x_4)) = \max(0 + 4, 6 + 1) = 7$ ;  $t_p(x_5) = \max_{\substack{(x_2, x_5) \\ (x_3, x_5) \\ (x_4, x_5)}} (t_p(x_2) + t(x_2, x_5), t_p(x_3) + t(x_3, x_5), t_p(x_4) + t(x_4, x_5)) = \max(3 + 5, 6 + 9, 7 + 6) = 15$ . Наконец,  $t_p(x_6) = t_p(x_5) + t(x_5, x_6) = 15 + 8 = 23$ . Получили критический срок. Итак,  $t_{кр} = t_p(x_6) = 23$ .

*Этап 2.* При вычислении поздних сроков свершения событий перемещаются по сети от  $l$  к  $s$  в порядке убывания номеров. Так как  $t_n(x_6) = t_p(x_6)$ , то исходное значение  $t_n$  известно. Далее используем формулу (3.27.2). Например,  $t_n(x_5) = t_n(x_6) - t(x_5, x_6) = 23 - 8 = 15$ . Аналогично,  $t_n(x_4) = t_n(x_5) - t(x_4, x_5) = 15 - 6 = 9$ ,  $t_n(x_3) = t_n(x_5) - t(x_3, x_5) = 15 - 9 = 6$ . Из события  $x_3$  выходят две работы  $a_5$  и  $a_6$ , поэтому  $t_n(x_3) = \min_{\substack{(x_3, x_5) \\ (x_3, x_4)}} (t_n(x_5) - t(x_3, x_5), t_n(x_4) - t(x_3, x_4)) = \min(15 - 9, 9 - 1) = 6$ . Наконец, из события

$x_1$  выходят сразу три работы  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ . Поэтому здесь  $t_n(x_1) = \min_{\substack{(x_1, x_2) \\ (x_1, x_3) \\ (x_1, x_4)}} (t_n(x_2) - t(x_1, x_2), t_n(x_3) - t(x_1, x_3), t_n(x_4) - t(x_1, x_4)) = \min(10 - 3, 6 - 6, 9 - 4) = 0$ .

*Этап 3.* Для вычисления резервов времени событий достаточно вычесть числа, записанные в правых и левых секторах кружков, друг из друга.

*Этап 4.* У критических событий резерв времени равен нулю. В нашем примере критическими являются события  $x_1$ ,  $x_3$ ,  $x_5$  и  $x_6$ . Они и определяют критические работы и критический путь 1-3-5-6 (рис. 3.77).

Резервы времен работ сети вычисляются по формулам (3.27.4), (3.27.5) и (3.27.6). Например,  $t_{p.o}(x_1, x_2) = t_p(x_1) + t(x_1, x_2) = 0 + 3 = 3$ ,  $t_{p.n}(x_1, x_2) = t_p(x_1) = 0$ ,  $t_{n.o}(x_1, x_2) = t_n(x_2) = 10$ ,  $t_{n.n}(x_1, x_2) = t_n(x_2) - t(x_1, x_2) = 10 - 3 = 7$ ,  $R_n(x_1, x_2) = t_n(x_2) - t_p(x_1) - t(x_1, x_2) = 10 - 0 - 3 = 7$ ,  $R_c(x_1, x_2) = t_p(x_2) - t_p(x_1) - t(x_1, x_2) = 3 - 0 - 3 = 3$ .

В заключение заметим, что критических путей на сети может быть несколько. Они могут включать в себя и фиктивные работы.



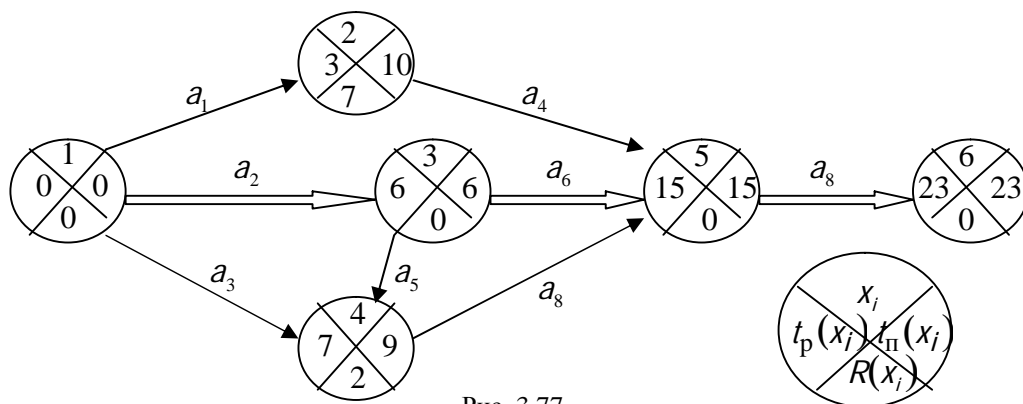


Рис. 3.77

## 3.28. Линейные графики

Наряду с сетевым графиком при анализе и оптимизации комплекса работ применяется и линейный график. Построим его для нашего примера. На дугах исходного линейного графика проставлены в скобках интенсивности потребления ресурса. Найдем по этому линейному графику критический путь, критический срок, критические работы и резервы времени не критических работ. На рис. 3.78 сверху изображен исходный сетевой график для

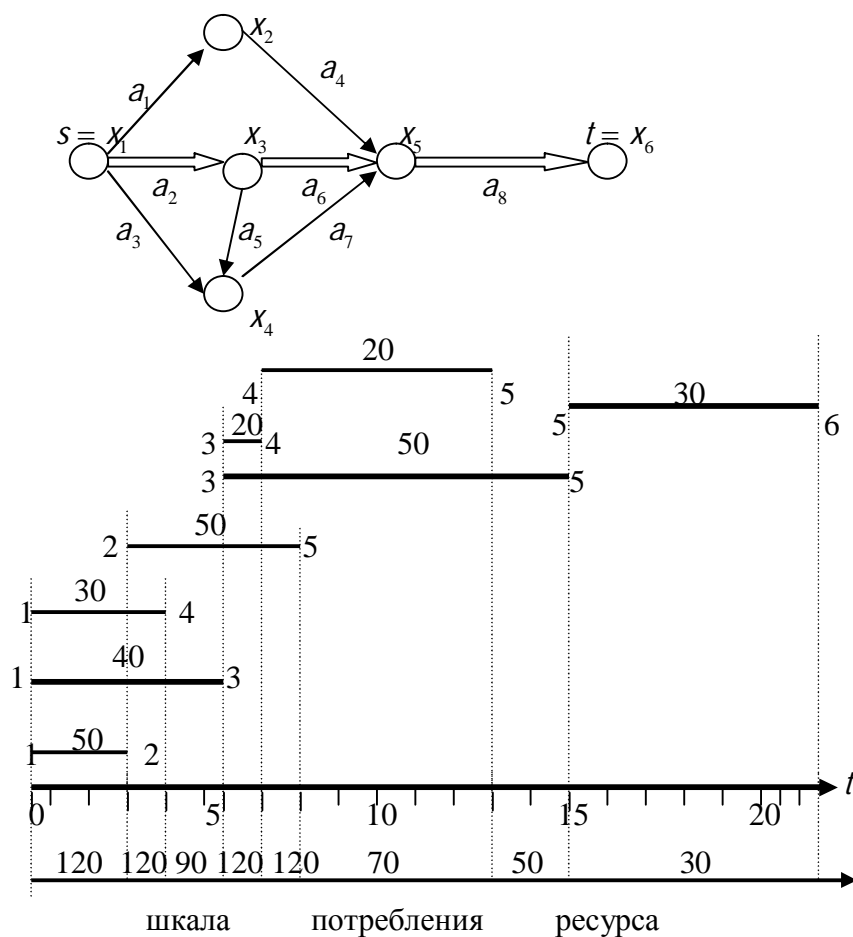


Рис. 3.78

того, чтобы яснее были видны последовательности работ. Ниже – линейный график. Он имеет две шкалы: шкалу времени и шкалу потребления ресурса. Проанализируем линейный график. Наибольшей отметки времени на нем  $t = 23$  соответствует работа (5, 6), значение  $t = 23$  и является критическим сроком. Ясно, что будучи заключительной работой комплек-

са, работа (5, 6) и есть критическая. Непосредственно ей предшествует работа (3, 5), а этой работе (1, 3); обе эти работы также являются критическими. Все остальные работы – некритические. Критические работы на линейном графике выделены жирной чертой.

По линейному графику можно легко найти резервы времени  $R_{\Pi}(i, j)$  некритических работ. Например, работу (4, 5) в случае необходимости можно отсрочить или увеличить время ее выполнения на два дня. То же самое касается и работы (1, 4). Ее можно сдвинуть на три дня. Таким образом,  $R_{\Pi}(4, 5) = 2$ ,  $R_{\Pi}(1, 4) = 5$ . Определяя  $R_{\Pi}(1, 4)$ , мы учли возможность сдвига работы (4, 5). Если же оперировать только с работой (1, 4) и не затрагивать последующие работы, то найдется свободный резерв времени данной работы. У работы (1, 4) свободный резерв три дня, то есть  $R_c(1, 4) = 3$ .

Аналогично из линейного графика получим  $R_{\Pi}(2, 5) = 7$ ,  $R_{\Pi}(1, 2) = 7$ ,  $R_c(2, 5) = 7$ ,  $R_c(1, 2) = 0$ . Для построения шкалы потребления ресурса в ходе работ, спроектируем на ось  $0t$  начальные и конечные точки работ. В полученных промежутках нужно просуммировать интенсивности всех работ, расположенных над этими промежутками. Например, для  $t \in [6, 7]$  интенсивность равна  $50 + 50 + 20 = 120$  единиц.

Одна из самых распространенных оптимизационных задач сетевого планирования – задача о сохранении срока выполнения комплекса работ при ограниченных ресурсах. Она возникает в случаях, когда для реализации комплекса работ в плановой срок имеющихся ресурсов недостаточно.

Когда работ мало (одна, две), ответить на вопрос об отсрочке работ, об их очередности и тому подобное можно с точки зрения здравого смысла. Если же работ много, придется упорядочить эти работы и следить, какая из них вызывает превышение ресурса. Пусть в условиях разобранного ранее примера требуется установить время начала и окончания работ так, чтобы завершить комплекс в возможно меньшее время, при условии, что расход ресурса в любой момент не должен превышать 100 единиц.

*Первый шаг.* Рассмотрим промежуток  $t \in [0, 6]$ . Здесь расположено четыре работы: (1, 2), (1, 3), (1, 4) и (2, 5). Для выявления работ, подлежащих отсрочке, прежде всего упорядочим их. Выпишем полные резервы времени:  $R_{\Pi}(1, 2) = 7$ ,  $R_{\Pi}(1, 4) = 5$ ,  $R_{\Pi}(1, 3) = 0$ ,  $R_{\Pi}(2, 5) = 7$ . В порядке возрастания полного резерва времени присвоим номера работам (1, 3) – № 1, (1, 4) – № 2, (1, 2) – № 3, (2, 5) – № 4. В отведенный ресурс укладываются только две работы № 1 и № 2. Поэтому работу № 3, т.е. работу (1, 2), а вслед за ней и работу (2, 5) сдвигаем до момента  $t = 6$ ; ресурс времени это позволяет, критический срок от этого не увеличится. Положение работ после первого шага показано на рис. 3.79.

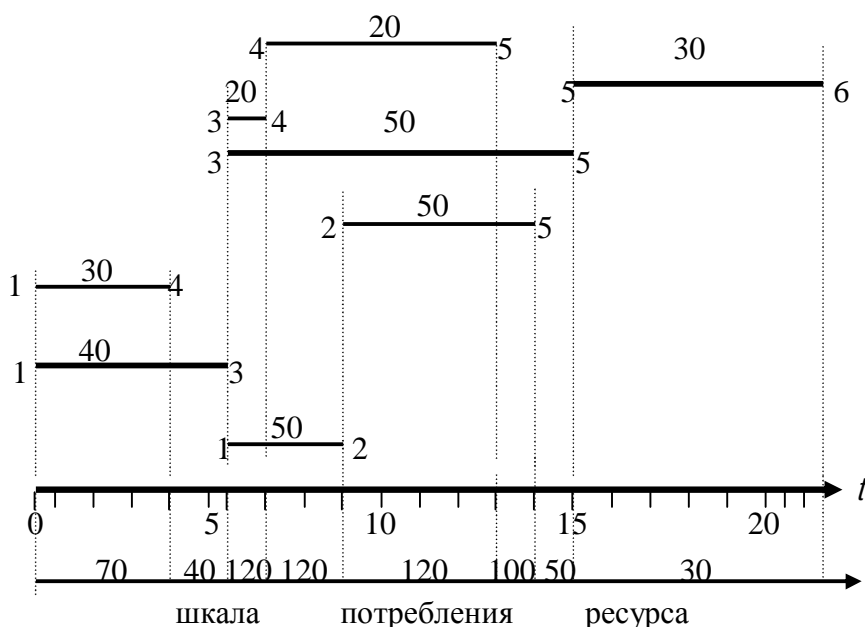


Рис. 3.79

*Второй шаг.* Рассмотрим отрезок  $t \in [6, 7]$ . Здесь  $R_{\Pi}(1, 2) = 1$ ,  $R_{\Pi}(3, 4) = 2$ ,  $R_{\Pi}(4, 5) = 2$ ,  $R_{\Pi}(3, 5) = 0$ . Номера работ по возрастанию полного резерва времени: (3, 5) - № 1, (1, 2) - № 2, (3, 4) - № 3, (4, 5) - № 4. Предел ресурса полностью выбирают первая и вторая работы. Таким образом, следует сдвинуть работу (3, 4), а вместе с ней и работу (4, 5) на один день вправо. Положение работ комплекса после второго шага показано на рис. 3.80.

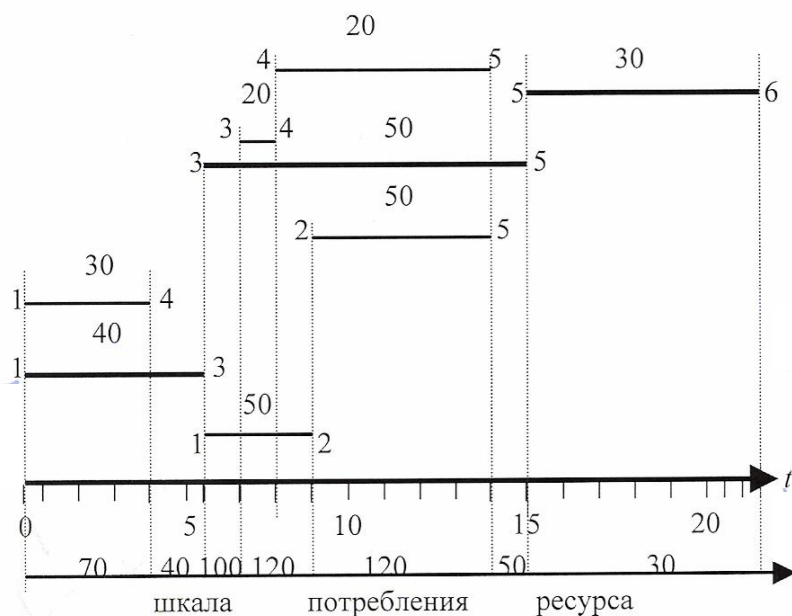


Рис. 3.80

*Третий шаг.*  $t \in [7, 8]$ . Полные резервы времени работ на этом отрезке равны  $R_{\Pi}(1, 2) = 1$ ,  $R_{\Pi}(3, 5) = 0$ ,  $R_{\Pi}(3, 4) = 1$ . Работа (1, 2) уже длится, следовательно, сдвигать надо работу (3, 4) и следующую за ней работу (4, 5).

*Четвертый шаг.*  $t \in [8, 9]$ . Работы (1, 2) и (3, 5) уже длятся, у работы (3, 4) полный резерв времени равен нулю. Тем не менее именно эту работу необходимо сдвигать на один день вправо. Вместе с ней сдвинутся работы (4, 5) и (5, 6), тем самым критический срок будет увеличен на один день. Положение работ комплекса после четвертого шага изображено на рис. 3.81.

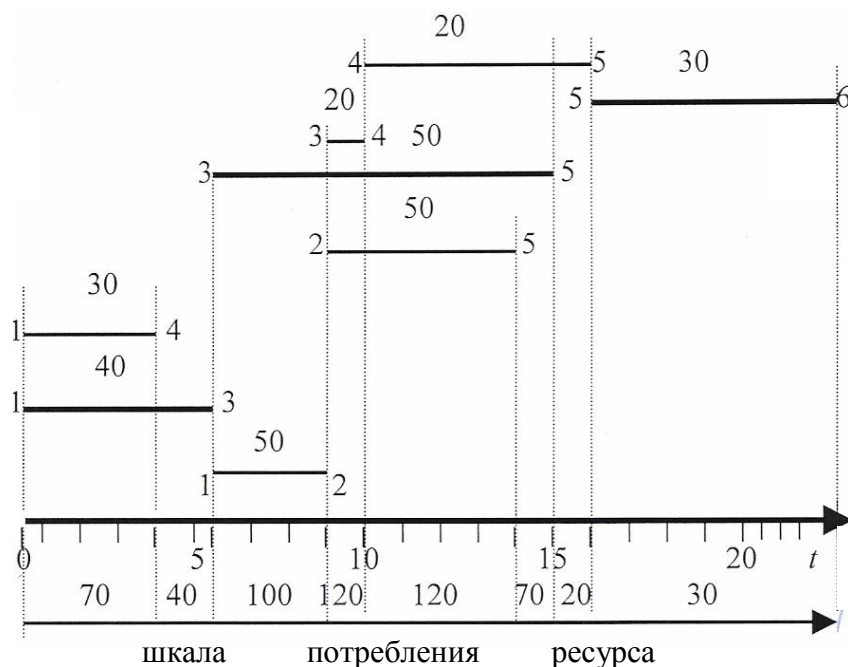


Рис. 3.81

Пятый шаг.  $t \in [9, 10]$ . Полные резервы работ на этом отрезке времени таковы:  $R_{\Pi}(2, 5) = 2$ ,  $R_{\Pi}(3, 5) = 0$ ,  $R_{\Pi}(3, 4) = 0$ . Сдвигаем на два дня вправо работу (2, 5).

Шестой шаг.  $t \in [11, 15]$ . Работы (3, 5) и (4, 5) уже делятся, необходимо сдвигать на четыре дня вправо работу (2, 5). При этом на четыре дня увеличится критический срок. Теперь ресурс нигде не превышен, планирование работ комплекса закончено. Итоговое положение работ изображено на рис. 3.82.  $t_{кр} = 28$  дней.

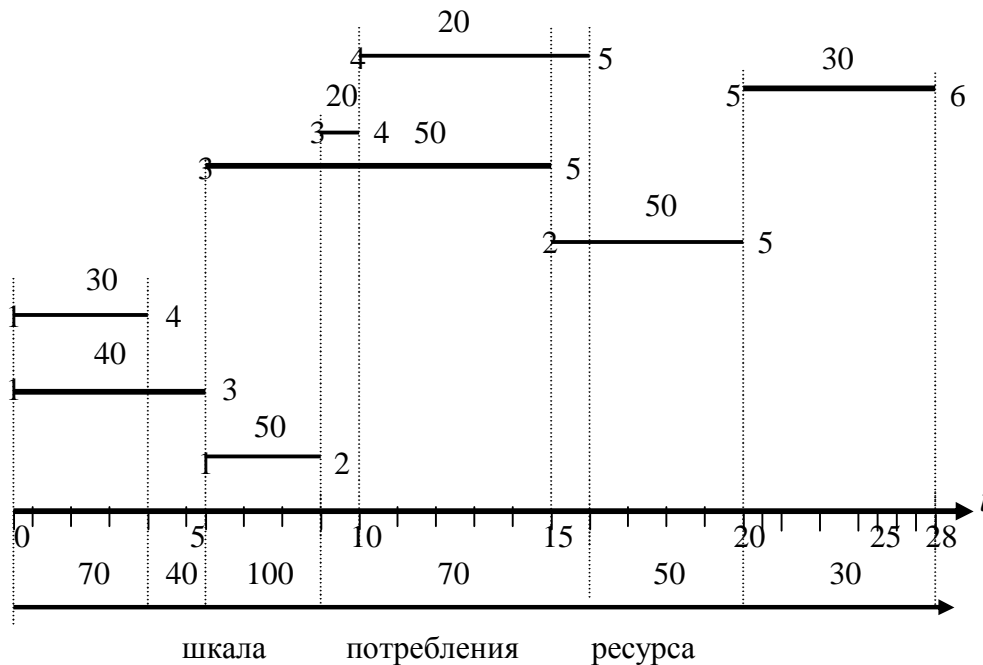


Рис. 3.82

По последнему линейному графику составлена следующая таблица со сроками начала  $t_n$  и окончания  $t_o$  работ комплекса.

Сроки	Работы							
	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 5)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 6)
$t_n$	7	0	0	15	6	6	10	20
$t_o$	10	6	4	20	7	15	15	28

Рассмотренный метод эвристический, он не обеспечивает всегда точную минимизацию времени выполнения работ, но дает хорошее приближение к этому. Его основные этапы таковы.

1. Анализ шкалы потребления ресурса и выделение отрезков, где потребление превышает установленный предел.

2. Определение на первом временном интервале, где есть превышение ресурса работ, подлежащих отсрочке. Для этого все работы упорядочиваются по возрастанию полных резервов времени. Первые номера отдают работам, начатым ранее анализируемого промежутка.

3. Последовательное (по возрастанию номеров) суммирование интенсивностей потребления ресурса. Как только суммарная интенсивность превысит установленный предел, слагаемое, вызвавшее превышение, отбрасывают, а соответствующую ему работу назначают к отсрочке и так далее до полного перебора всех работ на данном промежутке.

4. Преобразование линейного графика: сдвигают назначенные к отсрочке работы и работы, следующие за ними. Строят новую шкалу потребления ресурса.

5. Если на преобразованной шкале вновь имеются промежутки, где суммарная потребность в ресурсе превышает предел, то алгоритм повторяют, начиная с пункта два до тех пор, пока не останется промежутков, в которых наблюдается превышение предела ресурса.

После завершения процесса оптимизации получают линейный график, по которому можно выделить критический путь. Он, как правило, отличается от критического пути исходного графика составляющими его работами. Изменится (увеличится) и продолжительность нового критического пути, то есть критический срок. Это неизбежное следствие ограничения ресурса, используемого при производстве работ комплекса.

В нашем примере работы, входящие в новый критический путь: (1, 3)-(3, 5)-(2, 5)-(5, 6), а его продолжительность увеличилась на пять дней. На практике обычно возникают еще более сложные задачи с дополнительными ограничениями на состав и сроки проведения работ. Для их решения разработаны более сложные алгоритмы сетевого планирования и составления расписаний.

### 3.29. Практическое занятие № 10. Поток в сетях. Сетевые и линейные графики

3.29.1. По данной матрице пропускных способностей дуг  $\Omega$  графа  $G$  найти максимальный поток от вершины  $s = x_1$  до вершины  $t = x_7$  и указать минимальный разрез, отделяющий  $s$  от  $t$ .

$$\begin{array}{lll}
 1) \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 18 & 16 & - & - & 9 & - \\ - & - & 8 & 11 & 7 & - & 13 \\ - & - & - & - & 13 & - & 19 \\ - & - & 10 & - & - & 15 & - \\ - & - & - & 17 & - & 28 & - \\ - & - & - & - & - & - & 14 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} & 2) \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 9 & - & 11 & - & 17 & - \\ - & - & 6 & - & 8 & - & 12 \\ - & - & - & - & - & - & 7 \\ - & 5 & - & - & - & 5 & 4 \\ - & - & - & - & - & 7 & - \\ - & - & - & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} & 3) \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 10 & 5 & - & - & 8 & - \\ - & - & - & 3 & 3 & - & 4 \\ - & - & - & 4 & 5 & 10 & - \\ - & - & - & - & 4 & - & 9 \\ - & - & - & - & - & 5 & 6 \\ - & - & - & - & - & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 4) \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & - & 5 & - & 15 & 9 & - \\ - & - & - & - & 6 & - & 7 \\ - & 3 & - & 4 & - & 7 & - \\ - & - & - & - & - & 8 & 3 \\ - & - & - & - & - & 9 & 18 \\ - & - & - & - & - & - & 5 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} & 5) \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 10 & - & - & 9 & - & 26 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & 7 & - & - & 11 & - & - \\ - & - & 8 & - & - & 12 & 11 \\ - & - & - & 13 & - & 10 & - \\ - & - & 14 & - & - & - & 8 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} & 6) \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 10 & - & 8 & - & - & - \\ - & - & 8 & 12 & 10 & - & 6 \\ - & - & - & - & - & 5 & 11 \\ - & - & - & - & 4 & 12 & - \\ - & - & 5 & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & 6 & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 7) \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 12 & 14 & - & 11 & - & 7 \\ - & - & 17 & 17 & - & 20 & - \\ - & - & - & 10 & 12 & - & 16 \\ - & - & - & - & 9 & - & 11 \\ - & - & - & - & - & 12 & - \\ - & - & 15 & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} & 8) \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & - & 10 & 18 & 8 & - & - \\ - & - & 6 & - & 11 & 15 & 19 \\ - & - & - & - & 12 & - & 13 \\ - & - & - & - & - & - & 5 \\ - & - & - & 16 & - & 7 & - \\ - & - & - & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} & 9) \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 7 & 9 & - & - & 8 & - \\ - & - & 11 & 14 & 10 & - & 6 \\ - & - & - & - & 9 & 11 & 19 \\ - & - & - & - & - & 12 & - \\ - & - & - & 8 & - & 14 & - \\ - & - & - & - & - & - & 10 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}
 \end{array}$$



$$\begin{array}{l}
28) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & - & 16 & - & 9 & - & - \\ - & - & - & - & 6 & - & - \\ - & 3 & - & - & - & 6 & - \\ - & - & - & - & - & 5 & 3 \\ - & - & - & 17 & - & - & 18 \\ - & 11 & - & - & - & - & 4 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \\
29) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 10 & - & 13 & 15 & - & - \\ - & - & 11 & 13 & - & 18 & - \\ - & - & - & - & 15 & - & 18 \\ - & - & - & - & - & 9 & 13 \\ - & 11 & - & - & - & 15 & - \\ - & - & - & - & - & - & 10 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \\
30) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 5 & 11 & - & - & 25 & - \\ - & - & - & - & 14 & - & 29 \\ - & - & - & 3 & - & 16 & - \\ - & - & - & - & - & - & 6 \\ - & - & - & 17 & - & - & - \\ - & - & - & - & 8 & - & 4 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}
\end{array}$$

3.29.2. По матрице пропускных способностей дуг, взятой из задачи 3.29.1, и матрице стоимости транспортировки единичного потока  $D$  вдоль дуг сети, взятой из текущей задачи, построить поток величины  $\theta = \left\lfloor \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rfloor$ , имеющий минимальную стоимость. Здесь [...] - целая часть числа.

$$\begin{array}{l}
1) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 3 & 4 & - & - & 5 & - \\ - & - & 2 & 6 & 4 & - & 2 \\ - & - & - & - & 5 & - & 8 \\ - & - & 3 & - & - & 6 & - \\ - & - & - & 7 & - & 9 & - \\ - & - & - & - & - & - & 4 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \\
2) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 4 & - & 6 & - & 12 & - \\ - & - & 3 & - & 3 & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & 2 \\ - & 3 & - & - & - & 3 & 1 \\ - & - & - & - & - & 2 & - \\ - & - & - & - & - & - & 5 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \\
3) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 7 & 2 & - & - & 5 & - \\ - & - & - & 1 & 2 & - & 3 \\ - & - & - & 3 & 3 & 7 & - \\ - & - & - & - & 1 & - & 6 \\ - & - & - & - & - & 3 & 4 \\ - & - & - & - & - & - & 4 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
4) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & - & 7 & - & 17 & 11 & - \\ - & - & - & - & 8 & - & 9 \\ - & 5 & - & 6 & - & 9 & - \\ - & - & - & - & - & 10 & 5 \\ - & - & - & - & - & 11 & 20 \\ - & - & - & - & - & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \\
5) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 5 & - & - & 4 & - & 19 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & 2 & - & - & 6 & - & - \\ - & - & 3 & - & - & 7 & 6 \\ - & - & - & 8 & - & 5 & - \\ - & - & 9 & - & - & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \\
6) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 5 & - & 7 & - & - & - \\ - & - & 10 & 6 & 7 & - & 12 \\ - & - & - & - & - & 11 & 5 \\ - & - & - & - & 15 & 4 & - \\ - & - & 11 & - & - & - & 6 \\ - & - & - & - & 10 & - & 9 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
7) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 10 & 9 & - & 6 & - & 6 \\ - & - & 10 & 10 & - & 15 & - \\ - & - & - & 5 & 4 & - & 8 \\ - & - & - & - & 4 & - & 6 \\ - & - & - & - & - & 7 & - \\ - & - & 7 & - & - & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \\
8) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & - & 5 & 9 & 4 & - & - \\ - & - & 12 & - & 5 & 7 & 10 \\ - & - & - & - & 6 & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & 10 \\ - & - & - & 8 & - & 14 & - \\ - & - & - & - & - & - & 18 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \\
9) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 5 & 7 & - & - & 6 & - \\ - & - & 9 & 12 & 8 & - & 4 \\ - & - & - & - & 7 & 9 & 15 \\ - & - & - & - & - & 10 & - \\ - & - & - & 6 & - & 10 & - \\ - & - & - & - & - & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
10) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 3 & 4 & 9 & - & - & - \\ - & - & - & - & 11 & 13 & - \\ - & 8 & - & - & 5 & - & 6 \\ - & - & - & - & 10 & - & 3 \\ - & - & - & - & - & 5 & 8 \\ - & - & - & - & - & - & 5 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \\
11) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & 4 & 3 & - & - & 3 & - \\ - & - & 4 & 2 & - & - & - \\ - & - & - & 4 & 3 & - & 6 \\ - & - & - & - & 4 & 5 & 2 \\ - & 2 & - & - & - & 4 & 5 \\ - & - & - & - & - & - & 1 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \\
12) \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ - & - & 15 & 24 & 13 & - & - \\ - & - & 11 & - & 14 & - & - \\ - & - & - & - & - & 13 & 14 \\ - & 19 & - & - & 17 & - & - \\ - & - & - & - & - & 10 & 18 \\ - & - & - & - & - & - & 11 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}
\end{array}$$





3.29.3. По приведенному перечню работ и их взаимной последовательности построить сетевой график, определить критический срок, ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий, ранние и поздние сроки начала и окончания всех работ, а также полные и свободные резервы времени всех работ.

1)

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
I	II	III
$a_1$	-	5
$a_2$	-	8
$a_3$	-	11
$a_4$	$a_1$	6
$a_5$	$a_1, a_2$	12
$a_6$	$a_1, a_2, a_3$	18
$a_7$	$a_4, a_5, a_6$	7

2)

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
I	II	III
$a_1$	-	9
$a_2$	-	5
$a_3$	$a_1$	11
$a_4$	$a_1, a_2$	7
$a_5$	$a_1, a_2$	4
$a_6$	$a_3, a_4$	13
$a_7$	$a_1, a_5$	15

3)

I	II	III
$a_1$	-	7
$a_2$	-	11
$a_3$	-	5
$a_4$	$a_1$	10
$a_5$	$a_1, a_2, a_3$	4
$a_6$	$a_3$	13
$a_7$	$a_3, a_4, a_5$	12
$a_8$	$a_4$	8

4)

I	II	III
$a_1$	-	3
$a_2$	-	2
$a_3$	-	4
$a_4$	$a_1$	3
$a_5$	$a_1$	5
$a_6$	$a_2, a_3$	9
$a_7$	$a_3$	6
$a_8$	$a_2, a_3, a_4$	8
$a_9$	$a_3, a_5, a_6$	4
$a_{10}$	$a_7$	6

5)

I	II	III
$a_1$	-	6
$a_2$	-	9
$a_3$	-	8
$a_4$	$a_1$	5
$a_5$	$a_3$	3
$a_6$	$a_3$	7
$a_7$	$a_3, a_4$	9
$a_8$	$a_1, a_2, a_5, a_6$	11
$a_9$	$a_6$	10

6)

I	II	III
$a_1$	-	11
$a_2$	-	9
$a_3$	-	7
$a_4$	$a_2$	5
$a_5$	$a_1$	6
$a_6$	$a_3, a_4$	8
$a_7$	$a_2, a_3, a_4, a_5$	10
$a_8$	$a_6$	13
$a_9$	$a_1, a_7, a_8$	15

7)

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$a_1$	-	3
$a_2$	-	6
$a_3$	-	4
$a_4$	$a_1$	6
$a_5$	$a_1, a_2, a_3$	4
$a_6$	$a_3$	7
$a_7$	$a_3, a_4, a_5$	5

8)

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$a_1$	-	10
$a_2$	-	12
$a_3$	-	9
$a_4$	$a_1$	6
$a_5$	$a_1, a_3$	7
$a_6$	$a_2, a_4$	9
$a_7$	$a_1, a_2, a_4, a_5$	5

9)

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$a_1$	-	5
$a_2$	-	6
$a_3$	$a_1$	9
$a_4$	$a_1, a_2$	11
$a_5$	$a_1, a_2$	4
$a_6$	$a_3$	6
$a_7$	$a_3$	10
$a_8$	$a_1, a_4, a_6$	8
$a_9$	$a_1, a_4, a_5, a_6$	12

10)

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$a_1$	-	10
$a_2$	-	9
$a_3$	-	12
$a_4$	$a_1$	7
$a_5$	$a_1, a_2$	8
$a_6$	$a_1, a_2, a_3$	13
$a_7$	$a_6$	15
$a_8$	$a_4, a_5, a_7$	11
$a_9$	$a_6$	9

11)

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$a_1$	-	8
$a_2$	$a_1$	4
$a_3$	-	10
$a_4$	-	13
$a_5$	$a_1, a_3$	3
$a_6$	$a_2, a_4$	6
$a_7$	$a_1, a_4, a_5$	5

12)

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$a_1$	-	4
$a_2$	-	6
$a_3$	$a_1, a_2$	12
$a_4$	$a_1, a_2$	4
$a_5$	$a_2$	5
$a_6$	$a_3, a_4, a_5$	10
$a_7$	$a_3$	7

13)

I	II	III
$a_1$	-	4
$a_2$	-	4
$a_3$	$a_2$	6
$a_4$	$a_1, a_2$	7
$a_5$	$a_1, a_3$	10
$a_6$	$a_2, a_4, a_5$	5
$a_7$	$a_2$	8
$a_8$	$a_4, a_5$	6
$a_9$	$a_3, a_4, a_5, a_6$	5

14)

I	II	III
$a_1$	-	5
$a_2$	-	6
$a_3$	-	8
$a_4$	$a_1, a_2$	11
$a_5$	$a_2, a_3$	7
$a_6$	$a_2$	6
$a_7$	$a_4, a_5$	5
$a_8$	$a_6$	9
$a_9$	$a_2, a_3$	7

15)

I	II	III
$a_1$	-	5
$a_2$	-	7
$a_3$	-	10
$a_4$	$a_1, a_2$	5
$a_5$	$a_2, a_3$	7
$a_6$	$a_3$	10
$a_7$	$a_3, a_4, a_5$	5

16)

I	II	III
$a_1$	-	5
$a_2$	-	6
$a_3$	$a_1$	8
$a_4$	$a_1, a_2$	10
$a_5$	$a_2, a_3$	7
$a_6$	$a_1, a_3, a_4$	5
$a_7$	$a_4$	7

17)

I	II	III
$a_1$	-	5
$a_2$	-	7
$a_3$	-	8
$a_4$	$a_3$	5
$a_5$	$a_2, a_4$	10
$a_6$	$a_1, a_2, a_3$	12
$a_7$	$a_2, a_5$	4

18)

I	II	III
$a_1$	-	8
$a_2$	-	10
$a_3$	$a_1$	8
$a_4$	$a_1, a_2$	12
$a_5$	$a_2$	6
$a_6$	$a_3, a_4, a_5$	9
$a_7$	$a_3, a_4$	7

19)

20)

I	II	III
$a_1$	-	8
$a_2$	-	5
$a_3$	-	6
$a_4$	$a_1, a_2$	10
$a_5$	$a_2$	10
$a_6$	$a_2, a_3$	8
$a_7$	$a_3, a_4, a_5$	5

21)

22)

I	II	III
$a_1$	-	6
$a_2$	-	10
$a_3$	$a_2$	10
$a_4$	$a_1, a_2$	8
$a_5$	$a_3$	6
$a_6$	$a_2, a_4, a_5$	4
$a_7$	$a_2$	3

I	II	III
$a_1$	-	5
$a_2$	-	7
$a_3$	-	8
$a_4$	$a_3$	8
$a_5$	$a_2, a_4$	10
$a_6$	$a_1, a_2, a_3$	5
$a_7$	$a_2, a_5$	7

23)

24)

I	II	III
$a_1$	-	11
$a_2$	-	13
$a_3$	-	10
$a_4$	$a_1, a_2$	8
$a_5$	$a_2, a_3$	6
$a_6$	$a_2, a_3$	15
$a_7$	$a_1, a_2$	7
$a_8$	$a_2, a_4, a_5$	9
$a_9$	$a_6$	12

I	II	III
$a_1$	-	3
$a_2$	-	2
$a_3$	$a_1$	5
$a_4$	$a_1$	6
$a_5$	$a_1, a_2$	4
$a_6$	$a_3$	4
$a_7$	$a_4, a_5$	6
$a_8$	$a_6, a_7$	7
$a_9$	$a_4, a_5$	5

25)

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$a_1$	-	10
$a_2$	-	12
$a_3$	$a_1$	14
$a_4$	$a_1, a_2$	11
$a_5$	$a_1, a_2$	7
$a_6$	$a_1, a_4$	9
$a_7$	$a_3$	15
$a_8$	$a_1, a_4$	13
$a_9$	$a_5, a_6$	8

26)

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$a_1$	-	7
$a_2$	-	9
$a_3$	$a_1, a_2$	11
$a_4$	$a_2$	6
$a_5$	$a_3, a_4$	8
$a_6$	$a_2$	10
$a_7$	$a_3, a_4, a_6$	12
$a_8$	$a_2, a_5$	13

27)

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$a_1$	-	5
$a_2$	-	4
$a_3$	$a_1$	6
$a_4$	$a_1, a_2$	5
$a_5$	$a_2, a_3$	7
$a_6$	$a_2, a_3, a_4$	9
$a_7$	$a_4$	4
$a_8$	$a_5, a_6$	7

28)

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$a_1$	-	10
$a_2$	-	11
$a_3$	-	13
$a_4$	$a_1$	9
$a_5$	$a_1, a_2$	7
$a_6$	$a_1, a_2, a_3$	15
$a_7$	$a_4$	6
$a_8$	$a_4, a_5, a_6$	12
$a_9$	$a_1, a_7, a_8$	5

29)

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$a_1$	-	6
$a_2$	-	8
$a_3$	$a_2$	12
$a_4$	$a_1, a_2$	5
$a_5$	$a_1, a_3$	7
$a_6$	$a_2, a_4, a_5$	7
$a_7$	$a_2$	10

30)

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$a_1$	-	7
$a_2$	-	5
$a_3$	-	10
$a_4$	$a_3$	14
$a_5$	$a_2, a_4$	8
$a_6$	$a_1, a_2, a_3$	10
$a_7$	$a_2, a_5$	6

3.29.4. По сетевым графикам, приведенным в задаче 3.29.3, и объемам потребления ресурса для каждой работы, взятым из текущей задачи, построить линейный график с учетом ресурсных ограничений. Максимальный расход ресурса в любой момент времени для данного проекта указан в строке  $Re s_{\max}$ .

1)

Работы	Интенсивность потребления ресурса
<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	20
$a_2$	40
$a_3$	50
$a_4$	30
$a_5$	30
$a_6$	70
$a_7$	80
$Re s_{\max}$	100

2)

Работы	Интенсивность потребления ресурса
<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	70
$a_2$	30
$a_3$	50
$a_4$	30
$a_5$	30
$a_6$	40
$a_7$	50
$Re s_{\max}$	100

3)

Работы	Интенсивность потребления ресурса
<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	30
$a_2$	40
$a_3$	60
$a_4$	20
$a_5$	40
$a_6$	30
$a_7$	70
$a_8$	20
$Re s_{\max}$	100

4)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	10
$a_2$	20
$a_3$	30
$a_4$	20
$a_5$	30
$a_6$	40
$a_7$	10
$a_8$	20
$a_9$	50
$a_{10}$	10
$Re s_{\max}$	50

5)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	10
$a_2$	20
$a_3$	30
$a_4$	20
$a_5$	10
$a_6$	30
$a_7$	30
$a_8$	30
$a_9$	10
$Re s_{\max}$	50

6)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	20
$a_2$	30
$a_3$	60
$a_4$	50
$a_5$	40
$a_6$	30
$a_7$	60
$a_8$	60
$a_9$	90
$Re s_{\max}$	100

7)

8)

9)



<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	10
$a_2$	30
$a_3$	40
$a_4$	20
$a_5$	20
$a_6$	30
$a_7$	40
$\text{Re } s_{\max}$	50

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	30
$a_2$	20
$a_3$	30
$a_4$	10
$a_5$	20
$a_6$	30
$a_7$	10
$\text{Re } s_{\max}$	50

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	60
$a_2$	40
$a_3$	50
$a_4$	20
$a_5$	60
$a_6$	20
$a_7$	30
$a_8$	40
$a_9$	80
$\text{Re } s_{\max}$	100

10)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	20
$a_2$	30
$a_3$	70
$a_4$	40
$a_5$	50
$a_6$	50
$a_7$	70
$a_8$	90
$a_9$	20
$\text{Re } s_{\max}$	100

11)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	20
$a_2$	30
$a_3$	20
$a_4$	60
$a_5$	10
$a_6$	40
$a_7$	50
$\text{Re } s_{\max}$	100

12)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	30
$a_2$	30
$a_3$	20
$a_4$	30
$a_5$	20
$a_6$	50
$a_7$	10
$\text{Re } s_{\max}$	50

13)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	30
$a_2$	60
$a_3$	20
$a_4$	40
$a_5$	50
$a_6$	30
$a_7$	30
$a_8$	40
$a_9$	60
$\text{Re } s_{\max}$	100

14)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	20
$a_2$	20
$a_3$	20
$a_4$	20
$a_5$	30
$a_6$	30
$a_7$	30
$a_8$	10
$a_9$	40
$\text{Re } s_{\max}$	50

15)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	30
$a_2$	20
$a_3$	30
$a_4$	10
$a_5$	50
$a_6$	20
$a_7$	30
$\text{Re } s_{\max}$	50

16)

17)

18)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	10
$a_2$	40
$a_3$	20
$a_4$	50
$a_5$	30
$a_6$	20
$a_7$	30
$\text{Re } s_{\max}$	50

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	30
$a_2$	20
$a_3$	70
$a_4$	50
$a_5$	30
$a_6$	40
$a_7$	80
$\text{Re } s_{\max}$	100

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	10
$a_2$	40
$a_3$	10
$a_4$	30
$a_5$	40
$a_6$	30
$a_7$	10
$\text{Re } s_{\max}$	50

19)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	40
$a_2$	50
$a_3$	100
$a_4$	20
$a_5$	40
$a_6$	80
$a_7$	60
$\text{Re } s_{\max}$	100

20)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	60
$a_2$	40
$a_3$	30
$a_4$	50
$a_5$	30
$a_6$	50
$a_7$	70
$\text{Re } s_{\max}$	100

21)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	20
$a_2$	40
$a_3$	20
$a_4$	20
$a_5$	30
$a_6$	50
$a_7$	30
$\text{Re } s_{\max}$	50

22)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	20
$a_2$	30
$a_3$	20
$a_4$	40
$a_5$	40
$a_6$	20
$a_7$	30
$\text{Re } s_{\max}$	50

23)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	20
$a_2$	60
$a_3$	40
$a_4$	10
$a_5$	40
$a_6$	50
$a_7$	30
$a_8$	20
$a_9$	60
$\text{Re } s_{\max}$	100

24)

<i>I</i>	<i>II</i>
$a_1$	70
$a_2$	10
$a_3$	20
$a_4$	60
$a_5$	30
$a_6$	20
$a_7$	50
$a_8$	80
$a_9$	40
$\text{Re } s_{\max}$	100

25)

26)

27)

I	II
$a_1$	30
$a_2$	80
$a_3$	70
$a_4$	50
$a_5$	50
$a_6$	60
$a_7$	20
$a_8$	40
$a_9$	110
$Re s_{\max}$	120

I	II
$a_1$	20
$a_2$	40
$a_3$	30
$a_4$	20
$a_5$	20
$a_6$	10
$a_7$	20
$a_8$	30
$Re s_{\max}$	50

I	II
$a_1$	40
$a_2$	20
$a_3$	50
$a_4$	10
$a_5$	30
$a_6$	20
$a_7$	20
$a_8$	30
$Re s_{\max}$	50

28)

I	II
$a_1$	30
$a_2$	40
$a_3$	60
$a_4$	30
$a_5$	20
$a_6$	50
$a_7$	40
$a_8$	70
$a_9$	90
$Re s_{\max}$	100

29)

I	II
$a_1$	40
$a_2$	50
$a_3$	10
$a_4$	10
$a_5$	40
$a_6$	50
$a_7$	40
$Re s_{\max}$	50

30)

I	II
$a_1$	30
$a_2$	20
$a_3$	50
$a_4$	40
$a_5$	10
$a_6$	40
$a_7$	40
$Re s_{\max}$	50

3.29.5. Построить фрагмент сетевого графика по следующим данным: а) имеется пять работ  $a_1, a_2, \dots, a_5$ . Работы  $a_2$  и  $a_3$  начаты одновременно; работа  $a_4$  может быть начата после выполнения работ  $a_1, a_2, a_3$ ; работа  $a_5$  может быть начата после выполнения работы  $a_3$ ;  
б) имеется семь работ  $a_1, a_2, \dots, a_7$ . Работа  $a_3$  выполняется после работ  $a_1$  и  $a_4$ ; работа  $a_4$  начинается после выполнения работы  $a_2$ ; работа  $a_6$  может быть выполнена после работ  $a_4$  и  $a_5$ ; работа  $a_7$  выполняется после работ  $a_3$  и  $a_6$ .

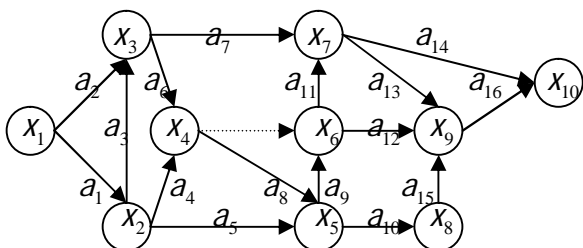


Рис. 3.83

3.29.6. По сетевому графику, изображенному на рис. 3.83, установить, как повлияет на срок выполнения комплекса увеличение продолжительности работы  $a_{10}$ , работы  $a_{16}$ . Можно ли использовать полный резерв времени работы  $a_{10}$  для увеличения продолжительности работы  $a_{15}$ ? Можно ли увеличи-

вать продолжительность работы  $a_{10}$  за счет свободного резерва времени работы  $a_{15}$ ? Изменится ли полный резерв времени работы  $a_5$ , если срок выполнения комплекса возрастет за счет увеличения продолжительности работы  $a_{16}$ ? Продолжительности всех работ следующие:  $a_1 - 18, a_2 - 17, a_3 - 5, a_4 - 23, a_5 - 19, a_6 - 10, a_7 - 17, a_8 - 10, a_9 - 18, a_{10} - 16, a_{11} - 16, a_{12} - 5, a_{13} - 7, a_{14} - 10, a_{15} - 9, a_{16} - 5$ .

3.29.7. По сетевому графику, изображенному на рис. 3.84, установить, можно ли полный резерв времени работы  $a_4$  распределить на работы  $a_{13}, a_{16}$ , не нарушив срок завершения комплекса. Можно ли полный резерв времени работы  $a_8$  распределить на работы  $a_4, a_5$ , не влияя на продолжительность критического пути? Можно ли свободный резерв времени работы  $a_4$  передать на последующие работы, не изменив их раннего начала? Продолжительности всех работ таковы:  $a_1 - 1, a_2 - 1, a_3 - 2, a_4 - 2, a_5 - 5, a_6 - 4, a_7 - 5, a_8 - 2, a_9 - 3, a_{10} - 10, a_{11} - 1, a_{12} - 5, a_{13} - 1, a_{14} - 1, a_{15} - 10, a_{16} - 2$ .

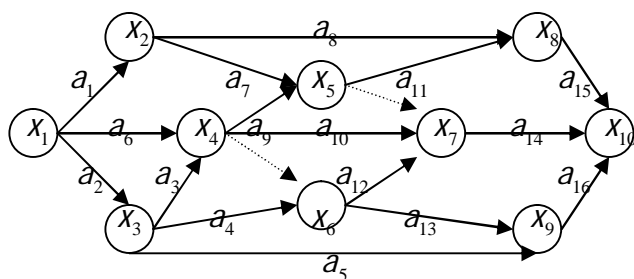


Рис. 3.84

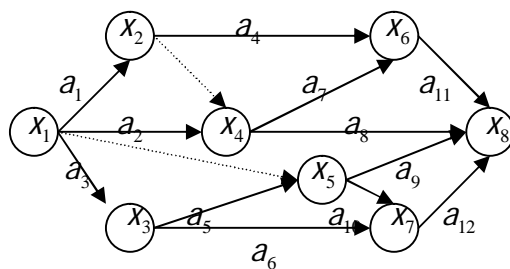


Рис. 3.85

3.29.8. Для комплекса работ, представленного сетевым графиком на рис. 3.85, определить сроки свершения событий, критический путь, сроки начала и окончания работ, резервы времени работ. Продолжительности работ следующие:  $a_1 - 11, a_2 - 12, a_3 - 10, a_4 - 12, a_5 - 10, a_6 - 7, a_7 - 10, a_8 - 7, a_9 - 10, a_{10} - 4, a_{11} - 8, a_{12} - 11$ .

## ЧАСТЬ II. ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ

### 1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

#### Ответы и решения задач практического занятия № 1

**1.3.1.** а)  $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ . Равенство можно доказать чисто формально, используя основные законы алгебры множеств (см. подразд. 1.1), либо с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Надо заметить, что если в исходном соотношении участвует не более трех множеств, второй способ предпочтительнее.

В нашем случае  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ . Преобразуем левую часть  $A \setminus (A \setminus B) = A \setminus (A \cap \bar{B}) = A \cap \overline{(A \cap \bar{B})} = A \cap (\bar{A} \cup B) = (\bar{A} \cap A) \cup (B \cap A) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$ . На рис. 1.1 изображены правая и левая часть исходного равенства;

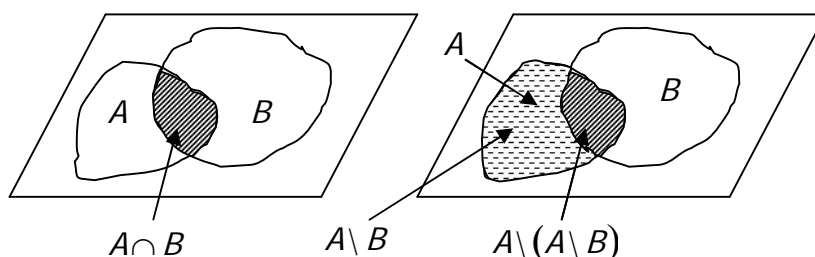


Рис. 1.1

б)  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ .  $(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C}$ ,  $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ . На рис. 1.2 приведены диаграммы Эйлера – Венна этого равенства;

в)  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ .  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap \bar{B}) \cap C = A \cap \bar{B} \cap C$ ,  $(A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \cap \overline{(B \cap C)} = (A \cap C) \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = (A \cap C \cap \bar{B}) \cup (A \cap C \cap \bar{C}) = A \cap \bar{B} \cap C$ . На рис. 1.3 выделено множество, соответствующее левой и правой части исходного равенства.

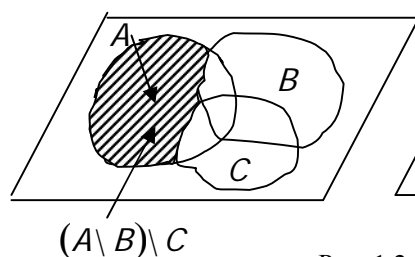


Рис. 1.2

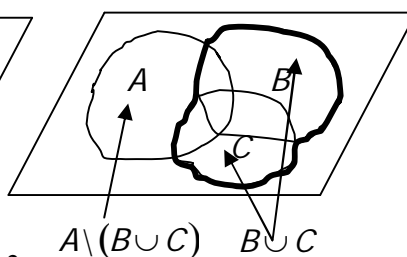
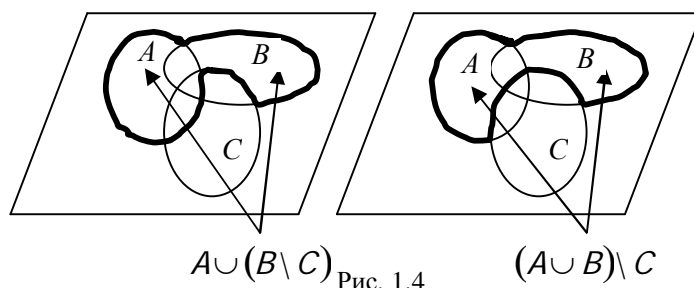


Рис. 1.3

**1.3.2.**  $A = \{x \in N / 2 < x \leq 6\} = \{3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{x \in N / 1 < x \leq 4\} = \{2, 3\}$ ,  
 $C = \{x \in N / x^2 - 4 = 0\} = \{2\}$ .  
 а)  $B \cup C = \{2, 3\} = B$ ; б)  $A \cap B \cap C = \emptyset$ ; в)  $A \cup B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ; г)  $B \times C = \{(2, 2), (3, 2)\}$ ;  
 д)  $C \times B = \{(2, 2), (2, 3)\} \neq B \times C$ .

**1.3.3.** а)  $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$ .  $A \cup (B \setminus C) = A \cup (B \cap \bar{C}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{C})$ ,  $(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap \bar{C} = (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C}) = (A \cup (B \cap \bar{C})) \cap (\bar{C} \cup (B \cap \bar{C})) = ((A \cup B) \cap (A \cup \bar{C})) \cap (\bar{C} \cup (B \cap \bar{C}))$ . Поскольку пересечение любых двух непустых множеств «меньше» исходных, т.е. является подмножеством каждого из них, то  $(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$ . Это хорошо видно и на диаграмме Эйлера – Венна (рис. 1.4). Границы множеств в левой и правой части выделены жирной линией;



$A \cup (B \setminus C)$  Рис. 1.4

$(A \cup B) \setminus C$

б)  $(A \cup C) \setminus B \subseteq (A \setminus B) \cup C$ .  $(A \cup C) \setminus B = (A \cup C) \cap \bar{B} = (A \cap \bar{B}) \cup (C \cap \bar{B})$ ,  $(A \setminus B) \cup C = (A \cap \bar{B}) \cup C$ . Так как  $C \cap \bar{B} \subseteq C$ , то  $(A \cup C) \setminus B \subseteq (A \setminus B) \cup C$ .

**1.3.4.**  $\overline{(X \cup A) \cup (X \cup \bar{A})} = \overline{(X \cup A) \cup (X \cup \bar{A})} = \overline{(X \cup A) \cap (X \cup \bar{A})} = \bar{B}$ . Тогда  $(X \cup A) \cap X \cup \bar{A} = \bar{B}$ . Отсюда  $(X \cap X) \cup (A \cap X) \cup (X \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{A}) = X \cup (X \cap A) \cup (X \cap \bar{A}) = X \cup (X \cap (A \cup \bar{A})) = X \cup X = X = \bar{B}$ . Итак,  $X = \bar{B}$ .

**1.3.5.** а) если  $A \subseteq B \cap C$ , то  $A \subseteq B$  и  $A \subseteq C$ . Если  $B \cap C \neq \emptyset$ , то  $B \cap C \subseteq B$  и  $B \cap C \subseteq C$ .  $A \subseteq B \cap C \subseteq B$ , т.е.  $A \subseteq B$ , аналогично  $A \subseteq B \cap C \subseteq C$ , т.е.  $A \subseteq C$ . Это очевидно на рис. 1.5;

б) если  $A \cap B \subseteq C$ , то  $A \subseteq \bar{B} \cup C$ . Рассмотрим два случая. Пусть вначале  $A \cap B = C$ , тогда  $A \setminus B \subseteq \bar{B}$ ,  $(A \setminus B) \cup C = (A \setminus B) \cup (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (\bar{B} \cup B) = A$ .  $(A \setminus B) \cup C \subseteq \bar{B} \cup C$ , т.е.  $A \subseteq \bar{B} \cup C$  (рис. 1.6). Пусть теперь  $A \cap B \subset C$ , в этом случае все равно  $A \setminus B \subseteq \bar{B}$  и  $A \subseteq (A \setminus B) \cup C$ . Но  $(A \setminus B) \cup C \subseteq \bar{B} \cup C$ , тогда  $A \subseteq (A \setminus B) \cup C \subseteq \bar{B} \cup C$ , т.е.  $A \subseteq \bar{B} \cup C$  (рис. 1.6);

в) если  $A \cup B \subseteq C$ , то  $A \subseteq C$  и  $B \subseteq C$ . Эти включения очевидны по определению объединения двух множеств (рис. 1.7), т.е., например,  $A \subseteq A \cup B$ ,  $A \cup B \subseteq C$ , то  $A \subseteq C$  и так далее;

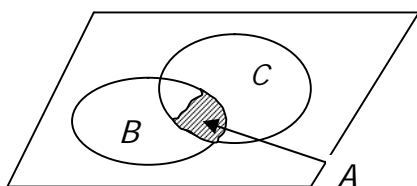


Рис. 1.5

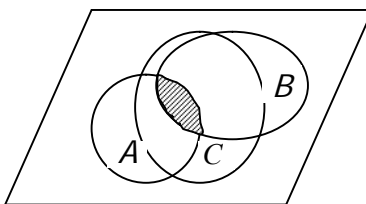


Рис. 1.6

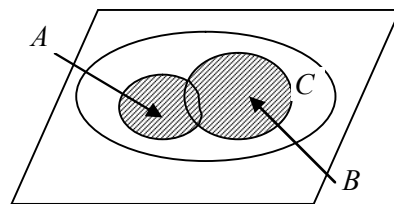


Рис. 1.7

г) если  $A \subseteq B \cup C$ , то  $A \cap \bar{B} \subseteq C$ . Рассмотрим три случая. Пусть  $A \subseteq C$  и  $A \not\subseteq B$ , тогда  $A \subseteq \bar{B}$  и  $A \cap \bar{B} = A \subseteq C$  (рис. 1.8,а). Пусть теперь  $A \subseteq B$ ,  $A \not\subseteq C$ . В этом случае  $A \not\subseteq B$  и  $A \cap \bar{B} = \emptyset$ , но  $\emptyset \subseteq C$ , т.е.  $A \cap \bar{B} \subseteq C$  (рис. 1.8,б). Наконец, пусть  $A \subseteq B \cap C$  (рис. 1.8,в), т.е.  $A \subseteq B$  и  $A \subseteq C$ . Но  $A \not\subseteq \bar{B}$ ,  $A \cap \bar{B} = \emptyset$  и  $A \cap \bar{B} = \emptyset \subseteq C$ .

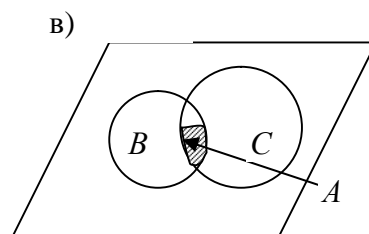
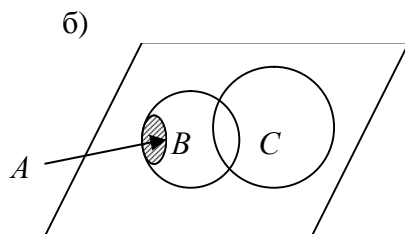
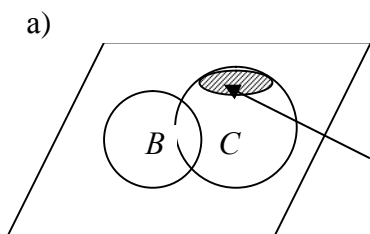


Рис. 1.8.

$$1.3.6. \begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases} \quad B \subseteq A \subseteq C. \quad B = A \cap X, \text{ т.е. } B \subseteq A \cap X, \text{ следовательно, } X \subseteq \bar{A} \cup B$$

из 1.3.5 б. Кроме того, так как  $B \subseteq A \cap X$ ,  $B \subseteq A$  и  $B \subseteq X$  по 1.3.5 а. Таким образом, из первого уравнения получаем  $B \subseteq X \subseteq \bar{A} \cup B$ . Из второго уравнения  $A \cup X = C$ , т.е.  $X \subseteq C$  и  $\bar{A} \cap C \subseteq X \subseteq C$  из 1.3.5 в и г. Так как в результате объединения множеств увеличивается площадь множеств на диаграммах Эйлера – Венна, а в результате пересечения – уменьшается, то  $B \cup (\bar{A} \cap C) \subseteq X \subseteq (\bar{A} \cup B) \cap C = (\bar{A} \cap C) \cup (B \cap C) = (\bar{A} \cap C) \cup B$ , потому что  $B \subseteq X$  и

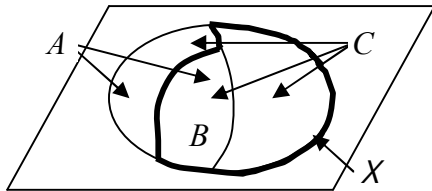


Рис. 1.9

левая часть по «площади» не превысит  $X$ , одновременно  $X \subseteq C$  и  $B \subseteq C$ , т.е. правая часть не изменится. Таким образом,  $(\bar{A} \cap C) \cup B \subseteq X \subseteq (\bar{A} \cap C) \cup B$ . Отсюда  $X = (\bar{A} \cap C) \cup B = (C \setminus A) \cup B$ . Границы множества  $X$  выделены жирной линией на рис. 1.9.

**1.3.7.** Проще всего доказать справедливость требуемых включений на диаграммах Эйлера – Венна: а) если  $A \subseteq B$ , то  $\bar{B} \subseteq \bar{A}$  (рис. 1.10); б) если  $A \subseteq B$ , то  $A \cup C \subseteq B \cup C$  (рис. 1.11); в) если  $A \subseteq B$ , то  $A \cap C \subseteq B \cap C$  (рис. 1.12).

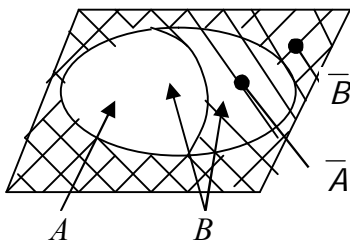


Рис. 1.10

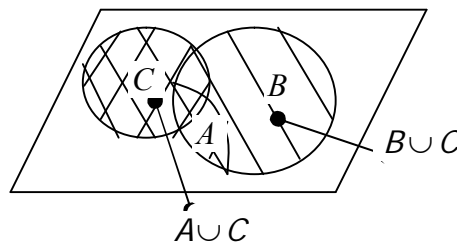


Рис. 1.11

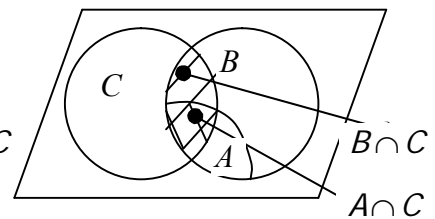


Рис. 1.12

$$1.3.8. \begin{cases} A \setminus X = B, \\ X \setminus A = C, \end{cases} \quad B \subseteq A, \quad A \cap C = \emptyset. \quad \text{Из первого уравнения имеем } A \cap \bar{X} = B, \text{ т.е.}$$

$B \subseteq A \cap \bar{X}$ ,  $B \subseteq \bar{X}$ ,  $\bar{X} \subseteq \bar{A} \cup B$  (см. задачу 1.3.5). Аналогично из второго уравнения:  $X \cap \bar{A} = C$ ,  $C \subseteq X \cap \bar{A}$ ,  $C \subseteq X$ ,  $C \subseteq \bar{A}$ ,  $X \subseteq A \cup C$ . Если  $\bar{X} \subseteq \bar{A} \cup B$ , то  $\bar{A} \cup B \subseteq \bar{X}$  (задача 1.3.7 а), т.е.  $A \cap \bar{B} \subseteq X$ ,  $(A \cap \bar{B}) \cup C \subseteq X \cup C \subseteq X$

(задача 1.3.7 б). Далее  $B \subseteq \bar{X}$ , т.е.  $X \subseteq \bar{B}$ , тогда  $X \subseteq X \cap \bar{B} \subseteq (A \cup C) \cap \bar{B}$  (задача 1.3.7 в). Но  $(A \cup C) \cap \bar{B} = (A \cap \bar{B}) \cup (C \cap \bar{B}) = (A \cap \bar{B}) \cup C$ , так как  $B \subseteq A$  и  $A \cap C = \emptyset$ , т.е.  $B \not\subseteq C$  и  $C \subseteq \bar{B}$ .

Таким образом,  $(A \cap \bar{B}) \cup C \subseteq X \subseteq (A \cap \bar{B}) \cup C$ , т.е.  $X = (A \cap \bar{B}) \cup C = (A \setminus B) \cup C$ . Границы множества  $X$  выделены жирной линией на рис. 1.13.

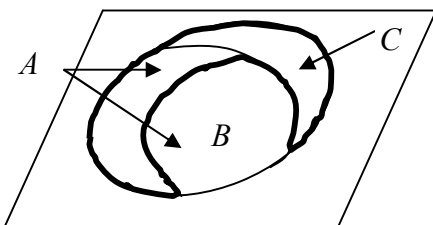


Рис. 1.13

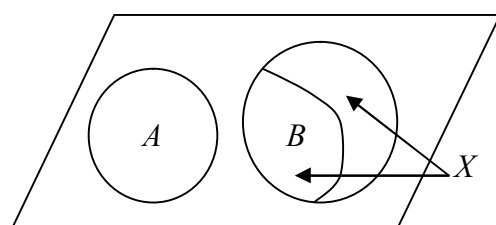


Рис. 1.14



**1.3.9.**  $\begin{cases} A \cap X = \emptyset, \\ B \cap \bar{X} = \emptyset. \end{cases}$  Так как  $B \cap \bar{X} = \emptyset$ , то  $B \not\subset \bar{X}$ , следовательно,  $B \subseteq X$ . Аналогично

$A \cap X = \emptyset$ , т.е.  $A \cap B = \emptyset$  и  $B \not\subset A$ , тогда  $B \subseteq \bar{A}$ . Отсюда же  $X \not\subset A$ , следовательно,  $X \subseteq \bar{A}$ . Итак,  $B \subseteq X \subseteq \bar{A}$ ,  $X$  – любое множество,  $B \subseteq \bar{A}$  – необходимое условие существования решения (рис. 1.14).

**1.3.10.** а)  $P_1 = \{(a,2), (a,3), (a,4), (b,3), (c,1), (c,4)\}$ ,  $P_2 = \{(1,1), (2,3), (2,2), (3,4), (1,4), (2,4), (4,2)\}$ . Отношение  $P_1$  и  $P_2$  графически представлено на рис. 1.15. По определению матрицы бинарных отношений будет иметь следующий вид:

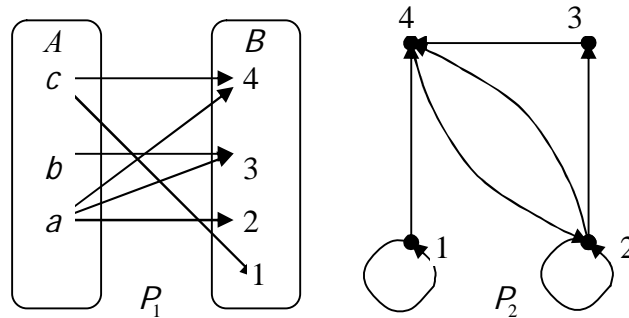


Рис. 1.15

$$\|P_1\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \|P_2\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Таким образом, можно найти только матрицы}$$

композиций  $P_1 \circ P_2$  и  $(P_1 \circ P_2)^{-1}$ , именно  $\|P_1 \circ P_2\| = \|P_1\| \cdot \|P_2\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\|(P_1 \circ P_2)^{-1}\| =$

$$= \|(P_1 \circ P_2)^T\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ В матрице } P_2 \text{ на главной диагонали имеются нулевые элементы,}$$

следовательно,  $P_2$  нерефлексивно. Сама матрица  $P_2$  несимметрична, т.е. отношение  $P_2$  также несимметрично. Для проверки антисимметричности вычислим матрицу  $\|P_2 \cap P_2^{-1}\| =$

$$= \|P_2\| * \|P_2^T\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ В полученной матрице есть нену-$$

левые элементы, стоящие вне главной диагонали, следовательно, отношение  $P_2$  неантисим-

метрично. Найдем, наконец,  $\|P_2 \circ P_2\| = \|P_2\| \cdot \|P_2\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \|P_2\|$ , т.е.  $P_2 \circ P_2 \not\subset P_2$ , значит,

$P_2$  не является транзитивным отношением.

$$\begin{aligned} \text{б) } P_1 &= \{(b,2), (a,3), (b,1), (b,4), (c,1), (c,2), (c,4)\}, \\ P_2 &= \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (3,2), (3,4), (4,4)\}. \end{aligned}$$

Графическое изображение отношений  $P_1$  и  $P_2$  приведено на рис. 1.16.

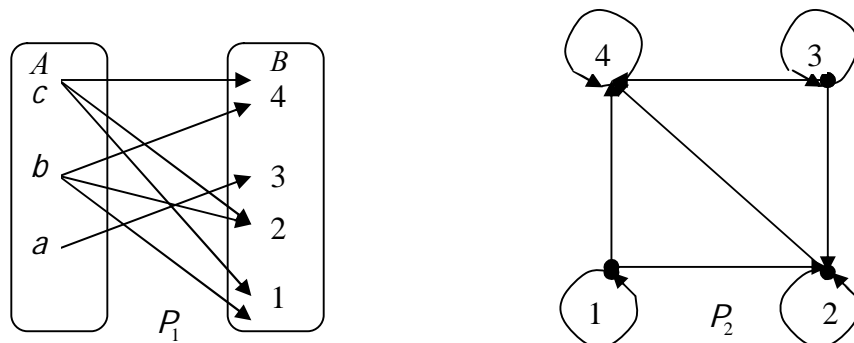


Рис. 1.16

$$\begin{aligned} \|P_1\| &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|P_2\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|P_1 \circ P_2\| = \|P_1\| \cdot \|P_2\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|(P_1 \circ P_2)^{-1}\| = \\ &= \|(P_1 \circ P_2)^T\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad P_2 \text{ — рефлексивно, несимметрично. } \|P_2 \cap P_2^{-1}\| = \|P_2\| * \|P_2^T\| = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \|P_2\|. \quad \text{Отношение } P_2 \text{ антисимметрично.} \\ \|P_2 \circ P_2\| &= \|P_2\| \cdot \|P_2\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \|P_2\|, \text{ т.е. } P_2 \circ P_2 \subseteq P_2, \text{ следовательно, отношение } P_2 \text{ тран-} \end{aligned}$$

ЗИТИВНО.

**1.3.11.** а)  $P \subseteq R^2$ ,  $(x, y) \in P \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,  $y \in [-1, 1]$  (рис. 1.17). Так как  $x^2 + x^2 \neq 1$  для любого  $x \in [-1, 1]$ , то отношение  $P$  нереплексивно. Если  $(x, y) \in P$ , то

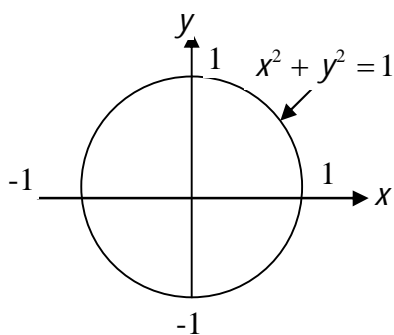


Рис. 1.17

$(y, x) \in P$ , т.е.  $P$  — симметрично. Далее, например,  $(1, 0) \rightarrow x^2 + y^2 = 1$ , т.е.  $(x, y) \in P$  и  $(0, 1) \rightarrow x^2 + y^2 = 1$ , т.е.  $(y, x) \in P$ , но  $x \neq y$ , следовательно,  $P$  не антисимметрично. Наконец, если  $(x, y) \in P \rightarrow x^2 + y^2 = 1$  и  $(y, z) \in P \rightarrow y^2 + z^2 = 1$ , то  $x^2 + z^2 = 2 - 2y^2 \neq 1$ , т.е.  $(x, z) \notin P$  и отношение  $P$  не транзитивно;

б)  $P \subseteq Z^2$ ,  $(x, y) \in P \Leftrightarrow x - y$  четно.  $P = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2n, \dots\}$ . Разность двух целых чисел четна тогда и только тогда, когда оба числа либо од-

новременно четны, либо одновременно нечетны. Итак,  $(x, y)$  имеют вид либо  $(2k, 2m)$ , либо  $(2k+1, 2m+1)$ . Тогда  $z = x - y = 2(k - m)$  – четно.

В этом случае  $x - x = 0$  – четно, т.е. отношение  $P$  рефлексивно. Если  $\left\{ \begin{matrix} (2k, 2m) \\ (2k+1, 2m+1) \end{matrix} \right\} \in P$ , то  $\left\{ \begin{matrix} (2m, 2k) \\ (2m+1, 2k+1) \end{matrix} \right\} \in P$ , значит,  $P$  симметрично. Аналогично, если  $(2k, 2m) \in P$ , то  $(2m, 2k) \in P$ , но  $2k \neq 2m$ , т.е.  $P$  не антисимметрично. Если  $x - y$  четно и  $y - z$  тоже четно, то  $x - z$  четно, так как вид чисел  $x$  и  $z$  определяется видом числа  $y$ . Поэтому  $x$  и  $z$  либо одновременно четны, либо одновременно нечетны. Таким образом, отношение  $P$  транзитивно.

**1.3.12.** а)  $P = \{(x, y) / x, y \in N \text{ и } x \text{ делит } y\}$ . Условимся считать, что нуль делит нуль. Тогда так как  $(x, x) \in R$  (действительное число), то  $D_P = R_P = N$ .  
 $P^{-1} = \{(y, x) / y, x \in N \text{ и } y \text{ делит } x\}$ ,  
 $P \circ P = \{(x, y) / x \in N, y \in N, \exists z \in N \text{ такой, что } x \text{ делит } z \text{ и } z \text{ делит } y\} =$   
 $= \{(x, y) / x, y \in N \text{ и } x \text{ делит } y\} = P$ .  $P \circ P^{-1} = \{(x, y) / x \in N, y \in N, \exists z \in N \text{ такой, что } (x, z) \in P$   
и  $(y, z) \in P^{-1}\} = N^2$ . Здесь надо взять такое  $z$ , что  $x$  делит  $z$  и  $y$  делит  $z$ , например,  $z = x \cdot y$ , т.е. нужное  $z$  легко находится по  $x$  и  $y$ .

$P^{-1} \circ P = \{(x, y) / x \in N, y \in N, \exists z \in N \text{ такой, что } (z, x) \in P^{-1} \text{ и } (z, y) \in P\} = N^2$ . В этом случае при любых  $x$  и  $y$  можно взять  $z = 1$ , так как  $z$  должно делить  $x$  и  $z$  должно делить  $y$ ;

б)  $P = \{(x, y) / x, y \in R \text{ и } 2x \geq 3y\}$ .  $D_P = R_P = R$ ,  $P^{-1} = \{(y, x) / y, x \in R \text{ и } 2y \geq 3x\}$ ,  
 $P \circ P^{-1} = P^{-1} \circ P = \{(x, y) / x, y \in R \text{ и } 4x \geq 9y\} = R^2$ .

**1.3.13.** а) Бинарное отношение  $P \subseteq A \times B$  по определению – это любое подмножество декартова произведения  $A \times B$ , которое, очевидно, состоит из  $m \cdot n$  пар элементов. Так как бинарное отношение связывает два элемента, при этом их можно менять местами, то общее количество отношений будет равно  $2^{m \cdot n}$ ;

б) по определению  $f: A \rightarrow B$  для всякого  $x$  и из  $(x, y_1) \in f$ ,  $(x, y_2) \in f$  следует, что  $y_1 = y_2$ . Элементов  $y$  имеется  $n$  штук, элементов  $x$  –  $m$  штук. Для каждого  $y \in B$  может быть выбран  $x \in A$ , причем выбор происходит по схеме  $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{m \text{ раз}}$ . Таким образом, число функций  $f: A \rightarrow B$  равно  $n^m$ .

**1.3.14.** а) Например,  $P = \{(x, y) / x, y \in R, |x - y| \leq 1\}$ . Отношение рефлексивно, так как для всякого  $x$   $(x, x) \in R$ , действительно,  $|x - x| = 0 \leq 1$ . Если  $|x - y| \leq 1$ , то  $|y - x| \leq 1$ , таким образом,  $P$  симметрично. Для транзитивности необходимо, чтобы при  $|x - y| \leq 1$  и  $|y - z| \leq 1$  выполнялось  $|x - z| \leq 1$  для всяких  $x, y, z \in R$ .

Пусть  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $z = -1$ , тогда  $|x - y| \leq 1$ ,  $|y - z| \leq 1$  но  $|x - z| > 1$ , следовательно,  $P$  нетранзитивно;

б)  $P = \{(x, y) / x, y \in Z, x \leq y \leq x^2\}$ .  $(x, x) \in P$  ибо  $x \leq x \leq x^2$  справедливо для всякого  $x \in Z$ , т.е. отношение  $P$  рефлексивно.  $P$  антисимметрично, если из  $(x, y) \in P$  и  $(y, x) \in P$  следует  $x = y$ . Неравенства  $x \leq y \leq x^2$  и  $y \leq x \leq y^2$  выполняются одновременно только тогда, когда  $x = y$ . Например, если  $x = 5$ ,  $y = 7$ , то  $5 \leq 7 \leq 25$ , но  $7 \geq 5 \leq 49$ , если же  $x = y = 7$ ,

то  $7 \leq 7 \leq 49$ .  $P$  нерелексивно, ибо из  $x \leq y \leq x^2$  и  $y \leq z \leq y^2$  не следует  $x \leq z \leq x^2$  для любых  $x, y, z \in Z$ . Например, если  $x = 3$ ,  $y = 5$ ,  $z = 24$ , то  $3 \leq 5 \leq 9$ ,  $5 \leq 24 \leq 25$ , но  $3 \leq 24 \leq 9$ ;

в)  $P = \{(x, y) \mid x, y \in R, x \leq y\}$ .  $P$  рефлексивно, так как для любого  $x \in R$   $x \leq x$ , несимметрично, поскольку  $1 \leq 2$  и  $(1, 2) \in P$ , но  $2 \geq 1$ , т.е.  $(2, 1) \notin P$ . Если  $x \leq y$  и  $y \leq z$ , то  $x \leq z$  для всяких  $x, y, z \in R$ , следовательно, отношение  $P$  рефлексивно;

г)  $P = \{(x, y) \mid x, y \in R, x = y = 0\}$ .  $x = x \neq 0$ , если  $x \neq 0$ , т.е.  $P$  нерелексивно,  $x = y = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$  и  $y = 0$ , т.е.  $x = y$ , следовательно,  $P$  антисимметрично. Если  $x = y = 0$  и  $y = z = 0$ , то  $x = z = 0$  и  $P$  транзитивно.

**1.3.15** а) Эквивалентностью на заданном множестве называется рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение.  $P_m = \{(a, b) \mid a, b \in N, a - b \text{ делится на } m\}$ .  $\frac{a - a}{m} = 0$  делится на  $m$ , т.е.  $P_m$  рефлексивно. Если  $\frac{a - b}{m} = n$ , то  $\frac{b - a}{m} = -n$ , таким образом,  $P_m$  симметрично. Пусть  $\frac{a - b}{m} = n$ ,  $\frac{b - c}{m} = k$ , тогда  $\frac{a - b}{m} + \frac{b - c}{m} = \frac{a - c}{m} = n + k$ , т.е.  $P_m$  транзитивно. Следовательно, отношение  $P_m$  есть отношение эквивалентности;

б)  $S = \{(a, b), (c, d) \mid (a, b), (c, d) \in N \times N, a \cdot d = b \cdot c \text{ и } b \neq 0, d \neq 0 \text{ или } a = c, b = 0, d = 0\}$ . Отношение  $S$  рефлексивно на  $N \times N$ , если для любой пары  $(a, b) \in S$   $\{(a, b), (a, b)\} \in S$ . Но  $a \cdot b = b \cdot a$ , следовательно, отношение  $S$  рефлексивно.

Если  $\{(a, b), (c, d)\} \in S$ , то и  $\{(c, d), (a, b)\} \in S$ , так как из  $a \cdot d = b \cdot c$  следует, что и  $c \cdot b = d \cdot a$ . Таким образом,  $S$  симметрично. Далее если  $\{(a, b), (c, d)\} \in S$ ,  $\{(c, d), (f, g)\} \in S$ , то  $\{(a, b), (f, g)\} \in S$ , так как  $a \cdot d = b \cdot c$  и  $c \cdot g = d \cdot f$ , тогда и  $(a \cdot d)(c \cdot g) = (b \cdot c)(d \cdot f) \Rightarrow a \cdot g = b \cdot f$ . Следовательно,  $S$  транзитивно.

**1.3.16.** а) Множество  $A$  частично упорядочено, если отношение  $P$  на нем рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Антисимметричность отношения  $P$  на множестве  $A$  означает, что если  $(a, b) \in P$  и  $(b, a) \in P$ , то  $a = b$ . Элемент  $a \in A$  называется наибольшим, если для всякого  $b \in A$   $b \leq a$ .

Пусть  $a'$  и  $a''$  - два наибольших элемента множества  $A$ . Тогда в силу антисимметричности, если  $(a', a'') \in P$  и  $(a'', a') \in P$ , то  $a' = a''$ , т.е. они должны совпадать. Это значит, что наибольший элемент - единственный;

б)  $P = \{(x, y) \mid x, y \in R, x = y = 0 \text{ или } x \neq 0, y \neq 0, x < y\}$ . Это отношение рефлексивно, ибо  $x = x = 0$ , антисимметрично, так как если  $x < y$  и  $y < x$ , то  $x = y$  или  $x = y$ ,  $y = x$ , то  $x = y = 0$ , транзитивно, потому что если  $x = y$  и  $y = z$ , то  $x = z$  и  $x = y = z = 0$  или если  $x < y$  и  $y < z$ , то  $x < z$  и  $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ . Таким образом, отношение  $P$  - отношение частичного порядка.

$x = 0$  - минимальный элемент, так как для любого  $y \in A$ , если  $x \leq y$ , то  $x = y = 0$ . Если  $P = \{(x, y) \mid x, y \in R, x = y = 0\}$ , то  $x = 0$  - единственный элемент, если же  $P = \{(x, y) \mid x, y \in R, x \neq 0, y \neq 0, x < y\}$ , то не существует  $a \in R$  такого, чтобы для всякого  $x \in R$   $a \leq x$ . Таким образом, наименьшего элемента нет.

## Ответы и решения задач практического занятия № 2

**1.5.1. а)** Пусть  $A_n$  – конечное множество,  $|A_n| = n$ ,  $B_k \subseteq A_n$ , т. е.  $k \leq n$ . Так как  $A_n$  конечно, то все элементы  $A_n$  могут быть пронумерованы. Способов нумерации столько же, сколько существует способов упорядочить множество  $A_n$ . Это число равно  $n!$

Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – представление множества  $A_n$ . Так как  $B_k \subseteq A_n$ , то  $a_{n_1}$  – первый элемент конечной последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и то же время первый элемент множества  $B_k$ ,  $a_{n_2}$  – второй элемент и так далее. Так как  $k \leq n$ , то мы получим конечную последовательность  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}$ . Следовательно, множество  $B_k$  конечно. Число способов получить последовательность  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}$  равно  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ ;

б) пусть даны  $B_1, B_2, \dots, B_k$  и  $A = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ . Рассмотрим сначала случай, когда  $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j, i, j = \overline{1, k}$ . Пронумеруем элементы множества  $B_1$  в виде  $b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_{n_1}^{(1)}$ , элементы множества  $B_2$  в виде  $b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, \dots, b_{n_2}^{(2)}$  и так далее. Тогда всем элементам множества  $A$  можно поставить в соответствие номера  $b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_{n_1}^{(1)}, b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, \dots, b_{n_2}^{(2)}, \dots, b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \dots, b_{n_k}^{(k)}$ . Так как эта последовательность номеров конечна, то  $A$  – конечное множество.

Пусть теперь множества  $B_i$  пересекаются. Положим  $B'_1 = B_1$ ,  $B'_2 = B_2 \setminus B'_1, \dots, B'_n = B_n \setminus (B'_1 \cup B'_2 \cup \dots \cup B'_{n-1})$ . Так как  $B'_1 = B_1$ ,  $B'_2 = B_2 \setminus B'_1 = B_2 \cap \overline{B'_1} = \overline{B'_1} \cap B_2$ ,  $B'_3 = B_3 \setminus (B'_1 \cup B'_2) = B_3 \setminus (B_1 \cup (B_2 \setminus B_1)) = B_3 \setminus (B_1 \cup (B_2 \cap \overline{B_1})) = B_3 \setminus (B_1 \cup B_2) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3, \dots, B'_n = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n$ , то  $B'_1 \cup B'_2 \cup \dots \cup B'_n = B_1 \cup (\overline{B_1} \cap B_2) \cup (\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3) \cup \dots \cup (\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n) = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = A$ . Кроме того,  $B'_i \cap B'_j = \emptyset$ , например,  $B'_1 \cap B'_2 = B_1 \cap (\overline{B_1} \cap B_2) = \emptyset$  и так далее. Следовательно, по первой части задачи множество  $A$  конечно.

**1.5.2.** Пусть  $A$  – бесконечное множество,  $B = \{b_0, b_1, \dots\}$  – счетное подмножество  $A$ . Тогда  $B \cup (A \setminus B) = (A \cup B) \cap (B \cup \overline{B}) = A \cup B$  и  $A \sim A \cup B = B \cup (A \setminus B)$ , так как объединение бесконечного и счетного множества есть множество бесконечное (см. теорему 1.4). Аналогично  $B \cup (A \setminus B) \sim (B \setminus \{b_0\}) \cup (A \setminus B) = ((B \cap \overline{\{b_0\}}) \cup A) \cap ((B \cap \overline{\{b_0\}}) \cup \overline{B}) = ((A \cup B) \cap (A \cup \overline{\{b_0\}})) \cap ((B \cup \overline{B}) \cap (\overline{B \cup \{b_0\}})) \sim A \cap (\overline{B \cup \{b_0\}}) = A \cap (\overline{B \cap \{b_0\}}) = A \cap \overline{\{b_0\}} = A \setminus \{b_0\}$ . Итак,  $A \sim A \setminus \{b_0\}$ , причем, очевидно, что  $\{A \setminus \{b_0\}\} \subseteq A$ .

**1.5.3. а)** Пусть  $A_1$  – счетное подмножество и  $A_1 \subset A$ .  $A_1 \cup B \sim A_1$  (теорема 1.3),  $(A \setminus A_1) \cup (A_1 \cup B) = (A \cap \overline{A_1}) \cup A_1 \cup B = ((A \cup A_1) \cap (\overline{A_1} \cup A_1)) \cup B = A \cup A_1 \cup B = A \cup B$ , так как  $A_1 \subset A$ ,  $(A \setminus A_1) \cup (A_1 \cup B) \sim (A \setminus A_1) \cup A_1 = (A \cap \overline{A_1}) \cup A_1 = (A \cup A_1) \cap (\overline{A_1} \cup A_1) = A \cup A_1 = A$ . Итак,  $A \cup B \sim A$ ;

б) следует из теоремы 1.4.

**1.5.4.** Рассмотрим функцию  $f: Z \leftrightarrow N$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(k) = 2k$ ,  $f(-k) = 2k - 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$  Таким образом,  $f$  обеспечивает взаимно-однозначное соответствие между точками множеств  $Z$  и  $N$ , следовательно, множество  $Z$  счетно, так как  $Z \sim N$ .

**1.5.5.** Пусть  $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ ,  $a_i \in Z$ . Каждый многочлен  $P_n(x)$  взаимно-однозначно соответствует конечной последовательности целых чисел  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ . Множество же всех конечных последовательностей, составленных из элементов множества  $Z$ , есть счетное множество. Действительно, рассмотрим сначала пару целых чисел  $(n_1, n_2)$  и натуральное число  $|n_1| + |n_2| = n$ . Имеется ровно  $n+1$  пара целых чисел, у которых сумма модулей компонент равна  $n$ :  $(0, n), (1, n-1), \dots, (n-1, 1), (n, 0)$ . Обозначим через  $A_{n+1}$  множество всех пар целых чисел, удовлетворяющих условию  $|n_1| + |n_2| = n$ . Тогда множество  $Z^{(2)}$  всех пар целых чисел есть сумма счетного множества конечных множеств  $A_{n+1}$  и счетное множество.

Докажем теперь счетность множества  $Z^{(n+1)}$  всех последовательностей, состоящих из  $n+1$  элемента множества  $Z$  методом математической индукции. Поскольку множество  $Z^{(2)}$  счетно, предположим, что счетно и множество  $Z^{(n)}$ . Покажем, что при этом будет счетно множество  $Z^{(n+1)}$ . В самом деле, пусть  $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ . Каждой последовательности  $z^{(n+1)} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}, a_k\} \in Z^{(n+1)}$  соответствует пара  $(z^{(n)}, a_k)$ , где  $z^{(n)} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\} \in Z^{(n)}$ , причем различным  $z^{(n+1)}$  соответствуют различные пары такого вида.

Так как по предположению множество  $Z^{(n)}$  всех последовательностей  $z^{(n)}$  счетно, то счетно и множество всех пар  $(z^{(n)}, a_k)$ , а следовательно, и множество всех последовательностей  $z^{(n+1)} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}, a_k\}$ . Последовательности  $z^{(n+1)}$  – это последовательности целых коэффициентов многочленов  $P_n(x)$  от одной переменной. Следовательно, множество  $P_n(x)$  всех многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами счетно.

**1.5.6.** а) Пусть  $A = (0, 1)$  и, например,  $B = (0, 1]$ . Тогда  $A \cup \{1\} = B$ .  $\{1\}$  – конечное множество, а  $B$  – множество действительных чисел полуотрезка  $(0, 1]$  бесконечно. Из задачи 1.5.3 а следует, что  $A \sim B$ , т. е.  $(0, 1) \sim (0, 1]$ . Прочие случаи аналогичны;

б) положим  $f_1(x) = a + (b-a)x$ . Эта функция осуществляет взаимно-однозначное соответствие между  $[0, 1]$  и  $[a, b]$ , т. е.  $[0, 1] \sim [a, b]$ . Пусть  $f_2(x) = c + (d-c)x$ . Тогда  $[0, 1] \sim [c, d]$ . Отсюда  $[a, b] \sim [c, d]$ .

**1.5.7.** Рассмотрим две окружности с центром в начале координат и радиусами  $r$  и  $R$  (рис. 1.18). Точке  $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  сопоставим точку  $(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$ . Таким образом, между точками этих двух окружностей установлено взаимно однозначное соответствие, т.е. множество всех точек этих окружностей эквивалентны.

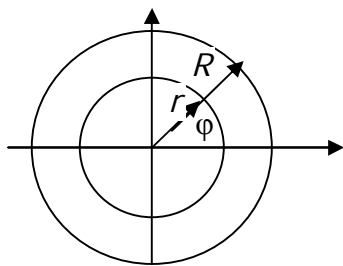


Рис 1.18

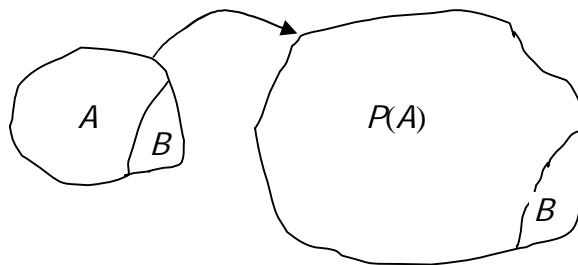


Рис. 1.19

**1.5.8.** Пусть  $g$  – такая функция из  $A$  в  $P(A)$ , что  $g(x) = \{x\}$ . Она устанавливает взаимно-однозначное соответствие между  $A$  и подмножеством множества  $P(A)$ , состоящим из одноэлементных подмножеств  $A$ , так что  $|A| \leq |P(A)|$ . Покажем теперь, что  $A \sim P(A)$ .

Рассмотрим  $f: A \leftrightarrow P(A)$  и положим  $B = \{x/x \in A, x \notin f(x)\}$  (рис. 1.18). Так как  $P(A)$  – множество всех подмножеств  $A$ , то  $B \subset P(A)$ . Пусть  $x_0 \in A$  и  $f(x_0) = B$ . Это возможно, так как  $f: A \leftrightarrow P(A)$  и  $B \subset P(A)$ .

Предположим  $x_0 \in B$ , тогда  $x_0 \in f(x_0) = B$ , наоборот,  $x_0 \notin B$ , то  $x_0 \notin f(x_0)$  и  $x_0 \in B$  по определению множества  $B$ . Следовательно, не существует такой функции  $f: A \leftrightarrow P(A)$ , для которой множество ее значений совпадает с  $P(A)$ , т.е.  $|A| < |P(A)|$ .

**1.5.9.** Пусть  $U$  – множество, содержащее все множества. Тогда  $P(U) \subseteq U$  по определению  $U$ . Но с другой стороны,  $|P(U)| > |U|$  (см. задачу 1.5.8). Получено противоречие, следовательно, исходное предположение о существовании  $U$  неверно.

**1.5.10.** Можно. Рассмотрим множество  $B = \{x - y/x, y \in A\}$ . Оно счетно, так как множество  $A$  по условию счетно. Пусть  $a \in R \setminus B$ , тогда для всякого  $a \in R \setminus B$   $\{x + a/x \in A\} \cap A = \emptyset$ .

## 2. КОМБИНАТОРИКА

### Ответы и решения задач практического занятия № 3

**2.5.1.** Трехзначное число содержит три десятичных разряда, каждый из которых заполняется по порядку цифрами 1, 2, 3, 4 и 5. Первый разряд может быть заполнен любой из этих цифр, для второго остаются четыре цифры, так как по условию задачи каждую из этих цифр можно использовать не более одного раза, наконец, третий разряд заполняется лишь тремя оставшимися неиспользованными цифрами. По правилу произведения общее число способов составления чисел равно  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ .

**2.5.2.** Действует то же правило произведения, что и в предыдущей задаче. Старший разряд числа может быть заполнен любой из девяти цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ноль не может использоваться, так как иначе число будет четырехзначным, а не пятизначным. Второй, третий и четвертый разряды заполняются любой цифрой из десяти. Младший разряд можно заполнить только нулем или пятеркой, так как число делится на пять, если оно оканчивается на 0 или 5. Таким образом, число способов равно  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18000$ .

**2.5.3.** Требования задачи становятся очевидными из рисунка (рис. 2.1). Из вершины  $A$  треугольника  $ABC$  проведено  $m$  прямых, каждая из которых пересекается с  $n$  прямыми, проведенными из вершины  $B$ . Таким образом, число точек пересечения равно  $n \cdot m$ .  $m$  прямых, проведенных из вершины  $A$ , делят треугольник  $ABC$  на  $m+1$  область, аналогично  $n$  прямых, исходящих из  $B$ , делят треугольник на  $n+1$  область. Тогда общее число частей в треугольнике  $ABC$  будет равно  $(n+1)(m+1)$ .

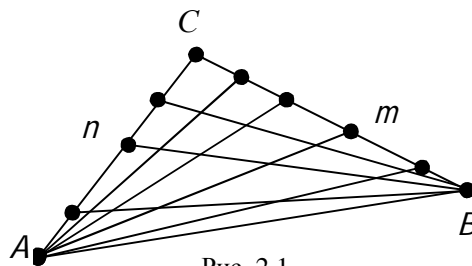


Рис. 2.1

**2.5.4.** Существует пять четных и пять нечетных цифр. Четные цифры: 0, 2, 4, 6, 8. Старший разряд двузначного четного числа можно заполнить четырьмя способами (цифры 2, 4, 6, 8), младший – пятью (можно использовать все пять цифр). Общее число требуемых чисел  $4 \cdot 5 = 20$ .

**2.5.5.** Из пяти номеров пассажир совершенно не помнит лишь один, следовательно, этот номер может быть замещен любой цифрой из существующих десяти. Две группы цифр пассажир помнит. Эти группы могут следующими способами располагаться в забытом пяти-



значном числе: ?2337, ?3723, 23?37, 37?23, 2337?, 3723?. Следовательно, существует не более  $6 \cdot 10 = 60$  номеров, которые нужно перебрать, чтобы открыть камеру.

**2.5.6.** Карты из колоды вынимаются по схеме без возвращения (т.е. без повторения) и без упорядочивания. Всего существует  $C_{52}^{10}$  способов вынуть 10 карт из 52. Тузов в колоде четыре, поэтому есть  $C_{48}^{10}$  способов вынуть 10 карт, чтобы среди них не было ни одного туза. Тогда а) хотя бы один туз окажется в  $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$  случаях (по правилу суммы); б)  $C_4^1 \cdot C_{48}^9$  – ровно один туз ( $C_4^1$  – один туз из четырех и  $C_{48}^9$  – девять не тузов из 48 карт, не содержащих тузов); в) не менее двух тузов – это значит два, три или четыре туза. Это же количество получится, если из общего числа способов вынуть 10 карт из 52 вычесть число способов не вытащить ни одного туза и не вытащить ровно один туз (любой из четырех мастей). Тогда  $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - 4 \cdot C_{48}^9$ ; г)  $C_4^2 \cdot C_{48}^8$  – ровно два туза.

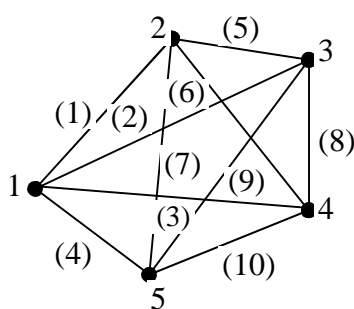


Рис. 2.2

**2.5.7.** Точки по условию задачи могут образовывать выпуклый  $n$ -угольник (рис. 2.2). Тогда первая точка может быть соединена с  $(n-1)$ -й точкой, вторая с  $n-2$  точками и так далее, наконец,  $(n-1)$ -я точка может быть соединена только с одной точкой. Прямые, получающиеся путем очередного соединения точек, обозначены на рис. 2.2 цифрами в скобках. Таким образом, всего получится  $(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1 = \frac{1+(n-1)}{2}(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$  прямых.

**2.5.8.** Пусть  $x$  – число участников, получивших 8 баллов, а  $y$  – 9 баллов. Тогда  $x + y = 2k$ , т.е. число всех участников четное, так как обе команды имели одинаковое число участников. Очевидно, что  $\begin{cases} x + y = 2k, \\ 8x + 9y = 156, \end{cases}$  необходимо лишь оценить пределы изменения  $2k$ . Так как  $16 \cdot 9 = 144 < 156$  и  $20 \cdot 8 = 160 > 156$ , то  $2k$  не может быть меньше 17 и больше 19, т.е.  $2k = 18$ . Итак,  $\begin{cases} x + y = 18, \\ 8x + 9y = 156, \end{cases} \Rightarrow x = 12, y = 6$ .

**2.5.9.** Два числа на одном километровом столбе в сумме всегда дают 999. Если взять столб, на котором только две в любом разряде различные цифры, то, если одна из них  $A$ , то другая обязательно  $9 - A$ , например, 

0	999
---	-----

, 

9	990
---	-----

, 

222	777
-----	-----

, 

333	666
-----	-----

 и так далее.

Всего таких столбов  $2^3 = 8$  (число зеркально обратных в цифровом выражении столбов, в каждом из трех разрядов может стоять либо  $A$ , либо  $9 - A$ ). Можно использовать лишь пять различных пар цифр: (0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6) и (4, 5); остальные пары повторяют перечисленные. По правилу произведения число всех столбов, на которых только две различные цифры, равно  $8 \cdot 5 = 40$ .

**2.5.10.** Рассмотрим всех людей с одним зубом. Очевидно, единственный зуб может находиться на любом из 32 мест, т.е. людей с разным расположением (набором) одного зуба  $C_{32}^1$ . Тогда общее число людей с различными наборами всех зубов равно  $C_{32}^0 + C_{32}^1 + \dots + C_{32}^{32} = 2^{32} = 4294967292$  человека.

**2.5.11.** Одного офицера из трех можно выбрать  $C_3^1$  способами (выборка без повторения и без упорядочивания). Аналогично, для солдат –  $C_{40}^3$ . По правилу произведения наряд может быть выделен  $C_3^1 \cdot C_{40}^3 = 29640$  способами.

**2.5.12.** В последовательности важен порядок звуков, в аккорде порядок не важен. Следовательно, существует  $C_{88}^6$  аккордов и  $A_{88}^6$  последовательностей.

**2.5.13.** Каждый из членов, которые получаются после раскрытия скобок, содержит семь сомножителей. Любой из этих сомножителей – либо буква, либо цифра, т.е. может находиться в двух состояниях. Тогда, например, членов, которых содержится только одно цифра  $C_7^1$ , две  $C_7^2$  и т.д. Всего членов  $C_7^0 + C_7^1 + \dots + C_7^7 = 2^7 = 128$ .

**2.5.14.** Пусть дано  $n$ -значное число. После выбора  $k$  его цифр  $(k+1)$ -я цифра может быть выбрана, очевидно, девятью способами. Таким образом, количество  $n$ -значных чисел, не содержащих двух идущих подряд одинаковых чисел, равно  $9^n$  при  $n > 1$  и 10 при  $n = 1$ . Общее количество чисел равно  $10 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^n$ .

**2.5.15.** В описанном способе набора шести карт может оказаться: а) две пары карт одинаковой масти и по одной карте двух других мастей. Таких выборов по правилу произведения  $C_4^2 \cdot (C_{13}^2)^2 \cdot (C_{13}^1)^2$ , где  $C_4^2$  – число способов выбора двух мастей из четырех,  $C_{13}^2$  – число способов выбора двух карт одной и той же масти,  $C_{13}^1$  – число способов выбора одной карты любой масти; б) три карты одной масти и по одной карте других мастей. Таких выборов  $C_4^1 \cdot (C_{13}^1)^3 \cdot C_{13}^3$ . Объяснение аналогично п. а.

**2.5.16.** а) Купивший билет, выбирает 6 номеров из 49. Все возможные выборки считаются равновероятными. Зафиксируем 6 номеров. Тогда требуемая вероятность равна отношению числа выборок, содержащих  $k$  из шести фиксированных номеров, к числу всех выборок. Всего выборок  $C_{49}^6$ .  $k$  номеров из шести содержат  $C_6^k \cdot C_{43}^{6-k}$  выборок – сначала из шести верных номеров выбирают  $k$ , а затем  $6-k$  номеров дополняют из числа 43 «несчастливых» номеров. Таким образом, вероятность угадать составляет  $(C_6^k \cdot C_{43}^{6-k}) / C_{49}^6$ ;

б) аналогичные рассуждения дают  $\left( \sum_{i=k}^6 C_6^i \cdot C_{43}^{6-i} \right) / C_{49}^6$ .

**2.5.17.** Для пары мужчина – женщина места можно выбрать двумя способами (рис. 2.3). После этого мужчин можно посадить на выбранные места  $n!$  способами, на остальных местах  $n!$  способами можно посадить женщин. Всего  $2(n!)^2$  способов.

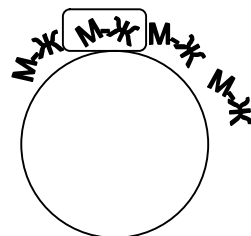


Рис. 2.3

**2.5.18.** Первую монету можно положить в любой из двух карманов, т.е. имеется два способа выбора. Вторую можно выбрать аналогичным способом и так далее. Всего  $2^9$  способов.

**2.5.19.** а)  $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ . Единица является делителем любого числа. Остальные делители (все разные!) будут получаться путем перемножения одного, двух, трех, четырех и пяти чисел из набора 2, 3, 5, 7, 11, т.е. число всех делителей равно  $C_5^0 + C_5^1 + \dots + C_5^5 = 2^5 = 32$ ;

б)  $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$ . Всего делителей  $C_{15}^0 + C_{15}^1 + \dots + C_{15}^{15} = 2^{15}$ . Из-за кратности простых делителей среди них будут одинаковые, которые надо исключить. Рассмотрим, напри-

мер, делитель  $3^4$ . Кратных трем будут четыре различных делителя: 3, 9, 27, 81. Таким образом, число различных делителей для простого кратного делителя равно его кратности. К этому надо добавить единицу, так как она делитель любого числа. Тогда всего различных делителей будет  $(8+1)(4+1)(2+1)(1+1) = 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270$ .

**2.5.20.** Первое имя можно выбрать 300 способами, пару имен можно выбрать  $300^2$  способами, тройку -  $300^3$  способами (см. задачу 2.5.18). Всего  $300 + 300^2 + 300^3$  способов.

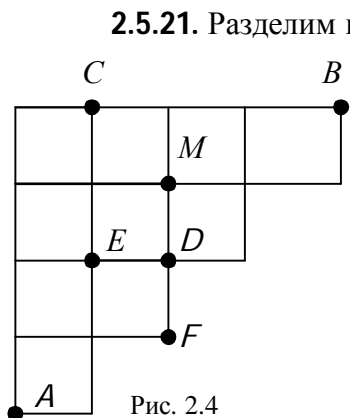


Рис. 2.4

**2.5.21.** Разделим всевозможные маршруты на две группы: проходящие через точку  $C$  и проходящие через точку  $D$ . Других способов попасть из  $A$  в  $B$  нет. Из  $A$  в  $C$  можно попасть пятью способами, а из  $C$  в  $B$  – единственным, т.е. первая группа состоит из пяти маршрутов. Вторая группа состоит из 10 маршрутов. Действительно, из  $A$  в  $D$  можно попасть либо через  $E$ , либо через  $F$ . Из  $A$  в  $E$  можно попасть тремя (кратчайшими!) способами, из  $A$  в  $F$  – двумя способами. Следовательно, из  $A$  в  $D$  можно попасть  $3+2=5$  способами. Наконец, из  $D$  в  $B$  можно попасть двумя способами, т.е. общее число маршрутов из  $A$  в  $B$  через  $D$  равно  $5 \cdot 2 = 10$ . Таким образом, общее число всевозможных маршрутов из  $A$  в  $B$  (через  $C$  и через  $D$ ) равно  $5+10=15$  (рис. 2.4).

**2.5.22.** Какие бы  $m-1$  членов комиссии ни собрались, должен найтись замок, который они не могут открыть, но ключ от этого замка имеется у каждого из остальных  $n-m+1$  членов комиссии (появление одной из которых дает возможность открыть сейф). Поэтому число замков равно  $C_n^{m-1}$ , а число ключей равно  $(n-m+1)C_n^{m-1}$ .

**2.5.23.** а)  $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})^{20} = \left(2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \cdot 2^{\frac{k}{3}} \cdot 3^{\frac{20-k}{3}}$ . Очевидно, что член разложения

будет рационален, если  $k$  четно, а  $20-k$  кратно трем, т.е.  $k = 2, 8, 14, 20$ ;

б)  $(\sqrt[3]{6} + \sqrt[4]{2})^{100} = \left(6^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{4}}\right)^{100} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k \cdot 6^{\frac{k}{3}} \cdot 2^{\frac{100-k}{4}}$ . Для рациональности текущего члена

необходимо, чтобы  $k$  было кратно трем и  $100-k$  делилось на четыре. Так как  $k$  меняется от 0 до 100, то двум приведенным требованиям удовлетворяют следующие значения  $k$ : 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 и 96. Итак, рациональных членов будет девять.

**2.5.24.** Представим исходное выражение в виде  $(2 + t^4 + t^7)^5 = [(t^4 + t^7) + 2]^5 = (A + 2)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot A^k \cdot 2^{5-k}$ ,  $A = t^4(1 + t^3)$ .  $k$ -й член равен  $C_5^k \cdot A^k \cdot 2^{5-k}$ , причем в  $A$  входят степени  $t$  от  $4k$  до  $7k$ . Степень 17 может входить в  $A^3$  и в  $A^4$ , следовательно, надо проверить только эти члены.  $A^3 = t^{12}(1 + t^3)^3 = t^{12} \cdot \sum_{k=0}^3 C_3^k t^{3k}$ . 17 на 3 не делится, следовательно, члена  $t^{17}$  здесь нет. Аналогично,  $A^4 = t^{16}(1 + t^3)^4 = t^{16} \cdot \sum_{k=0}^4 C_4^k t^{3k}$ ,  $3k \neq 1$ , члена  $t^{17}$  тоже нет. Итак, в разложении  $(2 + t^4 + t^7)^5$  нет  $t^{17}$ , т.е. коэффициент при  $t^{17}$  равен нулю;

б)  $(2 + t - 2t^3)^{20} = (A + 2)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \cdot A^k \cdot 2^{20-k}$ ,  $A = t - 2t^3$ . Если  $k = 4$ , то  $A^k$  содержит  $t$

в степенях от 4 до 12,  $k = 5$  – от 5 до 15,  $k = 6$  – от 6 до 18,  $k = 7$  – от 7 до 21,  $k = 8$  – от 8

до 24,  $k=9$  – от 9 до 27 и  $k=10$  – от 10 до 30. Тогда  $C_{20}^4 \cdot 2^{16} \cdot A^4 = C_{20}^4 \cdot 2^{16} \cdot t^4 \sum_{i=0}^4 C_4^i (-2)^i t^{2i}$ , если  $i=3$ , то появится член с  $t^{10}$ , его коэффициент будет  $C_{20}^4 \cdot 2^{16} \cdot C_4^3 \cdot (-2)^3$ . При  $k=5,7,9$  члена с  $t^{10}$  в разложении не будет. Если  $k=6$ , то появится член  $C_{20}^6 \cdot 2^{14} \cdot C_6^2 \cdot (-2)^2 t^{10}$ , при  $k=8$  аналогично будет  $C_{20}^8 \cdot 2^{12} \cdot C_8^1 \cdot (-2)^1 t^{10}$  и при  $k=10$  подобный член равен  $C_{20}^{10} \cdot 2^{10} \cdot C_8^0 \cdot (-2)^0 t^{10}$ . Таким образом, общий коэффициент при  $t^{10}$  в исходном выражении равен  $(-C_{20}^4 \cdot 2^{19} \cdot C_4^3 + C_{20}^6 \cdot 2^{16} \cdot C_6^2 - C_{20}^8 \cdot 2^{13} \cdot C_8^1 + C_{20}^{10} \cdot 2^{10} \cdot C_8^0) = 2^{10} \cdot 19409716$ .

**2.5.25.** Представим  $99=100-1$  и  $101=100+1$ . Тогда  $99^{50} = (100-1)^{50} = C_{50}^0 \cdot 100^0 - C_{50}^1 \cdot 100^1 + \dots + (-1)^k C_{50}^k \cdot 100^k + \dots - C_{50}^{49} \cdot 100^{49} + C_{50}^{50} \cdot 100^{50}$ ,  $101^{50} = (100+1)^{50} = C_{50}^0 \cdot 100^0 + C_{50}^1 \cdot 100^1 + \dots + C_{50}^k \cdot 100^k + \dots + C_{50}^{49} \cdot 100^{49} + C_{50}^{50} \cdot 100^{50}$ . Найдем разность  $101^{50} - 99^{50}$ . Если эта разность больше  $100^{50}$ , то число  $101^{50}$  больше числа  $99^{50} + 100^{50}$ .

$101^{50} - 99^{50} = 2(C_{50}^1 \cdot 100^1 + C_{50}^3 \cdot 100^3 + \dots + C_{50}^{47} \cdot 100^{47} + C_{50}^{49} \cdot 100^{49})$ . Только последнее слагаемое  $2 \cdot C_{50}^{49} \cdot 100^{49} = 2 \cdot \frac{50!}{49! \cdot 1!} \cdot 100^{49} = 100^{50}$ . Следовательно,  $101^{50} - 99^{50} > 100^{50}$  и число  $101^{50}$  больше числа  $99^{50} + 100^{50}$ .

**2.5.26.** а) Так как  $(1+t)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k$ , тогда  $\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^n C_n^k t^k = \sum_{k=0}^n C_n^k k t^{k-1} = \frac{d}{dt} (1+t)^n = n(1+t)^{n-1}$ .

Положим  $t=1$ , тогда  $\sum_{k=1}^n k C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$ ;

б)  $\frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=0}^n C_n^k t^k = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot k \cdot (k-1) t^{k-2} = \frac{d^2}{dt^2} (1+t)^n = n(n-1)(1+t)^{n-2}$ . При  $t=1$  имеем

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) C_n^k = n(n-1) \cdot 2^{n-2};$$

в)  $\sum_{k=0}^n (2k+1) C_n^k = 2 \sum_{k=0}^n k C_n^k + \sum_{k=0}^n C_n^k = 2 \cdot n \cdot 2^{n-1} + 2^n = (n+1) \cdot 2^n$ .

**2.5.27.** Зафиксируем  $m$ - подмножество  $n$ - множества (рис. 2.5). Пусть  $r-k$  элементов принадлежат  $m$ - подмножеству, а  $k$  элементов – его дополнению. Число  $(n, r)$ - выборов при этих условиях по правилу произведения равно  $C_{n-m}^k \cdot C_m^{r-k}$ . Просуммировав по  $k$ , получим число всех

$(n, r)$ - выборов из  $n$ - множества, т.е.  $\sum_{k=0}^n C_{n-m}^k \cdot C_m^{r-k} = C_n^r$

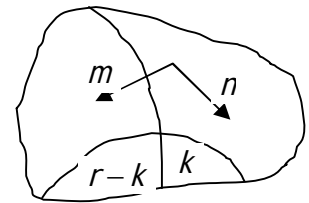


Рис. 2.5

**2.5.28.** Так как по формуле бинома Ньютона

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n &= \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot 2^{-i} \text{ и } \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot (-1)^i \cdot 2^{-i}, \text{ то } \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3^n + 1}{2^n} = \\ &= \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot [1 + (-1)^i] 2^{-i} = \left\langle \begin{matrix} 1 + (-1)^i = 2, i = 2k, \\ 1 + (-1)^i = 0, i = 2k+1 \end{matrix} \right\rangle = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2i} \cdot 2^{-2i}. \text{ Тогда } \frac{3^n + 1}{2} = 2^n \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2i} \cdot 2^{-2i} = \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2i} \cdot 2^{n-2i}. \end{aligned}$$

**2.5.29.** а)  $C_{2n-1}^{n-1} = \sum_{i=1}^n C_{2n-i-1}^{n-1} = C_{2n-2}^{n-1} + C_{2n-3}^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} + C_{n-1}^{n-1}$ . Равенство  $C_n^k = C_n^{n-k}$  проверяется непосредственно.  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$  (см. подразд. 2.6). Кроме того,  $C_{2n-1}^{n-1} = C_{2n-1}^{2n-1-(n-1)} = C_{2n-1}^n$ . Тогда  $C_{2n-1}^n = C_{2n-2}^n + C_{2n-2}^{n-1}$ ,  $C_{2n-2}^n = C_{2n-3}^n + C_{2n-3}^{n-1}$ , ...,  $C_{n+1}^n = C_n^n + C_n^{n-1}$ , но  $C_n^n = C_n^{n-1}$ . Подставляя эти равенства друг в друга в обратном порядке, получаем

$$C_{2n-1}^n = C_{2n-1}^{n-1} = C_{2n-2}^{n-1} + C_{2n-3}^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} + C_{n-1}^{n-1} = \sum_{i=1}^n C_{2n-i-1}^{n-1};$$

б) доказательство аналогично пункту а).  $C_{2n}^{n-1} = \sum_{i=1}^n C_{2n-i}^{n-1} = C_{2n-1}^{n-1} + C_{2n-2}^{n-1} + \dots + C_{n+1}^{n-1} + C_n^{n-1}$ .  $C_{2n}^{n-1} = C_{2n}^{2n-(n-1)} = C_{2n}^{n+1}$ ,  $C_{2n}^{n+1} = C_{2n-1}^{n+1} + C_{2n-1}^n$ ,  $C_{2n-1}^{n+1} = C_{2n-2}^{n+1} + C_{2n-2}^n$ , ...,  $C_{n+2}^{n+1} = C_{n+1}^{n+1} + C_{n+1}^n$ ,  $C_{n+1}^{n+1} = C_n^n$ . Тогда  $C_{2n}^{n-1} = \sum_{i=1}^n C_{2n-i}^n$ .

**2.5.30.** 
$$\sum_{i=1}^n \frac{C_{n-1}^{i-1}}{C_{2n-1}^i} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}}{\frac{(2n-1)!}{i!(2n-i-1)!}} = \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)! \cdot i \cdot (2n-i-1)}{(2n-1)!(n-i)!} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{(2n-i-1)(n-1)[2n-(2n-i)]}{(2n-1)!(n-i)!} = \sum_{i=1}^n \frac{2n(n-1)(2n-i-1) - (n-1)(2n-i)}{(2n-1)!(n-i)!} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{2n(n-1)(n-1)(2n-i-1)}{(2n-1)(2n-2)(n-1)(n-i)!} - \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)n!(2n-i)}{(2n-1)n!(n-i)!} = \sum_{i=1}^n \frac{2n}{(2n-1)(n-1)(n-i)!} \cdot \frac{(2n-i-1)}{(n-1)(n-i)!} -$$

$$- \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2n-1)} \cdot \frac{(2n-i)}{(n-i)!} = \sum_{i=1}^n \frac{2n}{(2n-1)C_{2n-2}^{n-1}} \cdot C_{2n-i-1}^{n-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}} \cdot C_{2n-i}^{n-1} = \left\langle \text{см. задачу 2.5.29} \right\rangle =$$

$$= \frac{2n}{(2n-1)C_{2n-2}^{n-1}} \sum_{i=1}^n C_{2n-i-1}^{n-1} - \frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}} \sum_{i=1}^n C_{2n-i}^{n-1} = \frac{2n}{(2n-1)C_{2n-2}^{n-1}} \cdot C_{2n-1}^{n-1} - \frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}} \cdot C_{2n}^{n-1} = 2 - \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{n+1}.$$

#### Ответы и решения задач практического занятия № 4

**2.13.1.** а)  $a_n = n\alpha^n, n=0,1,2,\dots, \alpha \in R$ .  $f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(\alpha t)^n = \langle z = \alpha t \rangle =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = z \frac{d}{dz} \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = z \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1-z} \right) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{\alpha t}{(1-\alpha t)^2};$$

б)  $a_n = \begin{cases} 0, n=0, \\ \frac{\alpha^n}{n!}, n=1,2,\dots \end{cases}$   $f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = e^{\alpha t} - 1;$

в)  $a_n = n^2, n=0,1,2,\dots$   $f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 t^n = \sum_{n=0}^{\infty} n[(n-1)+1]t^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)t^n +$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} n t^n = t^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)t^{n-2} + t \sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} = t^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2}{dt^2} t^n + t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} t^n = t^2 \frac{d^2}{dt^2} \sum_{n=0}^{\infty} t^n + t \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} t^n =$$

$$= t^2 \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{1-t} \right) + t \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1-t} \right) = t^2 \frac{2(1-t)}{(1-t)^4} + \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{t(1+t)}{(1-t)^3};$$

$$\text{r)} \quad a_n = \begin{cases} 1, n=0,1,\dots,N, \\ 0, n>N. \end{cases} \quad f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^N t^n = 1+t+t^2+\dots+t^N = \frac{1-t^{N+1}}{1-t};$$

д)  $a_n = \sin \alpha n, n=0,1,2,\dots, \alpha \in R$ . По формуле Эйлера  $e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x$ ,  
 $\sin \alpha x = \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i}, \quad \cos \alpha x = \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2}$ . Введем новую вспомогательную функцию  
 $\varphi(\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$ . По аналогии с формулой Эйлера будем иметь  $\varphi^n(\alpha) = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$ ,  
 $\sin n\alpha = \frac{\varphi^n(\alpha) - \varphi^n(-\alpha)}{2i}, \quad \cos n\alpha = \frac{\varphi^n(\alpha) + \varphi^n(-\alpha)}{2}$ .

Пусть  $F(t, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(\alpha) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} [t(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \cos n\alpha + i \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sin n\alpha$ , тогда  
 $F(t, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} [t\varphi(\alpha)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-t(\cos \alpha + i \sin \alpha)}$ . Отсюда по аналогии с функцией  $\varphi(\alpha)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sin \alpha n &= \frac{F(t, \alpha) - F(t, -\alpha)}{2i} = \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{1-t(\cos \alpha + i \sin \alpha)} - \frac{1}{1-t(\cos \alpha - i \sin \alpha)} \right] = \\ &= \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{(1-t\cos \alpha) - it\sin \alpha} - \frac{1}{(1-t\cos \alpha) + it\sin \alpha} \right] = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1-t\cos \alpha + it\sin \alpha - 1 + t\cos \alpha + it\sin \alpha}{(1-t\cos \alpha)^2 + t^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{t\sin \alpha}{1-2t\cos^2 \alpha + t^2 \cos^2 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} = \frac{t\sin \alpha}{1-2t\cos^2 \alpha + t^2}. \quad \text{Ho} \quad \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sin \alpha n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = f_a(t) = \\ &= \frac{t\sin \alpha}{1-2t\cos^2 \alpha + t^2}. \end{aligned}$$

**2.13.2. а)**  $f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} t^n = t \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} t^{n-1} = t \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = t f_b(t);$

б)  $f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n b_i t^n = b_0 t^0 + (b_0 + b_1) t^1 + \dots + (b_0 + b_1 + \dots + b_k) t^k + \dots =$   
 $= b_0 (1 + t + t^2 + \dots + t^k + \dots) + b_1 (t + t^2 + \dots + t^k + \dots) + \dots + b_k t^k + \dots = b_0 \cdot \frac{1}{1-t} + b_1 \left( \frac{1}{1-t} - 1 \right) + \dots$   
 $+ b_k \left( \frac{1}{1-t} - 1 - t - \dots - t^{k-1} \right) + \dots = \frac{b_0}{1-t} + \frac{b_1 t}{1-t} + \dots + \frac{b_k t^k}{1-t} + \dots = \frac{1}{1-t} (b_0 + b_1 t + \dots + b_k t^k + \dots) =$   
 $= \frac{1}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \frac{1}{1-t} f_b(t);$

в)  $f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=k}^{\infty} b_{n-k} t^n = t^k \sum_{n=k}^{\infty} b_{n-k} t^{n-k} = \left\langle \begin{matrix} i = n-k, \\ n = k, i = 0, \\ k = n-i \end{matrix} \right\rangle = t^k \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i = t^k f_b(t);$

г)  $f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \left\langle \begin{matrix} n+1 = i, \\ n = 0, i = 1, \\ n = i-1 \end{matrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} b_i t^{i-1} -$   
 $-\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} t^n = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{\infty} b_i t^i - f_b(t) = \frac{1}{t} [f_b(t) - f_b(0)] - f_b(t) = \frac{f_b(t) - f_b(0)}{t} - \frac{t f_b(t)}{t} = \frac{(1-t)f_b(t) - f_b(0)}{t}.$

$$2.13.3. \quad f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [2(n-5) + 7^{n+2}] t^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n-5) t^n + 49 \sum_{n=0}^{\infty} 7^n t^n = 2 \left[ t \sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} - 5 \sum_{n=0}^{\infty} t^n \right] + 49 \sum_{n=0}^{\infty} (7t)^n = 2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} t^n - 10 \sum_{n=0}^{\infty} t^n + 49 \sum_{n=0}^{\infty} (7t)^n = 2t \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1-t} \right) - \frac{10}{1-t} + \frac{49}{1-7t} = \frac{2t}{(1-t)^2} - \frac{10}{1-t} + \frac{49}{1-7t}.$$

$$2.13.4. \quad \text{a)} \quad f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{(n+1)!} [(n+1)t^n] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{(n+1)!} \frac{d}{dt} t^{n+1} = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1} + b_0 - b_0 \right] = \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{i!} t^i - \frac{db_0}{dt} = \frac{d}{dt} f_b(t);$$

$$\text{б)} \quad f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{r=0}^n C_n^r \frac{b_{n-r} \cdot g_r}{r!} \right] t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n \frac{b_{n-r}}{(n-r)!} t^{n-r} \cdot \frac{g_r}{r!} t^r = \frac{b_0}{0!} t^0 + \frac{g_0}{0!} t^0 + \left( \frac{b_1}{1!} t^1 \cdot \frac{g_0}{0!} t^0 + \frac{b_0}{0!} t^0 \cdot \frac{g_1}{1!} t^1 \right) + \left( \frac{b_2}{2!} t^2 \cdot \frac{g_0}{0!} t^0 + \frac{b_1}{1!} t^1 \cdot \frac{g_1}{1!} t^1 + \frac{b_0}{0!} t^0 \cdot \frac{g_2}{2!} t^2 \right) + \dots + \left( \frac{b_k}{k!} t^k \cdot \frac{g_0}{0!} t^0 + \frac{b_{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} \cdot \frac{g_1}{1!} t^1 + \dots + \frac{b_0}{0!} t^0 \cdot \frac{g_k}{k!} t^k \right) + \dots = \frac{b_0}{0!} t^0 \left( \frac{g_0}{0!} t^0 + \frac{g_1}{1!} t^1 + \dots + \frac{g_k}{k!} t^k + \dots \right) + \frac{b_1}{1!} t^1 \left( \frac{g_0}{0!} t^0 + \frac{g_1}{1!} t^1 + \dots + \frac{g_k}{k!} t^k + \dots \right) + \dots + \frac{b_n}{n!} t^n \left( \frac{g_0}{0!} t^0 + \frac{g_1}{1!} t^1 + \dots + \frac{g_k}{k!} t^k + \dots \right) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k}{k!} t^k = f_b(t) \cdot f_g(t).$$

2.13.5. а) Пусть  $f_a(t) = (1+t)^n$ ,  $f_b(t) = (1+t)^m$ . Тогда  $f_c(t) = (1+t)^{n+m} = f_a(t) \cdot f_b(t)$  по свойству свертки производящих функций и  $c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \dots + a_r b_0$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots$ . Выясним вид этих коэффициентов  $f_a(t) \cdot f_b(t) = (C_n^0 + C_n^1 t + \dots + C_n^n t^n) (C_m^0 + C_m^1 t + \dots + C_m^m t^m) = C_n^0 C_m^0 + (C_n^0 C_m^1 + C_n^1 C_m^0) t + \dots + (C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0) t^k + \dots$ . В то же время  $(1+t)^{n+m} = C_{n+m}^0 + C_{n+m}^1 t + \dots + C_{n+m}^k t^k + \dots + C_{n+m}^{n+m} t^{n+m}$ . Коэффициенты при одинаковых степенях  $t$  должны совпадать, например, при  $t^k$ :  $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0 = \sum_{r=0}^k C_n^r C_m^{k-r} = C_{n+m}^k$ ;

б) решение аналогично пункту а. Рассмотрим свертку производящих функций и коэффициенты при  $t^k$  в левой и правой части равенства.  $(1-t)^{-1-n} \cdot (1-t)^{-1-m} = (1-t)^{-2-n-m}$ ,  $(1-t)^{-1-n} = \frac{1}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k}^k t^k$ ,  $(1-t)^{-1-m} = \frac{1}{(1-t)^{m+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{m+k}^k t^k$ ,  $(1-t)^{-2-n-m} = \frac{1}{(1-t)^{n+m+2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+m+k+1}^k t^k$ .

Тогда  $C_{n+m+k+1}^k = C_n^n C_{m+k}^m + C_{n+1}^n C_{m+k-1}^m + \dots + C_{n+k-1}^n C_{m+1}^m + \dots + C_{n+k}^n C_m^m = \sum_{r=0}^k C_{n+r}^n C_{n+k-r}^m$ .

$$2.13.6. \quad \text{a)} \quad f_a(t) = (q + pt)^m = \sum_{n=0}^m C_m^n q^{m-n} (pt)^n = \sum_{n=0}^m C_m^n q^{m-n} p^n t^n, \quad a_n = C_m^n q^{m-n} p^n;$$

$$\text{б)} \quad f_a(t) = \left( 1 + \frac{t^2}{2} \right)^{-m} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{t^2}{2} \right)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{m+n-1}^n \left( \frac{t^2}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{2} \right)^n C_{m+n-1}^n t^{2n},$$

$$a_n = \left( -\frac{1}{2} \right)^n C_{m+n-1}^n;$$



$$\begin{aligned} \text{в)} \quad f_a(t) &= \operatorname{arctg} t. \text{ Так как } \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} t \text{ и } \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \text{ то } \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \int_0^t \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^t x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}; \\ \text{г)} \quad f_a(t) &= \int_0^t e^{-x^2} dx = \int_0^t \left( 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \right) dx = t - \frac{t^3}{1! \cdot 3} + \frac{t^5}{2! \cdot 5} - \dots \\ &\dots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} t^{2n+1}, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}. \end{aligned}$$

**2.13.7. а)** Определим четыре числовые последовательности  $a_k = 1$ ,  $b_k = ka_k$ ,  $c_k = kb_k$ ,  $d_k = \sum_{i=0}^k i^2$  и их производящие функции  $f_a(t)$ ,  $f_b(t)$ ,  $f_c(t)$  и  $f_d(t)$ . Эти последовательности порождают суммируемые числа, например,  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, \dots$ ;  $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3, \dots$ ;  $c_1 = 1, c_2 = 4, c_3 = 9, \dots$ ;  $d_1 = 1, d_2 = 5, d_3 = 14, \dots$ .

Искомой суммой будет число  $d_k$  – общий член последовательности  $\{d_k\}$ . Для его определения необходимо найти  $f_d(t)$ .  $f_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot t^k = \frac{1}{1-t}$ ,  $f'_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k t^k)' = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k-1}$ ,  $tf'_a(t) = t \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = f_b(t)$ . Аналогично  $f_c(t) = tf'_b(t) = t(tf'_a(t))' = tf'_a(t) + t^2 f''_a(t)$ . Кроме того,  $d_k = \sum_{i=0}^k i^2$ . В этом случае см. пример 2.13.2 б. Тогда  $f_d(t) = \frac{t(1+t)}{(1-t)^4}$ .

Разложим полученное выражение в ряд. Так как  $\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k t^k$  (формула (2.7.5)), то

$$\frac{1}{(1-t)^4} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^k t^k, \text{ следовательно, } f_d(t) = t \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^k t^k + t^2 \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^k t^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^k t^{k+2}$$

и

$$\begin{aligned} d_k &= C_{k+2}^{k-1} + C_{k+1}^{k-2} = \langle C_n^k = C_n^{n-k} \rangle = C_{k+2}^3 + C_{k+1}^3 = \frac{(k+2)!}{(k-1)!3!} + \frac{(k+1)!}{(k-2)!3!} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k-1)k(k+1)}{6} = \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}; \end{aligned}$$

б) аналогично предыдущему пункту имеем:  $a_k = 1$ ,  $b_k = ka_k$ ,  $c_k = kb_k$ ,  $d_k = kc_k$ ,  $w_k = \sum_{i=0}^k i^3$ .

Номер	$a_k$	$b_k$	$c_k$	$d_k$	$w_k$
1	1	1	1	1	1
2	1	2	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	9
3	1	3	$9 = 3^2$	$27 = 3^3$	36
...	...	...	...	...	...
$k$	1	$k$	$k^2$	$k^3$	$\sum_{i=0}^k i^3$

$$\begin{aligned}
f_a(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot t^k = \frac{1}{1-t}, \quad f_b(t) = t f'_a(t), \quad f_c(t) = t f'_a(t) + t^2 f''_a(t), \quad f_d(t) = t f'_c(t) = t(t f'_a(t) + t^2 f''_a(t)) = \\
&= t(f'_a(t) + t f''_a(t) + 2 t f'_a(t) + t^2 f''_a(t)) = t f'_a(t) + 3 t^2 f''_a(t) + t^3 f'''_a(t), \quad f_w(t) = \frac{f_d(t)}{1-t} = \frac{t}{1-t} \left[ \frac{1}{(1-t)^2} + \right. \\
&+ \frac{6t}{(1-t)^3} + \left. \frac{6t^2}{(1-t)^4} \right] = \frac{1+4t+t^2}{(1-t)^5}, \quad \frac{1}{(1-t)^5} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^4 t^k. \quad \text{Тогда} \quad f_w(t) = t \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^4 t^k + \\
&+ 4 t^2 \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^4 t^k + t^3 \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^4 t^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^4 t^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} 4 C_{k+4}^4 t^{k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^4 t^{k+3} \quad \text{и} \quad w_k = C_{k+3}^4 + 4 C_{k+2}^4 + \\
&+ C_{k+1}^4 = \frac{(k+3)}{(k-1)4!} + \frac{4(k+2)}{(k-2)4!} + \frac{(k+1)}{(k-3)4!} = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!} + \frac{4(k-1)k(k+1)(k+2)}{4!} + \\
&+ \frac{(k-2)(k-1)k(k+1)}{4!} = \frac{k(k+1)}{4!} [(k+2)(k+3) + 4(k-1)(k+2) + (k-2)(k-1)] = \frac{k(k+1)}{4!} (6k^2 + 6k) = \\
&= \left( \frac{k(k+1)}{2} \right)^2.
\end{aligned}$$

**2.13.8.** Для решения этой задачи используется производящая функция с ограниченным числом повторений (см. подразд. 2.8). Обозначим  $a_1$  – монету в 1 коп,  $a_2$  – монету в 2 коп,  $a_3$  – 3 коп,  $a_4$  – 5 коп. Тогда  $f_a(t) = (1 + a_1 t + a_1^2 t^2)(1 + a_2 t + a_2^2 t^2)(1 + a_3 t + a_3^2 t^2) \times \dots \times (1 + a_4 t + a_4^2 t^2)$ . Если положить  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ , то  $f_a(t) = (1 + t + t^2)^4 = 1 + 4t + 10t^2 + 16t^3 + 19t^4 + 16t^5 + 10t^6 + 4t^7 + t^8$ , причем коэффициенты этого разложения равны числу способов вытащить четыре монеты разных составов с указанными ограничениями.

Можно довольно легко установить и качественный состав выборок, а тогда и проверить условие суммы быть равной 10 копейкам. Именно:

$t^0$  : существует лишь один способ -  $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$  – не вытащить ни одной монеты.

$t^1$  :  $a_1^1 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^0 a_2^1 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^0 a_2^0 a_3^1 a_4^0$ ,  $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^1$  – четыре способа вытащить по одной монете разного достоинства. Здесь не выполняется условие  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10$ .

$t^2$  :  $a_1^2 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^1 a_2^1 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^0 a_2^2 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^0 a_2^0 a_3^2 a_4^0$ ,  $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^2$ ,  $a_1^2 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^1 a_2^1 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^0 a_2^1 a_3^1 a_4^0$ ,  $a_1^0 a_2^0 a_3^1 a_4^1$ ,  $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^1$ .  $a_4^2 = 5 + 5 = 10$ . Имеется один способ размена.

$t^3$  :  $a_1^3 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^2 a_2^1 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^1 a_2^2 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^0 a_2^3 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^2 a_2^0 a_3^1 a_4^0$ ,  $a_1^1 a_2^1 a_3^2 a_4^0$ ,  $a_1^0 a_2^2 a_3^3 a_4^0$ ,  $a_1^2 a_2^0 a_3^0 a_4^1$ ,  $a_1^1 a_2^1 a_3^0 a_4^1$ ,  $a_1^0 a_2^2 a_3^0 a_4^1$ ,  $a_1^2 a_2^0 a_3^1 a_4^1$ ,  $a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1$ ,  $a_1^0 a_2^2 a_3^1 a_4^1$ ,  $a_1^0 a_2^0 a_3^2 a_4^1$ ,  $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^2$ . Итого 16 способов выборки из четырех монет по три монеты с

указанными повторениями. Из них один способ удовлетворяет условию равенства суммы 10 коп:  $a_2 a_3 a_4 = 2 + 3 + 5 = 10$ .

$t^4$  :  $a_1^4 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^3 a_2^1 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^2 a_2^2 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^1 a_2^3 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^0 a_2^4 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^3 a_2^0 a_3^1 a_4^0$ ,  $a_1^2 a_2^1 a_3^2 a_4^0$ ,  $a_1^1 a_2^2 a_3^3 a_4^0$ ,  $a_1^0 a_2^3 a_3^4 a_4^0$ ,  $a_1^3 a_2^0 a_3^0 a_4^1$ ,  $a_1^2 a_2^1 a_3^1 a_4^1$ ,  $a_1^1 a_2^2 a_3^2 a_4^1$ ,  $a_1^0 a_2^3 a_3^3 a_4^1$ ,  $a_1^3 a_2^0 a_3^1 a_4^1$ ,  $a_1^2 a_2^1 a_3^0 a_4^1$ ,  $a_1^1 a_2^2 a_3^0 a_4^1$ ,  $a_1^0 a_2^3 a_3^0 a_4^1$ ,  $a_1^3 a_2^0 a_3^0 a_4^2$ ,  $a_1^2 a_2^1 a_3^0 a_4^2$ ,  $a_1^1 a_2^2 a_3^0 a_4^2$ ,  $a_1^0 a_2^3 a_3^0 a_4^2$ . Есть три способа размены:  $a_1^2 a_3 a_4 = 1 + 1 + 3 + 5 = 10$ ,  $a_2^2 a_3^2 = 2 + 2 + 3 + 3 = 10$ ,  $a_2^2 a_1 a_4 = 2 + 2 + 1 + 5 = 10$ .

$t^5$  :  $a_1^5 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^4 a_2^1 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^3 a_2^2 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^2 a_2^3 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^1 a_2^4 a_3^0 a_4^0$ ,  $a_1^4 a_2^0 a_3^1 a_4^0$ ,  $a_1^3 a_2^1 a_3^2 a_4^0$ ,  $a_1^2 a_2^2 a_3^3 a_4^0$ ,  $a_1^1 a_2^3 a_3^4 a_4^0$ ,  $a_1^4 a_2^0 a_3^0 a_4^1$ ,  $a_1^3 a_2^1 a_3^1 a_4^1$ ,  $a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^1$ ,  $a_1^1 a_2^3 a_3^3 a_4^1$ ,  $a_1^4 a_2^0 a_3^1 a_4^1$ ,  $a_1^3 a_2^1 a_3^0 a_4^1$ ,  $a_1^2 a_2^2 a_3^0 a_4^1$ ,  $a_1^1 a_2^3 a_3^0 a_4^1$ ,  $a_1^4 a_2^0 a_3^0 a_4^2$ ,  $a_1^3 a_2^1 a_3^0 a_4^2$ ,  $a_1^2 a_2^2 a_3^0 a_4^2$ ,  $a_1^1 a_2^3 a_3^0 a_4^2$ . Из 16 способов размена подходит лишь один:  $a_1^2 a_3^2 a_2 = 1 + 1 + 3 + 3 + 2 = 10$ .

$$t^6 : a_1^2 a_2^2 a_3 a_4, a_1^2 a_2 a_3^2 a_4, a_1^2 a_2 a_3 a_4^2, a_1 a_2^2 a_3^2 a_4, a_1 a_2^2 a_3 a_4^2, a_1 a_2 a_3^2 a_4^2, a_1^3 a_2 a_3 a_4, a_1 a_2^3 a_3 a_4, \\ 1+1+2+2+3+5 \quad 1+1+2+3+3+5 \quad 1+1+2+3+5+5 \quad 1+2+2+3+3+5 \quad 1+2+2+3+5+5 \quad 1+2+3+3+5+5 \quad 1+1+1+2+3+5 \quad 1+2+2+2+3+5 \\ a_1 a_2 a_3^3 a_4, a_1 a_2 a_3 a_4^3. \text{ Нет требуемых способов размена.} \\ 1+2+3+3+3+5 \quad 1+2+3+5+5+5 \\ t^7 : a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4, a_1 a_2^2 a_3^2 a_4^2, a_1^2 a_2 a_3^2 a_4^2, a_1^2 a_2^2 a_3 a_4^2. \text{ Нет способов.} \\ 1+1+2+2+3+3+5 \quad 1+2+2+3+3+5+5 \quad 1+1+2+3+3+5+5 \quad 1+1+2+2+3+5+5 \\ t^8 : a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2. \text{ Нет требуемых способов.} \\ 1+1+2+2+3+3+5+5$$

Итого существует всего лишь шесть способов размена 10 копеек четырьмя указанными монетами с описанными ограничениями: 2+3+5, 1+1+3+5, 1+2+2+5, 2+2+3+3, 1+1+2+3+3, 5+5.

**2.13.9.** Пусть  $a_{n+2}$  – требуемое число способов разбить выпуклый  $(n+2)$ -угольник на треугольники, не пересекающиеся внутри многоугольника. Пронумеруем вершины исходного многоугольника числами от 1 до  $n+2$ . При любом разбиении найдется треугольник, содержащий ребро многоугольника с вершинами  $n+1$  и  $n+2$  (рис. 2.6, а). Третья вершина этого треугольника может быть любой из остальных  $1, 2, \dots, n+1$ . Пусть это будет вершина  $k$ . Удалим треугольник с вершинами  $k, n+1, n+2$ ; получим два многоугольника с числом вершин  $k+1$  (вершины  $1, 2, \dots, k, n+2$ ) и  $n-k+2$  (вершины  $k+1, k+2, \dots, n+1$ ).

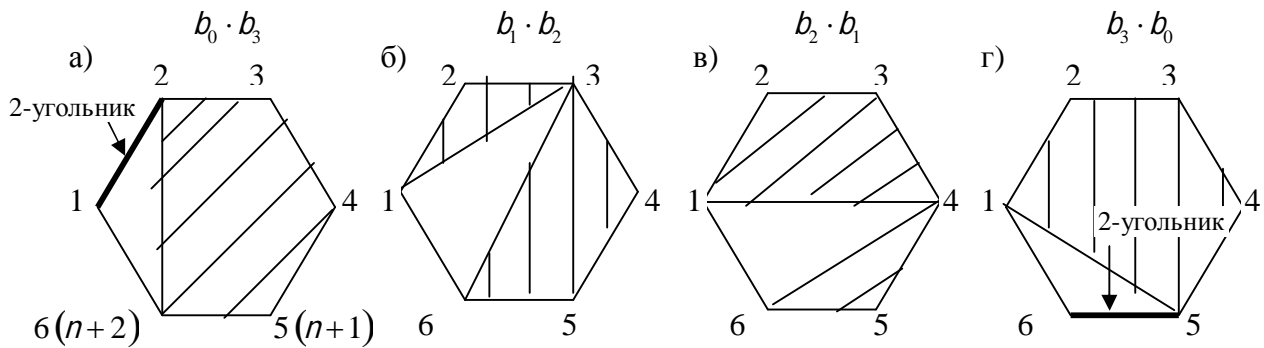


Рис. 2.6

Выбирая  $k$ -й вершину с первой по  $(n+2)$ -ю, будем иметь аналогичную картину разбиения (см. рис. 2.6), при этом по правилам произведения и суммы получим  $a_{n+2} = a_2 \cdot a_{n+1} + a_3 \cdot a_n + a_4 \cdot a_{n-1} + \dots + a_n \cdot a_3 + a_{n+1} \cdot a_2$ , где, очевидно,  $a_2 = 1$  (одна сторона многоугольника – «двуугольник»). Пусть  $b_n = a_{n+2}$ , тогда  $b_n = \sum_{k=1}^n b_{k-1} \cdot b_{n-k}$ ,  $b_0 = 1$  (рис. 2.6, а, б, в, г). Правая часть последней формулы является сверткой двух одинаковых последовательностей  $\{b_n\}$  и  $\{b_n\}$ .

Получим теперь производящую функцию из рекуррентного соотношения  $b_n = \sum_{k=1}^n b_{k-1} \cdot b_{n-k}$  и найдем явное выражение для  $b_n$ . Для этого умножим рекуррентное соотношение на  $t^n$  и просуммируем его по  $n$  от единицы до бесконечности. Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n b_{k-1} \cdot b_{n-k} = \sum_{n=1}^{\infty} b_0 \cdot b_{n-1} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_1 \cdot b_{n-2} t^n + \dots$ . Но  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n = f_b(t) - b_0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_0 \cdot b_{n-1} t^n = b_0 t \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} t^{n-1} = b_0 t f_b(t)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 \cdot b_{n-2} t^n = b_1 t^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-2} t^{n-2} = b_1 t^2 f_b(t), \dots$ . Отсюда  $f_b(t) - b_0 = t f_b(t) + t^2 f_b(t) + \dots = t f_b(t) (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots) = t f_b(t) f_b(t)$ , т. е.  $t f_b^2(t) - f_b(t) + 1 = 0$ . Тогда  $f_b(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t}$ . Поскольку

результат  $f_b(t)$  должен быть представлен рядом по неотрицательным степеням  $t$ , то решение  $f_b(t) = \frac{1 + \sqrt{1-4t}}{2t}$  является посторонним. Это видно из рассмотрения выражения  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k$  и  $(1-4t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(-4t) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-4t)^2 + \dots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(-4t)^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{1/2}^k (4t)^k$ ,  $C_{1/2}^k = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$ . При подсчете  $C_{1/2}^k$  можно убедиться, что полученное выражение имеет знак минус во всех членах, начиная со второго, первый член ряда равен единице. Чтобы  $f_b(t)$  была положительна, необходимо выбрать знак минус в выражении

$$f_b(t) = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t}, \text{ т.е. } f_b(t) = \frac{1}{2t} \left[ 1 - (1-4t)^{1/2} \right]. \text{ Тогда } 1 - (1-4t)^{1/2} = \frac{1}{2}(4t) - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(4t)^2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} C_{1/2}^k (4t)^k. \text{ Отсюда } f_b(t) = (2t)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} C_{1/2}^k 4 \cdot 4^{k-1} t^k = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} C_{1/2}^k (4t)^{k-1} = \left\langle \begin{matrix} k-1=n, \\ k=1, n=0, \\ k=n+1 \end{matrix} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{1/2}^{n+1} 2^{2n+1} t^n = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{1!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2!} t^2 + \dots + \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k(k+1)\dots(2k-1)2k}{k!} t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} C_{2k}^k t^k. \text{ Итак, окончательно } b_n = a_{n+2} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n, \text{ где } a_{n+2} - \text{число способов разбиения } (n+2)\text{-угольника на треугольники непересекающимися внутри него диагоналями.}$$

**2.13.10.** а) Здесь  $a_{n+3} = 3a_{n+2} - a_{n+1} + 3a_n$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 8$ . Характеристический многочлен имеет вид  $L(t) = 1 - 3t + t^2 - 3t^3$ . Тогда  $C(t) = f_a(t) \cdot L(t) = (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots) \times (-3t + t^2 - 3t^3) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots - 3a_0 t - 3a_1 t^2 - \dots - 3a_{n-1} t^n - \dots + a_0 t^2 + a_1 t^3 + \dots + a_{n-2} t^n + \dots - 3a_0 t^3 - 3a_1 t^4 - \dots - 3a_{n-3} t^n + \dots = a_0 + (a_1 - 3a_0)t + (a_2 - 3a_1 + a_0)t^2 = 1 + (3-3)t + (8-9+1)t^2 = 1$ . Отсюда  $f_a(t) = \frac{1}{1-3t+t^2-3t^3} = \frac{1}{(1-3t)(1+t^2)} = \frac{A}{1-3t} + \frac{Bt+C}{1+t^2}$ . Найдем  $A, B$  и  $C$  методом неопределенных коэффициентов.

$$1 \equiv A + At^2 + Bt + C - 3Bt^2 - 3Ct \Rightarrow \begin{cases} A + C = 1, \\ A - 3B = 0, \\ B - 3C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{9}{10}, B = \frac{3}{10}, C = \frac{1}{10}. \quad \text{Тогда}$$

$$f_a(t) = \frac{1}{10} \left( \frac{9}{1-3t} + \frac{3t+1}{1+t^2} \right). \text{ Так как } \frac{1}{1-3t} = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k t^k \text{ и } \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}, \text{ то } f_a(t) = \frac{1}{10} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} 9 \cdot 3^k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot (-1)^k t^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \right]. \text{ Тогда } \begin{cases} a_{2k} = \frac{1}{10} [9 \cdot 3^{2k} + (-1)^k], \\ a_{2k+1} = \frac{1}{10} [3 \cdot 3^{2k+1} + 3(-1)^k] \end{cases}$$

$$\text{б) } a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 3.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^3} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+3} t^{n+3} + \frac{1}{t^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} t^{n+2} - \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n &= 0, & \frac{1}{t^3} \sum_{k=3}^{\infty} a_k t^k + \frac{1}{t^2} \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^k - \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n &= 0, & \frac{1}{t^3} (f_a(t) - a_0 - a_1 t - a_2 t^2) + \frac{1}{t^2} (f_a(t) - a_0 - a_1 t) - \frac{1}{t} (f_a(t) - a_0) - f_a(t) = 0, \\ f_a(t) - 1 - 2t - 3t^2 + t(f_a(t) - 1 - 2t) - t^2(f_a(t) - 1) - t^3 f_a(t) &= 0, & f_a(t)(1 + t - t^2 - t^3) - 1 - 2t - 3t^2 - t - \\ - 2t^2 + t^2 &= 0, & f_a(t) = \frac{1 + 3t + 4t^2}{1 + t - t^2 - t^3} = \frac{1 + 3t + 4t^2}{(1-t)(1+t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1+t)^2}. \end{aligned}$$

$$1 + 3t + 4t^2 \equiv A(1 + 2t + t^2) + B(1 - t^2) + C(1 - t) \Rightarrow \begin{cases} 1 = A + B + C, \\ 3 = 2A - C, \Rightarrow A = 2, B = -2, C = 1. \\ 4 = A - B \end{cases}$$

$$f_a(t) = \frac{2}{1-t} - \frac{2}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} t^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} [(-1)^k (k-1) + 2] t^k,$$

$$a_n = (-1)^n (n-1) + 2;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } a_{n+2} \pm 9a_n &= 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0. \quad a_{n+2} = \mp 9a_n, \quad L(t) = 1 \pm 9t^2, \quad C(t) = f_a(t) \cdot L(t) = \\ &= (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots)(\pm 9t^2) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots \pm 9a_0 t^2 \pm 9a_1 t^3 \pm \dots \pm 9a_{n-2} t^n + \dots = a_0 + \\ + a_1 t &= 1, \quad f_a(t) = C(t)/L(t) = \frac{1}{1 \pm 9t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mp 9)^k t^k, \quad a_n = (\mp 9)^n. \end{aligned}$$

$$\text{2.13.11. а) } a_{n+1} = a_n + n, \quad a_0 = 1. \quad \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + t \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} t^n,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} (f_a(t) - a_0) &= f_a(t) + t \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1-t} \right) = f_a(t) + \frac{2t}{(1-t)^2}, \quad f_a(t) - 1 - t f_a(t) = \frac{2t}{(1-t)^2}, \quad f_a(t) = \frac{3t^2 - 2t + 1}{(1-t)^3} = \\ &= \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{(1-t)^3}, \quad 3t^2 - 2t + 1 \equiv A(1-t)^2 + B(1-t) + C \Rightarrow \begin{cases} 3 = A, & A = 3, \\ -2 = -2A - B, \Rightarrow B = -4, & \text{Итак,} \\ 1 = A + B + C & C = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$f_a(t) = \frac{3}{1-t} - \frac{4}{(1-t)^2} + \frac{2}{(1-t)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} 3t^k - \sum_{k=0}^{\infty} 4C_{k+1}^k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2C_{k+2}^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (3 - 4C_{k+1}^k + 2C_{k+2}^k) t^k,$$

$$a_n = 3 - 4C_{n+1}^1 + 2C_{n+2}^2;$$

$$\text{б) } a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4} a_n + 2^{-n}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} t^{n+2} &= \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} t^{n+1} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} t^n, & \frac{1}{t^2} (f_a(t) - a_0 - a_1 t) &= \frac{1}{t} (f_a(t) - a_0) - \frac{1}{4} f_a(t) + \\ + \frac{1}{1-t/2}, & 4 \left( f_a(t) - 1 - \frac{3}{2} t \right) &= 4t(f_a(t) - 1) - t^2 f_a(t) + \frac{2t^2}{2-t}, & f_a(t)(4-4t+t^2) &= \frac{2t^2}{2-t} + 2t + 4, \end{aligned}$$

$$f_a(t) = \frac{8}{(2-t)(t^2-4t+4)} = \frac{-8}{(t-2)^3} = \frac{1}{(1-t/2)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+2}^k \left( \frac{t}{2} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} C_{k+2}^k t^k, \quad a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}.$$

**2.13.12.** а)  $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ .  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ,  $L(t) = 1 - t - t^2$ ,  $t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . По фор-

муле (2.10.6)  $a_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n = C_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ ;

б)  $a_{n+2} = a_{n+1} - 1/4 a_n$ . Перепишем уравнение в виде (2.10.1):

$a_{n+2} - a_{n+1} + 1/4 a_n = 0$ . По формуле (2.10.2)  $P(t) = t^2 - t + 1/4$ . Корни многочлена  $P(t)$  равны  $t_{1,2} = 1/2$ . Тогда по формуле (2.10.8) для кратных корней получим

$$a_n = \sum_{i=1}^1 (C_{i,1} + C_{i,2} n) t_i^n = (C_1 + C_2 n) \left( \frac{1}{2} \right)^n = \frac{C_1}{2^n} + \frac{C_2 n}{2^n}.$$

**2.13.13.** Так как  $a_n = C_m^n$ , то  $f_a(t) = (1+t)^m = \sum_{n=0}^m C_m^n t^n$ . Тогда  $f_b(t) = (1+t)^{-m}$ , ибо

$$f_a(t) \cdot f_b(t) = (1+t)^m \cdot (1+t)^{-m} = 1. \quad \text{Отсюда} \quad b_n = C_{-m}^n, \quad \text{где} \quad C_{-m}^n = (-1)^n C_{m+n-1}^n = (-1)^n \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{n!}, \quad \text{так как} \quad (1+t)^{-m} = \frac{1}{(1+t)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{m+n-1}^n t^n.$$

**2.13.14.** Для решения этой задачи введем дополнительные определения. Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – произвольные множества, а  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  – множество весов элементов этих множеств. Вес – это либо число, либо переменная, которая может принимать любое числовое значение.

Рассмотрим декартово произведение множеств  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{p = (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = \overline{1, n}\}$ . Пусть  $n_i$  – число элементов множества  $A_i$  с весом  $\omega$ , тогда  $\Omega(A_i) = \sum_{\omega \in \Omega} n_i \omega$  – сумма весов элементов множества  $A_i$ . Вес элементов множества  $A$  бу-

дет равен  $\omega(a) = \omega(a_1, a_2, \dots, a_n) = \omega(a_1) \cdot \omega(a_2) \cdot \dots \cdot \omega(a_n) = \prod_{i=1}^n \omega(a_i)$ ,  $\omega \in \Omega$ . Справедливо равенство, называемое обобщенным правилом произведения,  $\Omega(A) = \Omega(A_1) \cdot \Omega(A_2) \cdot \dots \cdot \Omega(A_n)$ .

Обратимся теперь к нашей задаче. Введем веса элементам данных множеств следующим образом:  $\omega(2x) = t^{2x}$ ,  $\omega(3y) = t^{3y}$ ,  $\omega(5z) = t^{5z}$  и  $\omega(a) = \omega(2x, 3y, 5z) = t^{2x+3y+5z=n} = t^{2x} \cdot t^{3y} \cdot t^{5z} = \omega(2x) \cdot \omega(3y) \cdot \omega(5z)$ . Видно, что степень веса  $t^{2x+3y+5z=n}$  любого элемента  $a = (2x, 3y, 5z) \in A$  дает одно из решений исходного уравнения  $2x + 3y + 5z = n$ , причем по обобщенному правилу произведения  $\Omega(A) = \Omega(A_1) \cdot \Omega(A_2) \cdot \Omega(A_3)$ .

Найдем производящую функцию для  $\Omega(A)$ :  $f_{\Omega(A)}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots = (t^{2 \cdot 0} + t^{2 \cdot 1} + t^{2 \cdot 2} + \dots + t^{2 \cdot x} + \dots) (t^{3 \cdot 0} + t^{3 \cdot 1} + t^{3 \cdot 2} + \dots + t^{3 \cdot y} + \dots) (t^{5 \cdot 0} + t^{5 \cdot 1} + t^{5 \cdot 2} + \dots + t^{5 \cdot z} + \dots) = (1 + t^2 + t^4 + \dots) (1 + t^3 + t^6 + \dots) (1 + t^5 + t^{10} + \dots) = \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1-t^3} \cdot \frac{1}{1-t^5}.$

**2.13.15.** а) Найдем связь между  $a_n$  и  $b_n$ . Для этого выпишем выражения для  $a_{n+1}, a_n$  и

$$\begin{aligned} b_{n+1}: a_{n+1} &= \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+j+1}^{2j} = C_{n+1}^0 + C_{n+2}^2 + C_{n+3}^4 + \dots + C_{2n}^{2n-2} + C_{2n+1}^{2n}, \\ a_n &= \sum_{j=0}^n C_{n+j}^{2j} = C_n^0 + C_{n+1}^2 + C_{n+2}^4 + \dots + C_{2n-1}^{2n-2} + C_{2n}^{2n}, \\ b_{n+1} &= \sum_{j=0}^n C_{n+j+1}^{2j+1} = C_{n+1}^1 + C_{n+2}^3 + C_{n+3}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n+1}^{2n+1}. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1$  и

$$C_{2n}^{2n} = C_{2n+1}^{2n+1} = 1, \quad \text{кроме того} \quad C_{n+k}^{2k} + C_{n+k}^{2k-1} = \frac{(n+k)!}{2k!(n-k)!} + \frac{(n+k)!}{(2k-1)!(n-k+1)!} = \\ = \frac{(n+k)!(n-k+1) + (n+k)!2k}{2k!(n-k+1)!} = \frac{(n+k)!(n-k+1)}{2k!(n-k+1)!} = C_{n+k+1}^{2k}. \text{ Таким образом, } a_{n+1} = a_n + b_{n+1}.$$

Аналогично расписав выражения для  $b_{n+1}, b_n$  и  $a_n$ , получим

$$b_{n+1} = \sum_{j=0}^n C_{n+j+1}^{2j+1} = C_{n+1}^1 + C_{n+2}^3 + C_{n+3}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n+1}^{2n+1}, \\ b_n = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n+j}^{2j+1} = C_n^1 + C_{n+1}^3 + C_{n+2}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n-1}^{2n-1}, \\ a_n = \sum_{j=0}^n C_{n+j}^{2j} = C_n^0 + C_{n+1}^2 + C_{n+2}^4 + \dots + C_{2n-1}^{2n-2} + C_{2n}^{2n}, \quad C_{2n}^{2n} = C_{2n+1}^{2n+1} = 1, \quad C_{n+k}^{2k+1} + C_{n+k}^{2k} = \\ = \frac{(n+k)!}{(2k+1)!(n-k-1)!} + \frac{(n+k)!}{(2k)!(n-k)!} = \frac{(n+k)!(n-k) + (n+k)!(2k+1)}{(2k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+k)!(n-k+2k+1)}{(2k+1)!(n-k)!} = \\ = C_{n+k+1}^{2k+1}, \text{ т. е. } b_{n+1} = b_n + a_n. \text{ Определим начальные члены последовательностей } \{a_n\} \text{ и } \{b_n\}. \\ a_0 = \sum_{j=0}^0 C_j^{2j} = C_0^0 = 1, \text{ положим } b_0 = 0, \text{ так как указанная сумма не существует при } n=0.$$

$$\text{Итак, } \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_{n+1}, \\ b_{n+1} = b_n + a_n, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 0. \end{cases}$$

б) Умножим теперь каждое из полученных соотношений на  $t^{n+1}$  и просуммируем по  $n$  от нуля до бесконечности.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} t^{n+1} = t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} t^{n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} t^{n+1} = t \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n;$

$$f_a(t) - a_0 = t f_a(t) + f_b(t), \quad f_b(t) - b_0 = t f_b(t) + t f_a(t) \text{ или } \begin{cases} f_a(t) - 1 = t f_a(t) + f_b(t), \\ f_b(t) = t f_b(t) + t f_a(t) \end{cases}$$

Наконец, найдем  $f_a(t)$  и  $f_b(t)$  из полученной системы  $f_a(t) = \frac{1-t}{t} f_b(t),$

$$\frac{1-t}{t} f_b(t) - 1 = (1-t) f_b(t) + f_b(t), \quad f_b(t) = \frac{t}{t^2 - 3t + 1} \text{ и } f_a(t) = \frac{1-t}{t^2 - 3t + 1}.$$

## Ответы и решения задач практического занятия № 5

**2.18.1.** Обозначим  $p_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) свойство набора, состоящее в том, что шар с номером  $i$  в этом наборе не содержится. Тогда число наборов, полученных в результате  $d$  извлечений и обладающих свойствами  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$  ( $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq m$ ) по правилу произведения, равно  $N_{i_1, i_2, \dots, i_k} = (C_{m-k}^s)^d$ , а  $N(r) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq m} N_{i_1, i_2, \dots, i_k} = C_m^k \cdot (C_{m-k}^s)^d$ .

По формуле включений и исключений (2.15.2)  $N_m(r) = \sum_{k=r}^m (-1)^{k-r} C_k^r \cdot N(r) =$

$$= \sum_{k=r}^m (-1)^{k-r} C_k^r C_m^k (C_{m-k}^s)^d = \left\langle \begin{matrix} t = k - r, k = t + r, \\ k = r, t = 0, \\ k = m, t = m - r \end{matrix} \right\rangle = \sum_{t=0}^{m-r} (-1)^t C_m^{t+r} C_{t+r}^r (C_{m-r-t}^s)^d. \quad \text{Но } C_m^{t+r} \cdot C_{t+r}^r =$$

$$= C_m^r \cdot C_{m-r}^t, \text{ так как } \frac{m!}{(t+r)!(m-t-r)!} \cdot \frac{(t+r)!}{r!t!} = \frac{m!}{r!(m-r)!} \cdot \frac{(m-r)!}{t!(m-r-t)!} = \frac{m!}{r!t!(m-r-t)!}. \text{ Тогда}$$



$$\sum_{t=0}^{m-r} (-1)^t C_m^{t+r} C_{t+r}^r (C_{m-r-t}^s)^j = \sum_{t=0}^{m-r} (-1)^t C_m^r C_{m-r}^t (C_{m-r-t}^s)^j = C_m^r \sum_{t=0}^{m-r} (-1)^t C_{m-r}^t (C_{m-r-t}^s)^j, \quad 0 \leq r \leq m.$$

Кроме того, в последней сумме верхнее значение индекса суммирования  $t$  можно уменьшить до  $m-r-s$ , так как если  $t_{\max} = m-r$ , то  $C_{m-r-t}^s = C_0^s = 0$ . Итак, б)  $N_m(r) = C_m^r \sum_{t=0}^{m-r-s} (-1)^t C_{m-r}^t (C_{m-r-t}^s)^j$  – число наборов, в которых встречается ровно  $r$  шаров. Если  $r=0$ , то а)  $N_m(0) = C_m^r \sum_{t=0}^{m-s} (-1)^t C_m^t (C_{m-t}^s)^j$  – число наборов, в которых встречаются все шары.

**2.18.2.** Пусть  $p_i, i=1,2,3$  – свойство индекса суммирования быть кратным 2, 3 и 5.

Тогда по формуле (2.14.3) 
$$S = \sum_{k'} \left(\frac{1}{2}\right)^{k'} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{3k}} + \frac{1}{2^{5k}} \right) +$$
  

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{2 \cdot 3k}} + \frac{1}{2^{2 \cdot 5k}} + \frac{1}{2^{3 \cdot 5k}} \right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2 \cdot 3 \cdot 5k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2^k} - \left( \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{3k}} + \frac{1}{2^{5k}} \right) - \left( \frac{1}{2^{6k}} + \frac{1}{2^{10k}} + \frac{1}{2^{15k}} \right) - \frac{1}{2^{30k}} \right] =$$
  

$$= 2 - \frac{1}{1-2^{-2}} - \frac{1}{1-2^{-3}} - \frac{1}{1-2^{-5}} + \frac{1}{1-2^{-6}} + \frac{1}{1-2^{-10}} + \frac{1}{1-2^{-15}} - \frac{1}{1-2^{-30}}.$$

**2.18.3.** Пусть свойство  $p_i, i=1,4$ ,  $i$ -я шляпа вернулась к своему владельцу. Поскольку порядок, т.е. принадлежность шляп, здесь существенен, то речь идет о перестановках из четырех предметов. Очевидно, общее число перестановок равно  $4! = 24$ .

Для подсчета точного числа людей, получивших назад свои шляпы, воспользуемся формулами (2.15.2) и (2.15.3):  $N_k(0) = \sum_{m=0}^k (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq k} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})$ . В нашем случае

$$N_4(0) = \sum_{m=0}^4 (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq i_4 \leq 4} N(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{i_4}) = N(0) - N(1) + N(2) - N(3) + N(4),$$
 где  $N(0) = 24$  – общее количество вариантов возвращения шляп;  $N(1)$  – число случаев, когда одна шляпа возвратится своему владельцу. Очевидно,  $N(1) = C_4^1 \cdot 3!$  (одна из четырех шляп фиксируется, остальные возвращаются наугад). Аналогично,  $N(2) = C_4^2 \cdot 2!$ ,  $N(3) = C_4^3 \cdot 1!$ ,  $N(4) = C_4^4 \cdot 0!$ .

Тогда  $N_4(0) = 24 - 4 \cdot 3! + 6 \cdot 2! - 4 \cdot 1! + 1 \cdot 0! = 9$ , т. е.  $p_0 = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ . По формуле (2.15.2)

$$N_k(r) = \sum_{i=r}^k (-1)^{i-r} C_i^r N(i) = \sum_{i=r}^4 (-1)^{i-r} C_i^r N(i), \quad N_4(1) = \sum_{i=1}^4 (-1)^{i-1} C_i^1 N(i) = 1 \cdot N(1) - C_2^1 \cdot N(2) +$$
  

$$+ C_3^1 \cdot N(3) - C_4^1 \cdot N(4) = 1 \cdot 4 \cdot 3! - 2 \cdot 6 \cdot 2! + 3 \cdot 4 \cdot 1! - 4 \cdot 1 \cdot 0! = 8, \quad p_1 = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}.$$
 Аналогично,

$$N_4(2) = C_2^2 N(2) - C_3^2 N(3) + C_4^2 N(4) = 1 \cdot 6 \cdot 2! - 3 \cdot 4 \cdot 1! + 6 \cdot 1 \cdot 0! = 6, \quad p_2 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$
  

$$N_4(3) = C_3^3 N(3) - C_4^3 N(4) = 1 \cdot 4 \cdot 1! - 4 \cdot 1 \cdot 0! = 0, \quad p_3 = 0.$$
 Это очевидный результат, так как если трое из четырех получают точно свои шляпы назад, то четвертый волей-неволей также получит свою, а не чужую шляпу. Наконец,  $N_4(4) = C_4^4 N(4) = 1 \cdot 1 \cdot 0! = 1, \quad p_4 = \frac{1}{24}.$

**2.18.4.** Воспользуемся здесь, как и в предыдущей задаче, формулами (2.15.2) и (2.15.3), причем свойство  $p_i, i=1,2,3$  – это свойство читать  $i$ -й журнал.

а) Тогда 
$$N_3(0) = \sum_{m=0}^3 (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq 3} N(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}) = N(0) - N(1) + N(2) - N(3),$$
 где  $N(0)$  – об-

щее количество студентов равно 1 или 100%,  $N(1)$  – число студентов, читающих хотя бы

один журнал,  $N(1) = 0.6 + 0.5 + 0.5 = 1.6$ , аналогично,  $N(2) = 0.3 + 0.2 + 0.4 = 0.9$  и  $N(3) = 0.1$ . Отсюда  $N_3(0) = 1 - 1.6 + 0.9 - 0.1 = 0.2$ , т.е. 20% студентов не читают ни один журнал;

б) применим теперь формулу  $N_k(r) = \sum_{i=r}^k (-1)^{i-r} C_i^r N(i)$  и найдем  $N_3(2)$  – количество студентов, читающих ровно два журнала.  $N_3(2) = \sum_{i=2}^3 (-1)^{i-2} C_i^2 N(i) = C_2^2 N(2) - C_3^2 N(3) = 1 \cdot 0.9 - 3 \cdot 0.1 = 0.6$ , т.е. 60%.

Итак, ровно два журнала читает 60% студентов. Чтобы узнать сколько студентов читают не менее двух журналов (не менее двух – это два или три), достаточно к найденному числу прибавить количество студентов, читающих все три журнала. Получим 70%.

Для подсчета числа студентов, читающих не менее двух журналов, можно также воспользоваться формулой  $\tilde{N}_k(r) = \sum_{i=r}^k (-1)^{i-r} C_{i-1}^{r-1} N(i) = \sum_{i=2}^3 (-1)^{i-2} C_{i-1}^1 N(i) = C_1^1 N(2) - C_2^1 N(3) = 1 \cdot 0.9 - 2 \cdot 0.1 = 0.7$ , т.е. 70%.

В этой задаче так мало исходных данных (т.е. мало свойств  $p_i$ ), что ее можно решить графически на диаграмме Эйлера – Венна (рис. 2.7).

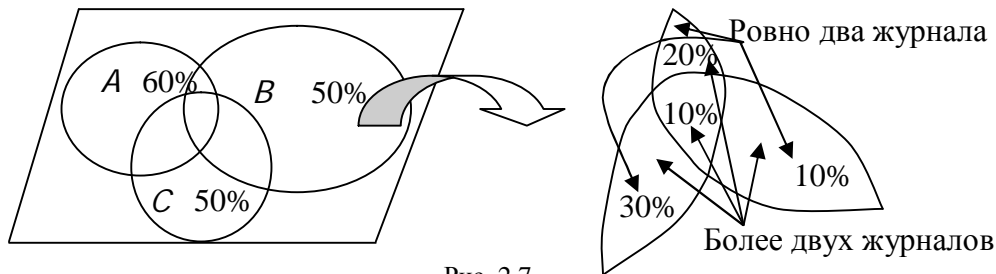


Рис. 2.7

**2.18.5.** Задача решается по формуле (2.16.1). Введем три свойства  $p_i = \frac{1000}{q_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$

– свойства числа 1000 делиться на числа 3, 5 и 7. Тогда  $N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3}) = n - \sum_{k=1}^3 n(p_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} n(p_i, p_j) - n(p_1, p_2, p_3) = n - \sum_{i=1}^3 \frac{n}{q_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{n}{q_i q_j} - \frac{n}{q_1 q_2 q_3}$ , где  $n = 1000$ ,  $q_1 = 3$ ,  $q_2 = 5$  и  $q_3 = 7$ . Окончательно,  $N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3}) = 1000 - \left\{ \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor \right\} + \left\{ \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor \right\} + \left\lfloor \frac{1000}{105} \right\rfloor = 1000 - (333 + 200 + 142) + (66 + 47 + 28) - 9 = 457$ .

**2.18.6.** Задача решается аналогично предыдущей задаче 2.18.5.

$N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3}) = N(0) = n - \sum_{k=1}^3 \frac{n}{q_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{n}{q_i q_j} - \frac{n}{q_1 q_2 q_3} = 30m - \left\{ \left\lfloor \frac{30m}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30m}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30m}{15} \right\rfloor \right\} + \left\{ \left\lfloor \frac{30m}{60} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30m}{90} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30m}{150} \right\rfloor \right\} - \left\lfloor \frac{30m}{900} \right\rfloor = 30m - (5m + 3m + 2m) + (m + m + m) - m = 30m - 10m + 3m - m = 22m$  **2.18.7.**

Введем два свойства  $p_M$  – ученик посещает математический кружок и  $p_\Phi$  – посещает физический кружок. По условию задачи дано  $m = 35$ ,  $n(p_M) = 20$ ,  $n(p_\Phi) = 11$ ,  $n(\overline{p_M}, \overline{p_\Phi}) = 10$ . Тогда так как  $n(\overline{p_M}, \overline{p_\Phi}) = n - [n(p_M) + n(p_\Phi)] + n(p_M, p_\Phi)$ , то  $n(p_M, p_\Phi) = n(\overline{p_M}, \overline{p_\Phi}) - n + n(p_M) + n(p_\Phi) = 10 - 35 + 20 + 11 = 6$  и  $n(p_M, \overline{p_\Phi}) = n(p_M) - n(p_M, p_\Phi) = 20 - 6 = 14$  (по формуле 2.14.6).

**2.18.8.** Пусть  $p_i$  – свойство  $i$ -го мужчины и  $i$ -й женщины чередоваться за круглым столом и не быть супругами. Тогда по формуле (2.14.3)

$$n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_k}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq k} n(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}).$$

Подсчитаем теперь числа  $\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq k} n(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})$ .

Число всевозможных расположений  $n$  пар за круглым столом равно  $n$  (рис. 2.8, движение на полкруга). Так как супруги могут меняться местами, то число расположений  $n$  пар за круглым столом равно  $2n$ .

Число способов занять за столом  $k$  фиксированных мест супружескими парами равно  $C_n^k$ , из-за возможности меняться местами это число надо удвоить. Таким образом,  $2n \cdot 2 \cdot C_n^k = 2nC_n^k$  – число способов выбрать  $k$  фиксированных мест  $k$  супружескими парами.

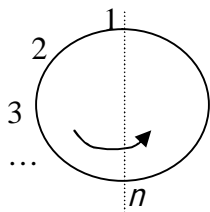


Рис. 2.8

Не занятые места образуют беспорядки, тогда  $[(n-k)!]$  – число способов рассадить остальных и по правилу произведения  $4nC_n^k[(n-k)!]$  число всех способов рассадить  $k$  супружеских пар среди  $n$  мест. Остальные  $2n-k-1$  (одно место отнимается из-за того, что стол круглый) мест можно занять по схеме примера 1 из подразд. 2.16, т.е.  $(2n-k-1)^{k-1}$  способами.

Тогда  $\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq k} n(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}) = 4nC_n^k[(n-k)!](2n-k-1)^{k-1}$  и  $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_k}) = n(0) =$

$$= 4n \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k [(n-k)!] (2n-k-1)^{k-1}.$$

**2.18.9.** Введем три признака  $p_R$  – том содержит роман «Рудин»,  $p_D$  – том содержит роман «Дворянское гнездо» и  $p_O$  – том содержит роман «Отцы и дети». По условию задачи  $n(p_R) = 6$ ,  $n(p_D) = 3$ ,  $n(p_O) = 4$ ,  $n(p_R, p_D) = 5$  и  $n(p_D, p_O) = 7$ . Необходимо найти  $n(p_R, p_D, p_O)$ . По формуле (2.14.3) имеем  $n(p_R, p_D, p_O) = n - [n(p_R) + n(p_D) + n(p_O)] + [n(p_R, p_D) + n(p_R, p_O) + n(p_D, p_O)] - n(\overline{p_R}, \overline{p_D}, \overline{p_O}) = 25 - (6 + 3 + 4) + (5 + 0 + 7) - 0 = 24$  способа.

**2.18.10.** По формуле (2.16.2) получаем

а)  $100 = 2^2 \cdot 5^2$ ,  $\varphi(100) = 100 \prod_{i=1}^2 \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) = 100 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40$ ;

б)  $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ ,  $\varphi(100) = 100 \prod_{i=1}^2 \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) = 100 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40$ ;

в)  $p = p^1$ , если  $p$  – простое число. Тогда  $\varphi(p) = p \prod_{i=1}^1 \left(1 - \frac{1}{p}\right) = p \left(\frac{p-1}{p}\right) = p-1$ .

### 3. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

#### Ответы и решения задач практического занятия № 6

**3.9.1.** Это первая теорема теории графов принадлежит Леонарду Эйлеру и опубликована им в 1736 году. В современной теории графов этот результат называется леммой о рукопожатиях: сумма степеней всех вершин графа – четное число, равное удвоенному числу ребер.

Действительно, каждое ребро инцидентно двум вершинам, поэтому вносит двойку в сумму в правой части. Одновременно одно и то же ребро участвует в образовании степеней обеих инцидентных вершин, таким образом, в сумму в левой части тоже вносит двойку.

Из этой леммы вытекает интересное следствие: в любом графе число вершин нечетной степени четно.

### 3.9.2.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P = & \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, & Q = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R = & \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}; & \text{б) } P = \begin{matrix} & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q = & \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, & R = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } P = & \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, & R = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},
 \end{aligned}$$

$$R = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

### 3.9.3.

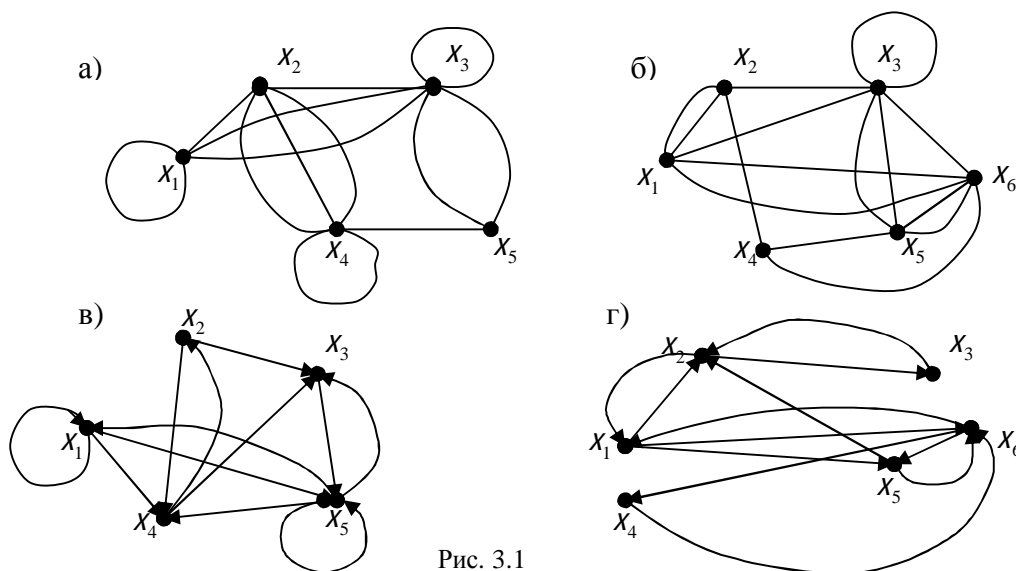


Рис. 3.1

**3.9.4.** а) Объединением графов  $G_1$  и  $G_2$  называется граф  $G = (S_1 \cup S_2, U_1 \cup U_2)$ . Поэтому множество вершин будет насчитывать четыре вершины. К множеству дуг  $S_1$  добавляются две дуги  $(x_2, x_1)$  и  $(x_2, x_3)$ . Тогда итоговый граф  $G$  будет иметь вид, показанный слева на рис. 3.2,а).

Множеством вершин произведения графов  $G_1 \times G_2$  будет декартово произведение множеств  $S_1 \times S_2$ . Таким образом, всего вершин будет двенадцать. Количество ребер определяется по правилу:  $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in G = G_1 \times G_2$ , если  $x_1 = x_2$  и  $(y_1, y_2) \in G_2$  или  $y_1 = y_2$  и  $(x_1, x_2) \in G_1$  (справа на рис. 3.2,а).

Пункты б и в решаются аналогично.

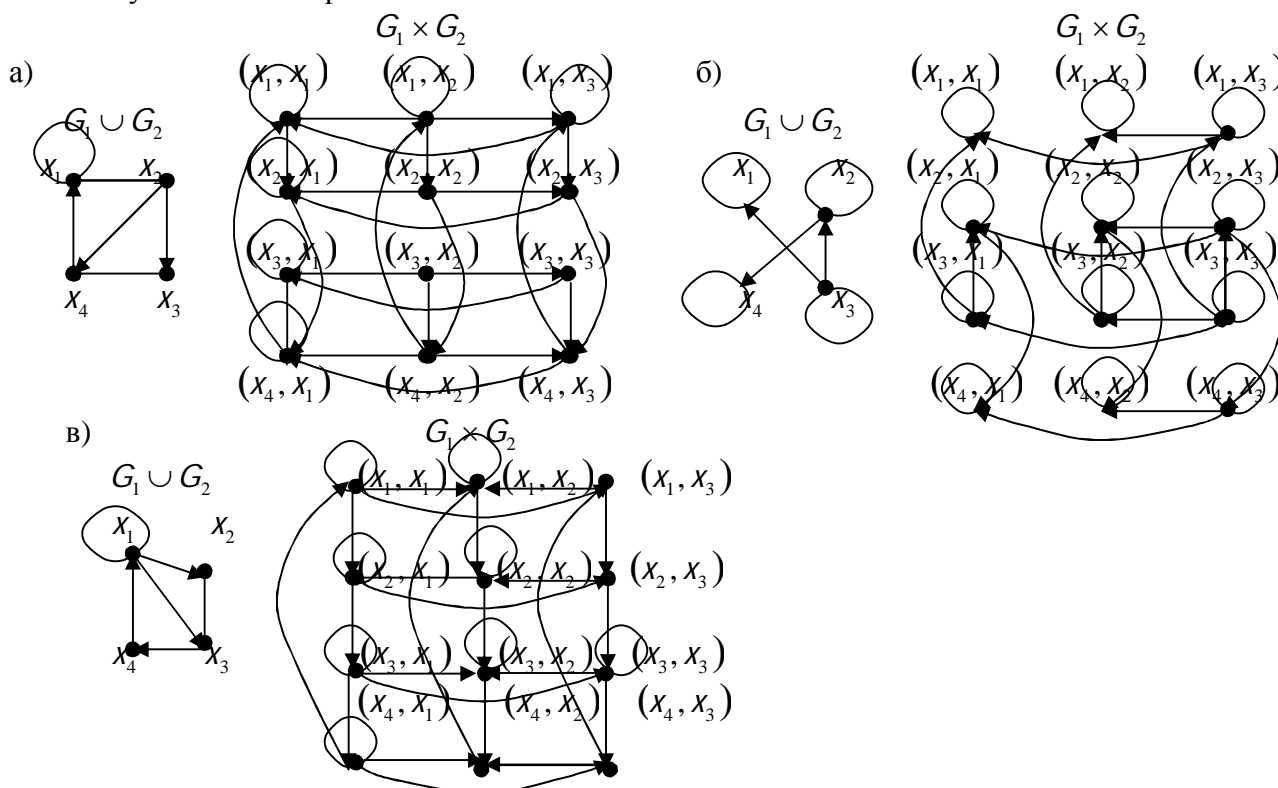


Рис. 3.2

$$\begin{aligned}
\mathbf{3.9.5.} \quad \text{а)} \quad P &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
P^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = E + P + P^2 + \dots + P^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \\
C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = C * L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Видно, что граф содержит три сильные компоненты связности. Первая сильная компонента состоит из вершины  $x_1$ , вторая –  $x_2$  и третья из трех вершин  $\{x_3, x_4, x_5\}$ . По матрице  $P^3$  находим, что из вершины  $x_1$  выходят три пути длиной три дуги. Первый из  $x_1$  в  $x_4$  – это путь  $x_1 - x_2 - x_5 - x_4$ , два других – пути из  $x_1$  в  $x_5$ :  $x_1 - x_2 - x_3 - x_5$  и  $x_1 - x_4 - x_3 - x_5$ ;

$$\begin{aligned}
\text{б)} \quad P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
B = E + P + P^2 + P^3 + P^4 &= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
F = C * L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Сильных компонент связности три: вершины  $\{x_1\}$ ,  $\{x_2, x_3\}$  и  $\{x_4\}$ .

Маршрутов длиной три ребра, исходящих из вершины  $x_1$ , четыре:  $x_1 - x_1 - x_1 - x_1$ ,  $x_1 - x_1 - x_1 - x_2$ ,  $x_1 - x_2 - x_3 - x_2$  и  $x_1 - x_1 - x_2 - x_3$ ;

$$\begin{aligned}
 \text{в) } P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad P^4 = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 10 & 10 & 13 \\ 8 & 10 & 15 & 15 \\ 9 & 13 & 15 & 18 \end{pmatrix}, \\
 B = E + P + P^2 + P^3 + P^4 &= \begin{pmatrix} 14 & 10 & 14 & 13 \\ 10 & 16 & 17 & 21 \\ 14 & 17 & 23 & 24 \\ 13 & 21 & 24 & 30 \end{pmatrix}, \quad C = L = F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Граф представляет}
 \end{aligned}$$

собой одну связную компоненту  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ . Маршрутов длины три ребра, исходящих из вершины  $x_1$ , двенадцать. Это маршруты:  $x_1 - x_1 - x_1 - x_1$ ,  $x_1 - x_1 - x_3 - x_1$ ,  $x_1 - x_3 - x_1 - x_1$ ,  $x_1 - x_1 - x_3 - x_2$ ,  $x_1 - x_3 - x_4 - x_2$ ,  $x_1 - x_1 - x_1 - x_3$ ,  $x_1 - x_3 - x_2 - x_3$ ,  $x_1 - x_3 - x_4 - x_3$ ,  $x_1 - x_3 - x_1 - x_3$ ,  $x_1 - x_3 - x_2 - x_4$ ,  $x_1 - x_1 - x_3 - x_4$ ,  $x_1 - x_3 - x_4 - x_4$ .

**3.9.6. а)**  $e(x_1) = e(x_2) = e(x_3) = e(x_4) = e(x_5) = e(x_6) = e(x_7) = e(x_8) = 7$ ,  $d(G) = r(G) = 7$ .

Все вершины периферийные и центральные. Диаметральные цепи много, например,

$$\begin{aligned}
 &x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_8 - x_7 - x_6 - x_5, \quad x_2 - x_3 - x_4 - x_8 - x_7 - x_6 - x_5 - x_1, \\
 &x_3 - x_4 - x_8 - x_7 - x_6 - x_5 - x_1 - x_2, \quad x_4 - x_8 - x_7 - x_6 - x_5 - x_1 - x_2 - x_3, \\
 &x_8 - x_7 - x_6 - x_5 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \quad x_7 - x_6 - x_5 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_8, \\
 &x_6 - x_5 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_8 - x_7, \quad x_5 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_8 - x_7 - x_6, \\
 &x_1 - x_2 - x_7 - x_8 - x_4 - x_3 - x_6 - x_5 \text{ и так далее;}
 \end{aligned}$$

б)  $e(x_1) = e(x_8) = 7$ ,  $e(x_2) = e(x_5) = e(x_6) = e(x_7) = 6$ ,  $e(x_3) = e(x_4) = 5$ ,  $d(G) = 7$ ,  $r(G) = 5$ . Периферийные вершины  $x_1$  и  $x_2$ , центральные вершины  $x_3$  и  $x_4$  составляют центр графа. Диаметральные цепи:  $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8$ ,  $x_1 - x_2 - x_3 - x_6 - x_4 - x_5 - x_7 - x_8$ ,  $x_1 - x_2 - x_3 - x_5 - x_4 - x_6 - x_7 - x_8$ ;

в)  $e(x_1) = e(x_3) = e(x_4) = e(x_8) = e(x_{10}) = e(x_{12}) = 8$ ,  $e(x_6) = e(x_7) = e(x_9) = 7$ ,  $e(x_2) = 6$ ,  $e(x_{11}) = 5$ ,  $e(x_5) = 4$ .  $d(G) = 8$ ,  $r(G) = 4$ . Периферийные вершины  $x_1, x_3, x_4, x_8, x_{10}, x_{12}$ , центральная вершина  $x_5$ , центр графа состоит из одной вершины. Диаметральные цепи много, например,  $x_1 - x_{12} - x_2 - x_{11} - x_5 - x_6 - x_7 - x_9 - x_8$  и так далее.

**3.9.7. а)** Упорядочим сначала вершины графа графическим и матричным способом так, как это изложено в подразд. 3.6. Получим изоморфный граф, изображенный на рис. 3.3.

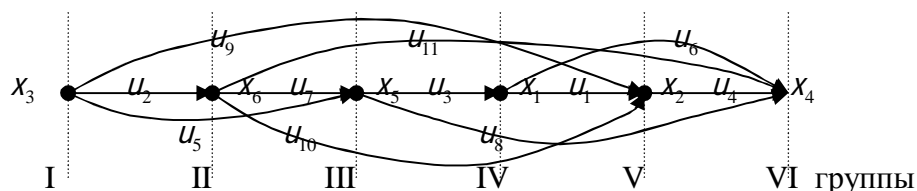


Рис. 3.3



$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$v_1$	1	3	0	4	2	1
$v_2$	1	2	-	4	1	0
$v_3$	1	1	-	3	0	-
$v_4$	0	1	-	2	-	-
$v_5$	-	0	-	1	-	-
$v_6$	-	-	-	0	-	-
группы	4	5	1	6	3	2

Дуги упорядочиваются аналогично вершинам. В результате получим граф, приведенный на рис. 3.4.

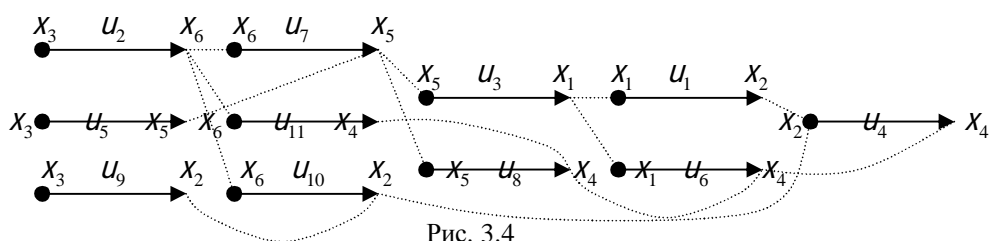


Рис. 3.4

Пункты б и в выполняются аналогично.

б)

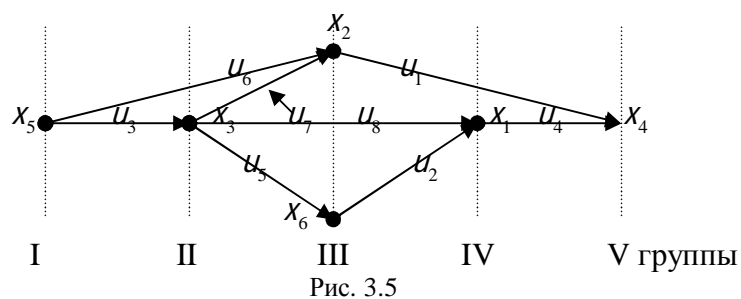


Рис. 3.5

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$v_1$	2	2	1	2	0	1
$v_2$	2	1	0	2	-	1
$v_3$	1	0	-	2	-	0
$v_4$	0	-	-	1	-	-
$v_5$	-	-	-	0	-	-
группы	4	3	2	5	1	3

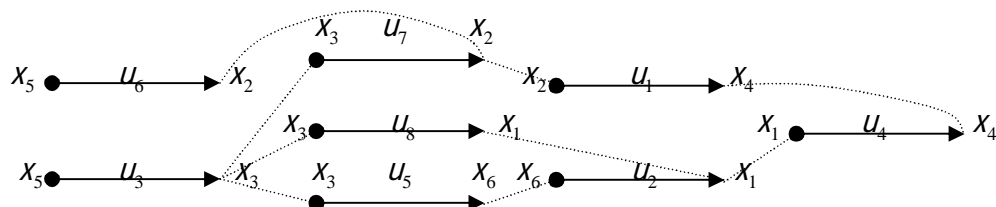
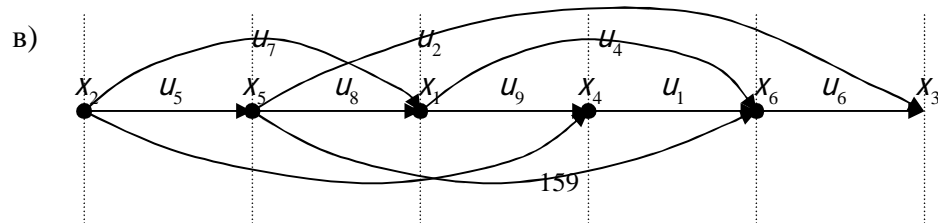


Рис. 3.6



							$u_{10}$							
I		II		III		IV		V		VI группы				
							Рис. 3.7							
								$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$P =$	$x_1$	0	0	0	1	0	1	$v_1$	2	0	2	2	1	3
	$x_2$	1	0	0	1	1	0	$v_2$	1	-	2	1	0	3
	$x_3$	0	0	0	0	0	0	$v_3$	0	-	1	1	-	2
	$x_4$	0	0	0	0	0	1	$v_4$	-	-	1	0	-	1
	$x_5$	1	0	1	0	0	1	$v_5$	-	-	1	-	-	0
	$x_6$	0	0	1	0	0	0	$v_6$	-	-	0	-	-	-
								группы	3	1	6	4	2	5

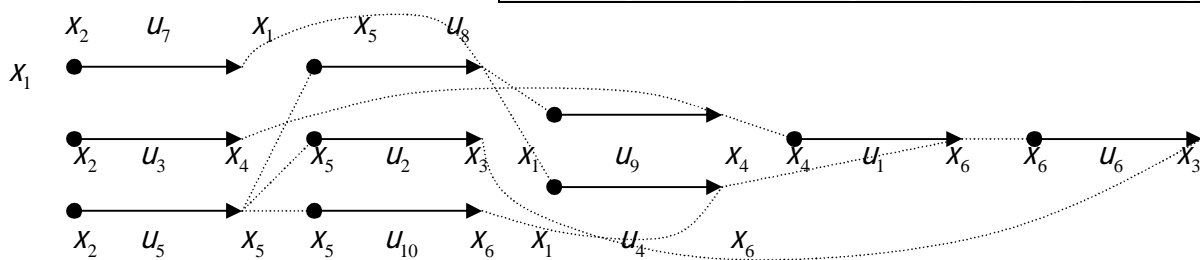


Рис. 3.8

**3.9.8.** Воспользуемся теоремой 3.4 и проанализируем матрицы смежности вершин изображенных на рис. 3.27 и 3.28 графов. Матрицы трех первых графов равны

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что  $P_2 = P_3$ . Если одновременно переставить в  $P_2$  вторую и пятую строки и второй и пятый столбец, то получится матрица  $P_1$ . Следовательно, по теореме 3.4 все три графа на рис. 3.27 изоморфны.

### 3.9.9.

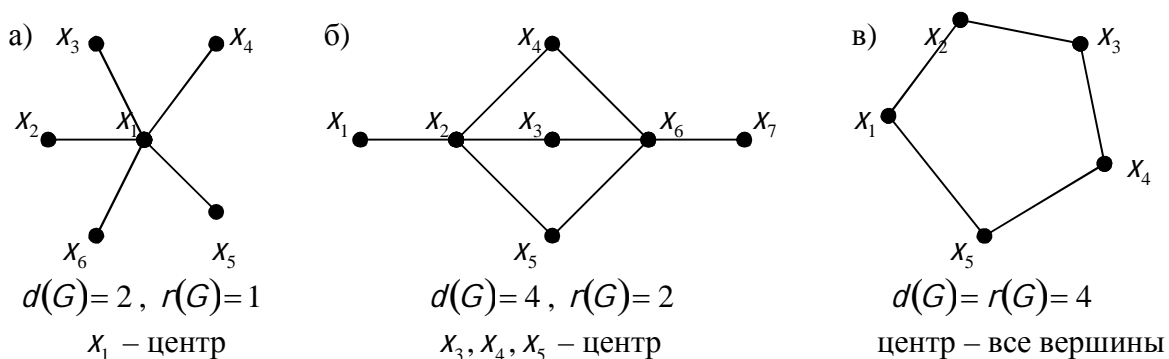


Рис. 3.9

**3.9.10.** Рассмотрим  $n$ -вершинный полный граф. Число его ребер равно  $C_n^2$ , а степень любой вершины  $n-1$ . Удалим одно ребро этого графа. Так как ребро инцидентно двум вершинам, то появятся две вершины с одинаковыми степенями, равными  $n-2$ . Удалим еще одно ребро. Если это ребро не инцидентно ни одной из двух вершин, появившихся после удаления первого ребра, то образуются четыре вершины с одинаковыми степенями; если же второе ребро инцидентно какой-либо из двух вершин, у которых удалено первое ребро, то останутся, по крайней мере, две вершины с одинаковыми степенями  $n-2$ .

После удаления всех ребер получим граф с  $n$  изолированными вершинами, т.е. степень каждой вершины будет равна нулю. Этот процесс для графа  $K_4$  изображен на рис. 3.10.

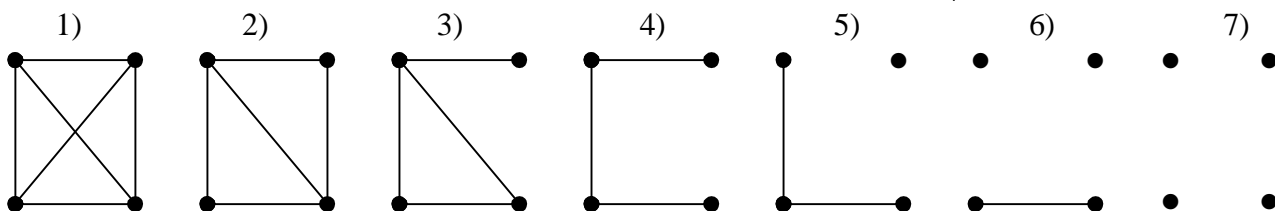


Рис. 3.10

### Ответы задач практического занятия № 7

- 3.14.1.** 1)  $d_{\min} = 16$ ,  $?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_6)$ ,  
 $d_{\max} = 35$ ,  $?_{\max} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6)$ ;  
 2)  $d_{\min} = 29$ ,  $?_{\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_6)$ ,  
 $d_{\max} = 60$ ,  $?_{\max} = (x_1, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_6)$ ;  
 3)  $d_{\min} = 24$ ,  $?_{\min} = (x_1, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6)$ ,  
 $d_{\max} = 53$ ,  $?_{\max} = (x_1, x_5) - (x_5, x_2) - (x_3, x_3) - (x_3, x_6)$ ;  
 4)  $d_{\min} = 18$ ,  $?_{\min} = (x_1, x_4) - (x_4, x_6)$ ,  
 $d_{\max} = 40$ ,  $?_{\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6)$ ;  
 5)  $d_{\min} = 30$ ,  $?_{\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_7)$ ,  
 $d_{\max} = 61$ ,  $?_{\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_7)$ ;  
 6)  $d_{\min} = 19$ ,  $?_{1\min} = (x_1, x_4) - (x_4, x_6)$ ,  $?_{2\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_6)$ ,  
 $d_{\max} = 23$ ,  $?_{\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_2) - (x_2, x_6)$ ;  
 7)  $d_{\min} = 20$ ,  $?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_6)$ ,  
 $d_{\max} = 32$ ,  $?_{1\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_6)$ ,  
 $?_{2\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_2) - (x_2, x_6)$ ;  
 8)  $d_{\min} = 32$ ,  $?_{\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_6)$ ,  
 $d_{\max} = 70$ ,  $?_{\max} = (x_1, x_5) - (x_5, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_6)$ ;  
 9)  $d_{\min} = 28$ ,  $?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6)$ ,  
 $d_{\max} = 48$ ,  $?_{\max} = (x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6)$ ;  
 10)  $d_{\min} = 28$ ,  $?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_7)$ ,  
 $d_{\max} = 52$ ,  $?_{\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_7)$ ;  
 11)  $d_{\min} = 8$ ,  $?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_6)$ ,  
 $d_{\max} = 21$ ,  $?_{1\max} = (x_1, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_4) - (x_4, x_6)$ ,  
 $?_{2\max} = (x_1, x_5) - (x_5, x_4) - (x_4, x_6)$ ;  
 12)  $d_{\min} = 22$ ,  $?_{\min} = (x_1, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6)$ ,

$$\begin{aligned}
d_{\max} &= 44, \quad ?_{\max} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6); \\
13) \quad d_{\min} &= 18, \quad ?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_6), \\
d_{\max} &= 34, \quad ?_{\max} = (x_1, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_6); \\
14) \quad d_{\min} &= 9, \quad ?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_6), \\
d_{\max} &= 34, \quad ?_{\max} = (x_1, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_6); \\
15) \quad d_{\min} &= 21, \quad ?_{\min} = (x_1, x_6) - (x_6, x_7), \\
d_{\max} &= 34, \quad ?_{\max} = (x_1, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_6); \\
16) \quad d_{\min} &= 20, \quad ?_{\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_6), \\
d_{\max} &= 33, \quad ?_{\max} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6); \\
17) \quad d_{\min} &= 17, \quad ?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_6), \\
d_{\max} &= 48, \quad ?_{\max} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6); \\
18) \quad d_{\min} &= 33, \quad ?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_6), \\
d_{\max} &= 58, \quad ?_{\max} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_4) - (x_4, x_6); \\
19) \quad d_{\min} &= 23, \quad ?_{\min} = (x_1, x_4) - (x_4, x_6), \\
d_{\max} &= 52, \quad ?_{\max} = (x_1, x_4) - (x_4, x_3) - (x_3, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_6); \\
20) \quad d_{\min} &= 17, \quad ?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_7), \\
d_{\max} &= 36, \quad ?_{\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_7); \\
21) \quad d_{\min} &= 11, \quad ?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_6), \\
d_{\max} &= 23, \quad ?_{\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_2) - (x_2, x_6); \\
22) \quad d_{\min} &= 17, \quad ?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_6), \\
d_{\max} &= 26, \quad ?_{\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_6); \\
23) \quad d_{\min} &= 23, \quad ?_{\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_6), \\
d_{\max} &= 42, \quad ?_{\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_4) - (x_4, x_6); \\
24) \quad d_{\min} &= 29, \quad ?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_6), \\
d_{\max} &= 56, \quad ?_{\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_4) - (x_4, x_6); \\
25) \quad d_{\min} &= 15, \quad ?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_7), \\
d_{\max} &= 30, \quad ?_{\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_2) - (x_3, x_5) - (x_5, x_4) - (x_4, x_7); \\
26) \quad d_{\min} &= 16, \quad ?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_6), \\
d_{\max} &= 41, \quad ?_{\max} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6); \\
27) \quad d_{\min} &= 19, \quad ?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_6), \\
d_{\max} &= 35, \quad ?_{\max} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6); \\
28) \quad d_{\min} &= 13, \quad ?_{\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_6), \\
d_{\max} &= 30, \quad ?_{1 \max} = (x_1, x_5) - (x_5, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_6), \\
&\quad ?_{2 \max} = (x_1, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_6); \\
29) \quad d_{\min} &= 12, \quad ?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6), \\
d_{\max} &= 23, \quad ?_{\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6); \\
30) \quad d_{\min} &= 15, \quad ?_{\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_7), \\
d_{\max} &= 34, \quad ?_{\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_4) - (x_4, x_6) - (x_6, x_7).
\end{aligned}$$

- 3.14.2.** 1)  $d_{\min} = 11, ?_{\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_7);$   
 2)  $d_{\min} = 5, ?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_7);$   
 3)  $d_{\min} = 11, ?_{\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_2) - (x_2, x_6) - (x_6, x_4) - (x_4, x_7);$   
 4)  $d_{\min} = 6, ?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_3) - (x_3, x_6) - (x_6, x_7);$   
 5)  $d_{\min} = 6, ?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_4) - (x_4, x_6);$   
 6)  $d_{\min} = 1, ?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_7);$   
 7)  $d_{\min} = 6, ?_{\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_4) - (x_4, x_7);$   
 8)  $d_{\min} = 7, ?_{\min} = (x_1, x_4) - (x_4, x_6) - (x_6, x_7);$   
 9)  $d_{\min} = 6, ?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_6) - (x_6, x_7);$   
 10)  $d_{\min} = 8, ?_{\min} = (x_1, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6);$   
 11)  $d_{\min} = 3, ?_{\min} = (x_1, x_4) - (x_4, x_6) - (x_6, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_7);$   
 12)  $d_{\min} = 2, ?_{\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_7);$   
 13)  $d_{\min} = -8, ?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_7);$   
 14)  $d_{\min} = 10, ?_{\min} = (x_1, x_4) - (x_4, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_7);$   
 15)  $d_{\min} = 9, ?_{\min} = (x_1, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6);$   
 16)  $d_{\min} = -3, ?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_6) - (x_6, x_7);$   
 17)  $d_{\min} = 2, ?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_7);$   
 18)  $d_{\min} = 8, ?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_4) - (x_4, x_7);$   
 19)  $d_{\min} = 12, ?_{\min} = (x_1, x_4) - (x_4, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_6) - (x_6, x_7);$   
 20)  $d_{\min} = 10, ?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6);$   
 21)  $d_{\min} = -7, ?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_4) - (x_4, x_7);$   
 22)  $d_{\min} = 22, ?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_4) - (x_4, x_7);$   
 23)  $d_{\min} = 7, ?_{\min} = (x_1, x_4) - (x_4, x_6) - (x_6, x_7);$   
 24)  $d_{\min} = 15, ?_{1\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_6) - (x_6, x_7),$   
 $?_{2\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_7);$   
 25)  $d_{\min} = 17, ?_{\min} = (x_1, x_4) - (x_4, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_6);$   
 26)  $d_{\min} = 3, ?_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_4) - (x_4, x_7);$   
 27)  $d_{\min} = 9, ?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_7);$   
 28)  $d_{\min} = 10, ?_{1\min} = (x_1, x_6) - (x_6, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_6) - (x_6, x_7),$   
 $?_{2\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_6) - (x_6, x_7);$   
 29)  $d_{\min} = 8, ?_{\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_7);$   
 30)  $d_{\min} = 9, ?_{\min} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_4) - (x_4, x_6).$

**Ответы и решения задач практического занятия № 8**

- 3.19.1.** 1)  $G'_1 = \{(x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_6), (x_4, x_7), (x_6, x_7)\}, \omega(G'_1) = 14;$   
 $G'_2 = \{(x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_6), (x_6, x_7)\}, \omega(G'_2) = 14;$   
 2)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_2, x_7), (x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_4, x_5)\}, \omega(G') = 47;$   
 3)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_2, x_7), (x_3, x_7), (x_4, x_5), (x_5, x_6)\}, \omega(G') = 52;$   
 4)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_5), (x_2, x_7), (x_3, x_4), (x_4, x_6)\}, \omega(G') = 30;$   
 5)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_5), (x_4, x_7), (x_5, x_6)\}, \omega(G') = 46;$

- 6)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_1, x_6), (x_2, x_7), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_4, x_6)\}$ ,  $\omega(G') = 36$ ;
- 7)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_1, x_5), (x_1, x_6), (x_2, x_7), (x_3, x_4), (x_4, x_5)\}$ ,  $\omega(G') = 25$ ;
- 8)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_6), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 52$ ;
- 9)  $G' = \{(x_1, x_7), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_5, x_6), (x_6, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 33$ ;
- 10)  $G' = \{(x_1, x_3), (x_1, x_6), (x_2, x_4), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 33$ ;
- 11)  $G' = \{(x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_6), (x_5, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 14$ ;
- 12)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_5, x_6), (x_5, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 28$ ;
- 13)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_5), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 37$ ;
- 14)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_7), (x_5, x_6), (x_5, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 28$ ;
- 15)  $G' = \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_6, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 26$ ;
- 16)  $G' = \{(x_1, x_7), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_4, x_5), (x_4, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 25$ ;
- 17)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_5), (x_2, x_7), (x_3, x_4), (x_4, x_6)\}$ ,  $\omega(G') = 63$ ;
- 18)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_6), (x_3, x_5), (x_4, x_6), (x_4, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 28$ ;
- 19)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_5), (x_4, x_7), (x_5, x_6)\}$ ,  $\omega(G') = 30$ ;
- 20)  $G' = \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_5), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 33$ ;
- 21)  $G' = \{(x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_3, x_6), (x_3, x_7), (x_4, x_5), (x_5, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 29$ ;
- 22)  $G' = \{(x_1, x_7), (x_2, x_6), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_7), (x_5, x_6)\}$ ,  $\omega(G') = 33$ ;
- 23)  $G' = \{(x_1, x_3), (x_2, x_5), (x_2, x_7), (x_3, x_5), (x_4, x_5), (x_6, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 34$ ;
- 24)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_7), (x_5, x_6), (x_6, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 26$ ;
- 25)  $G' = \{(x_1, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_4, x_6), (x_4, x_7), (x_5, x_6)\}$ ,  $\omega(G') = 32$ ;
- 26)  $G' = \{(x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_4, x_6), (x_5, x_6), (x_6, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 25$ ;
- 27)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_5, x_6), (x_6, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 27$ ;
- 28)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_4, x_7), (x_6, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 27$ ;
- 29)  $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_6), (x_6, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 18$ ;
- 30)  $G' = \{(x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_6, x_7)\}$ ,  $\omega(G') = 28$ .

**3.19.2.** Составим матрицу Кирхгофа для полного двудольного графа  $K_{m,n}$ . Для того чтобы понять ее структуру, составим матрицы для графов  $K_{1,4}$  и  $K_{3,3}$ , изображенных на рис. 3.4 (см. подразд. 3.1).

$$B_{K_{1,4}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad B_{K_{3,3}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Таким образом, для полного двудольного графа  $K_{m,n}$  матрица Кирхгофа будет иметь вид

$$B_{K_{m,n}} = \left( \begin{array}{cccc|cccc} \overbrace{n & 0 & \dots & 0}^{m-1} & \overbrace{-1 & -1 & \dots & -1}^n \\ 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & m & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & m \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \\ \\ \\ n \end{array}.$$

Вычислим алгебраическое дополнение  $A_{1,1}$  элемента  $b_{1,1}$ . В этом случае необходимо подсчитать определитель вида

$$\Delta = \left( \begin{array}{cccc|cccc} \overbrace{n & 0 & \dots & 0}^{m-1} & \overbrace{-1 & -1 & \dots & -1}^n \\ 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & m & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & m \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m-1 \\ \\ \\ n \end{array}.$$

Для этого воспользуемся техникой оперирования с блочными матрицами. Рассмотрим определитель  $\Delta$ , разбитый на четыре блока:  $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$ , где  $A$  и  $D$  – квадратные матрицы.

Пусть  $|A| \neq 0$ . Тогда вычтем из второй строки первую, умноженную слева на  $-CA^{-1}$ , получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|. \text{ Аналогично, если } |D| \neq 0, \text{ то, вычитая в } \Delta \text{ из первой строки}$$

$$\text{вторую, умноженную слева на } -BD^{-1}, \text{ получаем } \Delta = \begin{vmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{vmatrix} = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|.$$

Применим первую из выведенных формул. Пусть

$$A = \left( \begin{array}{cccc} \overbrace{n & 0 & \dots & 0}^{m-1} \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} m-1. \text{ Тогда, очевидно, } |A| = n^{m-1}, \text{ а } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/n \end{pmatrix}. \text{ Вычис-$$

лим все необходимые члены выражения  $D - CA^{-1}B$ :



$$CA^{-1} = \left( \begin{array}{cccc} \overbrace{-1 \ -1 \ \dots \ -1}^{m-1} \\ -1 \ -1 \ \dots \ -1 \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ -1 \ -1 \ \dots \ -1 \end{array} \right)_n \cdot \left( \begin{array}{cccc} \overbrace{1/n \ 0 \ \dots \ 0}^{m-1} \\ 0 \ 1/n \ \dots \ 0 \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 1/n \end{array} \right)_{m-1} = \left( \begin{array}{cccc} \overbrace{-1/n \ -1/n \ \dots \ -1/n}^{m-1} \\ -1/n \ -1/n \ \dots \ -1/n \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ -1/n \ -1/n \ \dots \ -1/n \end{array} \right)_n,$$

$$CA^{-1}B = \left( \begin{array}{cccc} \overbrace{-1/n \ -1/n \ \dots \ -1/n}^{m-1} \\ -1/n \ -1/n \ \dots \ -1/n \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ -1/n \ -1/n \ \dots \ -1/n \end{array} \right)_n \cdot \left( \begin{array}{cccc} \overbrace{-1 \ -1 \ \dots \ -1}^n \\ -1 \ -1 \ \dots \ -1 \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ -1 \ -1 \ \dots \ -1 \end{array} \right)_{m-1} = \left( \begin{array}{cccc} \overbrace{\frac{m-1}{n} \ \frac{m-1}{n} \ \dots \ \frac{m-1}{n}}^n \\ \frac{m-1}{n} \ \frac{m-1}{n} \ \dots \ \frac{m-1}{n} \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ \frac{m-1}{n} \ \frac{m-1}{n} \ \dots \ \frac{m-1}{n} \end{array} \right)_n,$$

$$D - CA^{-1}B = \left( \begin{array}{cccc} \overbrace{m \ 0 \ \dots \ 0}^n \\ 0 \ m \ \dots \ 0 \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ 0 \ 0 \ \dots \ m \end{array} \right)_n \cdot \left( \begin{array}{cccc} \frac{m-1}{n} \ \frac{m-1}{n} \ \dots \ \frac{m-1}{n} \\ \frac{m-1}{n} \ \frac{m-1}{n} \ \dots \ \frac{m-1}{n} \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ \frac{m-1}{n} \ \frac{m-1}{n} \ \dots \ \frac{m-1}{n} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc} \frac{nm-m+1}{n} \ -\frac{m-1}{n} \ \dots \ -\frac{m-1}{n} \\ -\frac{m-1}{n} \ \frac{nm-m+1}{n} \ \dots \ -\frac{m-1}{n} \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ -\frac{m-1}{n} \ -\frac{m-1}{n} \ \dots \ \frac{nm-m+1}{n} \end{array} \right).$$

Отсюда  $|D - CA^{-1}B| = \left(\frac{m-1}{n}\right)^n \cdot \begin{vmatrix} \frac{nm-m+1}{m-1} & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \frac{nm-m+1}{m-1} & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \frac{nm-m+1}{m-1} \end{vmatrix}$ . Прибавим в этом оп-

ределителе к первому столбцу все остальные, получим

$$|D - CA^{-1}B| = \left(\frac{m-1}{n}\right)^n \cdot \begin{vmatrix} \frac{n}{m-1} & -1 & \dots & -1 \\ \frac{n}{m-1} & \frac{nm-m+1}{m-1} & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n}{m-1} & -1 & \dots & \frac{nm-m+1}{m-1} \end{vmatrix} = \left(\frac{m-1}{n}\right)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \frac{nm-m+1}{m-1} & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & \dots & \frac{nm-m+1}{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{m-1}{n}\right)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{nm}{m-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \frac{nm}{m-1} \end{vmatrix} = \left(\frac{m-1}{n}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{nm}{m-1}\right)^{n-1} = m^{n-1}.$$

Окончательно,

$\Delta = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| = n^{m-1} \cdot m^{n-1}$ . Например, для графов  $K_{1,4}$  и  $K_{3,3}$ , изображенных на рис. 3.4, количество остовов равно: для  $K_{1,4}$  всего 1, а для  $K_{3,3}$  – 81.

**3.19.3. а)** Здесь  $n=8$ ,  $m=12$ ,  $k=1$ . Цикломатическое число графа  $\nu(G)=12-8+1=5$

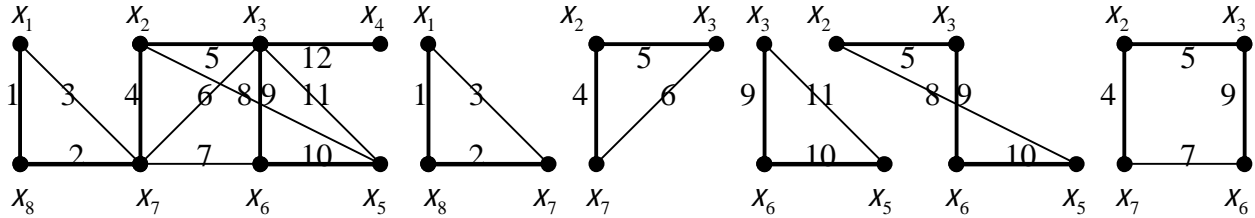


Рис. 3.11

равно числу хорд графа и мощности множества фундаментальных циклов  $|C^*| = \nu(G) = 5$ , циклическое число  $\nu^*(G) = 8 - 1 = 7$  равно числу ребер остова этого графа.

Выделим в исходном графе остов, тогда хордами будут ребра 3, 6, 7, 8 и 11 (рис. 3.11). По определению фундаментальными циклами будут следующие совокупности ребер:  $C_1: 3, 1, 2$ ;  $C_2: 6, 4, 5$ ;  $C_3: 7, 4, 5, 9$ ;  $C_4: 8, 5, 9, 10$ ;  $C_5: 11, 9, 10$ . Матрица фундаментальных циклов

имеет вид  $C^* = (C_1^* | C_2^*) =$

$$\begin{matrix} & 3 & 6 & 7 & 8 & 11 & 1 & 2 & 4 & 5 & 9 & 10 & 12 \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Вычислим теперь радиус и диаметр графа:  $e(x_1)=7$ ,  $e(x_2)=6$ ,  $e(x_3)=6$ ,  $e(x_4)=7$ ,  $e(x_5)=6$ ,  $e(x_6)=5$ ,  $e(x_7)=5$ ,  $e(x_8)=6$ ,  $d(G)=7$ ,  $r(G)=5$ .

$P(x_4)=1$ ,  $P(x_1)=P(x_8)=2$ ,  $P(x_2)=P(x_5)=P(x_6)=3$ ,  $P(x_3)=P(x_7)=5$ . Поскольку у графа имеются вершины с нечетной степенью, то по теореме 3.11 граф не является эйлеровым. Выпишем теперь все пары несмежных вершин:  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_3)$ ,  $(x_1, x_4)$ ,  $(x_1, x_6)$ ,  $(x_1, x_5)$ ,  $(x_2, x_8)$ ,  $(x_2, x_6)$ ,  $(x_2, x_4)$ ,  $(x_3, x_8)$ ,  $(x_4, x_8)$ ,  $(x_4, x_7)$ ,  $(x_4, x_6)$ ,  $(x_4, x_5)$ ,  $(x_5, x_7)$ ,  $(x_5, x_8)$ ,  $(x_6, x_8)$ . Например,  $P(x_1) + P(x_2) = 2 + 3 = 5 < n$ , следовательно, по теореме 3.14 граф не гамильтонов. Это видно и из рис. 3.11; вершина  $x_4$  имеет степень 1, т.е. простой цикл через нее провести невозможно.

б) Решение аналогично пункту а.

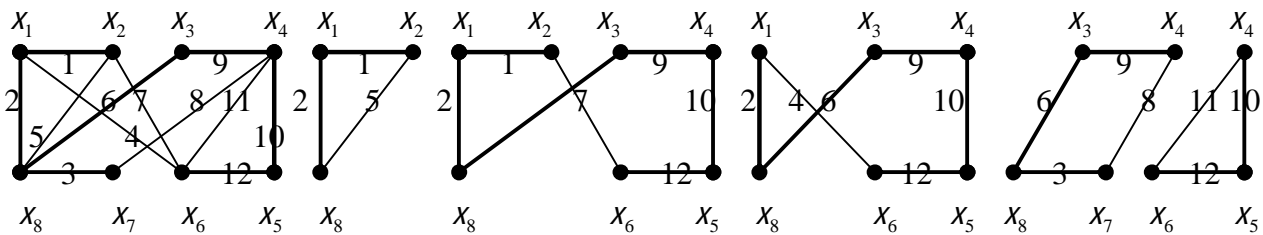


Рис. 3.12

$n=8$ ,  $m=12$ ,  $k=1$ ,  $\nu(G)=5$ ,  $|C^*|=5$ ,  $\nu^*(G)=7$ .  $C_1: 4, 2, 6, 9, 10, 12$ ;  $C_2: 5, 1, 2$ ;  $C_3: 7, 1, 2, 6$ ,

$$C^* = \begin{matrix} & 4 & 5 & 7 & 8 & 11 & 1 & 2 & 3 & 6 & 9 & 10 & 12 \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

$d(G)=7$ ,  $r(G)=6$ .  $P(x_1)=P(x_2)=3$ ,  $P(x_3)=P(x_5)=P(x_7)=2$ ,  $P(x_4)=P(x_6)=P(x_8)=4$ . Граф не эйлеров и не гамильтонов.

в)  $n=8$ ,  $m=12$ ,  $k=1$ ,  $\nu(G)=5$ ,  $\nu^*(G)=7$ .  $C_1: 2, 1, 5$ ;  $C_2: 3, 5, 6$ ;  $C_3: 4, 5, 6, 7$ ;  $C_4: 8, 6, 7$ ;  $C_5: 10, 11, 12$  (рис. 3.13).

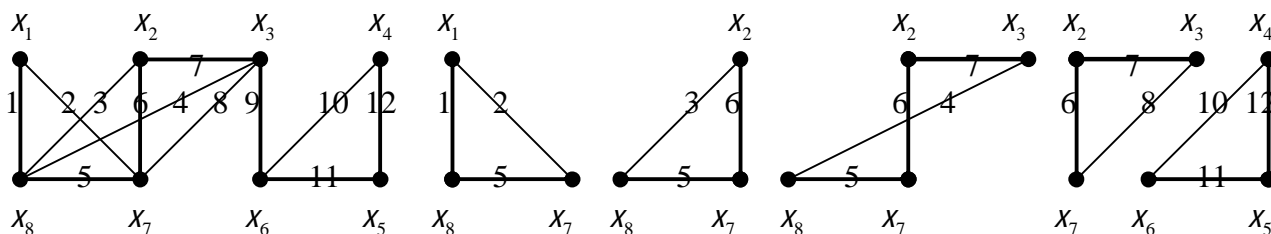


Рис. 3.13

$$C^* = \begin{pmatrix} & 2 & 3 & 4 & 8 & 10 & 1 & 5 & 6 & 7 & 9 & 11 & 12 \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_2 \\ C_4 \\ C_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$d(G)=7$ ,  $r(G)=4$ .  $P(x_1)=P(x_4)=P(x_5)=2$ ,  $P(x_2)=P(x_6)=3$ ,  $P(x_3)=P(x_7)=P(x_8)=4$ . Граф не эйлеров и не гамильтонов.

г)  $n=8$ ,  $m=12$ ,  $k=1$ ,  $\nu(G)=5$ ,  $\nu^*(G)=7$ .

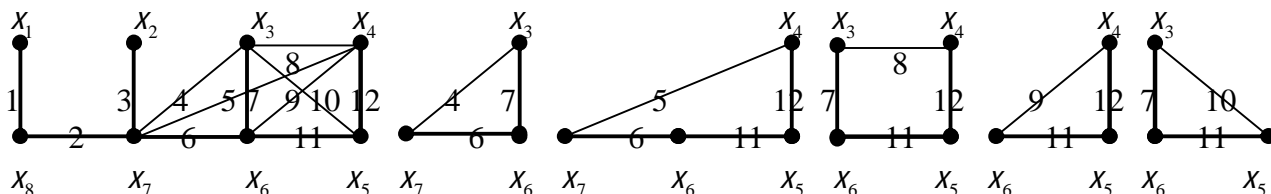


Рис. 3.14

$C_1: 4, 6, 7$ ;  $C_2: 5, 6, 11, 12$ ;  $C_3: 8, 7, 11, 12$ ;  $C_4: 9, 11, 12$ ;  $C_5: 10, 7, 11$  (рис. 3.14).

$$C^* = \begin{pmatrix} & 4 & 5 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 11 & 12 \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_2 \\ C_4 \\ C_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$d(G)=6$ ,  $r(G)=4$   $P(x_1)=P(x_2)=1$ ,  $P(x_3)=P(x_4)=P(x_6)=4$ ,  $P(x_5)=3$   $P(x_7)=5$ ,  $P(x_8)=2$ . Граф не эйлеров и не гамильтонов.

**3.19.4.** Условия этой задачи эквивалентны условиям теоремы 3.14 (теоремы Оре). Поскольку теорема 3.14 – следствие теоремы 3.13, при решении будем ее использовать. На рис. 3.15 изображен кубический гамильтонов граф, имеющий четыре основных простых цикла.

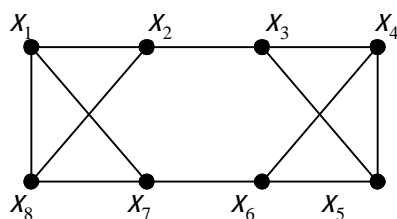


Рис. 3.15

В теореме 3.13 утверждается, что если в гамильтоновом графе степени половины вершин не превосходят их номеров, то степени другой половины вершин не менее номеров этих вершин.

Пусть дан граф  $G = (S, U)$ ,  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $P(x_i) = d_i, i = \overline{1, n}$  и  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  - степенная последовательность графа  $G$ . Если показать, что  $d_k > k, k = \overline{1, \lceil n/2 - 1 \rceil}$ , то задача сведется к теореме 3.13.

Решим задачу методом от противного. Выберем индекс  $t \in \{1, 2, \dots, \lceil n/2 - 1 \rceil\}$ . Пусть для него выполняется неравенство  $d_t \leq t$ . Если существуют  $i$  и  $j$  такие, что  $i, j \leq t$  и  $(x_i, x_j) \notin U$ , то  $P(x_i) + P(x_j) \leq 2d_t \leq 2t < n$ , что противоречит условиям задачи: для любых вершин  $x, y \in S, (x, y) \notin U$  ( $x$  и  $y$  не смежны),  $P(x) + P(y) \geq n$ .

Следовательно, вершины  $x_1, x_2, \dots, x_t$  попарно смежны. Но  $d_l \leq t, l = \overline{1, t}$  по нашему предположению. Это значит, что каждая вершина  $x_l, l = \overline{1, t}$  из перечня вершин  $x_1, x_2, \dots, x_t$  смежна не более чем с одной вершиной  $x_m, t+1 \leq m \leq n$  (раз они попарно смежны, то их степени могут достигать значения  $t-1$ , поэтому каждую из них можно соединить еще лишь с одной вершиной).

Так как  $t < n/2$ , то  $n-t > t$  (т.е. вершин  $x_m$  больше, чем вершин  $x_l$ ), следовательно, обязательно найдется хотя бы одна вершина  $x_j, j = \overline{t+1, n}$ , несмежная ни с одной из вершин  $x_i, i = \overline{1, t}$ , т.е.  $P(x_j) \leq n-t-1$ . Но тогда для пары несмежных вершин  $x_i$  и  $x_j$  будет  $P(x_i) + P(x_j) \leq n-t-1+t = n-1 < n$ , что противоречит условию задачи.

Полученное противоречие доказывает теорему 3.14.

**3.19.5.** а) Исходный граф эйлеров, ибо  $P(x_1) = P(x_4) = P(x_6) = P(x_8) = P(x_{11}) = P(x_{12}) = 2$ ,  $P(x_2) = P(x_9) = 6$ ,  $P(x_3) = P(x_5) = P(x_7) = P(x_{10}) = 4$ . Выберем за начальную вершину  $x_1$  и ребро  $(x_1, x_2)$ , присвоим ребру номер 1 и перейдем в вершину  $x_2$ . Из вершины  $x_2$  выходят пять еще не помеченных ребер, все они не являются перешейками, поэтому можно выбрать любое, например,  $(x_2, x_3)$ . Присвоим этому ребру номер 2 и перейдем в вершину  $x_3$ . Далее процесс продолжается аналогично до перебора всех ребер. Возможный эйлеров цикл показан на рис. 3.16.

б) Решение аналогично пункту а. Один из возможных эйлеровых циклов показан нумерацией ребер графа на рис. 3.17.

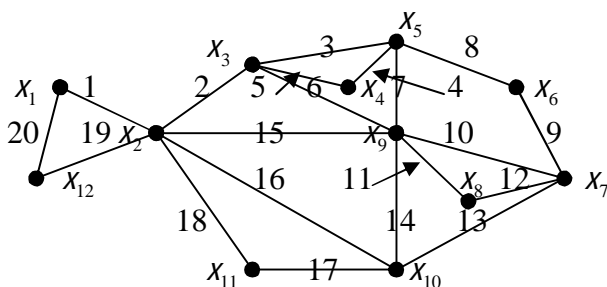


Рис. 3.16

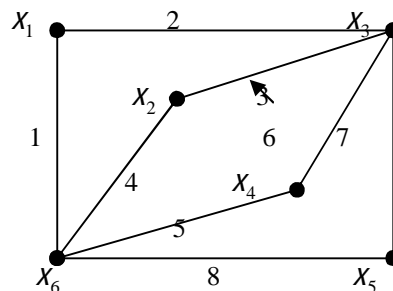


Рис. 3.17

**3.19.6.** Сначала оценим число вершинной независимости по теореме 3.18. Здесь  $P(x_1) = \dots = P(x_{10}) = 3$ , поэтому  $\alpha_0(G) \geq \sum_{i=1}^{10} (1 + P(x_i))^{-1} = \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4}}_{10 \text{ членов}} = 2.5$ . Построим множество

$M$ , для которого  $|M| > \sum_{x \in S} (1 + P(x))^{-1}$ . Выберем первой вершину  $x_1$ , затем удалим ее и все смежные с ней вершины  $x_2, x_7$  и  $x_5$ . Вновь выберем вершину  $x_3$ . После этого все внешние вершины оказываются удаленными. Аналогичные действия для внутренних вершин графа дадут еще две вершины независимого множества:  $x_6$  и  $x_{10}$ . Итак, одно из возможных множеств вершин –  $\{x_1, x_3, x_6, x_{10}\}$ . Поскольку граф симметричный, то это же множество будет наибольшим. Аналогично находятся другие независимые множества вершин, например,  $\{x_1, x_8, x_9, x_4\}$ .

Таким образом,  $\alpha_0(G) = 4$ .

**3.19.7.** У графа Петерсена  $n = 10$ ,  $P(x_i) = 3$ ,  $i = \overline{1,10}$ , поэтому  $P(x_i) < n/2 = 5$ , т.е. не выполняется следствие 1 теоремы 3.14. Сама теорема 3.14 также не выполняется, ибо  $P(x_i) + P(x_j) = 6 < n = 10$ , при условии, что  $x_i$  и  $x_j$  не смежны и  $i, j = \overline{1,10}$ ,  $i \neq j$ .

Проверим теперь выполнение условий основной теоремы 3.13. Для  $1 \leq k < 5$  проверим истинность импликации  $(P_k \leq k) \Rightarrow (P_{n-k} \geq n - k)$ .

$$k = 1, P(x_1) = 3 \not\leq 1, P(x_9) = 3 \not\geq 9, 0 \rightarrow 0 = 1;$$

$$k = 2, P(x_2) = 3 \not\leq 2, P(x_8) = 3 \not\geq 8, 0 \rightarrow 0 = 1;$$

$$k = 3, P(x_3) = 3 \leq 3, P(x_7) = 3 \not\geq 7, 1 \rightarrow 0 = 0;$$

$$k = 4, P(x_4) = 3 \leq 4, P(x_6) = 3 \not\geq 6, 1 \rightarrow 0 = 0.$$

Таким образом, для  $k = 3$  и  $k = 4$  условия теоремы нарушены, граф Петерсена не гамильтонов.

**3.19.8.** Специального алгоритма поиска доминирующего множества нет, однако когда вершин графа немного, это не составляет особого труда.

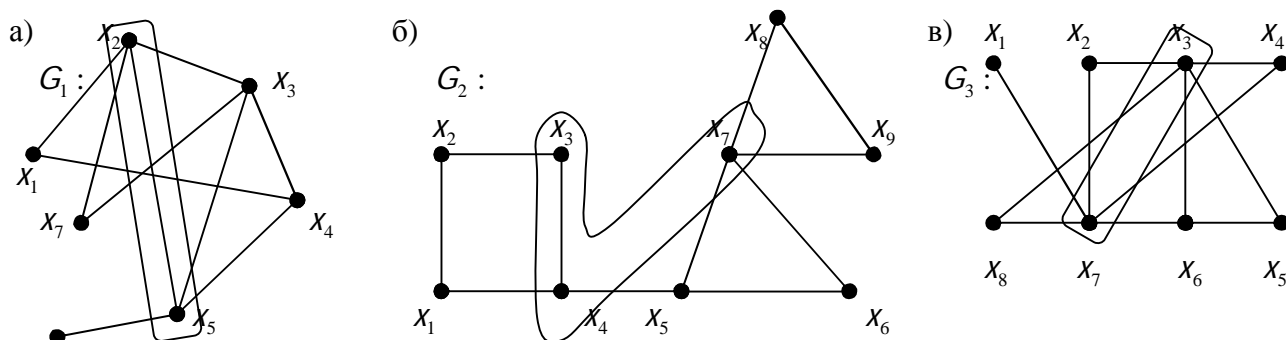


Рис. 3.18

а) Доминирующим множеством для данного графа будет, например, множество  $\{x_1, x_3, x_5\}$  или  $\{x_2, x_4, x_5\}$ . Минимальным и наименьшим является множество  $\{x_2, x_5\}$  (рис. 3.18, а), т.е.  $\delta(G_1) = 2$ .

б)  $\delta(G_2) = 3$ . Решение видно из рис. 3.18, б.

в)  $\delta(G_3) = 2$ . В этом случае доминирующее множество будет и независимым множеством. Подмножество вершин графа, являющееся как независимым, так и доминирующим, называется ядром.

**3.19.9.** По методике, изложенной в подразд. 3.18, построим дерево поиска клик графа, изображенного на рис. 3.44, а (Ч.І). Это дерево показано на рис. 3.19.

Таким образом, у данного графа восемь клик. Все они показаны на рис. 3.20.

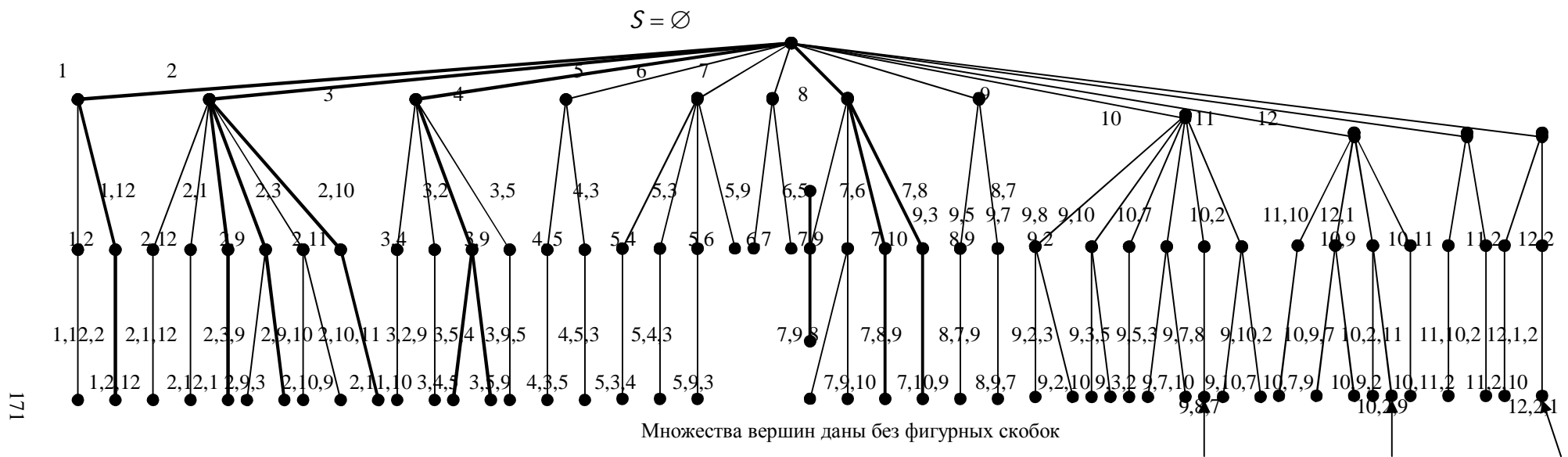


Рис. 3.19

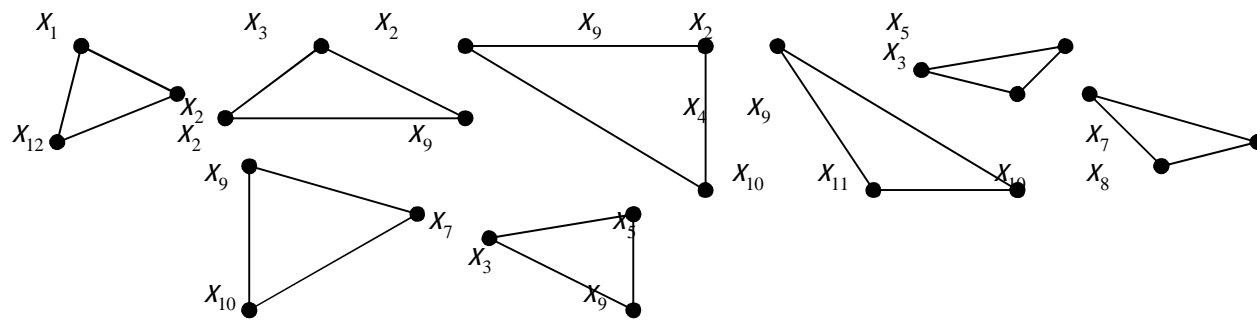


Рис. 3.20

Матрица клик данного графа имеет следующий вид:

$$C(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \end{matrix} \\ \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

б) Решение аналогично пункту а. Дерево поиска клик графа Петерсена изображено на рис.3.21. У графа 15 клик, все они содержат по две вершины. Матрица клик графа такова:

$$C(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{matrix} \\ \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \\ Q_{10} \\ Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{13} \\ Q_{14} \\ Q_{15} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

в) Дерево поиска клик графа, изображенного на рис. 3.46,б, показано на рис. 3.22. Всего у графа семь клик, состоящих из двух и трех вершин. Матрица клик графа равна

$$C(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$



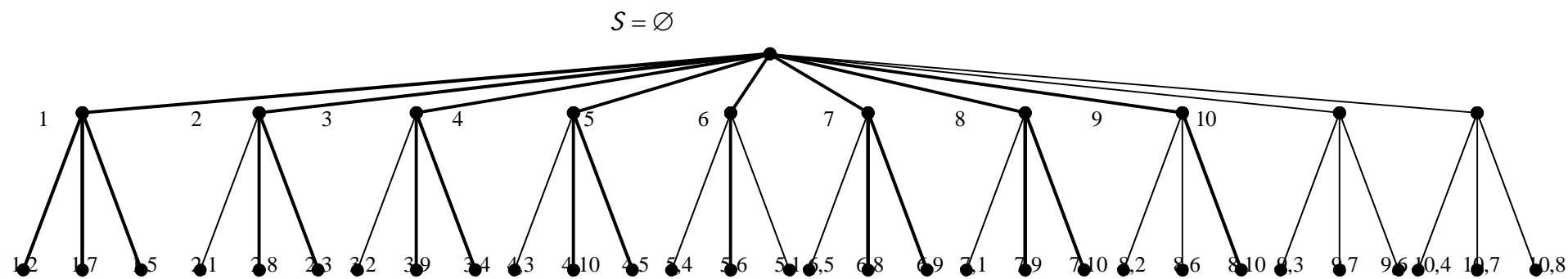


Рис. 3.21

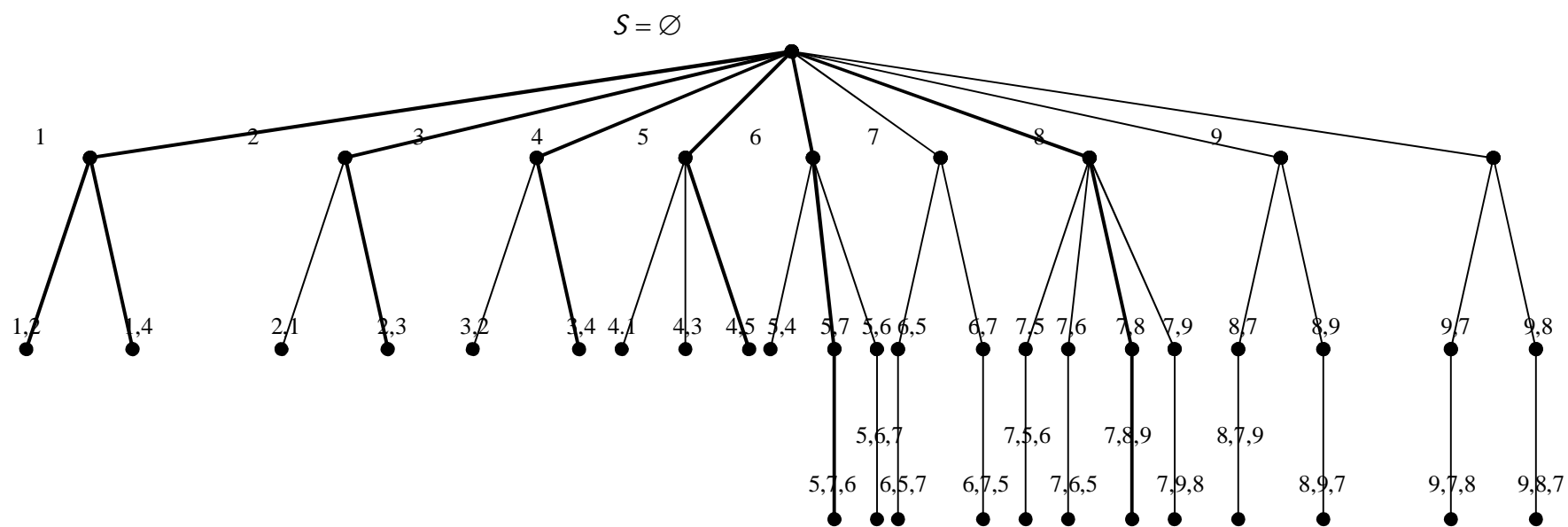
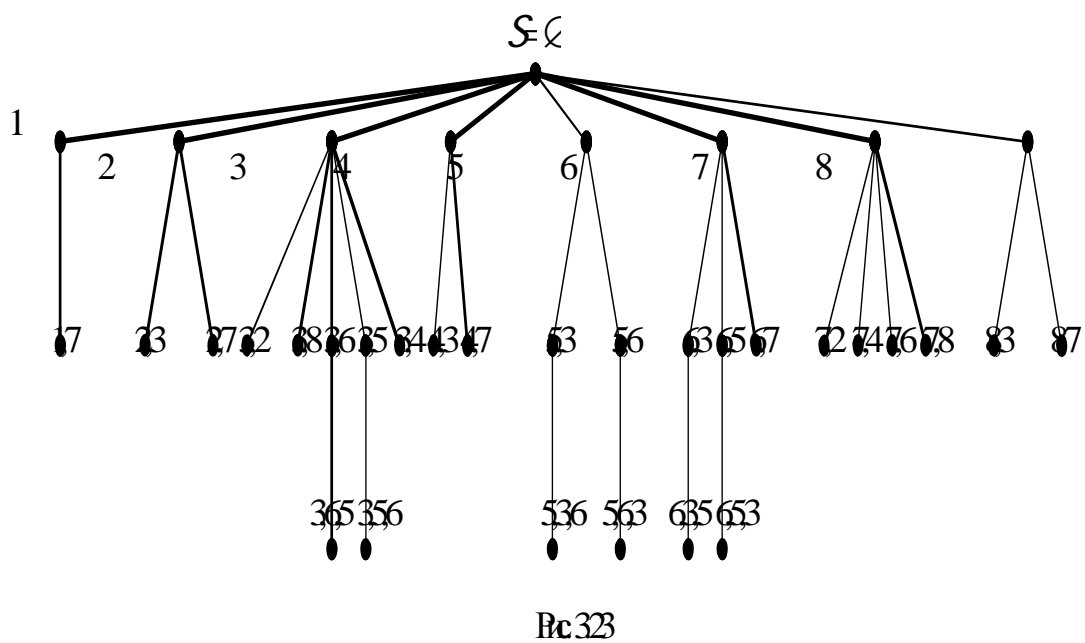


Рис. 3.22



г) Граф имеет девять клик (рис. 3.23). Матрица клик выглядит следующим образом:

$$C(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

**3.19.10.** Множество вершин графа независимо, если никакие две вершины этого множества не смежны. Наименьшее доминирующее множество состоит из вершин графа, которые в целом смежны со всеми остальными вершинами, не входящими в это наименьшее доминирующее множество.

Таким образом, условиям задачи удовлетворяет граф, вершины наименьшего доминирующего множества которого не смежны между собой. Таким условиям удовлетворяет, например, граф, изображенный на рис. 3.46, в.

### Ответы и решения задач практического занятия № 9

**3.23.1.** Для ответа на вопрос задачи удобнее всего применить какой-нибудь формальный признак планарности, использующий число вершин и ребер графа  $G_n$ . Однако необходимого и достаточного признака, оперирующего только с числами  $n$  и  $m$  нет. Из теоремы 3.21 вытекает следующее следствие: для связного планарного  $(n, m)$  – графа выполняется неравенство  $m \leq 3n - 6$  при  $n \geq 3$ . Действительно, если граф планарен, то всякая его грань ограничена по крайней мере тремя ребрами. Исключение составляет лишь дерево с тремя вершинами, но для него формула  $m \leq 3n - 6$  справедлива. Поэтому, если  $f$  – число граней графа  $G_n$  и он планарен, то

число  $3f$  является оценкой снизу удвоенного числа ребер графа, т.е.  $3f \leq 2m$ . По формуле (3.20.1)  $f = m - n + 2$ , т.е.  $3n - 6 \geq m$ . Применим это неравенство к графам  $G_n$  при  $n = 6$  и  $n = 7$ . Если  $n = 6$ ,  $m = 11$ ,  $18 - 6 = 12 \geq 11$ , если же  $n = 7$ ,  $m = 17$ ,  $21 - 6 = 15 < 17$ .

Можно предложить и иное решение. Пусть  $i$  – номер вершины  $x$ ,  $j$  – номер вершины  $y$ ,  $i < j$ ;  $i_1, i_2, \dots, i_k$  – вершины, номера которых взаимно просты с  $i$ , т.е.  $(i_k, i) = 1$ ,  $j_1, j_2, \dots, j_l$  – вершины, номера которых взаимно просты с  $j$ .

Рассмотрим последовательность чисел  $i_1, i_2, \dots, i_k$  и  $j_1, j_2, \dots, j_l$ , удовлетворяющих условиям  $i_p > i + 1, p = \overline{1, k}$ , и  $j_q > j + 1, q = \overline{1, l}$ . Видно, что если при этих условиях  $i_p > j_q$ , граф перестает быть планарным. Этот факт хорошо виден на рис. 3.24. При  $n = 6$  имеем  $i = 2$ ,  $i_1 = 3$ ,  $i_2 = 5$ ;  $j = 3$ ,  $j_1 = 2$ ,  $j_2 = 4$ ,  $j_3 = 5$ . По предложенному критерию следует сравнивать только  $i_2$  и  $j_3$ , при этом  $i_2 = j_3$ . Далее при  $n = 7$ ,  $i = 2$ ,  $i_1 = 3$ ,  $i_2 = 5$ ;  $i_3 = 7$ ,  $j = 3$ ,  $j_1 = 2$ ,  $j_2 = 4$ ,  $j_3 = 5$ ,  $j_4 = 7$ . Сравниваем  $i_2, i_3, j_3, j_4$ ,  $i_3 = 7 > j_3 = 5$ , граф не планарен.

Для предложенного множества вершин  $\{1, 2, \dots, 10\}$  планарность или непланарность графов может быть легко установлена по рисункам, подобным рис. 3.24.

Итак, начиная с  $n \geq 7$ , графы  $G_n$  не будут планарными.

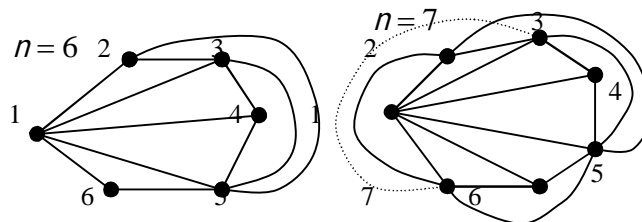


Рис. 3.24

**3.23.2.** Все вершины  $x_1, x_2, \dots, x_n$  графа  $G = (S_n, U_m)$  поместим в различные точки оси  $Ox$ . Рассмотрим пучок плоскостей, проходящий через  $Ox$  (рис. 3.25). Из этого пучка выберем  $m$  различных плоскостей. Каждое ребро  $(x_i, x_j) = u_k$  изображаем в соответствующей плоскости полуокружностью, проходящей через вершины  $x_i$  и  $x_j$ . В результате получается укладка графа  $G$  в трехмерном пространстве  $R^3$ , так как ребра не пересекаются, потому что лежат в разных плоскостях.

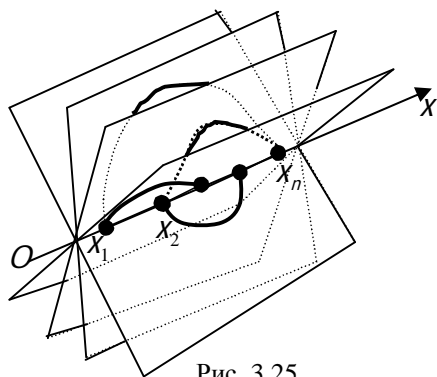


Рис. 3.25

**3.23.3.** а) Воспользуемся теоремой 3.22. Поскольку степень каждой вершины графа равна трем, то в нем можно попытаться выделить подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ . На рис. 3.26,а изображен подграф исходного графа, гомеоморфный  $K_{3,3}$  (рис. 3.26,б). По

критерию Понтрягина – Куратовского исходный граф не планарен.

б) Решение аналогично п. а. В исходном графе можно выделить подграф, гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  (рис. 3.27). Исходный граф не планарен.

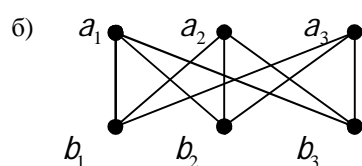
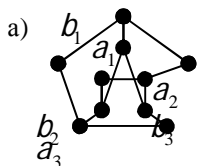


Рис. 3.26

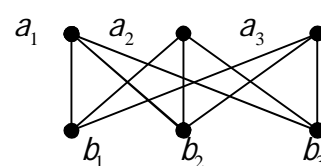
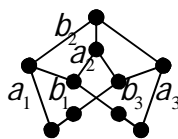


Рис. 3.27

в) Для проверки планарности в этом случае применим теорему 3.23. Рассмотрим подграф исходного графа, изображенный на рис. 3.28, а, и отождествим в нем вершины  $x_1$  и  $x_6$ . В результате получим граф, имеющий шесть вершин (рис. 3.28, б), который изоморфен графу  $K_{3,3}$  (рис. 3.28, в). Таким образом, исходный граф имеет подграф, стягиваемый к графу  $K_{3,3}$ , следовательно, он не планарен.

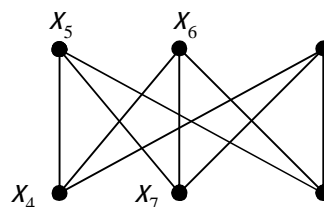
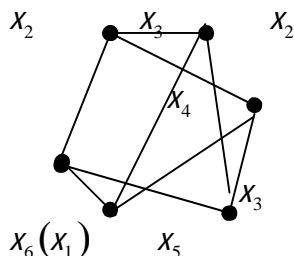
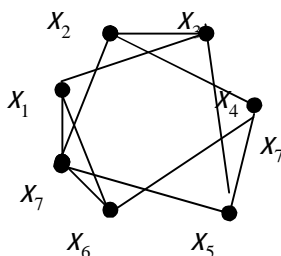


Рис. 3.28

**3.23.4.** а) Исходный граф  $G_{2n}$  составлен из графов  $K_4$ . Граф  $K_4$  планарен, а поскольку все графы  $K_4$  «приставлены» друг к другу справа, то шестое ребро каждого графа  $K_4$  можно расположить во внешней

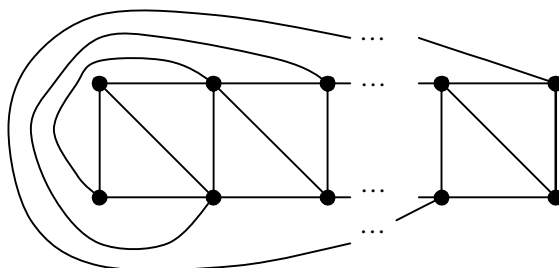


Рис. 3.29

границы, как это показано на рис. 3.29. Таким образом, исходный граф будет планарен при любом  $n$ .

б) Будем последовательно увеличивать размерность  $n$  и исследовать графы  $G_{2n}$ . Пусть  $n = 3$ . Граф  $G_{2n} = G_6$  еще планарен, так как шестое ребро каждого графа  $K_4$  можно расположить во внешней грани (рис. 3.30, а). Если же  $n = 4$ , то для графа  $G_8$  подобная операция возможна лишь для двух крайних справа и слева

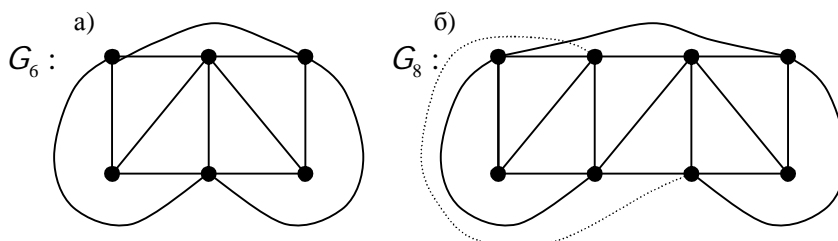


Рис. 3.30

графов  $K_4$ ; для всех внутренних графов  $K_4$  это невозможно (рис. 3.30, б), т.е. начиная с  $n \geq 4$  графы  $G_{2n}$  будут непланарными.

**3.23.5.** а) Шаг 1. Выберем простой цикл  $C = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ , пусть  $\tilde{G} = C$ .

Шаг 2. Граф  $\tilde{G}$  имеет четыре сегмента  $G_1, G_2, G_3$  и  $G_4$  (рис. 3.31).

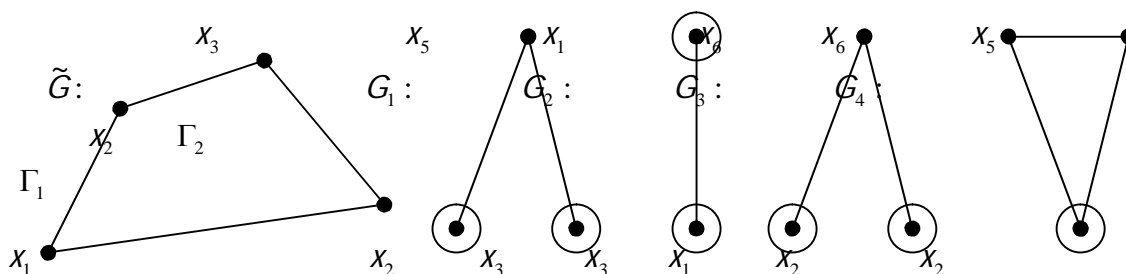


Рис. 3.31

Шаг 3.  $\Gamma(G_1) = \dots = \Gamma(G_4) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ ,  $\Gamma(G_i) \neq \emptyset, i = \overline{1, 4}$ .

Шаг 4. Нет сегмента, для которого существовала бы единственная допустимая грань.

Шаг 5. Любую  $\alpha$ -цепь можно уложить в  $\Gamma_1$  или в  $\Gamma_2$ .

Шаг 6. Уложим  $G_1$  и  $G_3$  в  $\Gamma_1$ , а  $G_2$  в  $\Gamma_2$ . Возникнет новый граф  $\tilde{G}$  и один его сегмент  $G_1$  (рис. 3.32).

Шаг 1-2.  $\Gamma(G_1) = \{\Gamma_1\}$ .

Шаг 3.  $\Gamma(G_1) \neq \emptyset$ .

Шаг 4. Переход на шестой шаг.

Шаг 6.  $\alpha$ -цепь  $L_1 = \{x_5, x_6\}$  поместим в грань  $\Gamma_1$ . Новый граф  $\tilde{G}$  является плоской укладкой исходного графа (рис. 3.33).

Шаг 7. Конец алгоритма.

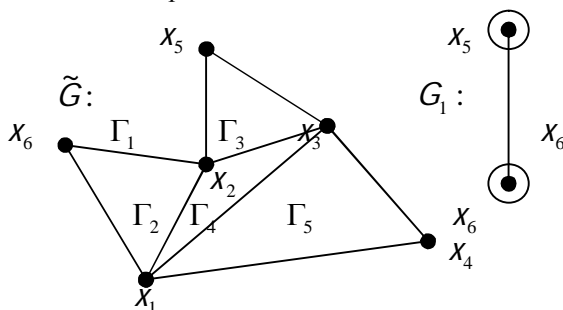


Рис. 3.32

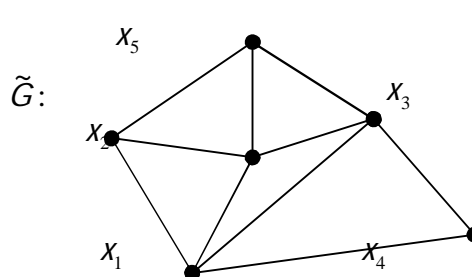


Рис. 3.33

б) Шаг 1. Пусть  $C = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$ ,  $\tilde{G} = C$ .

Шаг 2. Сегментов четыре:  $G_1, G_2, G_3, G_4$  (рис. 3.34).

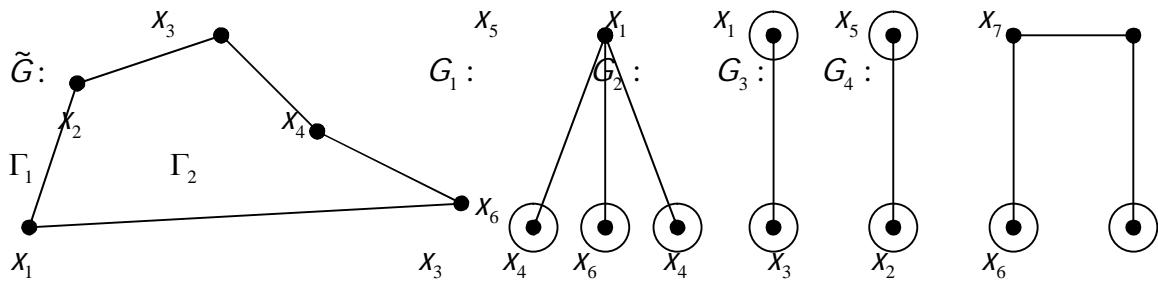


Рис. 3.34

Шаг 3.  $\Gamma(G_1) = \dots = \Gamma(G_4) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ ,  $\Gamma(G_i) \neq \emptyset, i = \overline{1, 4}$ .

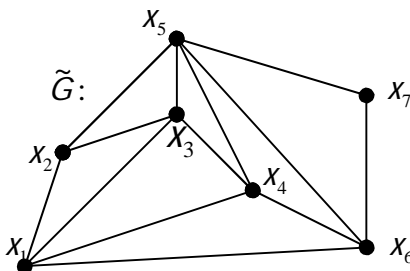


Рис. 3.35

Шаг 4. Нет сегмента с одной допустимой гранью.

Шаг 5. Любую  $\alpha$ -цепь можно уложить в  $\Gamma_1$  или в  $\Gamma_2$ .

Шаг 6. Уложим  $G_2$  и  $G_3$  в  $\Gamma_2$ , а  $G_1$  и  $G_4$  в  $\Gamma_1$ . Получим плоскую укладку исходного графа  $G$  на плоскости (рис. 3.35).

Шаг 7. Конец алгоритма.

**3.23.6.** а) Вычислим характеристики графа  $K_5$ . Этот граф полный, поэтому для нахождения числа планарности (искаженности) можно воспользоваться формулой (3.20.2).

$$sk(K_5) = C_5^2 - 3 \cdot 5 + 6 = 1. \text{ Толщина графа равна } t(K_5) = \left\lfloor \frac{5+7}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{12}{6} \right\rfloor = 2 \text{ (см. подразд. 3.21).}$$

б)  $G = K_{3,3}$ .  $K_{3,3}$  – неполный граф, пользоваться формулой (3.20.2) нельзя. Однако в данном случае число планарности легко определить по рис. 3.36.  $sk(K_{3,3}) = 1$ . Для толщины графа  $K_{n,m}$  известна следующая

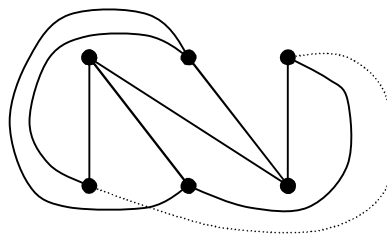


Рис. 3.36

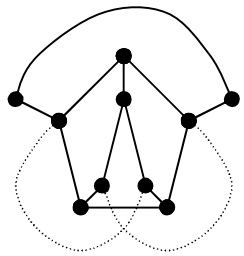


Рис. 3.37

формула:  $t(K_{n,m}) = \left\lfloor \frac{nm}{2(n+m-2)} \right\rfloor$ , где  $\lfloor \dots \rfloor = [\dots] + 1$ . Отсюда  $t(K_{3,3}) = \left\lfloor \frac{3 \cdot 3}{2(3+3-2)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9}{8} \right\rfloor = 2$ , что является очевидным результатом.

в)  $G$  – граф Петерсена (рис. 3.45 на с. 88). Это неполный граф,  $n = 10$ ,  $m = 15$ . Число планарности можно определить из рис. 3.37.  $sk(G) = 2$ . Формулы (3.20.3) дают очень приблизительную оценку толщины графа. Например, в нашем случае  $t(G) \geq \left\lfloor \frac{15}{30-6} \right\rfloor = 1$  и  $t(G) \geq \left\lfloor \frac{15+30-7}{30-6} \right\rfloor = 1$ . На самом деле  $t(G) = 3$  для графа Петерсена.

**3.23.7.** а) Топологически тор эквивалентен сфере с одной ручкой (рис. 3.38). В силу стереографической проекции все планарные графы укладываются на сфере. Графы, которые нельзя уложить на плоскости, но мож-

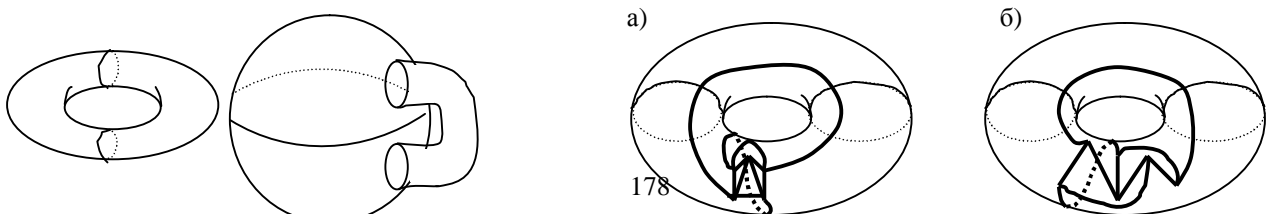


Рис. 3.39

но уложить на торе, называются тороидальными. На рис. 3.39, а изображена такая укладка тороидального графа  $K_5$ .

б) Решение аналогично п. а. Укладка графа  $K_{3,3}$  на торе изображена на рис. 3.39, б.

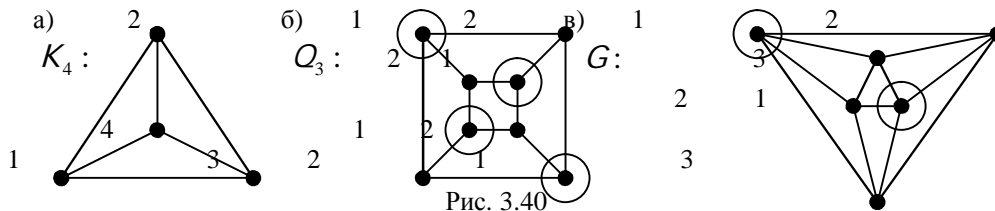
**3.23.8.** а) Исходный граф  $K_4$ . Хроматические числа полных графов находятся по формуле  $\chi(K_n) = n$ . В нашем случае  $\chi(K_4) = 4$ . Приведенная на рис. 3.40, а раскраска вершин подтверждает это.

б) Данный граф – это  $Q_3$ . Сначала оценим хроматическое число этого графа по формулам подразд. 3.22.  $P(x_i) = 3, i = \overline{1,8}$ .  $\chi(Q_3) \leq 3 + 1 = 4$ . Далее так как  $n = 8, m = 12$ , то

$$\left\lfloor \frac{8}{\left\lceil \frac{64-24}{8} \right\rceil} \cdot \frac{1 - \left\lceil \frac{40}{8} \right\rceil}{1 + \left\lceil \frac{40}{8} \right\rceil} \right\rfloor \leq \chi(Q_3) \leq \left\lfloor \frac{3 + \sqrt{9 + 8 \cdot 4}}{2} \right\rfloor, \quad 0 \leq \chi(Q_3) \leq 4.$$

Наибольшее независимое множество

вершин графа  $Q_3$  обведено кружками на рис. 3.40, б). Видно, что  $\alpha_0(Q_3) = 4$ . Тогда  $\frac{8}{4} \leq \chi(Q_3) \leq 8 - 4 + 1$ ,  $2 \leq \chi(Q_3) \leq 5$ . В действительности  $\chi(Q_3) = 2$ . Раскраска вершин указана на рис. 3.40, б).



в)  $P(x_i) = 4, i = \overline{1,6}$ ,  $m = 12$ . Первая оценка хроматического числа дает  $\chi(G) \leq 4 + 1 = 5$ . Далее  $\left\lfloor \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{3} \right\rfloor \leq \chi(G) \leq \left\lfloor \frac{3 + \sqrt{9 + 8 \cdot 6}}{2} \right\rfloor$ ,  $1 \leq \chi(G) \leq 5$ ,  $\alpha_0(G) = 2$ ,  $\frac{6}{2} \leq \chi(G) \leq 6 - 2 + 1$ ,  $3 \leq \chi(G) \leq 5$ .

На самом деле  $\chi(G) = 3$  (см. раскраску графа на рис. 3.40, в).

**3.23.9.** Так как все вершины полного графа  $K_n$  смежны и  $P(x_i) = n, i = \overline{1, n}$ , а  $\chi(K_n) = n$ , то удаление любой из них автоматически уменьшает степень всех оставшихся вершин на единицу. Оставшийся граф будет также полным графом  $K_{n-1}$  и  $\chi(K_{n-1}) = n - 1$ . Таким образом,  $K_n$  – критический граф.

Любой простой цикл  $C_{2n}$  изоморфен неполному двудольному графу (рис. 3.41), поэтому  $\chi(C_{2n}) = 2$ . При удалении любой вершины простой цикл превращается в дерево  $T$ , а  $\chi(T) = 2$ . Таким образом, если  $n$  – четно, то  $C_{2n}$  – некритический граф. Если же  $n$  нечетно, то, очевидно,  $\chi(C_{2n+1}) = 3$  (рис.

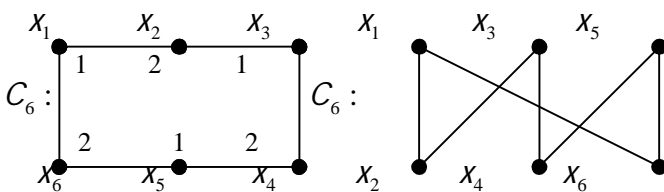
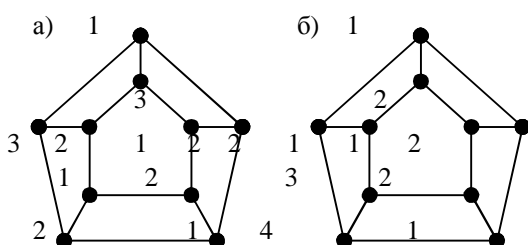


Рис. 3.41

Рис. 3.42



3.42). При удалении любой вершины опять получается дерево и  $\chi(T) = 2$ , т.е.  $C_{2n+1}$  – критический граф.



**3.23.10.** На рис. 3.43, а приведена минимальная 3-раскраска графа  $G$ . Правильная 2-раскраска невозможна, ибо это недвудольный граф. Алгоритм последовательной раскраски использует четыре цвета (рис. 3.43, б). Последовательная раскраска этого графа не является минимальной.

### Ответы и решения задач практического занятия № 10

**3.29.1.** 1)  $\varphi_{\max} = 43$ ; 2)  $\varphi_{\max} = 24$ ; 3)  $\varphi_{\max} = 22$ ; 4)  $\varphi_{\max} = 25$ ; 5)  $\varphi_{\max} = 35$ ; 6)  $\varphi_{\max} = 18$ ; 7)  $\varphi_{\max} = 42$ ; 8)  $\varphi_{\max} = 22$ ; 9)  $\varphi_{\max} = 24$ ; 10)  $\varphi_{\max} = 31$ ; 11)  $\varphi_{\max} = 25$ ; 12)  $\varphi_{\max} = 31$ ; 13)  $\varphi_{\max} = 29$ ; 14)  $\varphi_{\max} = 26$ ; 15)  $\varphi_{\max} = 41$ ; 16)  $\varphi_{\max} = 20$ ; 17)  $\varphi_{\max} = 24$ ; 18)  $\varphi_{\max} = 24$ ; 19)  $\varphi_{\max} = 19$ ; 20)  $\varphi_{\max} = 34$ ; 21)  $\varphi_{\max} = 33$ ; 22)  $\varphi_{\max} = 22$ ; 23)  $\varphi_{\max} = 31$ ; 24)  $\varphi_{\max} = 40$ ; 25)  $\varphi_{\max} = 35$ ; 26)  $\varphi_{\max} = 14$ ; 27)  $\varphi_{\max} = 38$ ; 28)  $\varphi_{\max} = 18$ ; 29)  $\varphi_{\max} = 34$ ; 30)  $\varphi_{\max} = 15$ .

**3.29.2.** 1)  $\varphi_{\max} = 43$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \varphi_{\max} \right\rceil = 28$ ,  $?_1 = (x_1, x_2) - (x_2, x_7)$ ,  $d(?_1) = 5$ ,  $\theta_1 = 13$ , стоимость первого потока  $T_1 = 65$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_2) = 9$ ,  $\theta_2 = 9$ ,  $T_2 = 81$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_3) = 12$ ,  $\theta_3 = 16$ ,  $T_3 = 72$ ,  $T_{\text{общая}} = 218$ ;

2)  $\varphi_{\max} = 24$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \varphi_{\max} \right\rceil = 16$ ,  $?_1 = (x_1, x_4) - (x_4, x_7)$ ,  $d(?_1) = 7$ ,  $\theta_1 = 4$ , стоимость первого потока  $T_1 = 28$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_2) = 9$ ,  $\theta_2 = 6$ ,  $T_2 = 54$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_2) - (x_2, x_7)$ ,  $d(?_3) = 11$ ,  $\theta_3 = 3$ ,  $T_3 = 33$ . После третьей модернизации  $?_4 = (x_1, x_4) - (x_4, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_4) = 14$ ,  $\theta_4 = 5$ ,  $T_4 = 84$ ,  $T_{\text{общая}} = 199$ ;

3)  $\varphi_{\max} = 22$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \varphi_{\max} \right\rceil = 14$ ,  $?_1 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_1) = 9$ ,  $\theta_1 = 7$ , стоимость первого потока  $T_1 = 63$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_7)$ ,  $d(?_2) = 9$ ,  $\theta_2 = 5$ ,  $T_2 = 45$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_2) - (x_2, x_7)$ ,  $d(?_3) = 10$ ,  $\theta_3 = 4$ ,  $T_3 = 20$ ,  $T_{\text{общая}} = 128$ ;

4)  $\varphi_{\max} = 25$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \varphi_{\max} \right\rceil = 16$ ,  $?_1 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_1) = 18$ ,  $\theta_1 = 5$ , стоимость первого потока  $T_1 = 90$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_7)$ ,  $d(?_2) = 18$ ,  $\theta_2 = 3$ ,  $T_2 = 54$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_3) - (x_3, x_2) - (x_2, x_7)$ ,  $d(?_3) = 21$ ,  $\theta_3 = 2$ ,  $T_3 = 42$ . После третьей модернизации  $?_4 = (x_1, x_5) - (x_5, x_7)$ ,  $d(?_4) = 37$ ,  $\theta_4 = 15$ ,  $T_4 = 222$ ,  $T_{\text{общая}} = 408$ ;

5)  $\varphi_{\max} = 35$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \varphi_{\max} \right\rceil = 23$ ,  $?_1 = (x_1, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_1) = 12$ ,  $\theta_1 = 8$ , стоимость первого потока  $T_1 = 96$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_5) - (x_5, x_4) - (x_4, x_7)$ ,  $d(?_2) = 18$ ,  $\theta_2 = 1$ ,  $T_2 = 18$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_7)$ ,  $d(?_3) = 19$ ,  $\theta_3 = 26$ ,  $T_3 = 266$ ,  $T_{\text{общая}} = 380$ ;

6)  $\varphi_{\max} = 18$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \varphi_{\max} \right\rceil = 12$ ,  $?_1 = (x_1, x_2) - (x_2, x_7)$ ,  $d(?_1) = 17$ ,  $\theta_1 = 6$ , стоимость первого потока  $T_1 = 102$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_7)$ ,  $d(?_2) = 18$ ,  $\theta_2 = 4$ ,

$T_2 = 72$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_4) - (x_4, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_3) = 20$ ,  $\theta_3 = 7$ ,  $T_3 = 40$ ,  $T_{общая} = 214$ ;

7)  $\varphi_{\max} = 42$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \varphi_{\max} \right\rceil = 28$ ,  $?_1 = (x_1, x_7)$ ,  $d(?_1) = 6$ ,  $\theta_1 = 7$ , стоимость первого потока

$T_1 = 42$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_2) = 16$ ,  $\theta_2 = 9$ ,  $T_2 = 144$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_3) = 17$ ,  $\theta_3 = 14$ ,  $T_3 = 204$ ,  $T_{общая} = 390$ ;

8)  $\varphi_{\max} = 22$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \varphi_{\max} \right\rceil = 14$ ,  $?_1 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_1) = 12$ ,  $\theta_1 = 10$ , стоимость первого потока  $T_1 = 120$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_4) - (x_4, x_7)$ ,  $d(?_2) = 19$ ,  $\theta_2 = 5$ ,  $T_2 = 76$ ,  $T_{общая} = 196$ ;

9)  $\varphi_{\max} = 24$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \varphi_{\max} \right\rceil = 16$ ,  $?_1 = (x_1, x_2) - (x_2, x_7)$ ,  $d(?_1) = 9$ ,  $\theta_1 = 6$ , стоимость первого потока  $T_1 = 54$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_2) = 13$ ,  $\theta_2 = 8$ ,  $T_2 = 104$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_3) = 22$ ,  $\theta_3 = 9$ ,  $T_3 = 44$ ,  $T_{общая} = 202$ ;

10)  $\varphi_{\max} = 31$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \varphi_{\max} \right\rceil = 20$ ,  $?_1 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_1) = 10$ ,  $\theta_1 = 8$ , стоимость первого потока  $T_1 = 80$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_4) - (x_4, x_7)$ ,  $d(?_2) = 12$ ,  $\theta_2 = 6$ ,  $T_2 = 72$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_2) - (x_2, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_3) = 21$ ,  $\theta_3 = 5$ ,  $T_3 = 105$ . После третьей модернизации  $?_4 = (x_1, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_7)$ ,  $d(?_4) = 27$ ,  $\theta_4 = 12$ ,  $T_4 = 27$ ,  $T_{общая} = 284$ ;

11)  $\varphi_{\max} = 25$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \varphi_{\max} \right\rceil = 16$ ,  $?_1 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_1) = 4$ ,  $\theta_1 = 4$ , стоимость первого потока  $T_1 = 16$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_7)$ ,  $d(?_2) = 8$ ,  $\theta_2 = 6$ ,  $T_2 = 48$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_3) = 9$ ,  $\theta_3 = 9$ ,  $T_3 = 54$ ,  $T_{общая} = 112$ ;

12)  $\varphi_{\max} = 31$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \varphi_{\max} \right\rceil = 20$ ,  $?_1 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_1) = 29$ ,  $\theta_1 = 10$ , стоимость первого потока  $T_1 = 290$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_5) - (x_5, x_7)$ ,  $d(?_2) = 31$ ,  $\theta_2 = 9$ ,  $T_2 = 279$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_7)$ ,  $d(?_3) = 59$ ,  $\theta_3 = 5$ ,  $T_3 = 59$ ,  $T_{общая} = 628$ ;

13)  $\varphi_{\max} = 29$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \varphi_{\max} \right\rceil = 19$ ,  $?_1 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_1) = 7$ ,  $\theta_1 = 7$ , стоимость первого потока  $T_1 = 49$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_2) = 13$ ,  $\theta_2 = 11$ ,  $T_2 = 143$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_7)$ ,  $d(?_3) = 15$ ,  $\theta_3 = 1$ ,  $T_3 = 15$ ,  $T_{общая} = 207$ ;

14)  $\varphi_{\max} = 26$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \varphi_{\max} \right\rceil = 17$ ,  $?_1 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_1) = 14$ ,  $\theta_1 = 7$ , стоимость первого потока  $T_1 = 98$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_2) = 15$ ,  $\theta_2 = 8$ ,  $T_2 = 120$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_4) - (x_4, x_7)$ ,  $d(?_3) = 19$ ,  $\theta_3 = 11$ ,  $T_3 = 38$ ,  $T_{общая} = 256$ ;

15)  $\varphi_{\max} = 41$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \varphi_{\max} \right\rceil = 27$ ,  $?_1 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_1) = 6$ ,  $\theta_1 = 7$ , стоимость первого потока  $T_1 = 42$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_6) - (x_6, x_5) - (x_5, x_7)$ ,  $d(?_2) = 8$ ,  $\theta_2 = 2$ ,  $T_2 = 16$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_3) = 11$ ,  $\theta_3 = 16$ ,  $T_3 = 176$ . После треть-

ей модернизации  $?_4 = (x_1, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_7)$ ,  $d(?_4) = 14$ ,  $\theta_4 = 1$ ,  $T_4 = 14$ , После четвертой модернизации  $?_5 = (x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_7)$ ,  $d(?_5) = 17$ ,  $\theta_3 = 15$ ,  $T_5 = 17$ ,  $T_{общая} = 265$ ;

16)  $\Phi_{\max} = 20$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rceil = 13$ ,  $?_1 = (x_1, x_4) - (x_4, x_7)$ ,  $d(?_1) = 8$ ,  $\theta_1 = 4$ , стоимость первого потока  $T_1 = 32$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_2) = 9$ ,  $\theta_2 = 5$ ,  $T_2 = 45$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_5) - (x_5, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_3) = 12$ ,  $\theta_3 = 2$ ,  $T_3 = 24$ . После третьей модернизации  $?_4 = (x_1, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_4) = 14$ ,  $\theta_4 = 5$ ,  $T_4 = 28$ ,  $T_{общая} = 129$ ;

17)  $\Phi_{\max} = 24$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rceil = 16$ ,  $?_1 = (x_1, x_2) - (x_2, x_7)$ ,  $d(?_1) = 19$ ,  $\theta_1 = 9$ , стоимость первого потока  $T_1 = 171$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_2) = 27$ ,  $\theta_2 = 4$ ,  $T_2 = 108$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_7)$ ,  $d(?_3) = 29$ ,  $\theta_3 = 11$ ,  $T_3 = 87$ ,  $T_{общая} = 366$ ;

18)  $\Phi_{\max} = 24$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rceil = 16$ ,  $?_1 = (x_1, x_5) - (x_5, x_7)$ ,  $d(?_1) = 12$ ,  $\theta_1 = 11$ , стоимость первого потока  $T_1 = 132$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_7)$ ,  $d(?_2) = 18$ ,  $\theta_2 = 7$ ,  $T_2 = 90$ ,  $T_{общая} = 222$ ;

19)  $\Phi_{\max} = 19$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rceil = 12$ ,  $?_1 = (x_1, x_2) - (x_2, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_1) = 23$ ,  $\theta_1 = 8$ , стоимость первого потока  $T_1 = 184$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_2) - (x_2, x_6) - (x_6, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_2) = 24$ ,  $\theta_2 = 7$ ,  $T_2 = 96$ ,  $T_{общая} = 280$ ;

20)  $\Phi_{\max} = 34$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rceil = 22$ ,  $?_1 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_1) = 46$ ,  $\theta_1 = 7$ , стоимость первого потока  $T_1 = 322$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_2) = 58$ ,  $\theta_2 = 12$ ,  $T_2 = 696$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_3) = 72$ ,  $\theta_3 = 5$ ,  $T_3 = 216$ ,  $T_{общая} = 1234$ ;

21)  $\Phi_{\max} = 33$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rceil = 22$ ,  $?_1 = (x_1, x_4) - (x_4, x_7)$ ,  $d(?_1) = 44$ ,  $\theta_1 = 7$ , стоимость первого потока  $T_1 = 308$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_2) - (x_2, x_7)$ ,  $d(?_2) = 68$ ,  $\theta_2 = 16$ ,  $T_2 = 1020$ ,  $T_{общая} = 1328$ ;

22)  $\Phi_{\max} = 22$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rceil = 14$ ,  $?_1 = (x_1, x_5) - (x_5, x_7)$ ,  $d(?_1) = 20$ ,  $\theta_1 = 8$ , стоимость первого потока  $T_1 = 160$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_6)$ ,  $d(?_2) = 21$ ,  $\theta_2 = 10$ ,  $T_2 = 126$ ,  $T_{общая} = 286$ ;

23)  $\Phi_{\max} = 31$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rceil = 20$ ,  $?_1 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_1) = 9$ ,  $\theta_1 = 6$ , стоимость первого потока  $T_1 = 54$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_2) - (x_2, x_7)$ ,  $d(?_2) = 11$ ,  $\theta_2 = 11$ ,  $T_2 = 121$ ,  $T_{общая} = 175$ ;

24)  $\Phi_{\max} = 40$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rceil = 26$ ,  $?_1 = (x_1, x_2) - (x_2, x_7)$ ,  $d(?_1) = 14$ ,  $\theta_1 = 20$ , стоимость первого потока  $T_1 = 280$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_6)$ ,  $d(?_2) = 16$ ,  $\theta_2 = 9$ ,  $T_2 = 54$ ,  $T_{\text{общая}} = 334$ ;

25)  $\Phi_{\max} = 35$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rceil = 23$ ,  $?_1 = (x_1, x_4) - (x_4, x_7)$ ,  $d(?_1) = 16$ ,  $\theta_1 = 11$ , стоимость первого потока  $T_1 = 176$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_2) = 17$ ,  $\theta_2 = 9$ ,  $T_2 = 153$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_3) = 22$ ,  $\theta_3 = 7$ ,  $T_3 = 66$ ,  $T_{\text{общая}} = 395$ ;

26)  $\Phi_{\max} = 14$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rceil = 9$ ,  $?_1 = (x_1, x_5) - (x_5, x_7)$ ,  $d(?_1) = 34$ ,  $\theta_1 = 6$ , стоимость первого потока  $T_1 = 204$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_2) = 44$ ,  $\theta_2 = 5$ ,  $T_2 = 132$ ,  $T_{\text{общая}} = 336$ ;

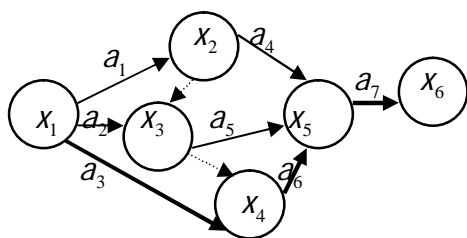
27)  $\Phi_{\max} = 38$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rceil = 25$ ,  $?_1 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_1) = 6$ ,  $\theta_1 = 10$ , стоимость первого потока  $T_1 = 60$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$ ,  $d(?_2) = 10$ ,  $\theta_2 = 15$ ,  $T_2 = 150$ ,  $T_{\text{общая}} = 210$ ;

28)  $\Phi_{\max} = 18$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rceil = 12$ ,  $?_1 = (x_1, x_5) - (x_5, x_7)$ ,  $d(?_1) = 11$ ,  $\theta_1 = 9$ , стоимость первого потока  $T_1 = 99$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_2) = 13$ ,  $\theta_2 = 4$ ,  $T_2 = 39$ ,  $T_{\text{общая}} = 138$ ;

29)  $\Phi_{\max} = 34$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rceil = 22$ ,  $?_1 = (x_1, x_4) - (x_4, x_7)$ ,  $d(?_1) = 14$ ,  $\theta_1 = 13$ , стоимость первого потока  $T_1 = 182$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_2) = 15$ ,  $\theta_2 = 10$ ,  $T_2 = 150$ ,  $T_{\text{общая}} = 332$ ;

30)  $\Phi_{\max} = 15$ ,  $\theta = \left\lceil \frac{2}{3} \Phi_{\max} \right\rceil = 10$ ,  $?_1 = (x_1, x_2) - (x_2, x_7)$ ,  $d(?_1) = 21$ ,  $\theta_1 = 5$ , стоимость первого потока  $T_1 = 105$ . После первой модернизации  $?_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_7)$ ,  $d(?_2) = 25$ ,  $\theta_2 = 3$ ,  $T_2 = 75$ . После второй модернизации  $?_3 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$ ,  $d(?_3) = 27$ ,  $\theta_3 = 4$ ,  $T_3 = 54$ ,  $T_{\text{общая}} = 234$ .

**3.29.3.** 1) Путь шесть.  $t_{\text{кр}} = 36$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 5$ ,  $t_p(x_3) = 8$ ,  $t_p(x_4) = 11$ ,  $t_p(x_5) = 29$ ,



$t_p(x_6) = 36$ ,  $t_{\Pi}(x_6) = 36$ ,  $t_{\Pi}(x_5) = 29$ ,  $t_{\Pi}(x_4) = 11$ ,

$t_{\Pi}(x_3) = 11$ ,  $t_{\Pi}(x_2) = 11$ ,  $t_{\Pi}(x_1) = 0$ ;

$R(x_1) = R(x_4) = R(x_5) = R(x_6) = 0$ ,  $R(x_2) = 6$ ,  $R(x_3) = 3$ ;

$t_{p.H}(a_1) = 0$ ,  $t_{p.O}(a_1) = 5$ ,  $t_{\Pi.H}(a_1) = 6$ ,  $t_{\Pi.O}(a_1) = 11$ ,

$R_{\Pi}(a_1) = 6$ ,  $R_C(a_1) = 0$ ,

$t_{p.H}(a_2) = 0$ ,  $t_{p.O}(a_2) = 8$ ,  $t_{\Pi.H}(a_2) = 3$ ,  $t_{\Pi.O}(a_2) = 11$ ,  $R_{\Pi}(a_2) = 3$ ,  $R_C(a_2) = 0$ ,

$t_{p.H}(a_3) = 0$ ,  $t_{p.O}(a_3) = 11$ ,  $t_{\Pi.H}(a_3) = 0$ ,  $t_{\Pi.O}(a_3) = 11$ ,  $R_{\Pi}(a_3) = 0$ ,  $R_C(a_3) = 0$ ,

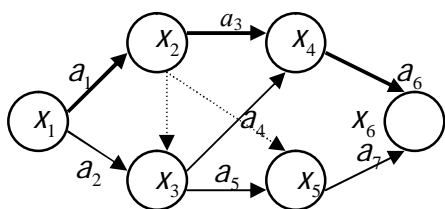
$t_{p.H}(a_4) = 5$ ,  $t_{p.O}(a_4) = 11$ ,  $t_{\Pi.H}(a_4) = 23$ ,  $t_{\Pi.O}(a_4) = 29$ ,  $R_{\Pi}(a_4) = 18$ ,  $R_C(a_4) = 18$ ,

$t_{p.H}(a_5) = 8$ ,  $t_{p.O}(a_5) = 20$ ,  $t_{\Pi.H}(a_5) = 17$ ,  $t_{\Pi.O}(a_5) = 29$ ,  $R_{\Pi}(a_5) = 9$ ,  $R_C(a_5) = 9$ ,

$t_{p.H}(a_6) = 11$ ,  $t_{p.O}(a_6) = 29$ ,  $t_{\Pi.H}(a_6) = 11$ ,  $t_{\Pi.O}(a_6) = 29$ ,  $R_{\Pi}(a_6) = 0$ ,  $R_C(a_6) = 0$ ,

$$t_{p.H}(a_7)=29, \quad t_{p.O}(a_7)=36, \quad t_{п.H}(a_7)=29, \quad t_{п.O}(a_7)=36, \quad R_{п}(a_7)=0, \quad R_c(a_7)=0.$$

2) Путь шесть.  $t_{кр} = 33$ .  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=9$ ,  $t_p(x_3)=9$ ,  $t_p(x_4)=20$ ,  $t_p(x_5)=13$ ,



$$t_p(x_6)=33, \quad t_{п}(x_6)=33, \quad t_{п}(x_5)=18, \quad t_{п}(x_4)=20, \quad t_{п}(x_3)=13,$$

$$t_{п}(x_2)=9, \quad t_{п}(x_1)=0; \quad R(x_1)=R(x_2)=R(x_4)=R(x_6)=0,$$

$$R(x_3)=4, \quad R(x_5)=5;$$

$$t_{p.H}(a_1)=0, \quad t_{p.O}(a_1)=9, \quad t_{п.H}(a_1)=0, \quad t_{п.O}(a_1)=9,$$

$$R_{п}(a_1)=0, \quad R_c(a_1)=0,$$

$$t_{p.H}(a_2)=0, \quad t_{p.O}(a_2)=5, \quad t_{п.H}(a_2)=8, \quad t_{п.O}(a_2)=13, \quad R_{п}(a_2)=8, \quad R_c(a_2)=4,$$

$$t_{p.H}(a_3)=9, \quad t_{p.O}(a_3)=20, \quad t_{п.H}(a_3)=9, \quad t_{п.O}(a_3)=20, \quad R_{п}(a_3)=0, \quad R_c(a_3)=0,$$

$$t_{p.H}(a_4)=9, \quad t_{p.O}(a_4)=16, \quad t_{п.H}(a_4)=13, \quad t_{п.O}(a_4)=20, \quad R_{п}(a_4)=4, \quad R_c(a_4)=4,$$

$$t_{p.H}(a_5)=9, \quad t_{p.O}(a_5)=13, \quad t_{п.H}(a_5)=14, \quad t_{п.O}(a_5)=18, \quad R_{п}(a_5)=5, \quad R_c(a_5)=0,$$

$$t_{p.H}(a_6)=20, \quad t_{p.O}(a_6)=33, \quad t_{п.H}(a_6)=20, \quad t_{п.O}(a_6)=33, \quad R_{п}(a_6)=0, \quad R_c(a_6)=0,$$

$$t_{p.H}(a_7)=13, \quad t_{p.O}(a_7)=28, \quad t_{п.H}(a_7)=33, \quad t_{п.O}(a_7)=18, \quad R_{п}(a_7)=5, \quad R_c(a_7)=5.$$

3) Путь семь.  $t_{кр} = 29$ .  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=7$ ,  $t_p(x_3)=11$ ,  $t_p(x_4)=5$ ,  $t_p(x_5)=17$ ,

$$t_p(x_6)=17, \quad t_p(x_7)=29, \quad t_{п}(x_7)=29, \quad t_{п}(x_6)=17, \quad t_{п}(x_5)=17, \quad t_{п}(x_4)=13, \quad t_{п}(x_3)=13,$$

$$t_{п}(x_2)=7, \quad t_{п}(x_1)=0; \quad R(x_1)=R(x_2)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0,$$

$$R(x_3)=6, \quad R(x_4)=8;$$

$$t_{p.H}(a_1)=0, \quad t_{p.O}(a_1)=7, \quad t_{п.H}(a_1)=0, \quad t_{п.O}(a_1)=7,$$

$$R_{п}(a_1)=0, \quad R_c(a_1)=0,$$

$$t_{p.H}(a_2)=0, \quad t_{p.O}(a_2)=11, \quad t_{п.H}(a_2)=2, \quad t_{п.O}(a_2)=13,$$

$$R_{п}(a_2)=2, \quad R_c(a_2)=0,$$

$$t_{p.H}(a_3)=0, \quad t_{p.O}(a_3)=5, \quad t_{п.H}(a_3)=8, \quad t_{п.O}(a_3)=13,$$

$$R_{п}(a_3)=8, \quad R_c(a_3)=0,$$

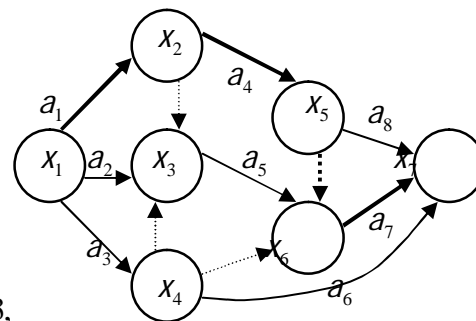
$$t_{p.H}(a_4)=7, \quad t_{p.O}(a_4)=17, \quad t_{п.H}(a_4)=7, \quad t_{п.O}(a_4)=17, \quad R_{п}(a_4)=0, \quad R_c(a_4)=0,$$

$$t_{p.H}(a_5)=11, \quad t_{p.O}(a_5)=15, \quad t_{п.H}(a_5)=13, \quad t_{п.O}(a_5)=17, \quad R_{п}(a_5)=2, \quad R_c(a_5)=2,$$

$$t_{p.H}(a_6)=5, \quad t_{p.O}(a_6)=18, \quad t_{п.H}(a_6)=16, \quad t_{п.O}(a_6)=29, \quad R_{п}(a_6)=11, \quad R_c(a_6)=11,$$

$$t_{p.H}(a_7)=17, \quad t_{p.O}(a_7)=29, \quad t_{п.H}(a_7)=17, \quad t_{п.O}(a_7)=29, \quad R_{п}(a_7)=0, \quad R_c(a_7)=0,$$

$$t_{p.H}(a_8)=17, \quad t_{p.O}(a_8)=25, \quad t_{п.H}(a_8)=21, \quad t_{п.O}(a_8)=29, \quad R_{п}(a_8)=4, \quad R_c(a_8)=4.$$



4) Путь восемь.  $t_{кр} = 17$ .  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=3$ ,  $t_p(x_3)=4$ ,  $t_p(x_4)=4$ ,  $t_p(x_5)=6$ ,

$$t_p(x_6)=13, \quad t_p(x_7)=10, \quad t_p(x_8)=17, \quad t_{п}(x_8)=17,$$

$$t_{п}(x_7)=11, \quad t_{п}(x_6)=13, \quad t_{п}(x_5)=9, \quad t_{п}(x_4)=4,$$

$$t_{п}(x_3)=4, \quad t_{п}(x_2)=6, \quad t_{п}(x_1)=0;$$

$$R(x_1)=R(x_3)=R(x_4)=R(x_6)=R(x_8)=0, \quad R(x_7)=1,$$

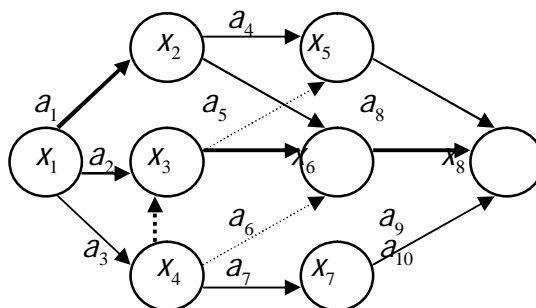
$$R(x_5)=3, \quad R(x_6)=1;$$

$$t_{p.H}(a_1)=0, \quad t_{p.O}(a_1)=3, \quad t_{п.H}(a_1)=3,$$

$$t_{п.O}(a_1)=6, \quad R_{п}(a_1)=3, \quad R_c(a_1)=0,$$

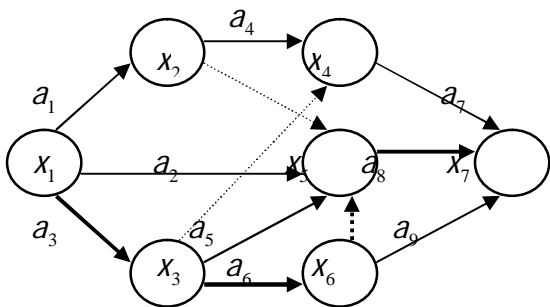
$$t_{p.H}(a_2)=0, \quad t_{p.O}(a_2)=2, \quad t_{п.H}(a_2)=2,$$

$$t(a_2)=4, \quad R(a_2)=2, \quad R_c(a_2)=2,$$



$$\begin{array}{llllll}
t_{p.h}(a_3)=0, & t_{p.o}(a_3)=4, & t_{п.н}(a_3)=0, & t_{п.о}(a_3)=4, & R_{п}(a_1)=0, & R_c(a_1)=0, \\
t_{p.h}(a_4)=3, & t_{p.o}(a_4)=6, & t_{п.н}(a_4)=6, & t_{п.о}(a_4)=9, & R_{п}(a_4)=3, & R_c(a_4)=0, \\
t_{p.h}(a_5)=3, & t_{p.o}(a_5)=8, & t_{п.н}(a_5)=8, & t_{п.о}(a_5)=13, & R_{п}(a_5)=5, & R_c(a_5)=5, \\
t_{p.h}(a_6)=4, & t_{p.o}(a_6)=13, & t_{п.н}(a_6)=4, & t_{п.о}(a_6)=13, & R_{п}(a_6)=0, & R_c(a_6)=0, \\
t_{p.h}(a_7)=4, & t_{p.o}(a_7)=10, & t_{п.н}(a_7)=5, & t_{п.о}(a_7)=11, & R_{п}(a_7)=1, & R_c(a_7)=0, \\
t_{p.h}(a_8)=6, & t_{p.o}(a_8)=14, & t_{п.н}(a_8)=11, & t_{п.о}(a_8)=17, & R_{п}(a_8)=3, & R_c(a_8)=3, \\
t_{p.h}(a_9)=13, & t_{p.o}(a_9)=17, & t_{п.н}(a_9)=13, & t_{п.о}(a_9)=17, & R_{п}(a_9)=0, & R_c(a_9)=0, \\
t_{p.h}(a_{10})=10, & t_{p.o}(a_{10})=16, & t_{п.н}(a_{10})=11, & t_{п.о}(a_{10})=17, & R_{п}(a_{10})=1, & R_c(a_{10})=1.
\end{array}$$

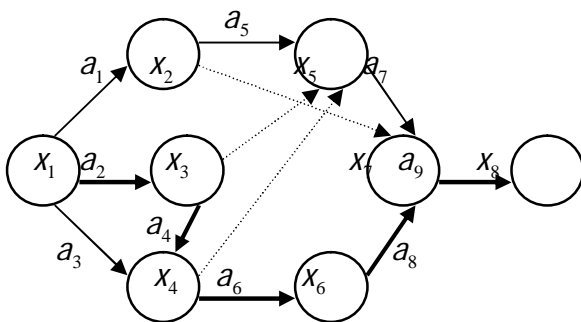
5) Путь семь.  $t_{кр} = 26$ .  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=6$ ,  $t_p(x_3)=8$ ,  $t_p(x_4)=11$ ,  $t_p(x_5)=15$ ,



$$\begin{array}{l}
t_p(x_6)=15, \quad t_p(x_7)=26, \quad t_{п}(x_7)=26, \quad t_{п}(x_6)=15, \\
t_{п}(x_5)=15, \quad t_{п}(x_4)=17, \quad t_{п}(x_3)=8, \quad t_{п}(x_2)=12, \\
t_{п}(x_1)=0; \\
R(x_1)=R(x_3)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0, \quad R(x_2)=6, \\
R(x_4)=6;
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
t_{p.h}(a_1)=0, & t_{p.o}(a_1)=6, & t_{п.н}(a_1)=6, & t_{п.о}(a_1)=12, & R_{п}(a_1)=6, & R_c(a_1)=0, \\
t_{p.h}(a_2)=0, & t_{p.o}(a_2)=9, & t_{п.н}(a_2)=6, & t_{п.о}(a_2)=15, & R_{п}(a_2)=6, & R_c(a_2)=6, \\
t_{p.h}(a_3)=0, & t_{p.o}(a_3)=8, & t_{п.н}(a_3)=0, & t_{п.о}(a_3)=8, & R_{п}(a_3)=0, & R_c(a_3)=0, \\
t_{p.h}(a_4)=6, & t_{p.o}(a_4)=11, & t_{п.н}(a_4)=12, & t_{п.о}(a_4)=17, & R_{п}(a_4)=6, & R_c(a_4)=0, \\
t_{p.h}(a_5)=8, & t_{p.o}(a_5)=11, & t_{п.н}(a_5)=12, & t_{п.о}(a_5)=15, & R_{п}(a_5)=3, & R_c(a_5)=3, \\
t_{p.h}(a_6)=8, & t_{p.o}(a_6)=15, & t_{п.н}(a_6)=8, & t_{п.о}(a_6)=15, & R_{п}(a_6)=0, & R_c(a_6)=0, \\
t_{p.h}(a_7)=11, & t_{p.o}(a_7)=20, & t_{п.н}(a_7)=17, & t_{п.о}(a_7)=26, & R_{п}(a_7)=6, & R_c(a_7)=6, \\
t_{p.h}(a_8)=15, & t_{p.o}(a_8)=26, & t_{п.н}(a_8)=15, & t_{п.о}(a_8)=26, & R_{п}(a_8)=0, & R_c(a_8)=0, \\
t_{p.h}(a_9)=15, & t_{p.o}(a_9)=25, & t_{п.н}(a_9)=16, & t_{п.о}(a_9)=26, & R_{п}(a_9)=1, & R_c(a_9)=1.
\end{array}$$

6) Путь шесть.  $t_{кр} = 50$ .  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=11$ ,  $t_p(x_3)=9$ ,  $t_p(x_4)=14$ ,  $t_p(x_5)=17$ ,



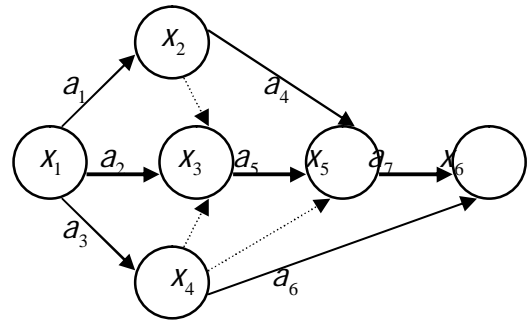
$$\begin{array}{l}
t_p(x_6)=22, \quad t_p(x_7)=35, \quad t_p(x_8)=50, \\
t_{п}(x_8)=50, \quad t_{п}(x_7)=35, \quad t_{п}(x_6)=22, \\
t_{п}(x_5)=25, \quad t_{п}(x_4)=14, \quad t_{п}(x_3)=9, \\
t_{п}(x_2)=19, \quad t_{п}(x_1)=0; \\
R(x_1)=R(x_2)=R(x_4)=R(x_6)=R(x_7)=R(x_8)=0, \\
R(x_3)=8, \quad R(x_5)=8;
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
t_{p.h}(a_1)=0, & t_{p.o}(a_1)=11, & t_{п.н}(a_1)=8, & t_{п.о}(a_1)=19, & R_{п}(a_1)=8, & R_c(a_1)=0, \\
t_{p.h}(a_2)=0, & t_{p.o}(a_2)=9, & t_{п.н}(a_2)=0, & t_{п.о}(a_2)=9, & R_{п}(a_2)=0, & R_c(a_2)=0,
\end{array}$$

$t_{p.H}(a_3)=0,$	$t_{p.O}(a_3)=7,$	$t_{п.н}(a_3)=7,$	$t_{п.о}(a_3)=14,$	$R_{п}(a_3)=7,$	$R_c(a_3)=7,$
$t_{p.H}(a_4)=9,$	$t_{p.O}(a_4)=14,$	$t_{п.н}(a_4)=9,$	$t_{п.о}(a_4)=14,$	$R_{п}(a_4)=0,$	$R_c(a_4)=0,$
$t_{p.H}(a_5)=11,$	$t_{p.O}(a_5)=17,$	$t_{п.н}(a_5)=19,$	$t_{п.о}(a_5)=25,$	$R_{п}(a_5)=8,$	$R_c(a_5)=0,$
$t_{p.H}(a_6)=14,$	$t_{p.O}(a_6)=22,$	$t_{п.н}(a_6)=14,$	$t_{п.о}(a_6)=22,$	$R_{п}(a_6)=0,$	$R_c(a_6)=0,$
$t_{p.H}(a_7)=17,$	$t_{p.O}(a_7)=27,$	$t_{п.н}(a_7)=25,$	$t_{п.о}(a_7)=35,$	$R_{п}(a_7)=8,$	$R_c(a_7)=8,$
$t_{p.H}(a_8)=22,$	$t_{p.O}(a_8)=35,$	$t_{п.н}(a_8)=22,$	$t_{п.о}(a_8)=35,$	$R_{п}(a_8)=0,$	$R_c(a_8)=0,$
$t_{p.H}(a_9)=35,$	$t_{p.O}(a_9)=50,$	$t_{п.н}(a_9)=35,$	$t_{п.о}(a_9)=50,$	$R_{п}(a_9)=0,$	$R_c(a_9)=0.$

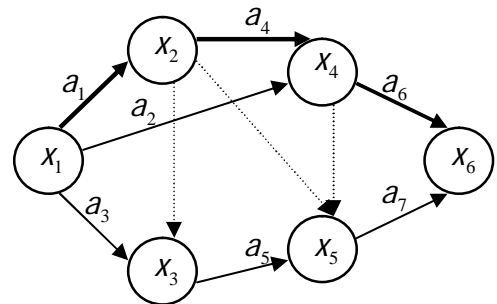
7) Путь шесть.  $t_{кр} = 15$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 3$ ,  $t_p(x_3) = 6$ ,  $t_p(x_4) = 4$ ,  $t_p(x_5) = 10$ ,  
 $t_p(x_6) = 15$ ,  $t_{п}(x_6) = 15$ ,  $t_{п}(x_5) = 10$ ,  $t_{п}(x_4) = 8$ ,  
 $t_{п}(x_3) = 6$ ,  $t_{п}(x_2) = 4$ ,  $t_{п}(x_1) = 0$ ;  
 $R(x_1) = R(x_3) = R(x_5) = R(x_6) = 0$ ,  $R(x_2) = 1$ ,  
 $R(x_4) = 4$ ;

$t_{p.H}(a_1)=0,$	$t_{p.O}(a_1)=3,$	$t_{п.н}(a_1)=1,$			
$t_{п.о}(a_1)=4,$	$R_{п}(a_1)=1,$	$R_c(a_1)=0,$			
$t_{p.H}(a_2)=0,$	$t_{p.O}(a_2)=6,$	$t_{п.н}(a_2)=0,$			
$t_{п.о}(a_2)=6,$	$R_{п}(a_2)=0,$	$R_c(a_2)=0,$			
$t_{p.H}(a_3)=0,$	$t_{p.O}(a_3)=4,$	$t_{п.н}(a_3)=4,$	$t_{п.о}(a_3)=8,$	$R_{п}(a_3)=4,$	$R_c(a_3)=0,$
$t_{p.H}(a_4)=3,$	$t_{p.O}(a_4)=9,$	$t_{п.н}(a_4)=4,$	$t_{п.о}(a_4)=10,$	$R_{п}(a_4)=1,$	$R_c(a_4)=1,$
$t_{p.H}(a_5)=6,$	$t_{p.O}(a_5)=10,$	$t_{п.н}(a_5)=6,$	$t_{п.о}(a_5)=10,$	$R_{п}(a_5)=0,$	$R_c(a_5)=0,$
$t_{p.H}(a_6)=4,$	$t_{p.O}(a_6)=11,$	$t_{п.н}(a_6)=8,$	$t_{п.о}(a_6)=15,$	$R_{п}(a_6)=4,$	$R_c(a_6)=4,$
$t_{p.H}(a_7)=10,$	$t_{p.O}(a_7)=15,$	$t_{п.н}(a_7)=10,$	$t_{п.о}(a_7)=15,$	$R_{п}(a_7)=0,$	$R_c(a_7)=0.$

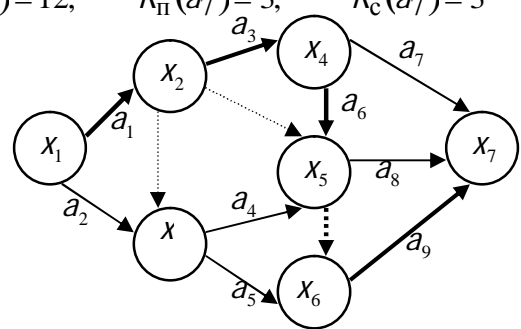


8) Путь семь.  $t_{кр} = 25$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 10$ ,  $t_p(x_3) = 10$ ,  $t_p(x_4) = 16$ ,  $t_p(x_5) = 17$ ,  
 $t_p(x_6) = 25$ ,  $t_{п}(x_6) = 25$ ,  $t_{п}(x_5) = 20$ ,  $t_{п}(x_4) = 16$ ,  
 $t_{п}(x_3) = 13$ ,  $t_{п}(x_2) = 10$ ,  $t_{п}(x_1) = 0$ ;  
 $R(x_1) = R(x_2) = R(x_4) = R(x_6) = 0$ ,  $R(x_3) = 3$ ,  $R(x_5) = 3$ ;

$t_{p.H}(a_1)=0,$	$t_{p.O}(a_1)=10,$	$t_{п.н}(a_1)=0,$			
$t_{п.о}(a_1)=10,$	$R_{п}(a_1)=0,$	$R_c(a_1)=0,$			
$t_{p.H}(a_2)=0,$	$t_{p.O}(a_2)=12,$	$t_{п.н}(a_2)=4,$			
$t_{п.о}(a_2)=16,$	$R_{п}(a_2)=4,$	$R_c(a_2)=4,$			
$t_{p.H}(a_3)=0,$	$t_{p.O}(a_3)=9,$	$t_{п.н}(a_3)=4,$	$t_{п.о}(a_3)=13,$	$R_{п}(a_3)=4,$	$R_c(a_3)=1,$
$t_{p.H}(a_4)=10,$	$t_{p.O}(a_4)=16,$	$t_{п.н}(a_4)=10,$	$t_{п.о}(a_4)=16,$	$R_{п}(a_4)=0,$	$R_c(a_4)=0,$
$t_{p.H}(a_5)=10,$	$t_{p.O}(a_5)=17,$	$t_{п.н}(a_5)=14,$	$t_{п.о}(a_5)=20,$	$R_{п}(a_5)=3,$	$R_c(a_5)=0,$
$t_{p.H}(a_6)=16,$	$t_{p.O}(a_6)=25,$	$t_{п.н}(a_6)=16,$	$t_{п.о}(a_6)=25,$	$R_{п}(a_6)=0,$	$R_c(a_6)=0,$
$t_{p.H}(a_7)=17,$	$t_{p.O}(a_7)=22,$	$t_{п.н}(a_7)=20,$	$t_{п.о}(a_7)=12,$	$R_{п}(a_7)=3,$	$R_c(a_7)=3$



9) Путь одиннадцать.  $t_{кр} = 32$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  
 $t_p(x_2) = 5$ ,  $t_p(x_3) = 6$ ,  $t_p(x_4) = 14$ ,  $t_p(x_5) = 20$ ,

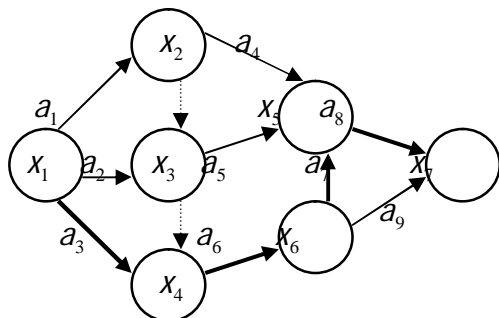




$$\begin{aligned}
& t_p(x_6)=20, \quad t_p(x_7)=32, \quad t_{\Pi}(x_7)=32, \quad t_{\Pi}(x_6)=20, \quad t_{\Pi}(x_5)=20, \quad t_{\Pi}(x_4)=14, \quad t_{\Pi}(x_3)=9, \\
& t_{\Pi}(x_2)=5, \quad t_{\Pi}(x_1)=0; \\
& R(x_1)=R(x_2)=R(x_4)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0, \\
& R(x_3)=3; \\
& t_{p.H}(a_1)=0, \quad t_{p.o}(a_1)=5, \quad t_{\Pi.H}(a_1)=0, \\
& t_{\Pi.o}(a_1)=5, \quad R_{\Pi}(a_1)=0, \quad R_c(a_1)=0, \\
& t_{p.H}(a_2)=0, \quad t_{p.o}(a_2)=6, \quad t_{\Pi.H}(a_2)=3, \\
& t_{\Pi.o}(a_2)=9, \quad R_{\Pi}(a_2)=3, \quad R_c(a_2)=0, \\
& t_{p.H}(a_3)=5, \quad t_{p.o}(a_3)=14, \quad t_{\Pi.H}(a_3)=5, \quad t_{\Pi.o}(a_3)=14, \quad R_{\Pi}(a_3)=0, \quad R_c(a_3)=0, \\
& t_{p.H}(a_4)=6, \quad t_{p.o}(a_4)=17, \quad t_{\Pi.H}(a_4)=9, \quad t_{\Pi.o}(a_4)=20, \quad R_{\Pi}(a_4)=3, \quad R_c(a_4)=3
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llllll}
t_{p.H}(a_5)=6, & t_{p.o}(a_5)=10, & t_{п.н}(a_5)=16, & t_{п.о}(a_5)=20, & R_{п}(a_5)=10, & R_c(a_5)=10, \\
t_{p.H}(a_6)=14, & t_{p.o}(a_6)=20, & t_{п.н}(a_6)=14, & t_{п.о}(a_6)=20, & R_{п}(a_6)=0, & R_c(a_6)=0, \\
t_{p.H}(a_7)=14, & t_{p.o}(a_7)=24, & t_{п.н}(a_7)=22, & t_{п.о}(a_7)=32, & R_{п}(a_7)=8, & R_c(a_7)=8, \\
t_{p.H}(a_8)=20, & t_{p.o}(a_8)=28, & t_{п.н}(a_8)=24, & t_{п.о}(a_8)=32, & R_{п}(a_8)=4, & R_c(a_8)=4, \\
t_{p.H}(a_9)=20, & t_{p.o}(a_9)=32, & t_{п.н}(a_9)=20, & t_{п.о}(a_9)=32, & R_{п}(a_9)=0, & R_c(a_9)=0.
\end{array}$$

10) Путь девять.  $t_{кр} = 51$ .  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=10$ ,  $t_p(x_3)=10$ ,  $t_p(x_4)=12$ ,  $t_p(x_5)=40$ ,



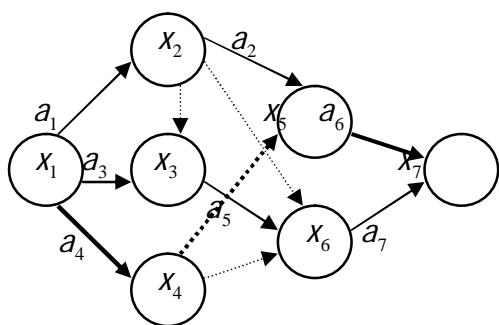
$$\begin{array}{llll}
t_p(x_6)=25, & t_p(x_7)=51, & t_{п}(x_7)=51, & t_{п}(x_6)=25, \\
t_{п}(x_5)=40, & t_{п}(x_4)=12, & t_{п}(x_3)=12, & t_{п}(x_2)=12, \\
t_{п}(x_1)=0;
\end{array}$$

$$R(x_1)=R(x_4)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0, \quad R(x_2)=2, \quad R(x_3)=2;$$

$$\begin{array}{lll}
t_{p.H}(a_1)=0, & t_{p.o}(a_1)=10, & t_{п.н}(a_1)=2, \\
t_{п.о}(a_1)=12, & R_{п}(a_1)=2, & R_c(a_1)=0,
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
t_{p.H}(a_2)=0, & t_{p.o}(a_2)=9, & t_{п.н}(a_2)=3, & t_{п.о}(a_2)=12, & R_{п}(a_2)=3, & R_c(a_2)=1, \\
t_{p.H}(a_3)=0, & t_{p.o}(a_3)=12, & t_{п.н}(a_3)=0, & t_{п.о}(a_3)=12, & R_{п}(a_3)=0, & R_c(a_3)=0, \\
t_{p.H}(a_4)=10, & t_{p.o}(a_4)=17, & t_{п.н}(a_4)=33, & t_{п.о}(a_4)=40, & R_{п}(a_4)=23, & R_c(a_4)=8, \\
t_{p.H}(a_5)=10, & t_{p.o}(a_5)=18, & t_{п.н}(a_5)=32, & t_{п.о}(a_5)=40, & R_{п}(a_5)=22, & R_c(a_5)=7, \\
t_{p.H}(a_6)=12, & t_{p.o}(a_6)=25, & t_{п.н}(a_6)=12, & t_{п.о}(a_6)=25, & R_{п}(a_6)=0, & R_c(a_6)=0, \\
t_{p.H}(a_7)=25, & t_{p.o}(a_7)=40, & t_{п.н}(a_7)=25, & t_{п.о}(a_7)=40, & R_{п}(a_7)=0, & R_c(a_7)=0, \\
t_{p.H}(a_8)=40, & t_{p.o}(a_8)=51, & t_{п.н}(a_8)=40, & t_{п.о}(a_8)=51, & R_{п}(a_8)=0, & R_c(a_8)=0, \\
t_{p.H}(a_9)=25, & t_{p.o}(a_9)=34, & t_{п.н}(a_9)=42, & t_{п.о}(a_9)=51, & R_{п}(a_9)=17, & R_c(a_9)=17.
\end{array}$$

11) Путь шесть.  $t_{кр} = 19$ .  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=8$ ,  $t_p(x_3)=10$ ,  $t_p(x_4)=13$ ,  $t_p(x_5)=13$ ,



$$\begin{array}{llll}
t_p(x_6)=13, & t_p(x_7)=19, & t_{п}(x_7)=19, & t_{п}(x_6)=14, \\
t_{п}(x_5)=13, & t_{п}(x_4)=13, & t_{п}(x_3)=11, & t_{п}(x_2)=9, \\
t_{п}(x_1)=0;
\end{array}$$

$$R(x_1)=R(x_4)=R(x_5)=R(x_7)=0, \quad R(x_2)=1, \quad R(x_3)=1, \quad R(x_6)=1;$$

$$\begin{array}{lll}
t_{p.H}(a_1)=0, & t_{p.o}(a_1)=8, & t_{п.н}(a_1)=1, \\
t_{п.о}(a_1)=9, & R_{п}(a_1)=1, & R_c(a_1)=0,
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
t_{p.H}(a_2)=8, & t_{p.o}(a_2)=12, & t_{п.н}(a_2)=9, & t_{п.о}(a_2)=13, & R_{п}(a_2)=1, & R_c(a_2)=1, \\
t_{p.H}(a_3)=0, & t_{p.o}(a_3)=10, & t_{п.н}(a_3)=1, & t_{п.о}(a_3)=11, & R_{п}(a_3)=1, & R_c(a_3)=0, \\
t_{p.H}(a_4)=0, & t_{p.o}(a_4)=13, & t_{п.н}(a_4)=0, & t_{п.о}(a_4)=13, & R_{п}(a_4)=0, & R_c(a_4)=0, \\
t_{p.H}(a_5)=10, & t_{p.o}(a_5)=13, & t_{п.н}(a_5)=11, & t_{п.о}(a_5)=14, & R_{п}(a_5)=1, & R_c(a_5)=0, \\
t_{p.H}(a_6)=13, & t_{p.o}(a_6)=19, & t_{п.н}(a_6)=13, & t_{п.о}(a_6)=19, & R_{п}(a_6)=0, & R_c(a_6)=0, \\
t_{p.H}(a_7)=13, & t_{p.o}(a_7)=18, & t_{п.н}(a_7)=14, & t_{п.о}(a_7)=19, & R_{п}(a_7)=1, & R_c(a_7)=1.
\end{array}$$

12) Путь семь.  $t_{кр} = 21$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 6$ ,  $t_p(x_3) = 6$ ,  $t_p(x_4) = 18$ ,  $t_p(x_5) = 18$ ,  
 $t_p(x_6) = 28$ ,  $t_{п}(x_6) = 28$ ,  $t_{п}(x_5) = 18$ ,  $t_{п}(x_4) = 18$ ,

$t_{п}(x_3) = 6$ , [REDACTED],  $t_{п}(x_1) = 0$ ;

$R(x_1) = R(x_2) = R(x_3) = R(x_4) = R(x_5) = R(x_6) = 0$ ;

$t_{п.н}(a_1) = 0$ ,  $t_{п.о}(a_1) = 4$ ,  $t_{п.н}(a_1) = 2$ ,

$t_{п.о}(a_1) = 6$ ,  $R_{п}(a_1) = 2$ ,  $R_c(a_1) = 2$ ,

$t_{п.н}(a_2) = 0$ ,  $t_{п.о}(a_2) = 6$ ,  $t_{п.н}(a_2) = 0$ ,

$t_{п.о}(a_2) = 6$ ,  $R_{п}(a_2) = 0$ ,  $R_c(a_2) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_3) = 6$ ,  $t_{п.о}(a_3) = 18$ ,  $t_{п.н}(a_3) = 6$ ,  $t_{п.о}(a_3) = 18$ ,

$R_{п}(a_3) = 0$ ,  $R_c(a_3) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_4) = 6$ ,  $t_{п.о}(a_4) = 10$ ,  $t_{п.н}(a_4) = 14$ ,  $t_{п.о}(a_4) = 18$ ,

$R_{п}(a_4) = 10$ ,  $R_c(a_4) = 10$ ,

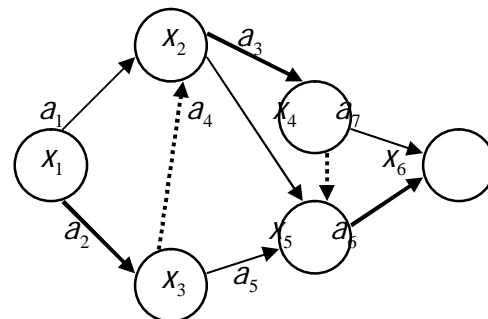
$t_{п.н}(a_5) = 6$ ,  $t_{п.о}(a_5) = 11$ ,  $t_{п.н}(a_5) = 13$ ,  $t_{п.о}(a_5) = 18$ ,

$R_{п}(a_5) = 7$ ,  $R_c(a_5) = 7$ ,

$t_{п.н}(a_6) = 18$ ,  $t_{п.о}(a_6) = 28$ ,  $t_{п.н}(a_6) = 18$ ,  $t_{п.о}(a_6) = 28$ ,

$R_{п}(a_6) = 0$ ,  $R_c(a_6) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_7) = 18$ ,  $t_{п.о}(a_7) = 25$ ,  $t_{п.н}(a_7) = 21$ ,  $t_{п.о}(a_7) = 28$ ,  $R_{п}(a_7) = 3$ ,  $R_c(a_7) = 3$ .



13) Путь десять.  $t_{кр} = 30$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 8$ ,  $t_p(x_3) = 11$ ,  $t_p(x_4) = 18$ ,  $t_p(x_5) = 23$ ,

$t_p(x_6) = 25$ ,  $t_p(x_7) = 30$ ,  $t_{п}(x_7) = 30$ ,  $t_{п}(x_6) = 25$ ,

$t_{п}(x_5) = 24$ ,  $t_{п}(x_4) = 21$ ,  $t_{п}(x_3) = 11$ ,  $t_{п}(x_2) = 11$ ,

$t_{п}(x_1) = 0$ ;

$R(x_1) = R(x_3) = R(x_6) = R(x_7) = 0$ ,  $R(x_2) = 3$ ,

$R(x_4) = 3$ ,  $R(x_5) = 1$ ;

$t_{п.н}(a_1) = 0$ ,  $t_{п.о}(a_1) = 8$ ,  $t_{п.н}(a_1) = 3$ ,

$t_{п.о}(a_1) = 11$ ,  $R_{п}(a_1) = 3$ ,  $R_c(a_1) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_2) = 0$ ,  $t_{п.о}(a_2) = 11$ ,  $t_{п.н}(a_2) = 0$ ,  $t_{п.о}(a_2) = 11$ ,

$R_{п}(a_2) = 0$ ,  $R_c(a_2) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_3) = 8$ ,  $t_{п.о}(a_3) = 18$ ,  $t_{п.н}(a_3) = 11$ ,  $t_{п.о}(a_3) = 21$ ,

$R_{п}(a_3) = 3$ ,  $R_c(a_3) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_4) = 8$ ,  $t_{п.о}(a_4) = 14$ ,  $t_{п.н}(a_4) = 18$ ,  $t_{п.о}(a_4) = 24$ ,

$R_{п}(a_4) = 10$ ,  $R_c(a_4) = 9$ ,

$t_{п.н}(a_5) = 11$ ,  $t_{п.о}(a_5) = 23$ ,  $t_{п.н}(a_5) = 12$ ,  $t_{п.о}(a_5) = 24$ ,

$R_{п}(a_5) = 1$ ,  $R_c(a_5) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_6) = 11$ ,  $t_{п.о}(a_6) = 25$ ,  $t_{п.н}(a_6) = 11$ ,  $t_{п.о}(a_6) = 25$ ,

$R_{п}(a_6) = 0$ ,  $R_c(a_6) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_7) = 18$ ,  $t_{п.о}(a_7) = 27$ ,  $t_{п.н}(a_7) = 21$ ,  $t_{п.о}(a_7) = 30$ ,

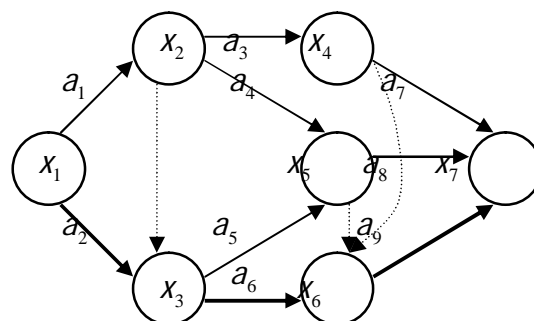
$R_{п}(a_7) = 3$ ,  $R_c(a_7) = 3$ ,

$t_{п.н}(a_8) = 23$ ,  $t_{п.о}(a_8) = 29$ ,  $t_{п.н}(a_8) = 24$ ,  $t_{п.о}(a_8) = 30$ ,

$R_{п}(a_8) = 1$ ,  $R_c(a_8) = 1$ ,

$t_{п.н}(a_9) = 25$ ,  $t_{п.о}(a_9) = 30$ ,  $t_{п.н}(a_9) = 25$ ,  $t_{п.о}(a_9) = 30$ ,

$R_{п}(a_9) = 0$ ,  $R_c(a_9) = 0$ .



14) Путь семь.  $t_{кр} = 22$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 6$ ,  $t_p(x_3) = 6$ ,  $t_p(x_4) = 8$ ,  $t_p(x_5) = 17$ ,

$t_p(x_6) = 12$ ,  $t_p(x_7) = 22$ ,  $t_{п}(x_7) = 22$ ,  $t_{п}(x_6) = 13$ ,

$t_{п}(x_5) = 17$ ,  $t_{п}(x_4) = 10$ ,  $t_{п}(x_3) = 6$ ,  $t_{п}(x_2) = 6$ ,  $t_{п}(x_1) = 0$ ;

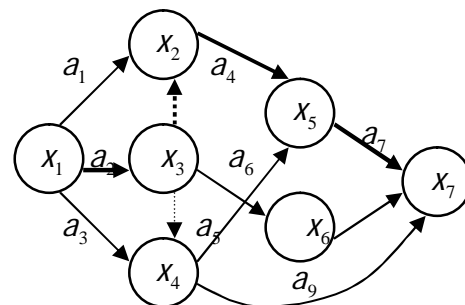
$R(x_1) = R(x_2) = R(x_3) = R(x_5) = R(x_7) = 0$ ,  $R(x_4) = 2$ ,

$R(x_6) = 1$ ;

$t_{п.н}(a_1) = 0$ ,  $t_{п.о}(a_1) = 5$ ,  $t_{п.н}(a_1) = 1$ ,

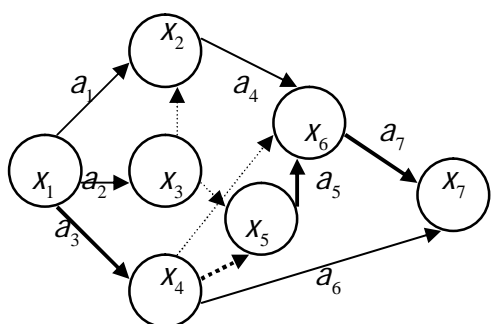
$t_{п.о}(a_1) = 6$ ,  $R_{п}(a_1) = 1$ ,  $R_c(a_1) = 1$ ,

$t_{п.н}(a_2) = 0$ ,  $t_{п.о}(a_2) = 6$ ,  $t_{п.н}(a_2) = 0$ ,



$$\begin{aligned}
& t_{\Pi.o}(a_2)=6, \quad R_{\Pi}(a_2)=0, \quad R_c(a_2)=0, \\
& t_{p.H}(a_3)=0, \quad t_{p.o}(a_3)=8, \quad t_{\Pi.H}(a_3)=2, \quad t_{\Pi.o}(a_3)=10, \quad R_{\Pi}(a_3)=2, \quad R_c(a_3)=0, \\
& t_{p.H}(a_4)=6, \quad t_{p.o}(a_4)=17, \quad t_{\Pi.H}(a_4)=6, \quad t_{\Pi.o}(a_4)=17, \quad R_{\Pi}(a_4)=0, \quad R_c(a_4)=0, \\
& t_{p.H}(a_5)=8, \quad t_{p.o}(a_5)=15, \quad t_{\Pi.H}(a_5)=10, \quad t_{\Pi.o}(a_5)=17, \quad R_{\Pi}(a_5)=2, \quad R_c(a_5)=2, \\
& t_{p.H}(a_6)=6, \quad t_{p.o}(a_6)=12, \quad t_{\Pi.H}(a_6)=7, \quad t_{\Pi.o}(a_6)=13, \quad R_{\Pi}(a_6)=1, \quad R_c(a_6)=0, \\
& t_{p.H}(a_7)=17, \quad t_{p.o}(a_7)=22, \quad t_{\Pi.H}(a_7)=17, \quad t_{\Pi.o}(a_7)=22, \quad R_{\Pi}(a_7)=0, \quad R_c(a_7)=0, \\
& t_{p.H}(a_8)=12, \quad t_{p.o}(a_8)=21, \quad t_{\Pi.H}(a_8)=13, \quad t_{\Pi.o}(a_8)=22, \quad R_{\Pi}(a_8)=1, \quad R_c(a_8)=1, \\
& t_{p.H}(a_9)=8, \quad t_{p.o}(a_9)=15, \quad t_{\Pi.H}(a_9)=15, \quad t_{\Pi.o}(a_9)=22, \quad R_{\Pi}(a_9)=7, \quad R_c(a_9)=7.
\end{aligned}$$

15) Путь шесть.  $t_{кр} = 22$ .  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=7$ ,  $t_p(x_3)=7$ ,  $t_p(x_4)=10$ ,  $t_p(x_5)=10$ ,



$$\begin{aligned}
& t_p(x_6)=17, \quad t_p(x_7)=22, \quad t_{\Pi}(x_7)=22, \quad t_{\Pi}(x_6)=17, \\
& t_{\Pi}(x_5)=10, \quad t_{\Pi}(x_4)=10, \quad t_{\Pi}(x_3)=10, \quad t_{\Pi}(x_2)=12, \\
& t_{\Pi}(x_1)=0;
\end{aligned}$$

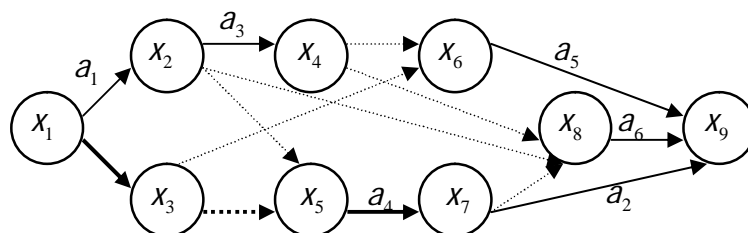
$$R(x_1)=R(x_4)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0, \quad R(x_2)=5, \\
R(x_3)=3;$$

$$t_{p.H}(a_1)=0, \quad t_{p.o}(a_1)=5, \quad t_{\Pi.H}(a_1)=7,$$

$$t_{\Pi.o}(a_1)=12, \quad R_{\Pi}(a_1)=7, \quad R_c(a_1)=2,$$

$$\begin{aligned}
& t_{p.H}(a_2)=0, \quad t_{p.o}(a_2)=7, \quad t_{\Pi.H}(a_2)=3, \quad t_{\Pi.o}(a_2)=10, \quad R_{\Pi}(a_2)=3, \quad R_c(a_2)=0, \\
& t_{p.H}(a_3)=0, \quad t_{p.o}(a_3)=10, \quad t_{\Pi.H}(a_3)=0, \quad t_{\Pi.o}(a_3)=10, \quad R_{\Pi}(a_3)=0, \quad R_c(a_3)=0, \\
& t_{p.H}(a_4)=7, \quad t_{p.o}(a_4)=12, \quad t_{\Pi.H}(a_4)=12, \quad t_{\Pi.o}(a_4)=17, \quad R_{\Pi}(a_4)=5, \quad R_c(a_4)=5, \\
& t_{p.H}(a_5)=10, \quad t_{p.o}(a_5)=17, \quad t_{\Pi.H}(a_5)=10, \quad t_{\Pi.o}(a_5)=17, \quad R_{\Pi}(a_5)=0, \quad R_c(a_5)=0, \\
& t_{p.H}(a_6)=10, \quad t_{p.o}(a_6)=20, \quad t_{\Pi.H}(a_6)=12, \quad t_{\Pi.o}(a_6)=22, \quad R_{\Pi}(a_6)=2, \quad R_c(a_6)=2, \\
& t_{p.H}(a_7)=17, \quad t_{p.o}(a_7)=22, \quad t_{\Pi.H}(a_7)=17, \quad t_{\Pi.o}(a_7)=22, \quad R_{\Pi}(a_7)=0, \quad R_c(a_7)=0.
\end{aligned}$$

16) Путь восемь.  $t_{кр} = 23$ .  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=5$ ,  $t_p(x_3)=6$ ,  $t_p(x_4)=13$ ,  $t_p(x_5)=6$ ,  $t_p(x_6)=13$ ,  $t_p(x_7)=16$ ,  $t_p(x_8)=16$ ,  $t_p(x_9)=23$ ,  $t_{\Pi}(x_9)=23$ ,  $t_{\Pi}(x_8)=18$ ,  $t_{\Pi}(x_7)=16$ ,



$$t_{\Pi}(x_6)=16, \quad t_{\Pi}(x_5)=6, \quad t_{\Pi}(x_4)=16, \quad t_{\Pi}(x_3)=6, \quad t_{\Pi}(x_2)=6, \quad t_{\Pi}(x_1)=0;$$

$$R(x_1)=R(x_3)=R(x_5)=R(x_7)=R(x_9)=0, \quad R(x_2)=1, \quad R(x_4)=3, \quad R(x_6)=10, \quad R(x_8)=2;$$

$$t_{p.H}(a_1)=0, \quad t_{p.o}(a_1)=5, \quad t_{\Pi.H}(a_1)=1, \quad t_{\Pi.o}(a_1)=6, \quad R_{\Pi}(a_1)=1, \quad R_c(a_1)=0,$$

$$t_{p.H}(a_2)=0, \quad t_{p.o}(a_2)=6, \quad t_{\Pi.H}(a_2)=0, \quad t_{\Pi.o}(a_2)=6, \quad R_{\Pi}(a_2)=0, \quad R_c(a_2)=0,$$

$$t_{p.H}(a_3)=5, \quad t_{p.o}(a_3)=13, \quad t_{\Pi.H}(a_3)=8, \quad t_{\Pi.o}(a_3)=16, \quad R_{\Pi}(a_3)=3, \quad R_c(a_3)=0,$$

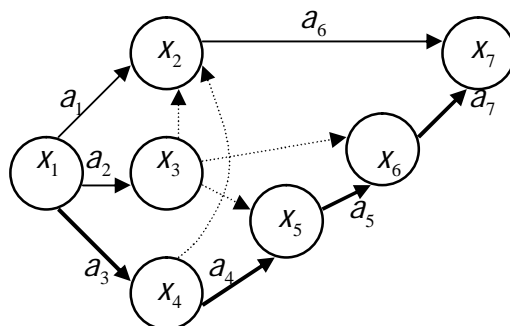
$$t_{p.H}(a_4)=6, \quad t_{p.o}(a_4)=16, \quad t_{\Pi.H}(a_4)=6, \quad t_{\Pi.o}(a_4)=16, \quad R_{\Pi}(a_4)=0, \quad R_c(a_4)=0,$$

$$t_{p.H}(a_5)=13, \quad t_{p.o}(a_5)=20, \quad t_{\Pi.H}(a_5)=16, \quad t_{\Pi.o}(a_5)=23, \quad R_{\Pi}(a_5)=3, \quad R_c(a_5)=3,$$

$$t_{p.H}(a_6)=16, \quad t_{p.o}(a_6)=21, \quad t_{\Pi.H}(a_6)=18, \quad t_{\Pi.o}(a_6)=23, \quad R_{\Pi}(a_6)=2, \quad R_c(a_6)=2,$$

$$t_{p.H}(a_7)=16, \quad t_{p.O}(a_7)=23, \quad t_{п.H}(a_7)=16, \quad t_{п.O}(a_7)=23, \quad R_{п}(a_7)=0, \quad R_C(a_7)=0.$$

17) Путь шесть.  $t_{кр} = 27$ .  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=8$ ,  $t_p(x_3)=7$ ,  $t_p(x_4)=8$ ,  $t_p(x_5)=13$ ,  $t_p(x_6)=23$ ,  $t_p(x_7)=27$ ,  $t_{п}(x_7)=27$ ,  $t_{п}(x_6)=23$ ,  $t_{п}(x_5)=13$ ,  $t_{п}(x_4)=8$ ,  $t_{п}(x_3)=11$ ,  $t_{п}(x_2)=11$ ,  $t_n(x_1)=0$ ;  $R(x_1)=R(x_4)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0$ ,  $R(x_2)=3$ ,  $R(x_3)=4$ ;



$$t_{p.H}(a_1)=0, \quad t_{p.O}(a_1)=5, \quad t_{п.H}(a_1)=6,$$

$$t_{п.O}(a_1)=11, \quad R_{п}(a_1)=6, \quad R_C(a_1)=3,$$

$$t_{p.H}(a_2)=0, \quad t_{p.O}(a_2)=7, \quad t_{п.H}(a_2)=4,$$

$$t_{п.O}(a_2)=11, \quad R_{п}(a_2)=4, \quad R_C(a_2)=0,$$

$$t_{p.H}(a_3)=0, \quad t_{p.O}(a_3)=8, \quad t_{п.H}(a_3)=0, \quad t_{п.O}(a_3)=8, \quad R_{п}(a_3)=0, \quad R_C(a_3)=0,$$

$$t_{p.H}(a_4)=8, \quad t_{p.O}(a_4)=13, \quad t_{п.H}(a_4)=8, \quad t_{п.O}(a_4)=13, \quad R_{п}(a_4)=0, \quad R_C(a_4)=0,$$

$$t_{p.H}(a_5)=13, \quad t_{p.O}(a_5)=23, \quad t_{п.H}(a_5)=13, \quad t_{п.O}(a_5)=23, \quad R_{п}(a_5)=0, \quad R_C(a_5)=0,$$

$$t_{p.H}(a_6)=8, \quad t_{p.O}(a_6)=20, \quad t_{п.H}(a_6)=15, \quad t_{п.O}(a_6)=27, \quad R_{п}(a_6)=7, \quad R_C(a_6)=7,$$

$$t_{p.H}(a_7)=23, \quad t_{p.O}(a_7)=27, \quad t_{п.H}(a_7)=23, \quad t_{п.O}(a_7)=27, \quad R_{п}(a_7)=0, \quad R_C(a_7)=0.$$

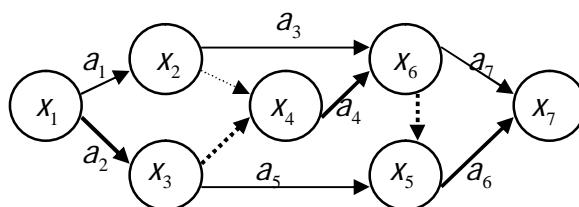
18) Путь семь.  $t_{кр} = 31$ .  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=8$ ,  $t_p(x_3)=10$ ,  $t_p(x_4)=10$ ,  $t_p(x_5)=22$ ,  $t_p(x_6)=22$ ,  $t_p(x_7)=31$ ,  $t_{п}(x_7)=31$ ,  $t_{п}(x_6)=22$ ,

$$t_n(x_5)=22, \quad t_n(x_4)=10, \quad t_n(x_3)=10, \quad t_n(x_2)=10,$$

$$t_n(x_1)=0;$$

$$R(x_1)=R(x_3)=R(x_4)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0,$$

$$R(x_2)=2;$$



$$t_{p.H}(a_1)=0, \quad t_{p.O}(a_1)=8, \quad t_{п.H}(a_1)=2, \quad t_{п.O}(a_1)=10, \quad R_{п}(a_1)=2, \quad R_C(a_1)=0,$$

$$t_{p.H}(a_2)=0, \quad t_{p.O}(a_2)=10, \quad t_{п.H}(a_2)=0, \quad t_{п.O}(a_2)=10, \quad R_{п}(a_2)=0, \quad R_C(a_2)=0,$$

$$t_{p.H}(a_3)=8, \quad t_{p.O}(a_3)=16, \quad t_{п.H}(a_3)=14, \quad t_{п.O}(a_3)=22, \quad R_{п}(a_3)=6, \quad R_C(a_3)=6,$$

$$t_{p.H}(a_4)=10, \quad t_{p.O}(a_4)=22, \quad t_{п.H}(a_4)=10, \quad t_{п.O}(a_4)=22, \quad R_{п}(a_4)=0, \quad R_C(a_4)=0,$$

$$t_{p.H}(a_5)=10, \quad t_{p.O}(a_5)=16, \quad t_{п.H}(a_5)=16, \quad t_{п.O}(a_5)=22, \quad R_{п}(a_5)=6, \quad R_C(a_5)=6,$$

$$t_{p.H}(a_6)=22, \quad t_{p.O}(a_6)=31, \quad t_{п.H}(a_6)=22, \quad t_{п.O}(a_6)=31, \quad R_{п}(a_6)=0, \quad R_C(a_6)=0,$$

$$t_{p.H}(a_7)=22, \quad t_{p.O}(a_7)=29, \quad t_{п.H}(a_7)=24, \quad t_{п.O}(a_7)=31, \quad R_{п}(a_7)=2, \quad R_C(a_7)=2.$$

19) Путь шесть.  $t_{кр} = 25$ .  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=4$ ,  $t_p(x_3)=4$ ,  $t_p(x_4)=4$ ,  $t_p(x_5)=10$ ,  $t_p(x_6)=20$ ,  $t_p(x_7)=25$ ,  $t_{п}(x_7)=25$ ,  $t_{п}(x_6)=20$ ,  $t_{п}(x_5)=10$ ,  $t_{п}(x_4)=13$ ,  $t_{п}(x_3)=4$ ,

$$t_{п}(x_2)=13, \quad t_{п}(x_1)=0;$$

$$R(x_1)=R(x_3)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0,$$

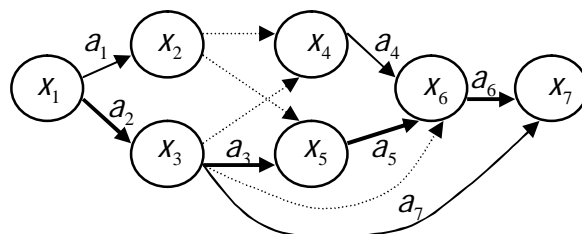
$$R(x_2)=9, \quad R(x_4)=9;$$

$$t_{p.H}(a_1)=0, \quad t_{p.O}(a_1)=4, \quad t_{п.H}(a_1)=9,$$

$$t_{п.O}(a_1)=13, \quad R_{п}(a_1)=9, \quad R_C(a_1)=0,$$

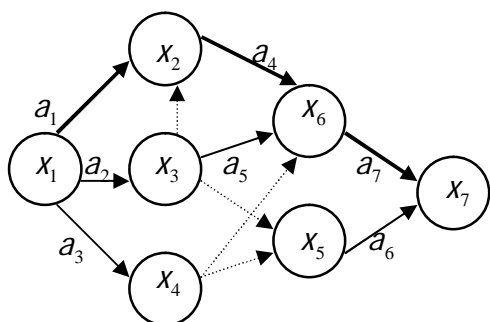
$$t_{p.H}(a_2)=0, \quad t_{p.O}(a_2)=4, \quad t_{п.H}(a_2)=0, \quad t_{п.O}(a_2)=4, \quad R_{п}(a_2)=0, \quad R_C(a_2)=0,$$

$$t_{p.H}(a_3)=4, \quad t_{p.O}(a_3)=10, \quad t_{п.H}(a_3)=4, \quad t_{п.O}(a_3)=10, \quad R_{п}(a_3)=0, \quad R_C(a_3)=0,$$



$$\begin{aligned}
t_{p.H}(a_4) &= 4, & t_{p.o}(a_4) &= 11, & t_{п.н}(a_4) &= 13, & t_{п.о}(a_4) &= 20, & R_{п}(a_4) &= 9, & R_c(a_4) &= 9, \\
t_{p.H}(a_5) &= 10, & t_{p.o}(a_5) &= 20, & t_{п.н}(a_5) &= 10, & t_{п.о}(a_5) &= 20, & R_{п}(a_5) &= 0, & R_c(a_5) &= 0, \\
t_{p.H}(a_6) &= 20, & t_{p.o}(a_6) &= 25, & t_{п.н}(a_6) &= 20, & t_{п.о}(a_6) &= 25, & R_{п}(a_6) &= 0, & R_c(a_6) &= 0, \\
t_{p.H}(a_7) &= 4, & t_{p.o}(a_7) &= 12, & t_{п.н}(a_7) &= 17, & t_{п.о}(a_7) &= 25, & R_{п}(a_7) &= 13, & R_c(a_7) &= 13.
\end{aligned}$$

20) Путь шесть.  $t_{кр} = 23$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 8$ ,  $t_p(x_3) = 5$ ,  $t_p(x_4) = 6$ ,  $t_p(x_5) = 6$ ,



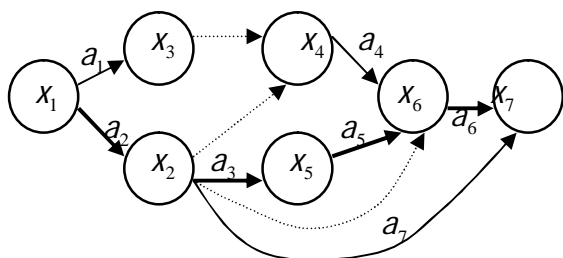
$$\begin{aligned}
t_p(x_6) &= 18, & t_p(x_7) &= 23, & t_{п}(x_7) &= 23, & t_{п}(x_6) &= 18, \\
t_{п}(x_5) &= 15, & t_{п}(x_4) &= 15, & t_{п}(x_3) &= 8, & t_{п}(x_2) &= 8, \\
t_{п}(x_1) &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(x_1) &= R(x_2) = R(x_6) = R(x_7) = 0, & R(x_3) &= 3, & R(x_4) &= 9, \\
R(x_5) &= 9;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{p.H}(a_1) &= 0, & t_{p.o}(a_1) &= 8, & t_{п.н}(a_1) &= 0, \\
t_{п.о}(a_1) &= 8, & R_{п}(a_1) &= 0, & R_c(a_1) &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{p.H}(a_2) &= 0, & t_{p.o}(a_2) &= 5, & t_{п.н}(a_2) &= 3, & t_{п.о}(a_2) &= 8, & R_{п}(a_2) &= 3, & R_c(a_2) &= 0, \\
t_{p.H}(a_3) &= 4, & t_{p.o}(a_3) &= 6, & t_{п.н}(a_3) &= 9, & t_{п.о}(a_3) &= 15, & R_{п}(a_3) &= 9, & R_c(a_3) &= 0, \\
t_{p.H}(a_4) &= 8, & t_{p.o}(a_4) &= 18, & t_{п.н}(a_4) &= 8, & t_{п.о}(a_4) &= 18, & R_{п}(a_4) &= 0, & R_c(a_4) &= 0, \\
t_{p.H}(a_5) &= 5, & t_{p.o}(a_5) &= 15, & t_{п.н}(a_5) &= 8, & t_{п.о}(a_5) &= 18, & R_{п}(a_5) &= 3, & R_c(a_5) &= 3, \\
t_{p.H}(a_6) &= 6, & t_{p.o}(a_6) &= 14, & t_{п.н}(a_6) &= 15, & t_{п.о}(a_6) &= 23, & R_{п}(a_6) &= 9, & R_c(a_6) &= 9, \\
t_{p.H}(a_7) &= 18, & t_{p.o}(a_7) &= 23, & t_{п.н}(a_7) &= 18, & t_{п.о}(a_7) &= 23, & R_{п}(a_7) &= 0, & R_c(a_7) &= 0.
\end{aligned}$$

21) Путь пять.  $t_{кр} = 30$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 10$ ,  $t_p(x_3) = 6$ ,  $t_p(x_4) = 10$ ,  $t_p(x_5) = 20$ ,



$$\begin{aligned}
t_p(x_6) &= 26, & t_p(x_7) &= 30, & t_{п}(x_7) &= 30, & t_{п}(x_6) &= 26, \\
t_{п}(x_5) &= 20, & t_{п}(x_4) &= 18, & t_{п}(x_3) &= 18, & t_{п}(x_2) &= 10, \\
t_{п}(x_1) &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(x_1) &= R(x_2) = R(x_5) = R(x_6) = R(x_7) = 0, \\
R(x_3) &= 12, & R(x_4) &= 8;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{p.H}(a_1) &= 0, & t_{p.o}(a_1) &= 6, & t_{п.н}(a_1) &= 12,
\end{aligned}$$

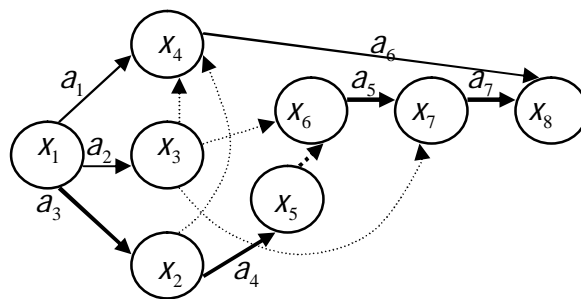
$$\begin{aligned}
t_{п.о}(a_1) &= 18, & R_{п}(a_1) &= 12, & R_c(a_1) &= 0, \\
t_{p.H}(a_2) &= 0, & t_{p.o}(a_2) &= 10, & t_{п.н}(a_2) &= 0, & t_{п.о}(a_2) &= 10, & R_{п}(a_2) &= 0, & R_c(a_2) &= 0, \\
t_{p.H}(a_3) &= 10, & t_{p.o}(a_3) &= 20, & t_{п.н}(a_3) &= 10, & t_{п.о}(a_3) &= 20, & R_{п}(a_3) &= 0, & R_c(a_3) &= 0, \\
t_{p.H}(a_4) &= 10, & t_{p.o}(a_4) &= 18, & t_{п.н}(a_4) &= 18, & t_{п.о}(a_4) &= 26, & R_{п}(a_4) &= 8, & R_c(a_4) &= 8, \\
t_{p.H}(a_5) &= 20, & t_{p.o}(a_5) &= 26, & t_{п.н}(a_5) &= 20, & t_{п.о}(a_5) &= 26, & R_{п}(a_5) &= 0, & R_c(a_5) &= 0, \\
t_{p.H}(a_6) &= 26, & t_{p.o}(a_6) &= 30, & t_{п.н}(a_6) &= 26, & t_{п.о}(a_6) &= 30, & R_{п}(a_6) &= 0, & R_c(a_6) &= 0, \\
t_{p.H}(a_7) &= 10, & t_{p.o}(a_7) &= 13, & t_{п.н}(a_7) &= 27, & t_{п.о}(a_7) &= 30, & R_{п}(a_7) &= 17, & R_c(a_7) &= 17.
\end{aligned}$$

22) Путь шесть.  $t_{кр} = 33$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 8$ ,  $t_p(x_3) = 7$ ,  $t_p(x_4) = 8$ ,  $t_p(x_5) = 16$ ,

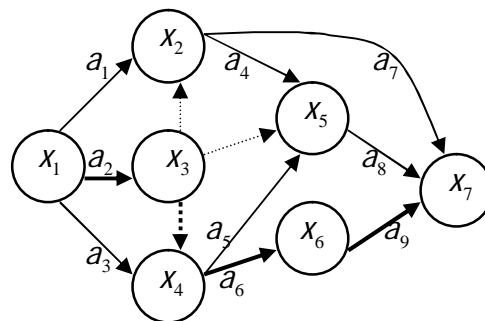
$$\begin{aligned}
t_p(x_6) &= 16, & t_p(x_7) &= 26, & t_p(x_8) &= 33, & t_{п}(x_8) &= 33, & t_{п}(x_7) &= 26, & t_{п}(x_6) &= 16, & t_{п}(x_5) &= 16, \\
t_{п}(x_4) &= 28, & t_{п}(x_3) &= 16, & t_{п}(x_2) &= 8, & t_{п}(x_1) &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(x_1) &= R(x_2) = R(x_5) = R(x_6) = R(x_7) = R(x_8) = 0, & R(x_3) &= 9, & R(x_4) &= 20;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{p.H}(a_1) &= 0, & t_{p.o}(a_1) &= 5, & t_{п.H}(a_1) &= 23, \\
t_{п.o}(a_1) &= 28, & R_{п}(a_1) &= 23, & R_c(a_1) &= 3, \\
t_{p.H}(a_2) &= 0, & t_{p.o}(a_2) &= 7, & t_{п.H}(a_2) &= 9, \\
t_{п.o}(a_2) &= 16, & R_{п}(a_2) &= 9, & R_c(a_2) &= 0, \\
t_{p.H}(a_3) &= 0, & t_{p.o}(a_3) &= 8, & t_{п.H}(a_3) &= 0, \\
t_{п.o}(a_3) &= 8, & R_{п}(a_3) &= 0, & R_c(a_3) &= 0, \\
t_{p.H}(a_4) &= 8, & t_{p.o}(a_4) &= 16, & t_{п.H}(a_4) &= 8, \\
t_{п.o}(a_4) &= 16, & R_{п}(a_4) &= 0, & R_c(a_4) &= 0, \\
t_{p.H}(a_5) &= 16, & t_{p.o}(a_5) &= 26, & t_{п.H}(a_5) &= 16, & t_{п.o}(a_5) &= 26, & R_{п}(a_5) &= 0, & R_c(a_5) &= 0, \\
t_{p.H}(a_6) &= 8, & t_{p.o}(a_6) &= 13, & t_{п.H}(a_6) &= 28, & t_{п.o}(a_6) &= 33, & R_{п}(a_6) &= 20, & R_c(a_6) &= 20, \\
t_{p.H}(a_7) &= 26, & t_{p.o}(a_7) &= 33, & t_{п.H}(a_7) &= 26, & t_{п.o}(a_7) &= 33, & R_{п}(a_7) &= 0, & R_c(a_7) &= 0.
\end{aligned}$$

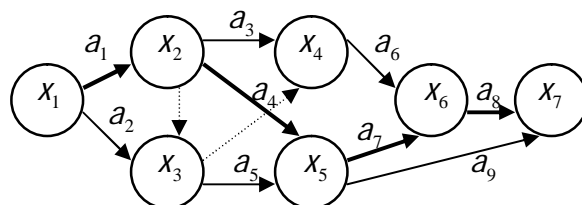


23) Путь девять.  $t_{кр} = 40$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 13$ ,  $t_p(x_3) = 13$ ,  $t_p(x_4) = 13$ ,  $t_p(x_5) = 21$ ,  
 $t_p(x_6) = 28$ ,  $t_p(x_7) = 40$ ,  $t_{п}(x_7) = 40$ ,  $t_{п}(x_6) = 28$ ,  
 $t_{п}(x_5) = 31$ ,  $t_{п}(x_4) = 13$ ,  $t_{п}(x_3) = 13$ ,  $t_{п}(x_2) = 23$ ,  
 $t_n(x_1) = 0$ ;  
 $R(x_1) = R(x_3) = R(x_4) = R(x_6) = R(x_7) = 0$ ,  $R(x_2) = 10$ ,  
 $R(x_5) = 14$ ;



$$\begin{aligned}
t_{p.H}(a_1) &= 0, & t_{p.o}(a_1) &= 11, & t_{п.H}(a_1) &= 12, \\
t_{п.o}(a_1) &= 23, & R_{п}(a_1) &= 12, & R_c(a_1) &= 2, \\
t_{p.H}(a_2) &= 0, & t_{p.o}(a_2) &= 13, & t_{п.H}(a_2) &= 0, & t_{п.o}(a_2) &= 13, & R_{п}(a_2) &= 0, & R_c(a_2) &= 0, \\
t_{p.H}(a_3) &= 0, & t_{p.o}(a_3) &= 10, & t_{п.H}(a_3) &= 3, & t_{п.o}(a_3) &= 13, & R_{п}(a_3) &= 3, & R_c(a_3) &= 3, \\
t_{p.H}(a_4) &= 13, & t_{p.o}(a_4) &= 21, & t_{п.H}(a_4) &= 23, & t_{п.o}(a_4) &= 31, & R_{п}(a_4) &= 10, & R_c(a_4) &= 0, \\
t_{p.H}(a_5) &= 13, & t_{p.o}(a_5) &= 19, & t_{п.H}(a_5) &= 25, & t_{п.o}(a_5) &= 31, & R_{п}(a_5) &= 12, & R_c(a_5) &= 2, \\
t_{p.H}(a_6) &= 13, & t_{p.o}(a_6) &= 28, & t_{п.H}(a_6) &= 13, & t_{п.o}(a_6) &= 28, & R_{п}(a_6) &= 0, & R_c(a_6) &= 0, \\
t_{p.H}(a_7) &= 13, & t_{p.o}(a_7) &= 20, & t_{п.H}(a_7) &= 33, & t_{п.o}(a_7) &= 40, & R_{п}(a_7) &= 20, & R_c(a_7) &= 20, \\
t_{p.H}(a_8) &= 21, & t_{p.o}(a_8) &= 30, & t_{п.H}(a_8) &= 31, & t_{п.o}(a_8) &= 40, & R_{п}(a_8) &= 10, & R_c(a_8) &= 10, \\
t_{p.H}(a_9) &= 28, & t_{p.o}(a_9) &= 40, & t_{п.H}(a_9) &= 28, & t_{п.o}(a_9) &= 40, & R_{п}(a_9) &= 0, & R_c(a_9) &= 0.
\end{aligned}$$

24) Путь семь.  $t_{кр} = 22$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 3$ ,  $t_p(x_3) = 3$ ,  $t_p(x_4) = 8$ ,  $t_p(x_5) = 9$ ,  
 $t_p(x_6) = 15$ ,  $t_p(x_7) = 22$ ,  $t_{п}(x_7) = 22$ ,  $t_{п}(x_6) = 15$ ,  
 $t_{п}(x_5) = 9$ ,  $t_{п}(x_4) = 11$ ,  $t_{п}(x_3) = 5$ ,  $t_{п}(x_2) = 3$ ,  
 $t_{п}(x_1) = 0$ ;  
 $R(x_1) = R(x_2) = R(x_5) = R(x_6) = R(x_7) = 0$ ,  
 $R(x_3) = 2$ ,  $R(x_4) = 3$ ;

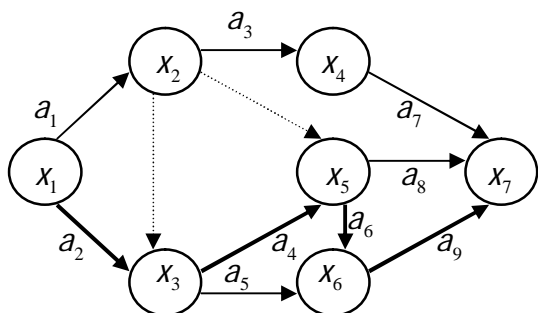


$$\begin{aligned}
t_{p.H}(a_1) &= 0, & t_{p.o}(a_1) &= 3, & t_{п.H}(a_1) &= 0, & t_{п.o}(a_1) &= 3, & R_{п}(a_1) &= 0, & R_c(a_1) &= 0, \\
t_{p.H}(a_2) &= 0, & t_{p.o}(a_2) &= 2, & t_{п.H}(a_2) &= 3, & t_{п.o}(a_2) &= 5, & R_{п}(a_2) &= 3, & R_c(a_2) &= 1, \\
t_{p.H}(a_3) &= 3, & t_{p.o}(a_3) &= 8, & t_{п.H}(a_3) &= 6, & t_{п.o}(a_3) &= 11, & R_{п}(a_3) &= 3, & R_c(a_3) &= 0, \\
t_{p.H}(a_4) &= 3, & t_{p.o}(a_4) &= 9, & t_{п.H}(a_4) &= 3, & t_{п.o}(a_4) &= 9, & R_{п}(a_4) &= 0, & R_c(a_4) &= 0,
\end{aligned}$$



$$\begin{array}{llllll}
t_{p.H}(a_5)=3, & t_{p.o}(a_5)=7, & t_{п.н}(a_5)=5, & t_{п.о}(a_5)=9, & R_{п}(a_5)=2, & R_c(a_5)=2, \\
t_{p.H}(a_6)=8, & t_{p.o}(a_6)=12, & t_{п.н}(a_6)=11, & t_{п.о}(a_6)=15, & R_{п}(a_6)=3, & R_c(a_6)=3, \\
t_{p.H}(a_7)=9, & t_{p.o}(a_7)=15, & t_{п.н}(a_7)=9, & t_{п.о}(a_7)=15, & R_{п}(a_7)=0, & R_c(a_7)=0, \\
t_{p.H}(a_8)=15, & t_{p.o}(a_8)=22, & t_{п.н}(a_8)=15, & t_{п.о}(a_8)=22, & R_{п}(a_8)=0, & R_c(a_8)=0, \\
t_{p.H}(a_9)=9, & t_{p.o}(a_9)=14, & t_{п.н}(a_9)=17, & t_{п.о}(a_9)=22, & R_{п}(a_9)=8, & R_c(a_9)=8.
\end{array}$$

25) Путь девять.  $t_{кр} = 40$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 10$ ,  $t_p(x_3) = 12$ ,  $t_p(x_4) = 24$ ,  $t_p(x_5) = 23$ ,



$$\begin{array}{l}
t_p(x_6) = 32, \quad t_p(x_7) = 40, \quad t_{п}(x_7) = 40, \quad t_{п}(x_6) = 32, \\
t_{п}(x_5) = 23, \quad t_{п}(x_4) = 25, \quad t_{п}(x_3) = 12, \quad t_{п}(x_2) = 11, \\
t_{п}(x_1) = 0;
\end{array}$$

$$R(x_1) = R(x_3) = R(x_5) = R(x_6) = R(x_7) = 0,$$

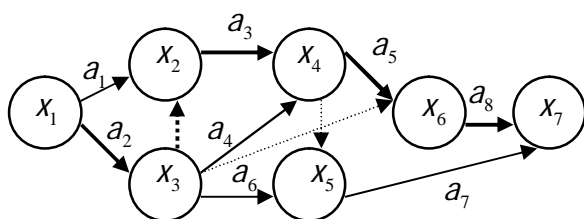
$$R(x_2) = 1, \quad R(x_4) = 1;$$

$$t_{p.H}(a_1) = 0, \quad t_{p.o}(a_1) = 10, \quad t_{п.н}(a_1) = 1,$$

$$t_{п.о}(a_1) = 11, \quad R_{п}(a_1) = 1, \quad R_c(a_1) = 0,$$

$$\begin{array}{llllll}
t_{p.H}(a_2) = 0, & t_{p.o}(a_2) = 12, & t_{п.н}(a_2) = 0, & t_{п.о}(a_2) = 12, & R_{п}(a_2) = 0, & R_c(a_2) = 0, \\
t_{p.H}(a_3) = 10, & t_{p.o}(a_3) = 24, & t_{п.н}(a_3) = 11, & t_{п.о}(a_3) = 25, & R_{п}(a_3) = 1, & R_c(a_3) = 0, \\
t_{p.H}(a_4) = 12, & t_{p.o}(a_4) = 23, & t_{п.н}(a_4) = 12, & t_{п.о}(a_4) = 23, & R_{п}(a_4) = 0, & R_c(a_4) = 0, \\
t_{p.H}(a_5) = 12, & t_{p.o}(a_5) = 19, & t_{п.н}(a_5) = 25, & t_{п.о}(a_5) = 32, & R_{п}(a_5) = 13, & R_c(a_5) = 13, \\
t_{p.H}(a_6) = 23, & t_{p.o}(a_6) = 32, & t_{п.н}(a_6) = 23, & t_{п.о}(a_6) = 32, & R_{п}(a_6) = 0, & R_c(a_6) = 0, \\
t_{p.H}(a_7) = 24, & t_{p.o}(a_7) = 39, & t_{п.н}(a_7) = 25, & t_{п.о}(a_7) = 40, & R_{п}(a_7) = 1, & R_c(a_7) = 1, \\
t_{p.H}(a_8) = 23, & t_{p.o}(a_8) = 36, & t_{п.н}(a_8) = 27, & t_{п.о}(a_8) = 40, & R_{п}(a_8) = 4, & R_c(a_8) = 4, \\
t_{p.H}(a_9) = 32, & t_{p.o}(a_9) = 40, & t_{п.н}(a_9) = 32, & t_{п.о}(a_9) = 40, & R_{п}(a_9) = 0, & R_c(a_9) = 0.
\end{array}$$

26) Путь восемь.  $t_{кр} = 41$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 9$ ,  $t_p(x_3) = 9$ ,  $t_p(x_4) = 20$ ,  $t_p(x_5) = 20$ ,



$$t_p(x_6) = 28, \quad t_p(x_7) = 41, \quad t_{п}(x_7) = 41, \quad t_{п}(x_6) = 28,$$

$$t_{п}(x_5) = 29, \quad t_{п}(x_4) = 20, \quad t_{п}(x_3) = 9, \quad t_{п}(x_2) = 9,$$

$$t_{п}(x_1) = 0;$$

$$R(x_1) = R(x_2) = R(x_3) = R(x_4) = R(x_6) = R(x_7) = 0,$$

$$R(x_5) = 9;$$

$$\begin{array}{llllll}
t_{p.H}(a_1) = 0, & t_{p.o}(a_1) = 7, & t_{п.н}(a_1) = 2, & t_{п.о}(a_1) = 9, & R_{п}(a_1) = 2, & R_c(a_1) = 2, \\
t_{p.H}(a_2) = 0, & t_{p.o}(a_2) = 9, & t_{п.н}(a_2) = 0, & t_{п.о}(a_2) = 9, & R_{п}(a_2) = 0, & R_c(a_2) = 0, \\
t_{p.H}(a_3) = 9, & t_{p.o}(a_3) = 20, & t_{п.н}(a_3) = 9, & t_{п.о}(a_3) = 20, & R_{п}(a_3) = 0, & R_c(a_3) = 0, \\
t_{p.H}(a_4) = 9, & t_{p.o}(a_4) = 15, & t_{п.н}(a_4) = 14, & t_{п.о}(a_4) = 20, & R_{п}(a_4) = 5, & R_c(a_4) = 5, \\
t_{p.H}(a_5) = 20, & t_{p.o}(a_5) = 28, & t_{п.н}(a_5) = 20, & t_{п.о}(a_5) = 28, & R_{п}(a_5) = 0, & R_c(a_5) = 0, \\
t_{p.H}(a_6) = 9, & t_{p.o}(a_6) = 19, & t_{п.н}(a_6) = 19, & t_{п.о}(a_6) = 29, & R_{п}(a_6) = 10, & R_c(a_6) = 1, \\
t_{p.H}(a_7) = 20, & t_{p.o}(a_7) = 27, & t_{п.н}(a_7) = 29, & t_{п.о}(a_7) = 41, & R_{п}(a_7) = 9, & R_c(a_7) = 9, \\
t_{p.H}(a_8) = 28, & t_{p.o}(a_8) = 41, & t_{п.н}(a_8) = 28, & t_{п.о}(a_8) = 41, & R_{п}(a_8) = 0, & R_c(a_8) = 0.
\end{array}$$

27) Путь восемь.  $t_{кр} = 27$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 5$ ,  $t_p(x_3) = 4$ ,  $t_p(x_4) = 5$ ,  $t_p(x_5) = 11$ ,  $t_p(x_6) = 10$ ,  $t_p(x_7) = 11$ ,  $t_p(x_8) = 20$ ,  $t_p(x_9) = 27$ ,  $t_{п}(x_9) = 27$ ,  $t_{п}(x_8) = 20$ ,  $t_{п}(x_7) = 11$ ,  $t_{п}(x_6) = 11$ ,  $t_{п}(x_5) = 11$ ,  $t_{п}(x_4) = 6$ ,  $t_{п}(x_3) = 6$ ,  $t_{п}(x_2) = 5$ ,  $t_{п}(x_1) = 0$ ;

$R(x_1) = R(x_2) = R(x_5) = R(x_7) = R(x_8) =$   
 $R(x_9) = 0$ ,  $R(x_3) = 2$ ,  $R(x_4) = 1$ ,  $R(x_6) = 1$ ;

$t_{п.н}(a_1) = 0$ ,  $t_{п.о}(a_1) = 5$ ,  $t_{п.н}(a_1) = 0$ ,

$t_{п.о}(a_1) = 5$ ,  $R_{п}(a_1) = 0$ ,  $R_{с}(a_1) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_2) = 0$ ,  $t_{п.о}(a_2) = 4$ ,  $t_{п.н}(a_2) = 2$ ,

$t_{п.о}(a_2) = 6$ ,  $R_{п}(a_2) = 2$ ,  $R_{с}(a_2) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_3) = 5$ ,  $t_{п.о}(a_3) = 11$ ,  $t_{п.н}(a_3) = 5$ ,  $t_{п.о}(a_3) = 1$ ,  $R_{п}(a_3) = 0$ ,  $R_{с}(a_3) = 0$ ,

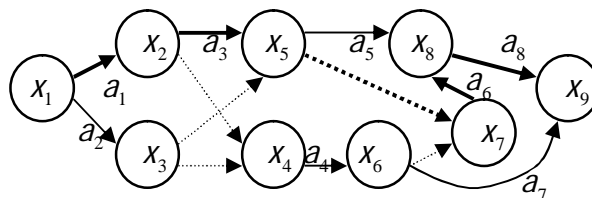
$t_{п.н}(a_4) = 5$ ,  $t_{п.о}(a_4) = 10$ ,  $t_{п.н}(a_4) = 6$ ,  $t_{п.о}(a_4) = 11$ ,  $R_{п}(a_4) = 1$ ,  $R_{с}(a_4) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_5) = 11$ ,  $t_{п.о}(a_5) = 18$ ,  $t_{п.н}(a_5) = 13$ ,  $t_{п.о}(a_5) = 20$ ,  $R_{п}(a_5) = 2$ ,  $R_{с}(a_5) = 2$ ,

$t_{п.н}(a_6) = 11$ ,  $t_{п.о}(a_6) = 20$ ,  $t_{п.н}(a_6) = 11$ ,  $t_{п.о}(a_6) = 20$ ,  $R_{п}(a_6) = 0$ ,  $R_{с}(a_6) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_7) = 10$ ,  $t_{п.о}(a_7) = 14$ ,  $t_{п.н}(a_7) = 23$ ,  $t_{п.о}(a_7) = 27$ ,  $R_{п}(a_7) = 13$ ,  $R_{с}(a_7) = 13$ ,

$t_{п.н}(a_8) = 20$ ,  $t_{п.о}(a_8) = 27$ ,  $t_{п.н}(a_8) = 20$ ,  $t_{п.о}(a_8) = 27$ ,  $R_{п}(a_8) = 0$ ,  $R_{с}(a_8) = 0$ .



28) Путь восемь.  $t_{кр} = 45$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 10$ ,  $t_p(x_3) = 11$ ,  $t_p(x_4) = 13$ ,  $t_p(x_5) = 19$ ,  $t_p(x_6) = 28$ ,  $t_p(x_7) = 40$ ,  $t_p(x_8) = 45$ ,  $t_{п}(x_8) = 45$ ,

$t_{п}(x_7) = 40$ ,  $t_{п}(x_6) = 28$ ,  $t_{п}(x_5) = 28$ ,  $t_{п}(x_4) = 13$ ,

$t_{п}(x_3) = 13$ ,  $t_{п}(x_2) = 13$ ,  $t_{п}(x_1) = 0$ ;

$R(x_1) = R(x_4) = R(x_6) = R(x_7) = R(x_8) = 0$ ,

$R(x_2) = 3$ ,  $R(x_3) = 2$ ,  $R(x_5) = 9$ ;

$t_{п.н}(a_1) = 0$ ,  $t_{п.о}(a_1) = 10$ ,  $t_{п.н}(a_1) = 3$ ,

$t_{п.о}(a_1) = 13$ ,  $R_{п}(a_1) = 3$ ,  $R_{с}(a_1) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_2) = 0$ ,  $t_{п.о}(a_2) = 11$ ,  $t_{п.н}(a_2) = 2$ ,  $t_{п.о}(a_2) = 13$ ,  $R_{п}(a_2) = 2$ ,  $R_{с}(a_2) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_3) = 0$ ,  $t_{п.о}(a_3) = 13$ ,  $t_{п.н}(a_3) = 0$ ,  $t_{п.о}(a_3) = 13$ ,  $R_{п}(a_3) = 0$ ,  $R_{с}(a_3) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_4) = 10$ ,  $t_{п.о}(a_4) = 19$ ,  $t_{п.н}(a_4) = 19$ ,  $t_{п.о}(a_4) = 28$ ,  $R_{п}(a_4) = 9$ ,  $R_{с}(a_4) = 0$ ,

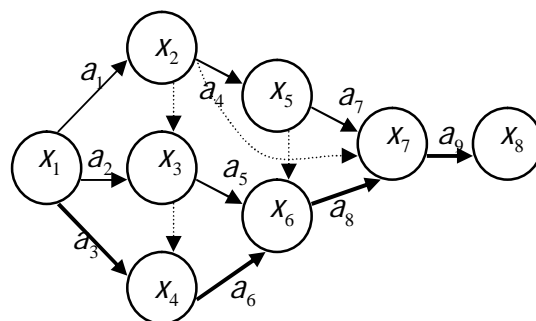
$t_{п.н}(a_5) = 11$ ,  $t_{п.о}(a_5) = 18$ ,  $t_{п.н}(a_5) = 21$ ,  $t_{п.о}(a_5) = 28$ ,  $R_{п}(a_5) = 10$ ,  $R_{с}(a_5) = 10$ ,

$t_{п.н}(a_6) = 13$ ,  $t_{п.о}(a_6) = 28$ ,  $t_{п.н}(a_6) = 13$ ,  $t_{п.о}(a_6) = 28$ ,  $R_{п}(a_6) = 0$ ,  $R_{с}(a_6) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_7) = 19$ ,  $t_{п.о}(a_7) = 25$ ,  $t_{п.н}(a_7) = 34$ ,  $t_{п.о}(a_7) = 40$ ,  $R_{п}(a_7) = 15$ ,  $R_{с}(a_7) = 15$ ,

$t_{п.н}(a_8) = 28$ ,  $t_{п.о}(a_8) = 40$ ,  $t_{п.н}(a_8) = 28$ ,  $t_{п.о}(a_8) = 40$ ,  $R_{п}(a_8) = 0$ ,  $R_{с}(a_8) = 0$ ,

$t_{п.н}(a_9) = 40$ ,  $t_{п.о}(a_9) = 45$ ,  $t_{п.н}(a_9) = 40$ ,  $t_{п.о}(a_9) = 45$ ,  $R_{п}(a_9) = 0$ ,  $R_{с}(a_9) = 0$ .

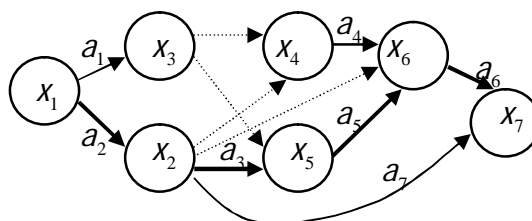


29) Путь шесть.  $t_{кр} = 34$ .  $t_p(x_1) = 0$ ,  $t_p(x_2) = 8$ ,  $t_p(x_3) = 6$ ,  $t_p(x_4) = 8$ ,  $t_p(x_5) = 20$ ,  $t_p(x_6) = 27$ ,  $t_p(x_7) = 34$ ,  $t_{п}(x_7) = 34$ ,  $t_{п}(x_6) = 27$ ,

$t_{п}(x_5) = 20$ ,  $t_{п}(x_4) = 22$ ,  $t_{п}(x_3) = 20$ ,  $t_{п}(x_2) = 8$ ,

$t_{п}(x_1) = 0$ ;

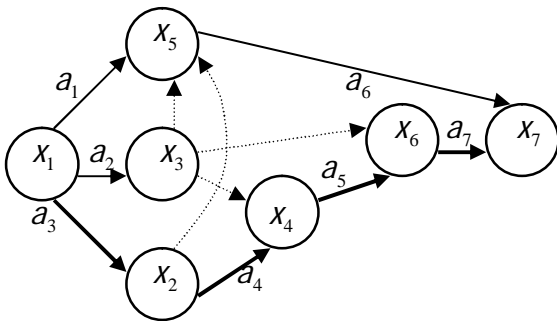
$R(x_1) = R(x_2) = R(x_5) = R(x_6) = R(x_7) = 0$ ,



$$R(x_3)=14, R(x_4)=14;$$

$$\begin{array}{llllll} t_{p.H}(a_1)=0, & t_{p.o}(a_1)=6, & t_{п.н}(a_1)=14, & t_{п.о}(a_1)=20, & R_{п}(a_1)=14, & R_c(a_1)=0, \\ t_{p.H}(a_2)=0, & t_{p.o}(a_2)=8, & t_{п.н}(a_2)=0, & t_{п.о}(a_2)=8, & R_{п}(a_2)=0, & R_c(a_2)=0, \\ t_{p.H}(a_3)=8, & t_{p.o}(a_3)=20, & t_{п.н}(a_3)=8, & t_{п.о}(a_3)=20, & R_{п}(a_3)=0, & R_c(a_3)=0, \\ t_{p.H}(a_4)=8, & t_{p.o}(a_4)=13, & t_{п.н}(a_4)=22, & t_{п.о}(a_4)=27, & R_{п}(a_4)=14, & R_c(a_4)=14, \\ t_{p.H}(a_5)=20, & t_{p.o}(a_5)=27, & t_{п.н}(a_5)=20, & t_{п.о}(a_5)=27, & R_{п}(a_5)=0, & R_c(a_5)=0, \\ t_{p.H}(a_6)=27, & t_{p.o}(a_6)=34, & t_{п.н}(a_6)=27, & t_{п.о}(a_6)=34, & R_{п}(a_6)=0, & R_c(a_6)=0, \\ t_{p.H}(a_7)=8, & t_{p.o}(a_7)=18, & t_{п.н}(a_7)=24, & t_{п.о}(a_7)=34, & R_{п}(a_7)=16, & R_c(a_7)=16, \end{array}$$

30) Путь шесть.  $t_{кр} = 38$ .  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=10$ ,  $t_p(x_3)=5$ ,  $t_p(x_4)=24$ ,  $t_p(x_5)=10$ ,



$$t_p(x_6)=32, t_p(x_7)=38, t_{п}(x_7)=38, t_{п}(x_6)=32, \\ t_{п}(x_5)=28, t_{п}(x_4)=24, t_{п}(x_3)=24, t_{п}(x_2)=10, \\ t_{п}(x_1)=0;$$

$$R(x_1)=R(x_2)=R(x_4)=R(x_6)=R(x_7)=0,$$

$$R(x_3)=19, R(x_5)=18;$$

$$t_{p.H}(a_1)=0, t_{p.o}(a_1)=7, t_{п.н}(a_1)=21,$$

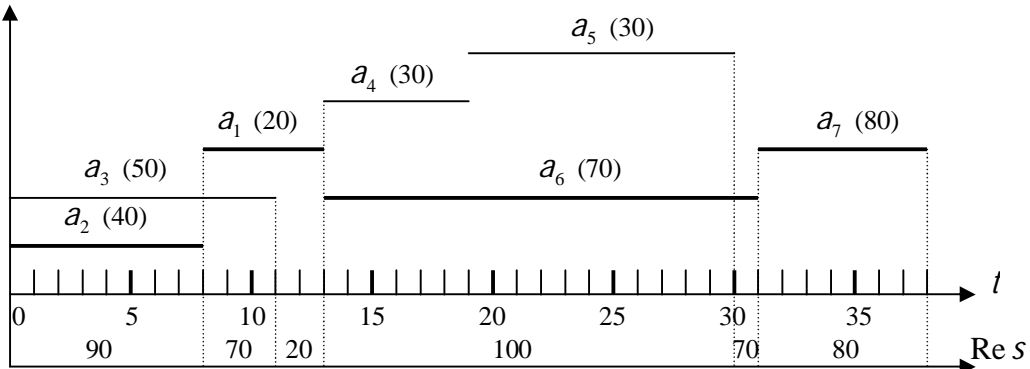
$$t_{п.о}(a_1)=28, R_{п}(a_1)=21, R_c(a_1)=3,$$

$$t_{p.H}(a_2)=0, t_{p.o}(a_2)=5, t_{п.н}(a_2)=19, t_{п.о}(a_2)=24, R_{п}(a_2)=19, R_c(a_2)=0,$$

$$t_{p.H}(a_3)=0, t_{p.o}(a_3)=10, t_{п.н}(a_3)=0, t_{п.о}(a_3)=10, R_{п}(a_3)=0, R_c(a_3)=0,$$

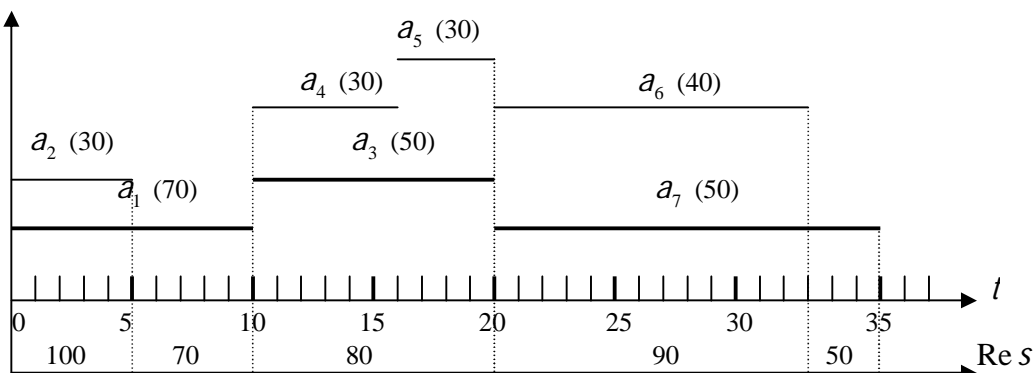
### 3.2.4.

1)

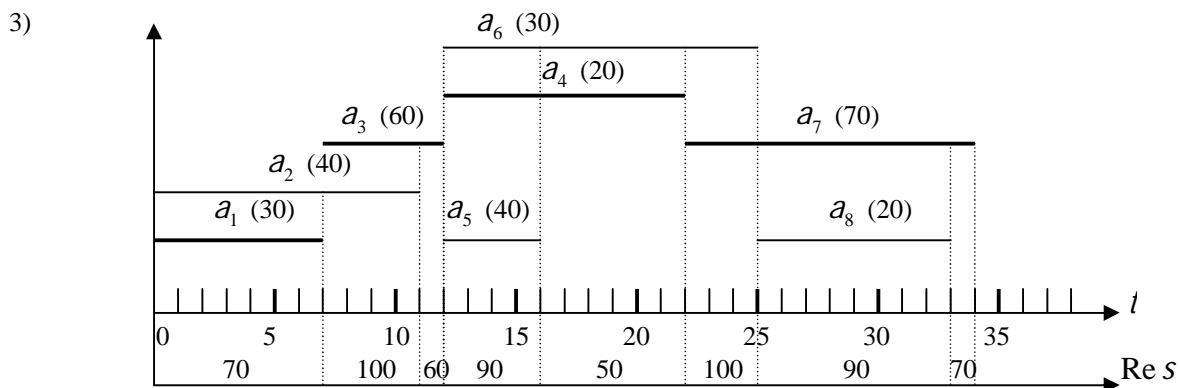


Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} a_2 \rightarrow a_1 \rightarrow a_6 \rightarrow a_7$ .  $t_{кр.нов} = 38$ .

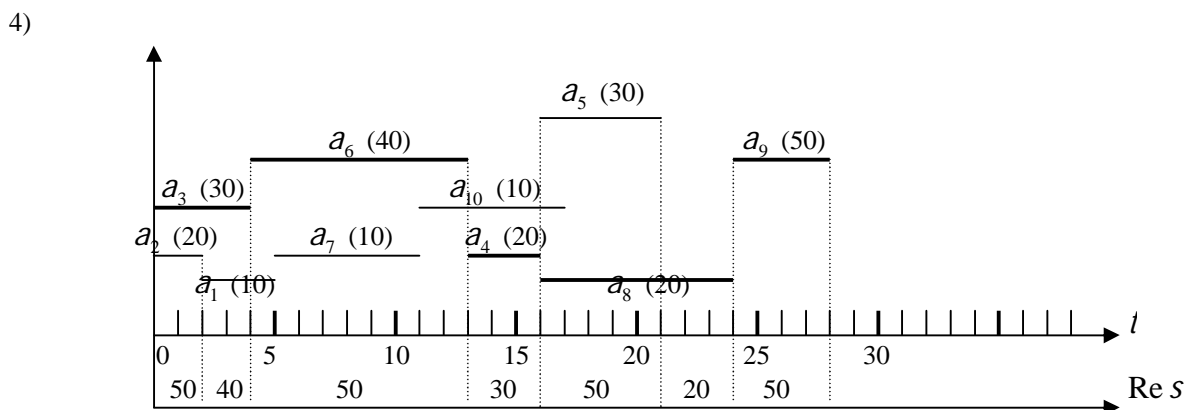
2)



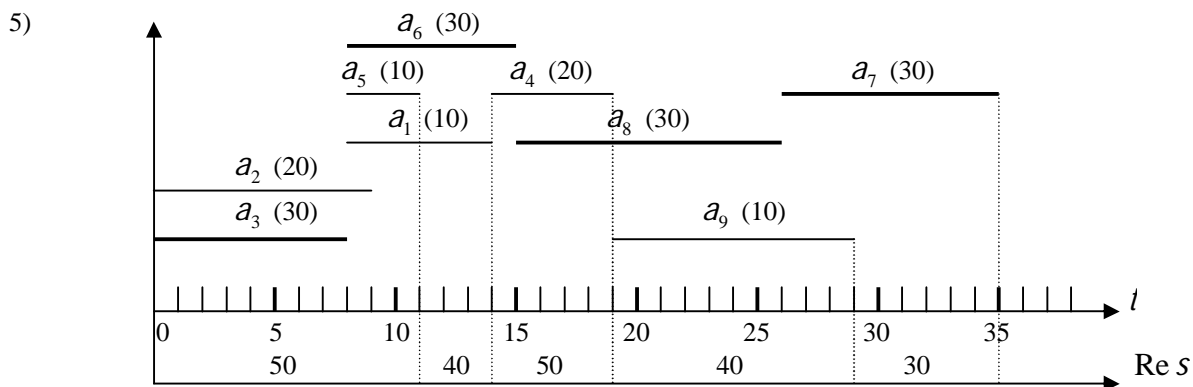
Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_7$ .  $t_{кр.нов} = 35$ .



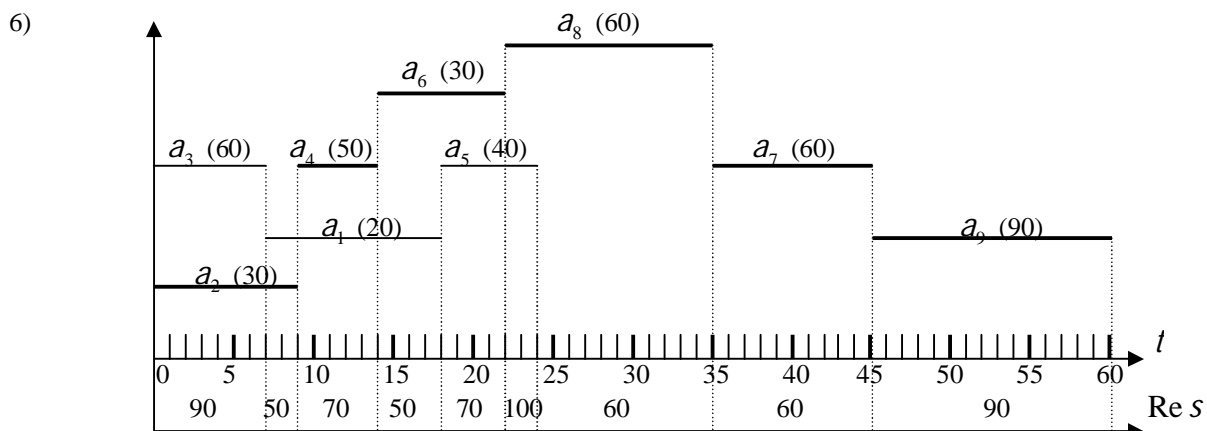
Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow a_7 . t_{кр.нов} = 34 .$



Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_3 \rightarrow a_6 \rightarrow a_4 \rightarrow a_8 \rightarrow a_9 . t_{кр.нов} = 28 .$

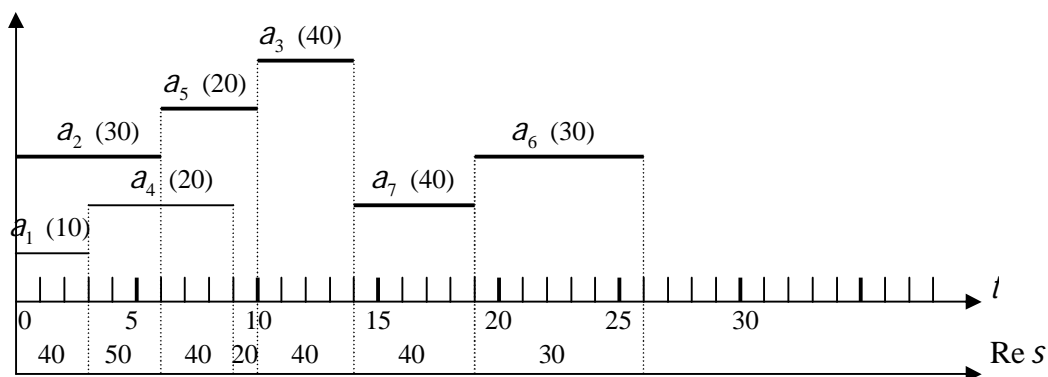


Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_3 \rightarrow a_6 \rightarrow a_8 \rightarrow a_7 . t_{кр.нов} = 35 .$



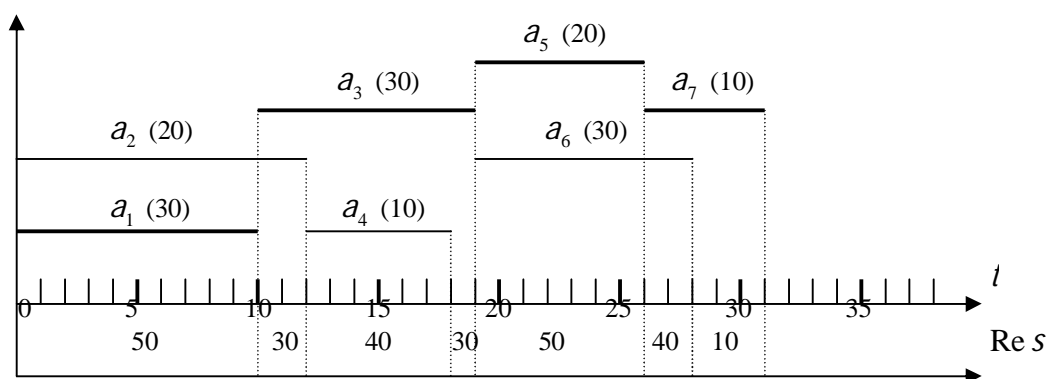
Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_6 \rightarrow a_8 \rightarrow a_7 \rightarrow a_9 . t_{кр.нов} = 60 .$

7)



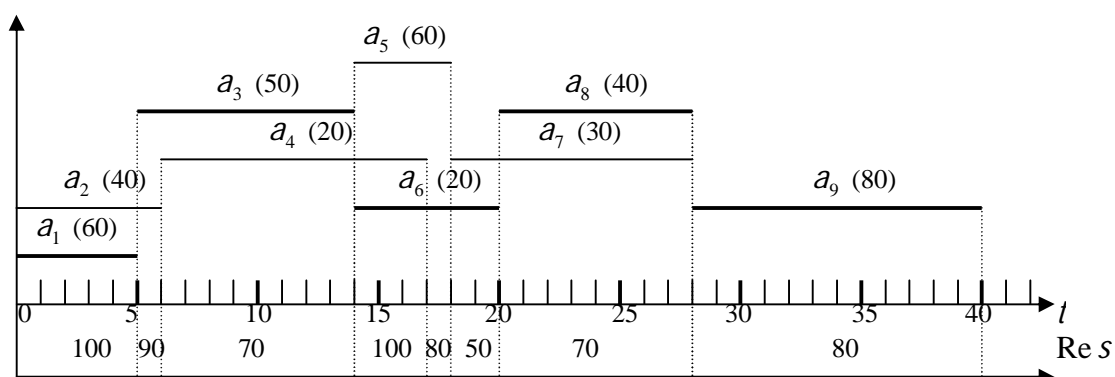
Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_2 \rightarrow a_5 \rightarrow a_3 \rightarrow a_7 \rightarrow a_6 . t_{кр.нов} = 26 .$

8)



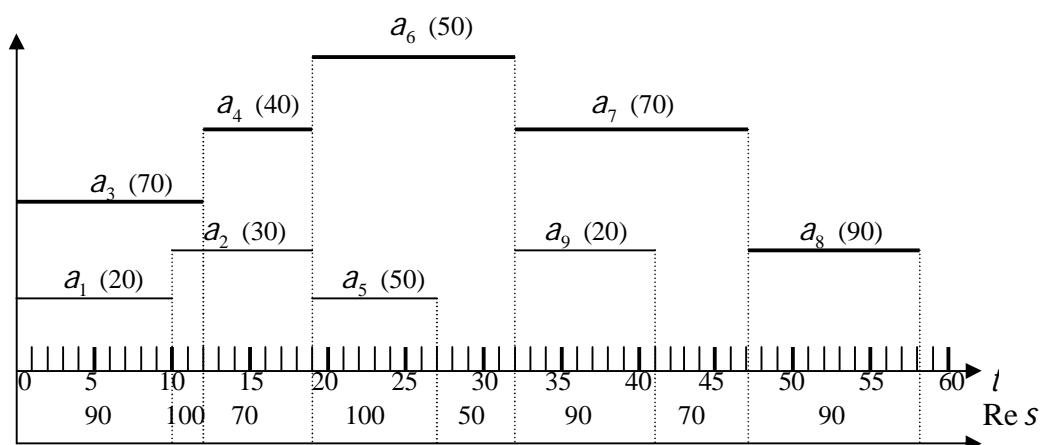
Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_5 \rightarrow a_7 . t_{кр.нов} = 31 .$

9)

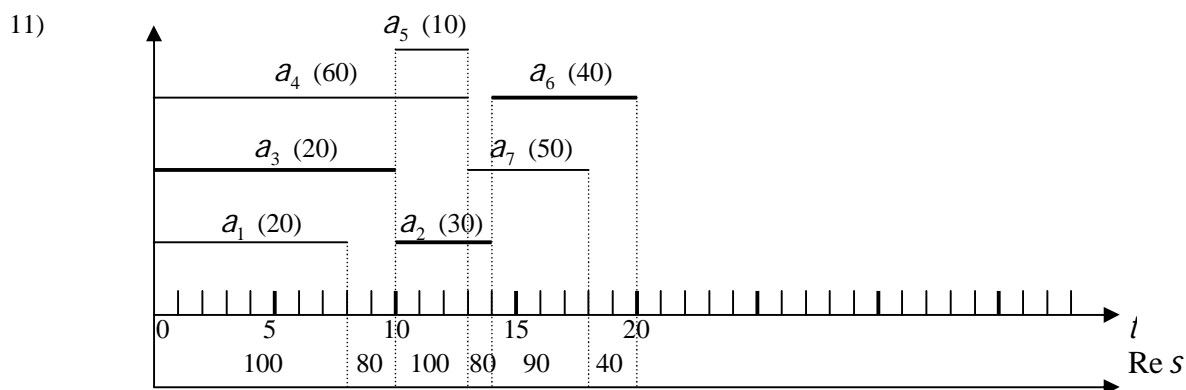


Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_6 \rightarrow a_8 \rightarrow a_9 . t_{кр.нов} = 40 .$

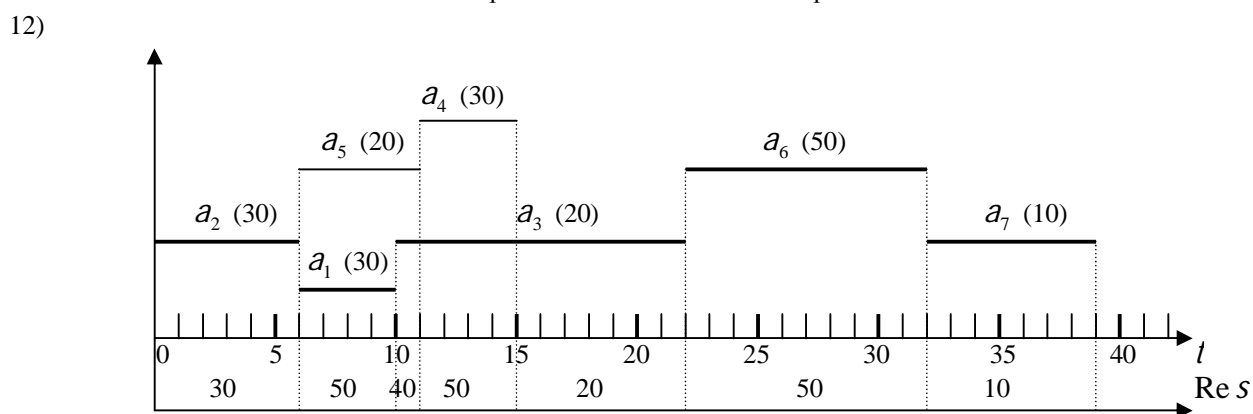
10)



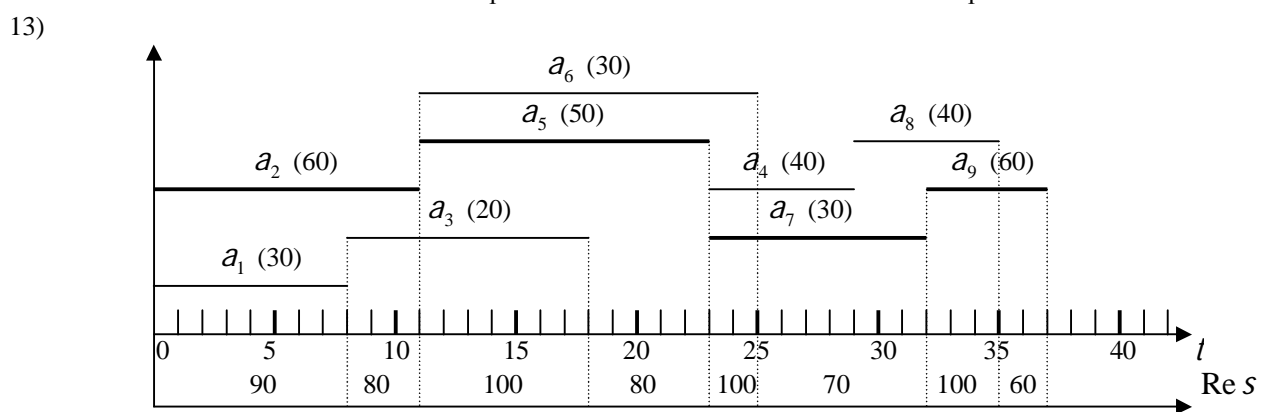
Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow a_6 \rightarrow a_7 \rightarrow a_8 . t_{кр.нов} = 58 .$



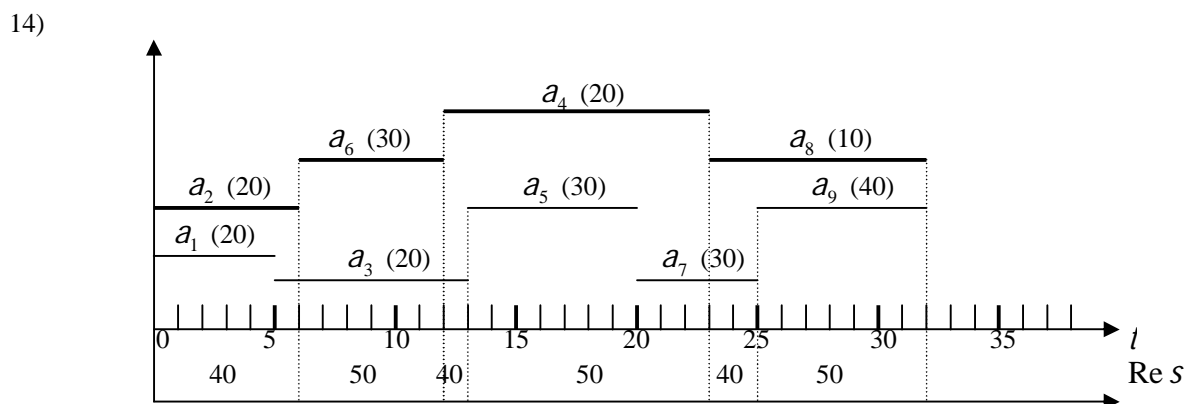
Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_3 \rightarrow a_2 \rightarrow a_6 . t_{кр.нов} = 20$ .



Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_2 \rightarrow a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_6 \rightarrow a_7 . t_{кр.нов} = 39$ .

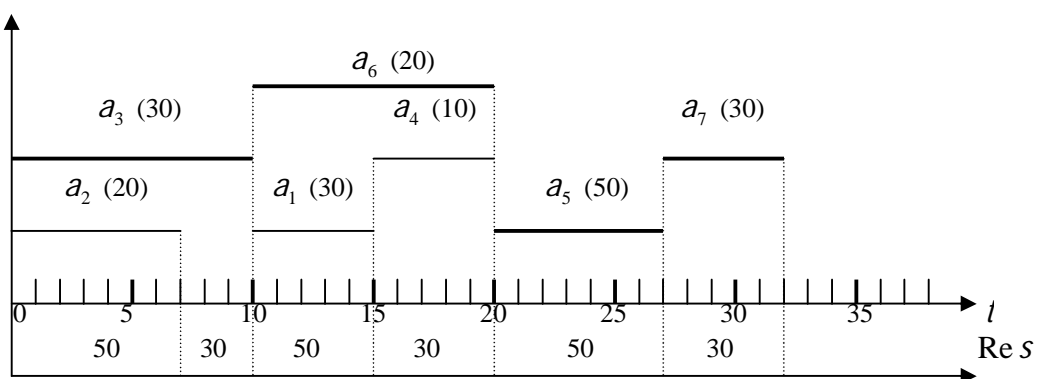


Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_2 \rightarrow a_5 \rightarrow a_7 \rightarrow a_9 . t_{кр.нов} = 37$ .



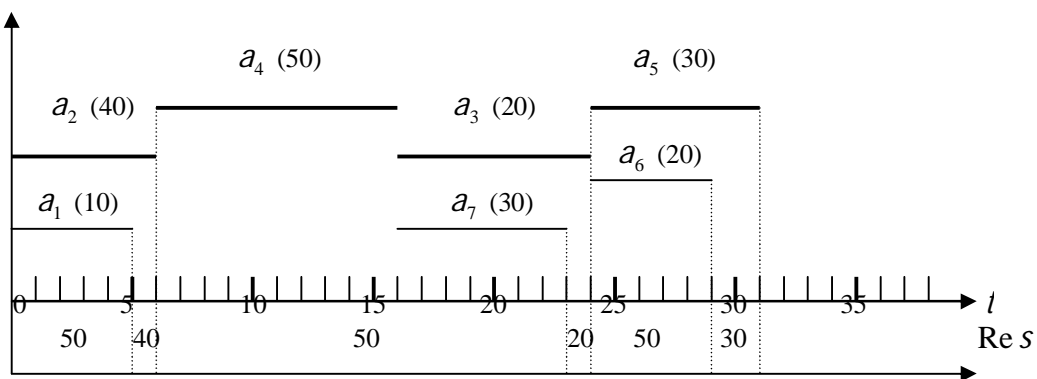
Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_2 \rightarrow a_6 \rightarrow a_4 \rightarrow a_8 . t_{кр.нов} = 32$ .

15)



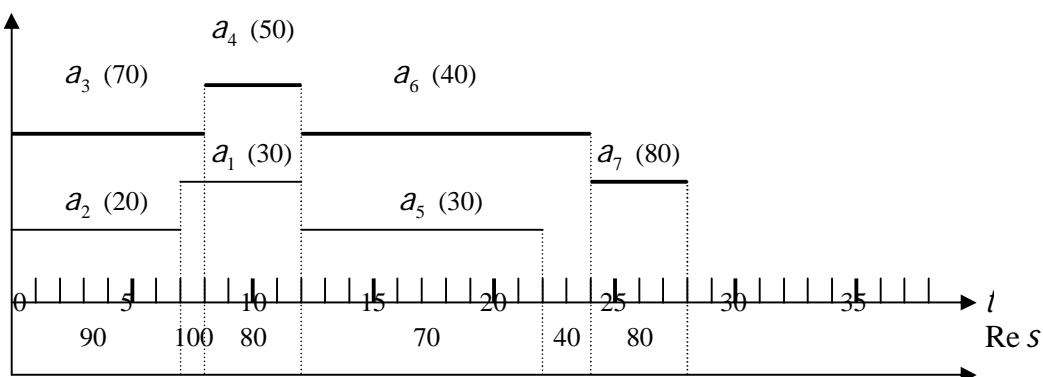
Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_3 \rightarrow a_6 \rightarrow a_5 \rightarrow a_7. t_{кр.нов} = 32.$

16)



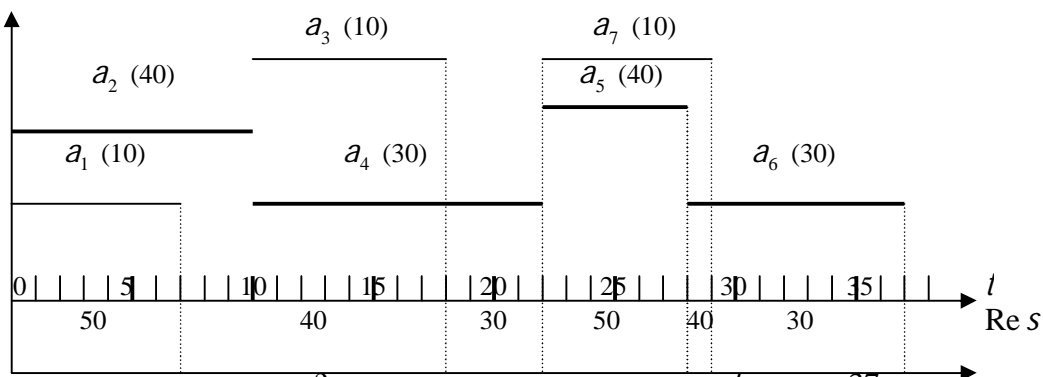
Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow a_5. t_{кр.нов} = 31.$

17)



Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow a_6 \rightarrow a_7. t_{кр.нов} = 28.$

18)

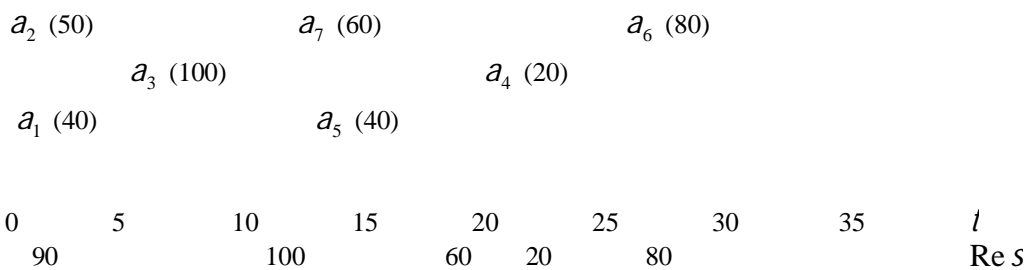


Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5 \rightarrow a_6. t_{кр.нов} = 37.$

19)

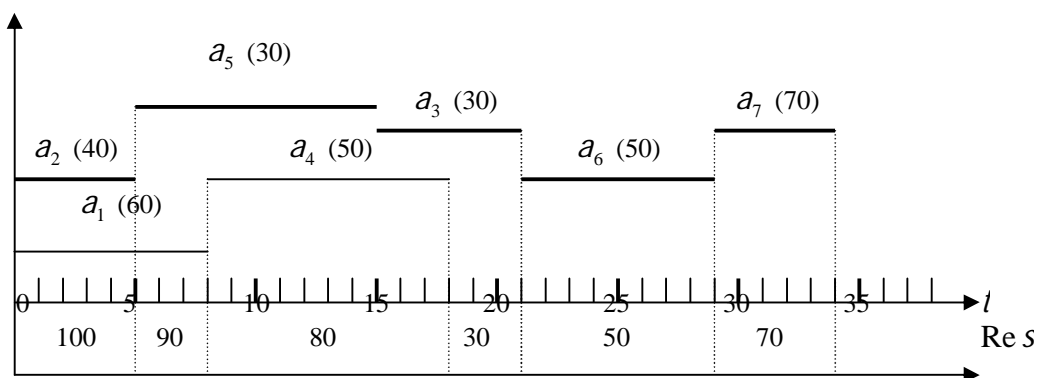






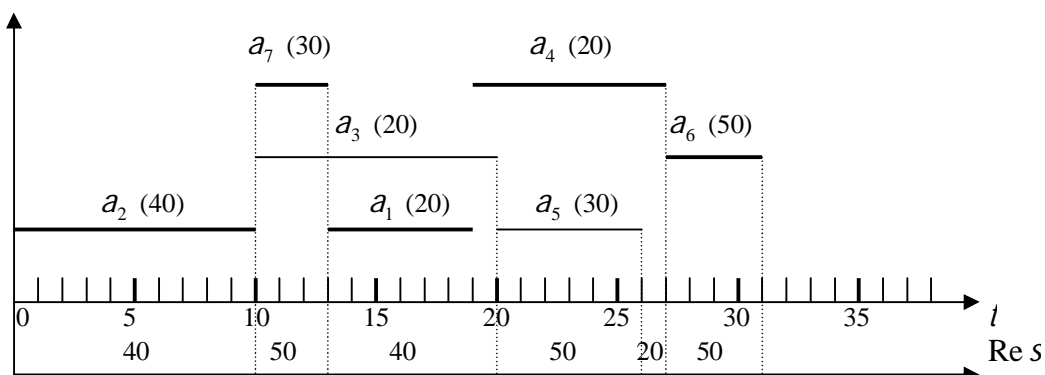
Критический путь изменился. ?  $t_{\text{кр.нов}} : a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_7 \rightarrow a_4 \rightarrow a_6. t_{\text{кр.нов}} = 30.$

20)



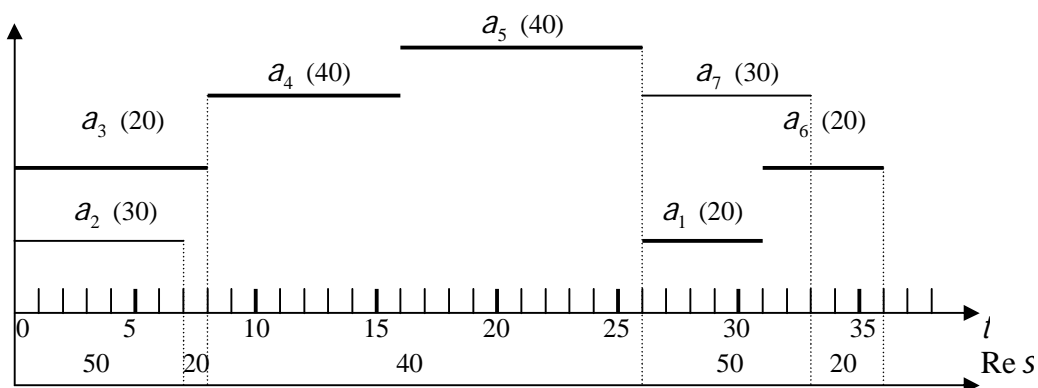
Критический путь изменился. ?  $t_{\text{кр.нов}} : a_2 \rightarrow a_5 \rightarrow a_3 \rightarrow a_6 \rightarrow a_7. t_{\text{кр.нов}} = 34.$

21)



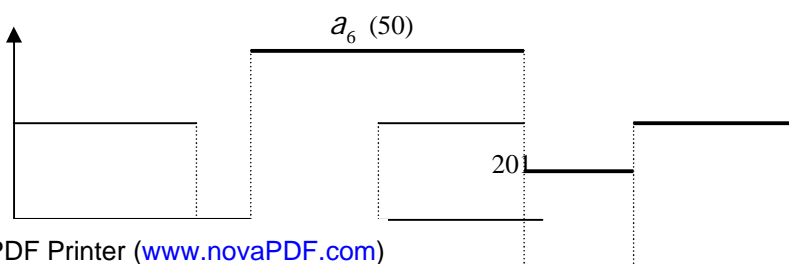
Критический путь изменился. ?  $t_{\text{кр.нов}} : a_2 \rightarrow a_7 \rightarrow a_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_6. t_{\text{кр.нов}} = 31.$

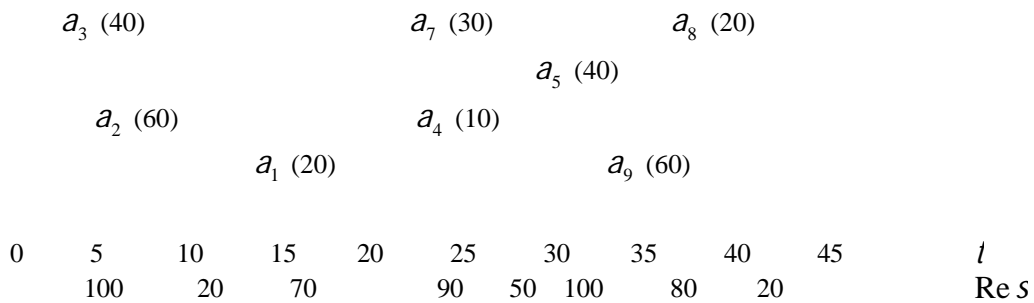
22)



Критический путь изменился. ?  $t_{\text{кр.нов}} : a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5 \rightarrow a_1 \rightarrow a_6. t_{\text{кр.нов}} = 36.$

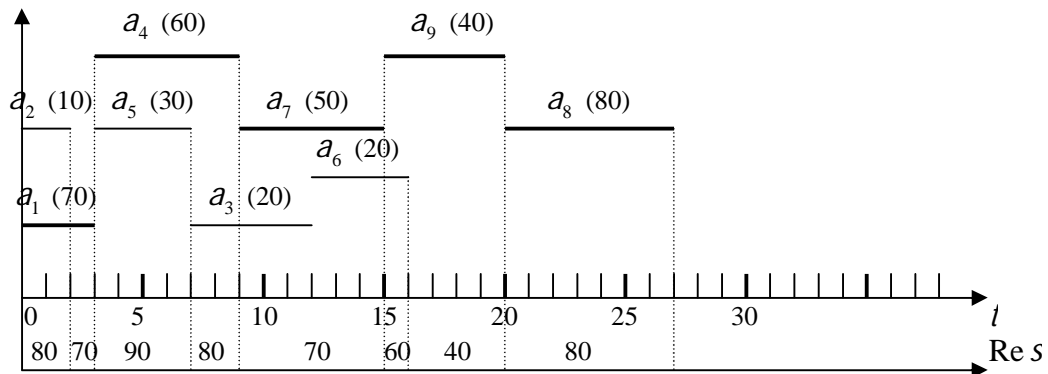
23)





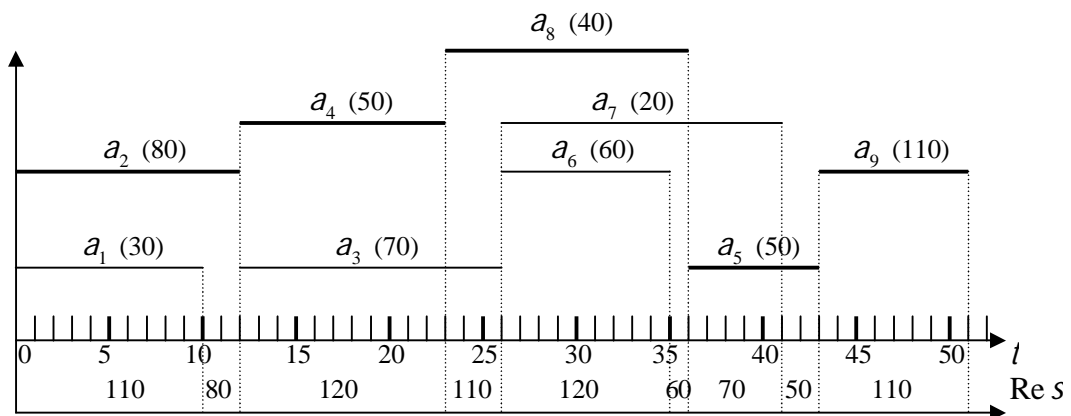
Критический путь изменился. ?<sub>кр.нов</sub> :  $a_2 \rightarrow a_6 \rightarrow a_5 \rightarrow a_8$ .  $t_{кр.нов} = 43$ .

24)



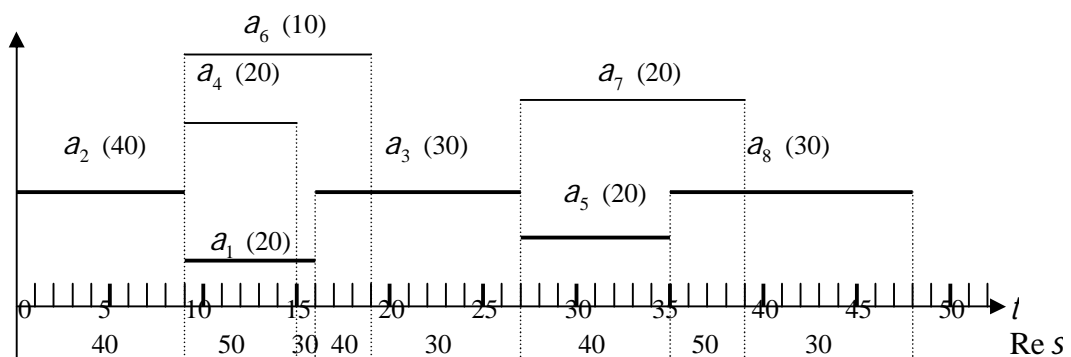
Критический путь изменился. ?<sub>кр.нов</sub> :  $a_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_7 \rightarrow a_9 \rightarrow a_8$ .  $t_{кр.нов} = 27$ .

25)



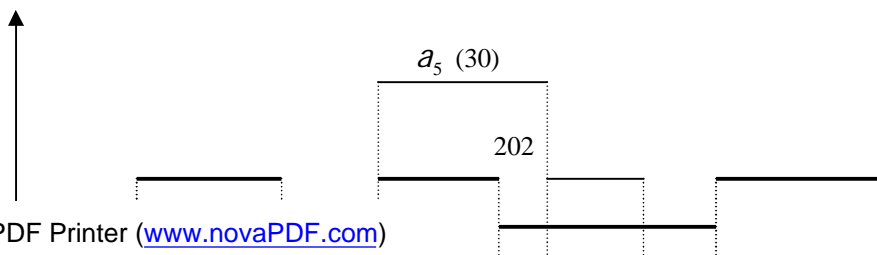
Критический путь изменился. ?<sub>кр.нов</sub> :  $a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_8 \rightarrow a_5 \rightarrow a_9$ .  $t_{кр.нов} = 51$ .

26)



Критический путь изменился. ?<sub>кр.нов</sub> :  $a_2 \rightarrow a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_5 \rightarrow a_8$ .  $t_{кр.нов} = 48$ .

27)

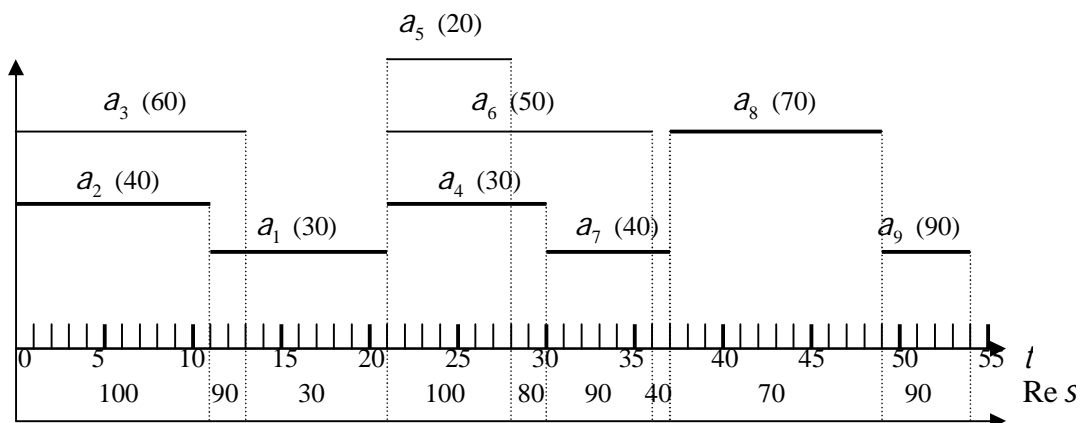


$a_3$  (50)                       $a_4$  (10)                       $a_7$  (20)                       $a_8$  (30)  
 $a_1$  (40)                       $a_2$  (20)                       $a_6$  (20)

0      5      10      15      20      25      30      35       $t$   
 40      50      20      40      50      40      20      30      Re s

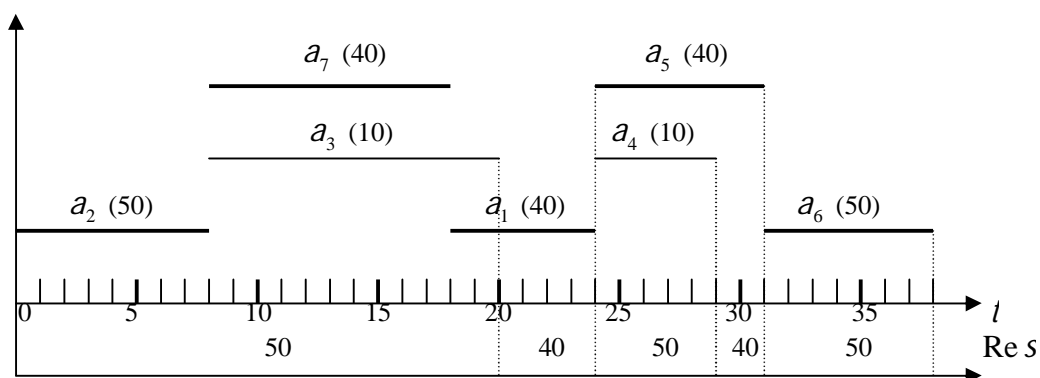
Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_6 \rightarrow a_8. t_{кр.нов} = 36.$

28)



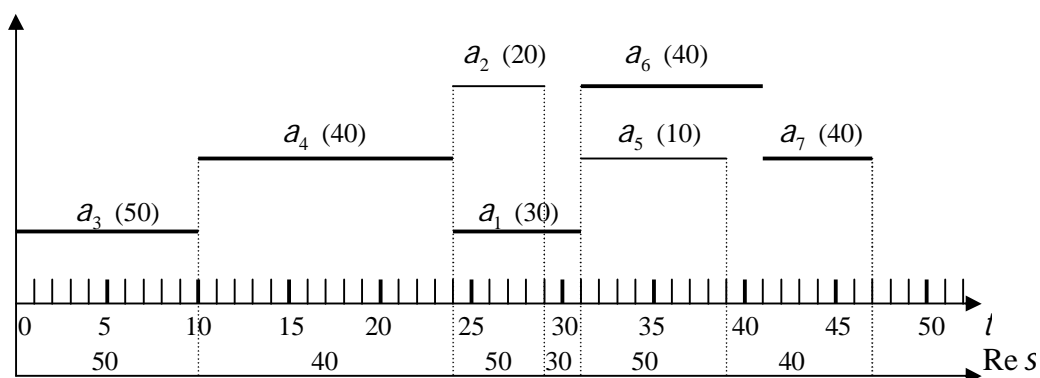
Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_2 \rightarrow a_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_7 \rightarrow a_8 \rightarrow a_9. t_{кр.нов} = 54.$

29)



Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_2 \rightarrow a_7 \rightarrow a_1 \rightarrow a_5 \rightarrow a_6. t_{кр.нов} = 38.$

30)



Критический путь изменился. ?  $t_{кр.нов} : a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow a_1 \rightarrow a_6 \rightarrow a_7. t_{кр.нов} = 47.$

3.29.5. а) Отношения предшествования работ приведены в таблице, фрагмент сетевого графика на рис. 3.44.

Основные работы	Работы, предшествующие основной
$a_1$	-
$a_2$	-
$a_3$	-
$a_4$	$a_1, a_2, a_3$
$a_5$	$a_3$

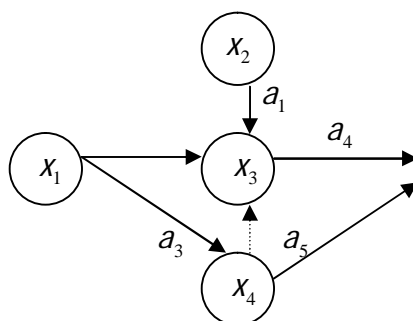


Рис. 3.44

б) Решение аналогично п. а (см. таблицу и рис. 3.45).

Основные работы	Работы, предшествующие основной
$a_1$	-
$a_2$	-
$a_3$	$a_1, a_4$
$a_4$	$a_2$
$a_5$	-
$a_6$	$a_4, a_5$
$a_7$	$a_3, a_6$

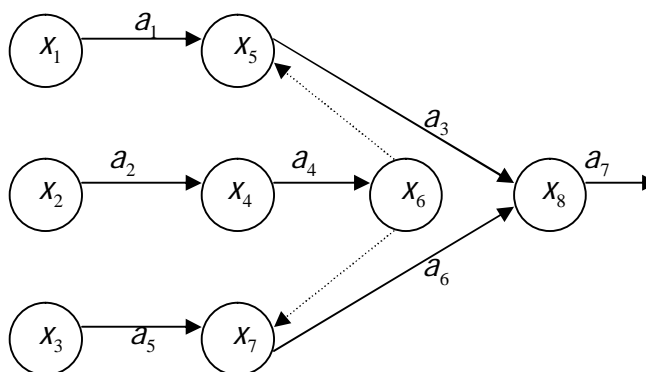


Рис. 3.45

**3.29.6.** Некоторые характеристики проекта приведены ниже:  $t_{кр} = 97$ .

?<sub>кр</sub> :  $a_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_8 \rightarrow a_9 \rightarrow a_{11} \rightarrow a_{13} \rightarrow a_{16}$ ;  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=18$ ,  $t_p(x_3)=23$ ,  $t_p(x_4)=41$ ,  $t_p(x_5)=51$ ,  $t_p(x_6)=69$ ,  $t_p(x_7)=85$ ,  $t_p(x_8)=67$ ,  $t_p(x_9)=92$ ,  $t_p(x_{10})=97$ ,  $t_{п}(x_{10})=97$ ,  $t_{п}(x_9)=92$ ,  $t_{п}(x_8)=83$ ,  $t_{п}(x_7)=85$ ,  $t_{п}(x_6)=69$ ,  $t_{п}(x_5)=51$ ,  $t_{п}(x_4)=41$ ,  $t_{п}(x_3)=31$ ,  $t_{п}(x_2)=18$ ,  $t_{п}(x_1)=0$ ;

$R(x_1)=R(x_2)=R(x_4)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=R(x_9)=R(x_{10})=0$ ,  $R(x_3)=8$ ,  $R(x_8)=16$ ;

$t_{п.н}(a_{10})=51$ ,  $t_{п.о}(a_{10})=67$ ,  $t_{п.н}(a_{10})=67$ ,  $t_{п.о}(a_{10})=83$ ,  $R_{п}(a_{10})=16$ ,  $R_c(a_{10})=0$ ,

$t_{п.н}(a_{15})=67$ ,  $t_{п.о}(a_{15})=76$ ,  $t_{п.н}(a_{15})=83$ ,  $t_{п.о}(a_{15})=92$ ,  $R_{п}(a_{15})=16$ ,  $R_c(a_{15})=16$ ,

$t_{п.н}(a_{16})=92$ ,  $t_{п.о}(a_{16})=97$ ,  $t_{п.н}(a_{16})=92$ ,  $t_{п.о}(a_{16})=97$ ,  $R_{п}(a_{16})=0$ ,  $R_c(a_{16})=0$ .

Продолжительность работы  $a_{10}$  можно увеличить на 16 единиц времени, так как  $R_{п}(a_{10})=16$ . Вместе с увеличением  $a_{10}$  произойдет пропорциональное уменьшение полного и свободного резервов работы  $a_{15}$ , которые равны  $R_{п}(a_{15})=R_c(a_{15})=16$ . Увеличение  $a_{10}$  на срок свыше 16 единиц времени приведет к увеличению критического срока проекта.

Поскольку работы  $a_{10}$  и  $a_{15}$  не лежат на критическом пути и  $a_{15}$  опирается только на  $a_{10}$ , то для увеличения продолжительности работы  $a_{15}$  можно использовать полный резерв времени работы  $a_{10}$ .

Увеличить продолжительность работы  $a_{10}$  можно именно за счет свободного резерва

времени работы  $a_{15}$ . Полный резерв времени работы  $a_{15}$  не изменится при увеличении продолжительности работы  $a_{16}$ , если неизменно ее раннее (или позднее) начало. При увеличении продолжительности работы  $a_{16}$  будет увеличиваться лишь критический срок. В таблице приведена взаимная последовательность работ, а на рис. 3.46 – линейный график проекта.

Основные работы	Работы, предшеств. основным	Продолжительность работ
$a_1$	-	18
$a_2$	-	17
$a_3$	$a_1$	5
$a_4$	$a_1$	23
$a_5$	$a_1$	19
$a_6$	$a_2, a_3$	10
$a_7$	$a_2, a_3$	17
$a_8$	$a_4, a_6$	10
$a_9$	$a_5, a_8$	18
$a_{10}$	$a_5, a_8$	16
$a_{11}$	$a_4, a_6, a_9$	16
$a_{12}$	$a_4, a_6, a_9$	5
$a_{13}$	$a_7, a_{11}$	7
$a_{14}$	$a_7, a_{11}$	10
$a_{15}$	$a_{10}$	9
$a_{16}$	$a_{12}, a_{13}, a_{15}$	5

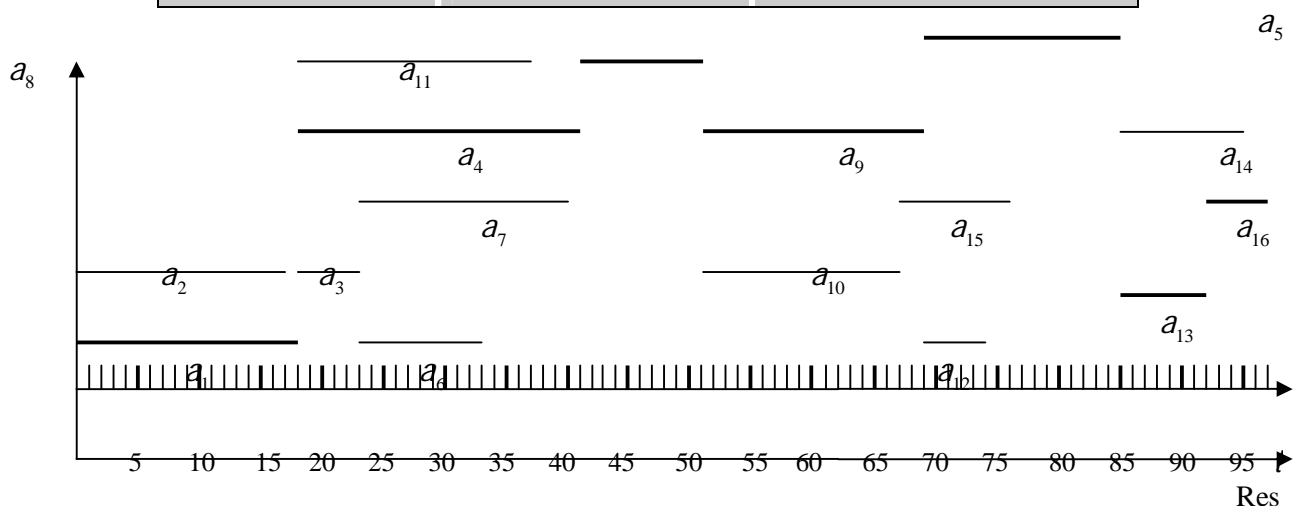


Рис. 3.46

**3.29.7.** Характеристики данного сетевого графика следующие:  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=1$ ,  $t_p(x_3)=1$ ,  $t_p(x_4)=4$ ,  $t_p(x_5)=7$ ,  $t_p(x_6)=4$ ,  $t_p(x_7)=14$ ,  $t_p(x_8)=8$ ,  $t_p(x_9)=6$ ,  $t_p(x_{10})=18$ ,

$t_{\Pi}(x_{10})=18, t_{\Pi}(x_9)=16, t_{\Pi}(x_8)=8, t_{\Pi}(x_7)=17, t_{\Pi}(x_6)=12, t_{\Pi}(x_5)=7, t_{\Pi}(x_4)=4, t_{\Pi}(x_3)=2,$   
 $t_{\Pi}(x_2)=2, t_{\Pi}(x_1)=0;$   
 $R(x_1)=R(x_4)=R(x_5)=R(x_8)=R(x_{10})=0, R(x_2)=1, R(x_3)=1, R(x_6)=8, R(x_7)=3, R(x_9)=10;$   
 $t_{\Pi.H}(a_4)=1, t_{\Pi.O}(a_4)=3, t_{\Pi.H}(a_4)=10, t_{\Pi.O}(a_4)=12, R_{\Pi}(a_4)=9, R_c(a_4)=1,$   
 $t_{\Pi.H}(a_5)=1, t_{\Pi.O}(a_5)=6, t_{\Pi.H}(a_5)=11, t_{\Pi.O}(a_5)=16, R_{\Pi}(a_5)=10, R_c(a_5)=0,$   
 $t_{\Pi.H}(a_8)=1, t_{\Pi.O}(a_8)=3, t_{\Pi.H}(a_8)=6, t_{\Pi.O}(a_8)=8, R_{\Pi}(a_8)=5, R_c(a_8)=5,$   
 $t_{\Pi.H}(a_{13})=4, t_{\Pi.O}(a_{13})=5, t_{\Pi.H}(a_{13})=15, t_{\Pi.O}(a_{13})=16, R_{\Pi}(a_{13})=11, R_c(a_{13})=1,$   
 $t_{\Pi.H}(a_{16})=6, t_{\Pi.O}(a_{16})=8, t_{\Pi.H}(a_{16})=16, t_{\Pi.O}(a_{16})=18, R_{\Pi}(a_{16})=10, R_c(a_{16})=10.$

На работу  $a_4$  опираются следующие последовательности работ:  $a_{13} \rightarrow a_{16}$  и  $a_{12} \rightarrow a_{14}$ , причем  $R_{\Pi}(a_4)=9$  определяется последовательностью работ  $a_4 \rightarrow a_{12} \rightarrow a_{14}$ , если же брать последовательность  $a_4 \rightarrow a_{13} \rightarrow a_{16}$ , то здесь резерв времени для  $a_4$  составляет уже 12 единиц времени. Таким образом, полный резерв времени работы  $a_4$  можно распределить на работы  $a_{13}$  и  $a_{16}$ , критический срок при этом не нарушится.

$R_{\Pi}(a_8)=5, R_{\Pi}(a_4)=9, R_{\Pi}(a_5)=10$ , работы  $a_4 \rightarrow a_5$  и  $a_8$  между собою не связаны. За счет полного резерва работы  $a_8$  можно увеличить длительность работ  $a_4$  и  $a_5$  на пять единиц времени, при этом критический срок не нарушится, так как полный резерв каждой из этих работ больше пяти.

Свободный резерв времени работы  $a_4$   $R_c(a_4)=1$  нельзя передать ни работе  $a_{13}$ , ни работе  $a_{12}$ , не изменив их раннего начала, ибо этот резерв представляет собой зазор между работой  $a_4$  и, например, работой  $a_{13}$  (см. таблицу и рис. 3.47). Передача свободного резерва  $a_4$

Основные работы	Работы, предшеств. основным	Продолжительность работ
$a_1$	-	1
$a_2$	-	1
$a_3$	$a_2$	2
$a_4$	$a_2$	2
$a_5$	$a_2$	5
$a_6$	-	4
$a_7$	$a_1$	5
$a_8$	$a_1$	2
$a_9$	$a_3, a_6$	3
$a_{10}$	$a_3, a_6$	10
$a_{11}$	$a_7, a_9$	1
$a_{12}$	$a_3, a_4, a_6$	5
$a_{13}$	$a_3, a_4, a_6$	1
$a_{14}$	$a_7, a_9, a_{10}, a_{12}$	1
$a_{15}$	$a_8, a_{11}$	10
$a_{16}$	$a_5, a_{13}$	2

представляет собой присоединение этого промежутка к работе  $a_{13}$  слева, следовательно, раннее начало работы  $a_{13}$  изменится.

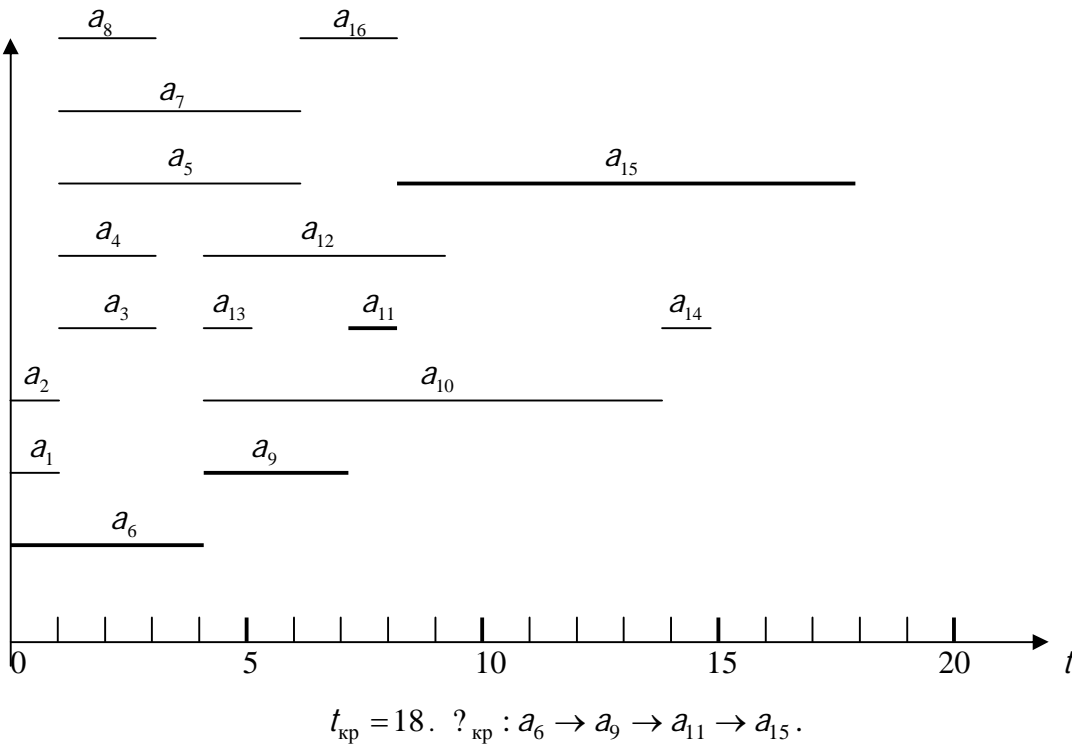


Рис. 3.47



**3.29.8.**  $t_{кр} = 35$ . ?<sub>кр</sub> :  $a_3 \rightarrow a_5 \rightarrow a_{10} \rightarrow a_{12}$ .  $t_p(x_1)=0$ ,  $t_p(x_2)=11$ ,  $t_p(x_3)=10$ ,  $t_p(x_4)=12$ ,  $t_p(x_5)=20$ ,  $t_p(x_6)=23$ ,  $t_p(x_7)=24$ ,  $t_p(x_8)=35$ ,  $t_{\Pi}(x_8)=35$ ,  $t_{\Pi}(x_7)=24$ ,  $t_{\Pi}(x_6)=27$ ,  $t_{\Pi}(x_5)=20$ ,  $t_{\Pi}(x_4)=17$ ,  $t_{\Pi}(x_3)=10$ ,  $t_{\Pi}(x_2)=15$ ,  $t_{\Pi}(x_1)=0$ ;  
 $R(x_1)=R(x_3)=R(x_5)=R(x_7)=R(x_8)=0$ ,  $R(x_2)=4$ ,  $R(x_4)=5$ ,  $R(x_6)=4$  (рис. 3.48);

$t_{p.H}(a_1)=0$ ,	$t_{p.o}(a_1)=11$ ,	$t_{\Pi.H}(a_1)=4$ ,	$t_{\Pi.o}(a_1)=15$ ,	$R_{\Pi}(a_1)=4$ ,	$R_c(a_1)=0$ ,
$t_{p.H}(a_2)=0$ ,	$t_{p.o}(a_2)=12$ ,	$t_{\Pi.H}(a_2)=5$ ,	$t_{\Pi.o}(a_2)=17$ ,	$R_{\Pi}(a_2)=5$ ,	$R_c(a_2)=0$ ,
$t_{p.H}(a_3)=0$ ,	$t_{p.o}(a_3)=10$ ,	$t_{\Pi.H}(a_3)=0$ ,	$t_{\Pi.o}(a_3)=10$ ,	$R_{\Pi}(a_3)=0$ ,	$R_c(a_3)=0$ ,
$t_{p.H}(a_4)=11$ ,	$t_{p.o}(a_4)=23$ ,	$t_{\Pi.H}(a_4)=15$ ,	$t_{\Pi.o}(a_4)=27$ ,	$R_{\Pi}(a_4)=4$ ,	$R_c(a_4)=0$ ,
$t_{p.H}(a_5)=10$ ,	$t_{p.o}(a_5)=20$ ,	$t_{\Pi.H}(a_5)=10$ ,	$t_{\Pi.o}(a_5)=20$ ,	$R_{\Pi}(a_5)=0$ ,	$R_c(a_5)=0$ ,
$t_{p.H}(a_6)=10$ ,	$t_{p.o}(a_6)=17$ ,	$t_{\Pi.H}(a_6)=17$ ,	$t_{\Pi.o}(a_6)=24$ ,	$R_{\Pi}(a_6)=7$ ,	$R_c(a_6)=7$ ,
$t_{p.H}(a_7)=12$ ,	$t_{p.o}(a_7)=22$ ,	$t_{\Pi.H}(a_7)=17$ ,	$t_{\Pi.o}(a_7)=27$ ,	$R_{\Pi}(a_7)=5$ ,	$R_c(a_7)=1$ ,
$t_{p.H}(a_8)=12$ ,	$t_{p.o}(a_8)=19$ ,	$t_{\Pi.H}(a_8)=28$ ,	$t_{\Pi.o}(a_8)=35$ ,	$R_{\Pi}(a_8)=16$ ,	$R_c(a_8)=16$ ,
$t_{p.H}(a_{11})=23$ ,	$t_{p.o}(a_{11})=31$ ,	$t_{\Pi.H}(a_{11})=27$ ,	$t_{\Pi.o}(a_{11})=35$ ,	$R_{\Pi}(a_{11})=4$ ,	$R_c(a_{11})=4$ ,
$t_{p.H}(a_{12})=24$ ,	$t_{p.o}(a_{12})=35$ ,	$t_{\Pi.H}(a_{12})=24$ ,	$t_{\Pi.o}(a_{12})=35$ ,	$R_{\Pi}(a_{12})=0$ ,	$R_c(a_{12})=0$ .

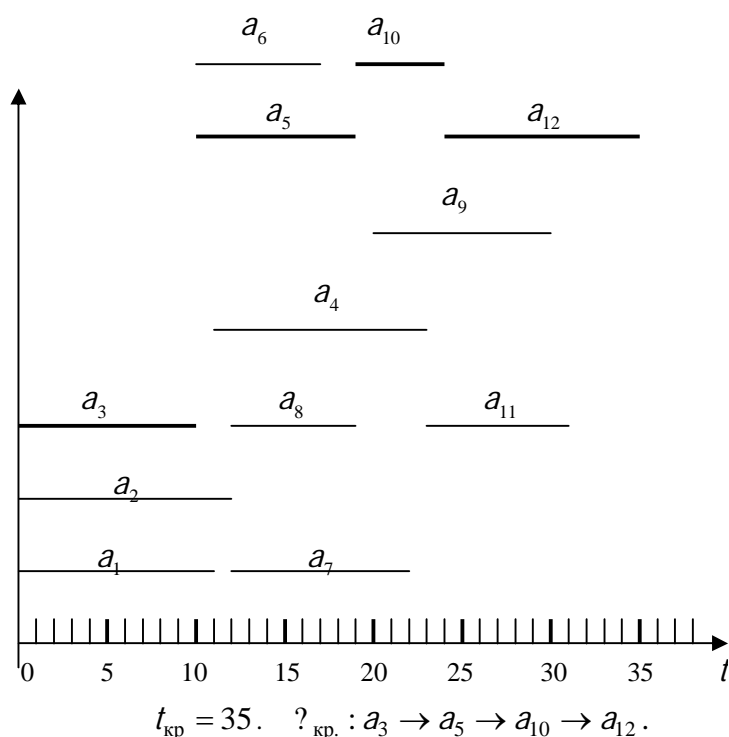


Рис. 3.48

### Библиографический список

1. Акимов О.Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2003.
2. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
3. Баушев А.Н., Вяххи И.Э. Сетевые модели и методы. Методические указания, Изд-во ПГУПС, СПб., 1998.

4. *Беляева С.Д.* Прикладная математика в примерах и задачах. Ч. II. ВВА. Л., 1987.
5. *Виленин Н.Я.* Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975.
6. *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. М.: Наука, 1992.
7. *Гельфанд С.И.* и др. Задачи по элементарной математике. М.: Наука, 1965.
8. *Горбатов В.А.* Основы дискретной математики. М.: Высшая школа, 1986.
9. *Дендобренко Б.Н., Малика А.С.* Автоматизация конструирования РЭА. М.: Высшая школа, 1980.
10. *Дискретная математика и математические вопросы кибернетики* / Под ред. С.В. Яблонского и О.Б. Лупанова. М.: Наука, 1974.
11. *Евстигнеев В.А.* Применение теории графов в программировании. М.: Наука, 1985.
12. *Егорычев Г.П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск: Наука, 1977.
13. *Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Элементы комбинаторики. М.: Наука, 1977.
14. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
15. *Иванов Б.Н.* Дискретная математика. Алгоритмы и программы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
16. *Камерон П., ван Линт Дж.* Теория графов, теория кодирования и блок-схемы. М., Наука, 1980.
17. *Кановой В.Г.* Аксиома выбора и аксиома детерминированности. М.: Наука, 1984.
18. *Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения* / Под ред. К.А. Рыбникова. М.: Наука, 1982.
19. *Кориунов А.Д.* Основные свойства случайных графов с большим числом вершин и ребер УМН. 1985. Т. 40 вып. 1.
20. *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику. М.: Наука, 1975.
21. *Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И.* Высшая математика. Математическое программирование. Минск: Высшая школа, 1994.
22. *Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 1984.
23. *Нефедов В.Н., Осипова В.А.* Курс дискретной математики. М.: Изд-во МАИ, 1992.
24. *Новиков Ф.А.* Дискретная математика для программистов. СПб., Питер, 2000.
25. *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1980.
26. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980.
27. *Романовский И.В.* Дискретный анализ. Часть I. СПб.: Центр издательских систем ИТМО, 1998.
28. *Рыбников К.А.* Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1972.
29. *Сергиенко И.В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев: Наукова думка, 1985.
30. *Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В.* Элементы дискретной математики. М.-Новосибирск: ИНФА-М – НГТУ, 2002.
31. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977.
32. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.
33. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.

*Шапоров Сергей Дмитриевич*

**Дискретная математика**

Редактор и корректор *Г.В. Никитина*

Подписано в печать ??.??..2003. Формат 60?84/8. Бумага документная. Печать трафаретная. Усл. - печ. л.??,??.

Уч. - изд. л.?? Тираж 250 экз. Заказ № ??.

Балтийский государственный технический университет

Типография БГТУ

190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д.1

