

Virumaa Kolledž

Gennadi Arjassov

**TUGEVUSÕPETUSE ARVUTUSGRAAFILISED
KODUÜLESANDED (Õppeainetes “Tehniline
mehaanika” ja ”Tugevusõpetus”)**

Õppevahend

Kohtla-Järve
2015

Eessõna

Käesolevas õppevahendis on antud tugevusõpetuse arvutusgraafilised ülesanded tehnilise mehaanika ja rakendusmehaanika õppeainete jaoks. Need on määratud eelkõige Virumaa Kolledži tootmistehnika ja tööstusettevõtluse õppekavaga üliõpilastele iseseisva tööks. Ära on toodud ka näiteülesanded, mõningate ülesannete puhul on antud lahendused kahel erinevatel viisil. Peale selle, mõnede teemade jaoks on antud teoreetilised alused, mis on täienduseks tugevusõpetuse õpikutele.

Material on paigutatud internetti aadressil: www.mh.ttu.ee/gennadi. Seal on ka valtsprofiili tabelid ülesannete mugavamaks lahendamiseks.

Содержание

0. Указание о порядке выполнения домашних работ	4
1. Растяжение-сжатие	5-15
Работа 1	5-8
Работа 2	9-15
2. Кручение	16-23
Работа 3	16-23
3. Заклепочные соединения	24-29
Работа 4	24-29
4. Сварные соединения	30-33
Работа 5	30-33
5. Цилиндрические пружины	34-43
Работа 6	34-43
6. Подбор поперечного сечения при изгибе	44-54
Работа 7	44-54
7. Определение допускаемой силы при изгибе	55-63
Работа 8	55-63
8. Плоское напряженное состояние	64-68
Работа 9	64-68
9. Косой изгиб	69-77
Работа 10	69-77
10. Внецентренное сжатие	78-86
Работа 11	78-86
11. Изгиб с кручением	87-95
Работа 12	87-95
12. Пространственные стержни с ломанной осью	96-99
Работа 13.....	96-99
13. Статически неопределимые системы.....	100-111
Работа 14.....	100-111
14. Устойчивость сжатого стержня.....	112-115
Работа 15.....	112-115
15. Расчет на выносливость.....	117-122
Работа 16.....	117-122
16. Поперечный удар.....	123-129
Работа 17.....	123-129
17. Колебания системы с одной степенью свободы.....	130-140
Работа 18.....	130-140
18. Расчет криволинейного бруса.....	141-161
Работа 19.....	141-161
Литература.....	162
Образец титульного листа домашней работы.....	163-164

0. Указания о порядке выполнения домашних работ

1. Студент должен взять из таблиц исходные данные в соответствии с двумя последними цифрами матрикула.
2. Не следует приступать к выполнению заданий, не изучив соответствующего раздела курса. Иначе при выполнении домашних работ возникнут серьезные затруднения.
3. Каждую домашнюю работу следует выполнять на листах формата А4 с титульным листом, примерный образец которого приводится.
4. В работе должны быть указаны необходимые для расчета все исходные данные своего варианта.
5. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными объяснениями и четкими эскизами, на которых должны быть указаны все входящие в расчет величины. Следует избегать многословных пояснений и пересказа учебника или пособия. Язык техники – формула и чертеж.
6. Решение задач следует проводить по возможности в алгебраической форме, пользуясь стандартными буквенными обозначениями. Подстановку чисел надо производить в буквенное выражение искомого результата и вычисления делать после возможных сокращений. Однако следует иметь в виду, что могут быть случаи, когда трудно или даже невозможно довести расчеты в буквенном виде до конца, поэтому не надо стараться получить окончательный ответ в алгебраической форме.
7. Буквенные обозначения и обозначения единиц измерений должны соответствовать стандарту. Применяемые нестандартные буквенные обозначения должны быть пояснены.

Все величины, получаемые в результате расчета, должны сопровождаться указанием размерности.

8. Не надо увлекаться большим числом значащих цифр, помня о правилах приближенных вычислений, чтобы точность вычислений всегда соответствовала необходимой точности. Бесмысленно вычислять длину балки с точностью до миллиметра и в то же время округлять до целых миллиметров диаметр вала под шариковый подшипник.

Числовые величины, с которыми имеет дело сопротивление материалов, получаются из опыта или практических измерений и, поскольку опыты и измерения не абсолютно точны, поскольку и числовые величины приближенны. Кроме того, величины технических расчетов определяются обычно для того, чтобы быть выполненными, а всякое техническое выполнение связано с неточностью. Следовательно, и при вычислениях нет надобности получить абсолютно точные результаты, поэтому необходимо уметь получать эти результаты с достаточной для данного случая (практики) точностью и с наименьшей затратой времени.

1. Растяжение-сжатие

Работа 1

1а

Балка AB подвешена на стержнях AC и BD , состоящих из двух уголков каждый, и нагружена сосредоточенной силой F (рис.1а).

Требуется:

- Определить растягивающие усилия в стержнях AC и BD .
- Подобрать сечения этих стержней из равнобоких уголков по сортаменту прокатной стали при допускаемом напряжении $[\sigma] = 140$ МПа.
- Проверить прочность подобранных уголков в стержне.
- Определить абсолютное удлинение стержня AC , если модуль упругости $E = 200$ ГПа.

Данные взять из таблицы 1а.

Таблица 1а

По последней цифре матрикула	a, m	b, m	По предпоследней цифре матрикула	h, m	F, kH
1	1,0	4,0	1	2,0	700
2	2,0	3,0	2	3,0	500
3	1,5	3,5	3	2,0	500
4	1,0	5,0	4	3,0	420
5	1,2	3,8	5	3,0	500
6	1,4	3,6	6	5,0	1000
7	1,5	4,5	7	4,0	4000
8	1,6	3,4	8	4,0	750
9	1,8	3,2	9	5,0	490
0	1,0	6,0	0	4,0	910

Указание:

- усилия N_{AC} и N_{BD} (продольные силы) в стержнях AC и BD найти, применяя условия равновесия стержня AB
- удлинение стержня AC находится $\Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} h}{EA}$, где A – площадь поперечного сечения двух уголков.

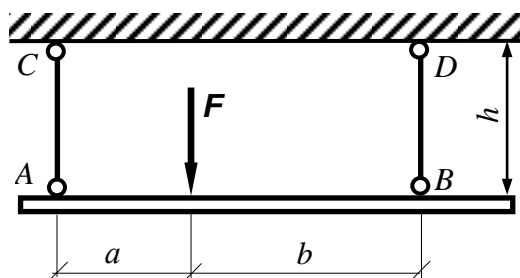


Рис. 1а

16

Стрела AB нагружена в узле A вертикальной силой F и удерживается в горизонтальном положении оттяжкой AC , состоящей из двух уголков, соединенных между собой заклепками (рис.1б).

Требуется:

- Определить растягивающее усилие в оттяжке AC , применяя условие равновесия стрелы AB .
- Подобрать сечение оттяжки AC из двух неравнобоких уголков по сортаменту прокатной стали при допуске напряжении $[\sigma] = 160$ МПа.
- Проверить прочность подобранных уголков в оттяжке.
- Определить абсолютное удлинение оттяжки AC , если модуль упругости $E = 210$ ГПа.

Данные взять из таблицы 1б.

Таблица 1б

По последней цифре матрикула	l, m	h, m	По предпоследней цифре матрикула	F, kH
1	3,0	1,7	1	240
2	4,0	2,1	2	250
3	5,0	2,9	3	260
4	6,0	3,2	4	210
5	3,0	1,8	5	230
6	3,5	2,0	6	180
7	4,0	2,4	7	320
8	4,5	2,5	8	310
9	5,0	3,0	9	280
0	5,5	3,1	0	200

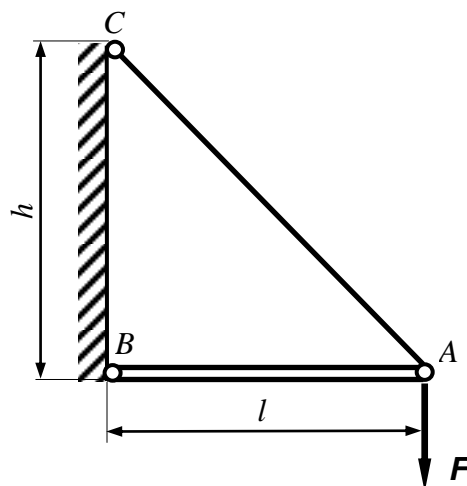


Рис. 1б

1в

Груз F подвешен к двум наклонным стержням, состоящим из двух швеллеров каждый (рис.1в).

Требуется:

- Определить растягивающие усилия в стержнях AB и AC , используя условия равновесия узла A .
- Подобрать сечения стержней AB и AC из двух швеллеров каждый по сортаменту прокатной стали при допускаемом напряжении $[\sigma]=160$ МПа.
- Проверить прочность подобранных уголков в стержнях.
- Определить абсолютное удлинение стержня AB , если модуль упругости $E = 210$ ГПа.

Данные взять из таблицы 1в.

Таблица 1в

По последней цифре матрикула	a , m	b , m	По предпоследней цифре матрикула	h , m	F , kH
1	4,0	3,0	1	5,0	560
2	3,6	4,0	2	5,2	580
3	3,0	3,6	3	3,3	600
4	3,2	5,0	4	3,7	620
5	4,0	3,6	5	4,3	420
6	4,5	3,5	6	4,7	440
7	3,5	4,5	7	4,9	500
8	4,8	5,0	8	5,5	750
9	5,0	2,5	9	6,0	800
0	5,5	3,5	0	6,2	850

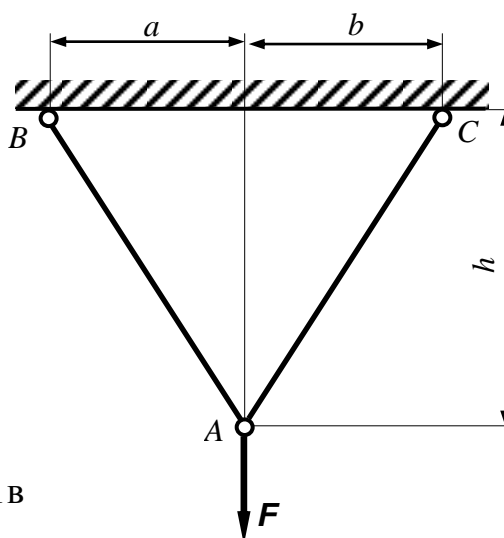


Рис. 1в

1г

Балка AB опирается на два кирпичных столба одинаковой высоты h , но с разными площадями поперечных сечений A_1 и A_2 (рис.1г).

Определить:

- Наибольшую допускаемую величину силы F , а также положение этой силы на балке (расстояния a и b).
- Абсолютное укорочение столбов при найденном значении силы. Допускаемое напряжение для кирпичной кладки $[\sigma] = 2$ МПа, модуль упругости $E = 3$ ГПа.
- Проверить прочность кирпичной кладки для найденной допускаемой силы.

Данные взять из таблицы 1г.

Таблица 1г

По последней цифре матрикула	$A_1, \text{см}^2$	$A_2, \text{см}^2$	По предпоследней цифре матрикула	$l, \text{м}$	$h, \text{м}$
1	600	2400	1	6,0	3,5
2	2100	1200	2	7,0	4,5
3	1050	2100	3	5,6	5,0
4	1150	2300	4	5,4	5,5
5	2550	950	5	7,5	6,0
6	1500	2000	6	7,2	5,0
7	2500	1250	7	6,4	4,0
8	2400	1450	8	6,0	5,5
9	2000	1600	9	7,4	2,8
0	2700	950	0	8,4	2,7

Примечание:

Наибольшая допускаемая величина силы F получается при условии, что прочность материала обоих столбов полностью использована.

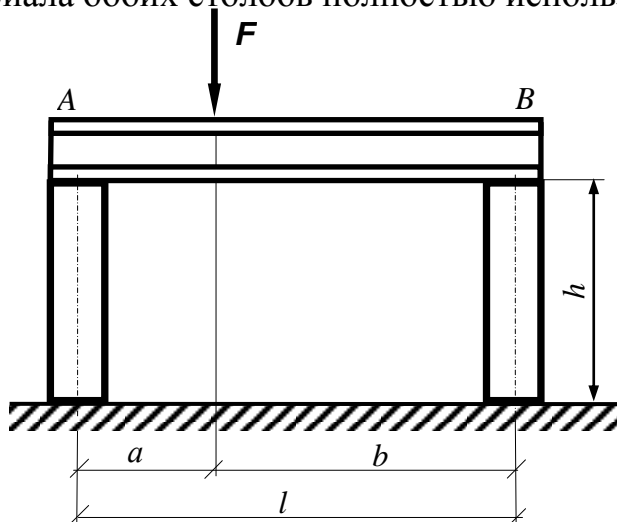


Рис. 1г

Работа 2

2а

Определить при каком значении растягивающей силы F стальной стержень ступенчатого сечения (рис.2а) удлинится на 2 мм.

Определить при найденной величине F нормальные напряжения в обеих частях бруса.

Проверить прочность стального стержня при заданном допуске напряжении $[\sigma]$

Модуль упругости $E = 200$ ГПа.

Данные взять из таблицы 2а.

Таблица 2а

По последней цифре матрикула	$A_1, \text{см}^2$	$A_2, \text{см}^2$	По предпоследней цифре матрикула	$l_1, \text{м}$	$l_2, \text{м}$	$[\sigma]$ МПа
1	5,0	10,0	1	2,2	1,8	120
2	4,0	9,0	2	3,0	2,4	110
3	3,0	8,0	3	2,0	2,0	130
4	10,0	15,0	4	3,2	1,8	140
5	8,0	14,0	5	3,4	2,1	150
6	7,0	13,0	6	4,0	2,4	160
7	6,0	12,0	7	3,5	1,5	145
8	4,0	8,0	8	2,5	1,4	135
9	9,0	20,0	9	2,8	1,8	125
0	3,0	7,0	0	1,8	1,6	155

Указание:

- Удлинение по закону Гука определяется как $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$,
- общее удлинение, учитывая ступенчатое изменение поперечного сечения, складывается из удлинений обеих частей бруса $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$.

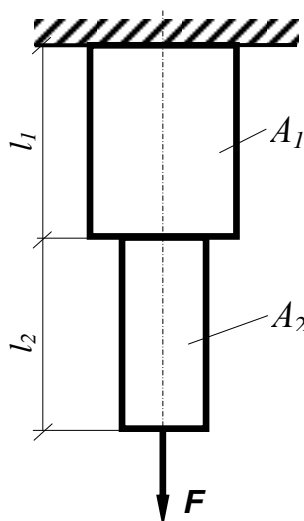


Рис. 2а

2b

Стальной стержень находится под действием продольных сосредоточенных сил и собственного веса (рис.2б). Модуль упругости $E = 200$ ГПа, удельный вес материала $\gamma = 76,5$ кг/м³.

Требуется:

- Построить эпюру продольных сил.
- Построить эпюру нормальных напряжений.
- Проверить прочность стального стержня.
- Определить абсолютное перемещение сечения I-I.

Данные взять из таблицы 2б.

Таблица 2б

<i>Исходные данные по предпоследней цифре матрикула</i>	<i>Схема рисунка по последней цифре матрикула</i>	<i>[σ] раст МПа</i>	<i>[σ] сжат МПа</i>	<i>A, см²</i>	<i>a, м</i>	<i>b, м</i>	<i>c, м</i>	<i>F, кН</i>
1	1	120	60	11	2,1	2,1	1,1	1,1
2	2	140	70	12	2,2	2,2	1,2	1,2
3	3	130	65	13	2,3	2,3	1,3	1,3
4	4	150	75	14	2,4	2,4	1,4	1,4
5	5	110	55	15	2,5	2,5	1,5	1,5
6	6	160	80	16	2,6	2,6	1,6	1,6
7	7	145	70	17	2,7	2,7	1,7	1,7
8	8	155	75	18	2,8	2,8	1,8	1,8
9	9	135	65	19	2,9	2,9	1,9	1,9
0	0	125	65	20	3,0	3,0	2,0	2,0

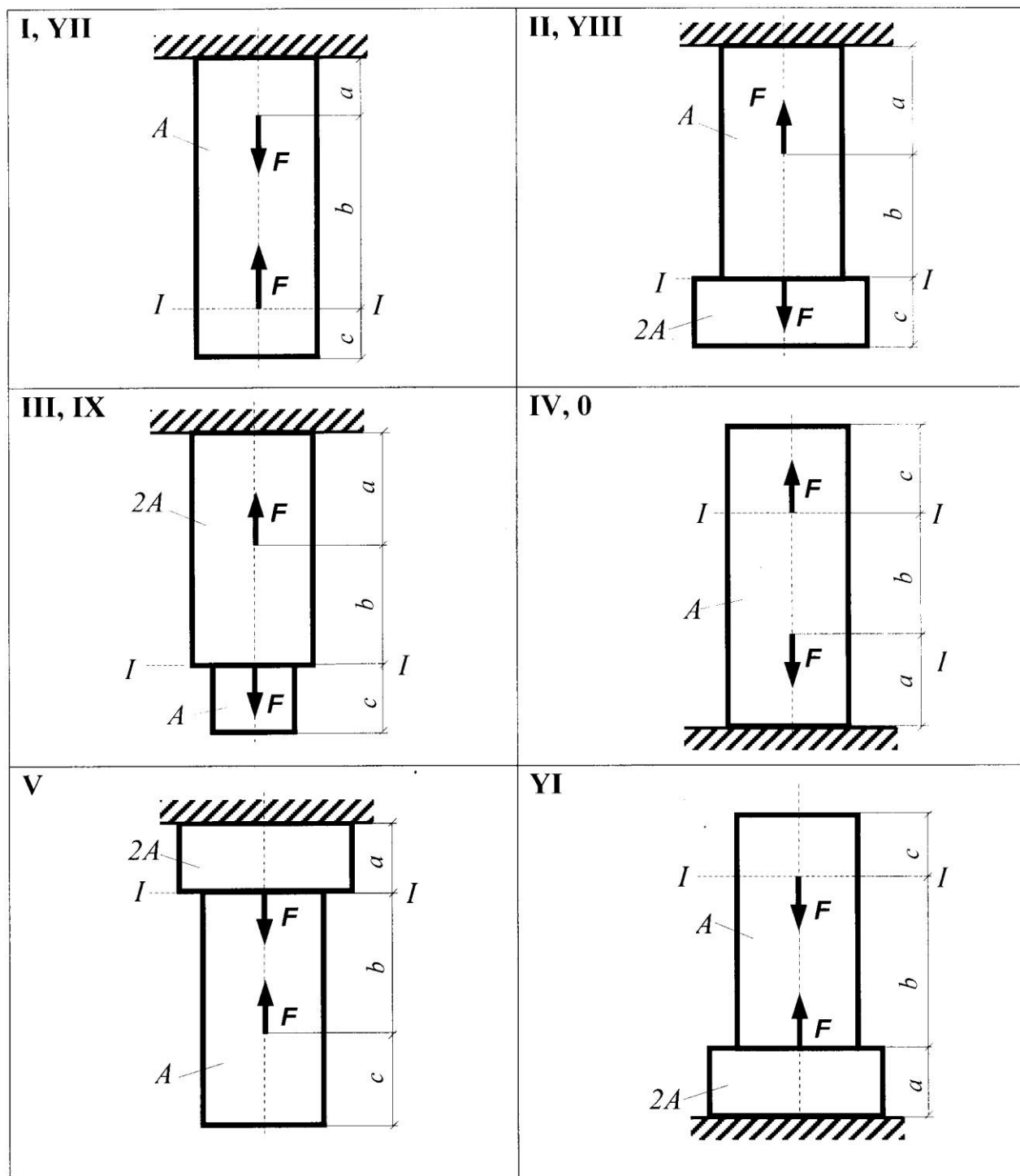
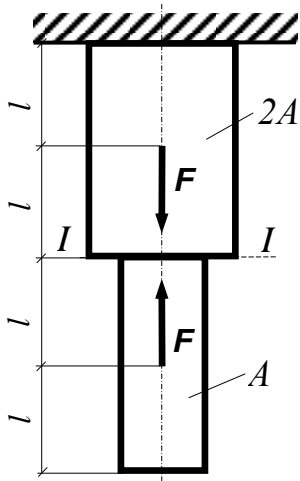


Рис. 26

Пример решенияДано:

$$\begin{aligned}
 F &= 2 \text{ кН} \\
 l &= 5 \text{ м} \\
 \gamma &= 76,5 \text{ кН/м}^3 \\
 H &= 20 \text{ см}^2 \\
 E &= 210 \text{ ГПа} \\
 [\sigma]_{\text{раст}} &= 100 \text{ МПа} \\
 [\sigma]_{\text{сжат}} &= 40 \text{ МПа}
 \end{aligned}$$

Решение

1. Построение эпюры продольных сил N от заданной нагрузки.
2. Построение эпюру нормальных напряжений в поперечных сечениях.
3. Проверка прочности стального стержня.
4. Определение перемещение сечения $I-I$.

1. Построение эпюры продольных сил

Построение эпюры разобьем на три этапа. Сначала строим эпюру от собственного веса:

$$\text{вес участка } AB \quad G_{AB} = \gamma A l_{AB} = 76,5 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 5 = 765 \text{ Н} = 0,765 \text{ кН},$$

соответственно вес

$$\text{участка } BC \quad G_{BC} = G_{AB} = 0,765 \text{ кН},$$

$$\text{участка } CD \quad G_{CD} = 2G_{AB} = 2 \cdot 0,765 = 1,53 \text{ кН} \text{ и}$$

$$\text{участка } DE \quad G_{DE} = G_{CD} = 1,53 \text{ кН},$$

откуда N_G в сечениях

$$A - A \quad \text{равна } N_G = 0 \text{ кН};$$

$$B - B \quad N_G = 0,765 \text{ кН};$$

$$C - C \quad N_G = 1,53 \text{ кН};$$

$$D - D \quad N_G = 3,06 \text{ кН};$$

$$E - E \quad N_G = 4,59 \text{ кН}.$$

Эпюра продольных сил от собственного веса будет изменяться по линейному закону (растяжение).

Значения продольных сил от сосредоточенных сил будет следующей

$$\text{на участке } AB \quad N_F = 0,$$

$$\text{на участка } BD \quad N_F = -F = -2 \text{ кН (сжатие)}$$

$$\text{на участка } DE \quad N_F = -F + F = 0$$

Эпюра имеет ступенчатый вид (на участке BD стержень сжат).

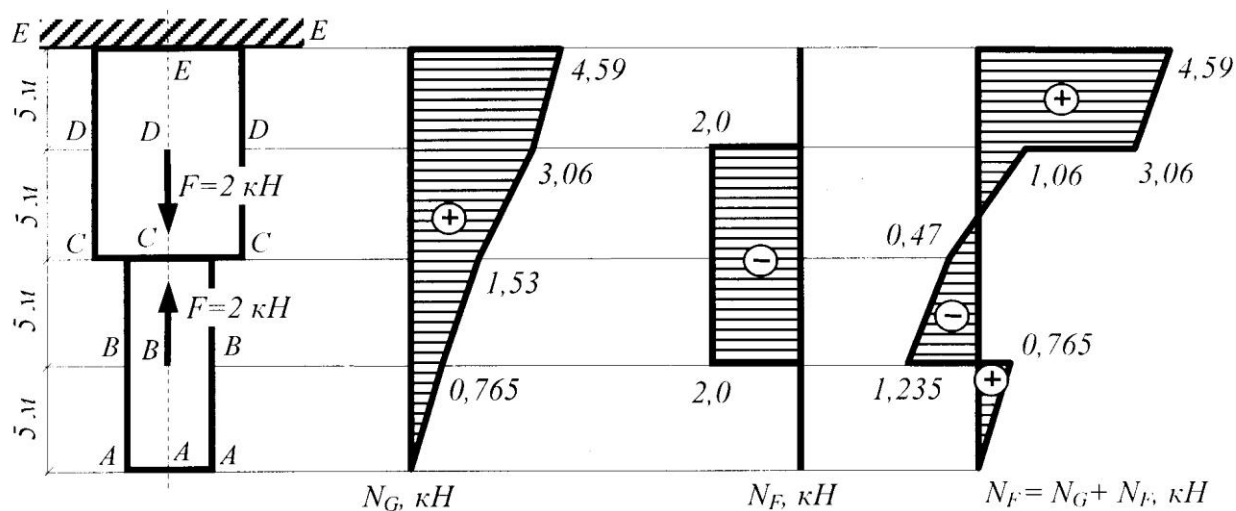
Теперь складываем значения на обеих эпюрах и получаем

$$\text{в сечении } A - A \quad N_A = N_G + N_F = 0 + 0 = 0$$

$$\text{в сечении } B - B \quad \text{до} \quad N_{B-} = 0,765 + 0 = 0,765 \text{ кН}$$

$$\text{после} \quad N_{B+} = 0,765 + (-2) = -1,235 \text{ кН}$$

в сечении $C - C$ $N_C = 1,53 + (-2) = -0,47 \text{ кН}$
 в сечении $D - D$ до $N_{D-} = 3,06 + (-2) = 1,06 \text{ кН}$
 после $N_{D+} = 3,06 + 0 = 3,06 \text{ кН}$
 в сечении $E - E$ $N_E = 4,59 + 0 = 4,59 \text{ кН}$.



2. Построение эпюры нормальных напряжений

Нормальные напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где A – площадь поперечного сечения;
 N – продольная сила.

Тогда в сечении $A - A$

$$\sigma_A = \frac{N_A}{A} = \frac{0}{A} = 0,$$

в сечении $B - B$

$$\text{до } \sigma_{B-} = \frac{0,765 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = 382500 \text{ Па} = 0,38 \text{ МПа}.$$

$$\text{после } \sigma_{B+} = \frac{-1,235 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = -617500 \text{ Па} = -0,62 \text{ МПа}.$$

в сечении $C - C$

$$\text{до } \sigma_{C-} = \frac{-0,47 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = -235000 \text{ Па} = -0,24 \text{ МПа}.$$

$$\text{после } \sigma_{C+} = \frac{-0,47 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = -117500 \text{ Па} = -0,12 \text{ МПа}.$$

NB! Скачок в значениях нормального напряжения обусловлен скачкообразным изменением поперечного сечения.

в сечении $D - D$

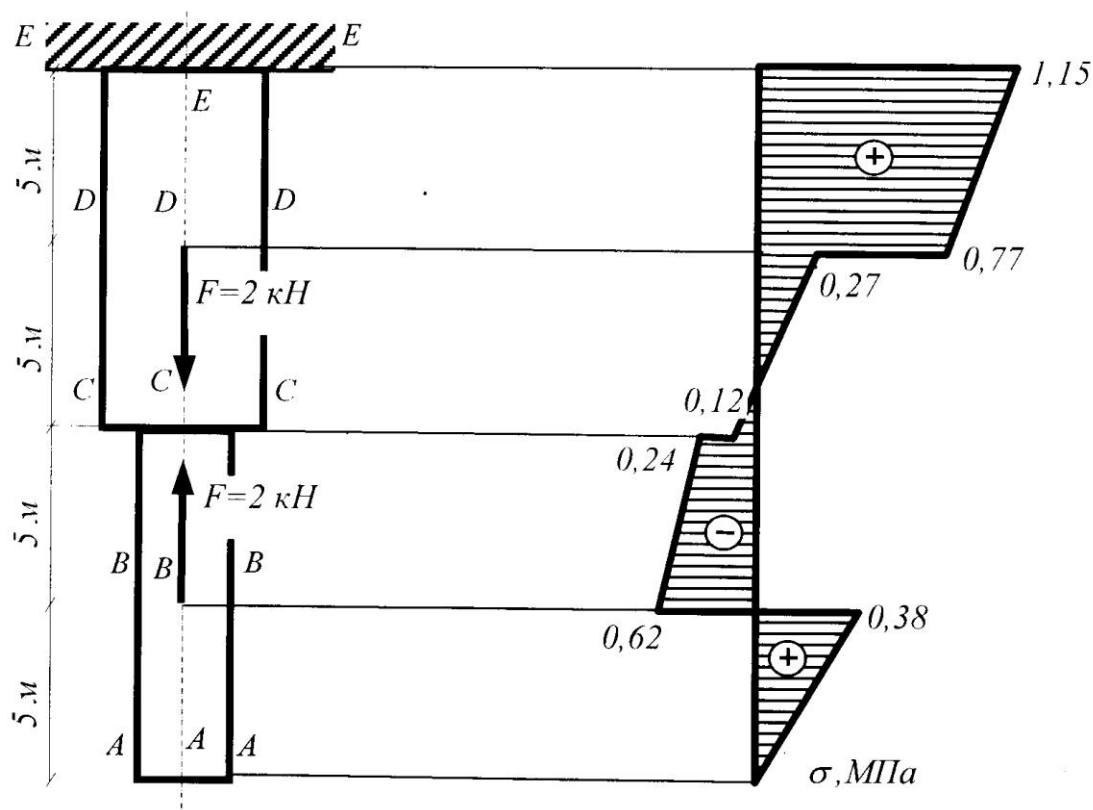
$$\text{до } \sigma_{D-} = \frac{1,06 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 265000 \text{ Па} = 0,27 \text{ МПа.}$$

$$\text{после } \sigma_{D+} = \frac{3,06 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 765500 \text{ Па} = 0,77 \text{ МПа.}$$

в сечении $E - E$

$$\sigma_E = \frac{4,59 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 1147500 \text{ Па} = 1,15 \text{ МПа.}$$

Эпюра σ имеет вид



3. Проверка прочности

Из эпюры нормальных напряжений видно, что как растягивающие, так и сжимающие напряжения меньше допускаемых напряжений $[\sigma]_{\text{раст}} = 100 \text{ МПа}$ и $[\sigma]_{\text{сжат}} = 100 \text{ МПа}$

4. Определение перемещения в сечении I-I

По закону Гука перемещения в случае постоянной продольной силы и постоянного сечения определяется

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

где l - длина стержня.

В случае переменных значений используем интегрирование

$$\Delta l = \sum \int_0^l \frac{Ndl}{EA} = \sum \int_0^l \frac{\sigma dl}{E}$$

по участкам в пределах которых N и A являются непрерывными функциями.

В данном случае продольные силы N и нормальные напряжения σ в границах каждого участка меняются по линейному закону, а $A = const$. Учитывая, что $E = const$ имеем

$$\Delta l = \frac{1}{E} \sum \int_0^l \sigma dl.$$

Учитывая, что геометрическая интерпретация интеграла есть площадь, (в данном случае площади, ограниченные эпюрой σ являются или треугольниками или трапециями), получим

$$\Delta l = \frac{1}{E} \sum \int_0^l \omega_k,$$

где ω_k - площади трапеций или треугольников по отдельным участкам эпюры σ .

В итоге перемещение сечения I-I будет

$$\Delta l = \frac{1}{210 \cdot 10^9} \left[\frac{(1,15 + 0,77) \cdot 10^6 \cdot 5}{2} + \frac{(0,27 + (-0,12)) \cdot 10^6 \cdot 5}{2} \right] = 0,025 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,025$$

мм

В частности перемещение сечения A-A будет

$$\Delta l = \frac{1}{210 \cdot 10^9} \left[\frac{(1,15 + 0,77) \cdot 10^6 \cdot 5}{2} + \frac{(0,27 + (-0,12)) \cdot 10^6 \cdot 5}{2} + \frac{(-0,24 + (-0,62)) \cdot 10^6 \cdot 5}{2} + \frac{0,38 \cdot 10^6 \cdot 5}{2} \right] = 0,019 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,019 \text{ мм}.$$

2. Кручение

Работа 3

3а

На стальном валу имеются один ведущий шкив и три ведомых шкива (рис.3а). Моменты, передаваемые шкивами соответственно равны M_0 , M_1 , M_2 и M_3 , где $M_0 = M_1 + M_2 + M_3$.

Требуется:

- Построить эпюру крутящих моментов T .
- При заданном значении допускаемого напряжения $[\tau]$ определить диаметр вала из условия прочности и принять окончательный диаметр в соответствии со стандартными значениями: $d = 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180$ и 200 мм.
- Проверить прочность вала.

Данные взять из таблицы 3а.

Таблица 3а

По последней цифре матрикула расстояния	По предпоследней цифре матрикула значения моментов M	Расстояние в м			$[\tau]$ МПа	Моменты в кН·м		
		a	b	c		M_1	M_2	M_3
1	1	1,1	2,1	4,1	35	1,1	1,1	1,1
2	2	1,2	2,2	4,2	40	1,2	1,2	1,2
3	3	1,3	2,3	4,3	45	1,3	1,3	1,3
4	4	1,4	3,4	4,4	50	1,4	1,4	1,4
5	5	1,5	3,5	4,5	55	1,5	1,5	1,5
6	6	1,6	3,6	4,6	60	1,6	0,6	1,6
7	7	1,7	3,7	4,7	65	1,7	0,7	1,7
8	8	1,8	5,8	4,8	70	1,8	0,8	1,8
9	9	1,9	5,9	4,9	75	1,9	0,9	1,9
0	0	2,0	6,0	5,0	80	2,0	1,0	2,0

Указание:

- Условие прочности при кручении

$$\frac{T}{W_p} \leq [\tau],$$

где T – наибольший крутящий момент.

$W_p = 0,2d^3$ – полярный момент сопротивления поперечного сечения.

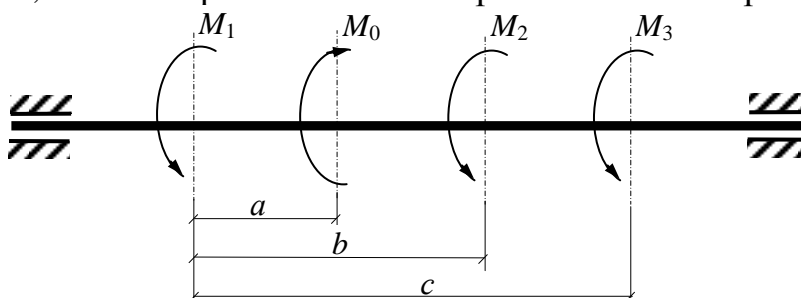


Рис. 3а

36

Для вала, нагруженного пятью моментами, передающимися через шкивы (рис.3б) построить эпюру крутящих моментов T и определить диаметр d вала по условиям прочности и жесткости. Материал вала – сталь. Модуль сдвига $G = 80$ ГПа.

Данные взять из таблицы 3б.

Таблица 3б

Схема рисунка по последней цифре матрикула	Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	M_1 Н·м	M_2 Н·м	M_3 Н·м	M_4 Н·м	$[\tau]$ МПа	$[\varphi^0]$ град/пог.м
1	1	120	180	240	300	72	2
2	2	100	200	150	120	60	3
3	3	300	120	180	240	60	3
4	4	100	300	400	200	50	2
5	5	50	150	250	350	80	3
6	6	60	180	240	360	60	2
7	7	30	180	120	240	50	3
8	8	70	140	210	280	70	2
9	9	80	160	400	240	80	3
0	0	60	90	270	360	90	3

Примечание:

Расстояния между шкивами могут быть приняты произвольными, так как на решение задачи это не влияет. Значение момента M_5 равно сумме моментов

M_1, M_2, M_3 и M_4 .

Указание:

- Условие прочности при кручении

$$\frac{T}{W_p} \leq [\tau],$$

где T – максимальное значение крутящего момента.

$W_p = 0,2d^3$ – полярный момент сопротивления поперечного сечения.

- Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\frac{T \cdot 57,3}{GI_p} \leq [\varphi^0],$$

где $I_p = 0,1d^4$ – полярный момент инерции поперечного сечения.

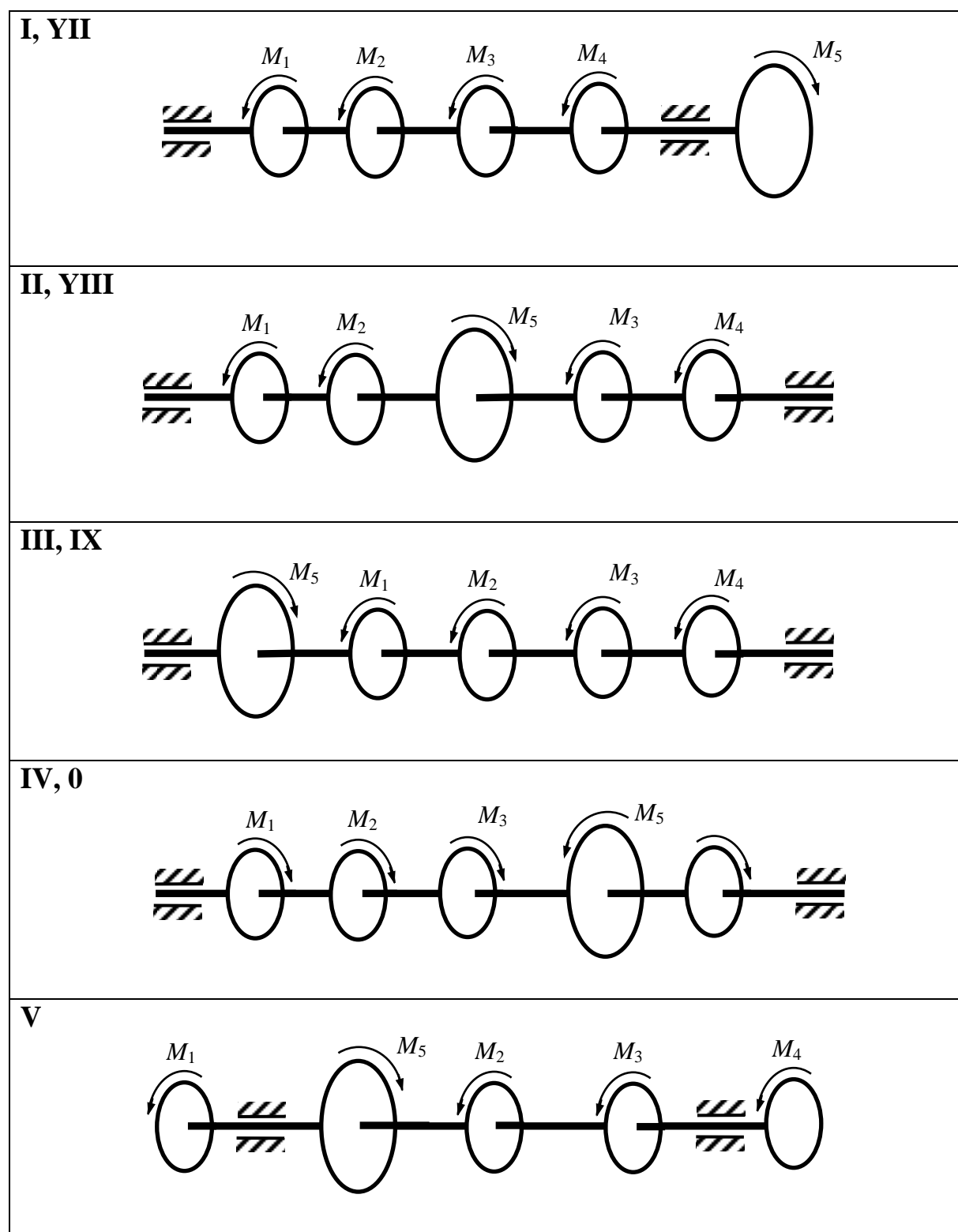


Рис.36

Зв

Проверить прочность и жесткость сплошного и трубчатого валов, соединенных кулачковой муфтой (рис.Зв), если валы передают мощность P (кВт) при n оборотов в минуту. Размеры валов принять по таблице. Допускаемый угол закручивания дан для $l = 1$ м. Модуль сдвига $G = 80$ ГПа.

Данные взять из таблицы Зв.

Таблица Зв

По последней цифре матрикула	P кВт	n об/мин	По предпоследней цифре матрикула	d_1 мм	d_2 мм	d мм	$[\tau]$ МПа	$[\varphi^0]$ град/пог.м
1	50	1000	1	24	32	30	50	1,5
2	120	2000	2	25	35	32	60	2
3	110	1600	3	25	40	35	70	3
4	100	1500	4	32	45	40	50	1,5
5	140	1200	5	32	45	42	60	2
6	150	1100	6	40	50	45	70	3
7	180	1700	7	42	50	48	80	2
8	160	1800	8	32	40	38	80	2
9	90	1300	9	22	32	28	60	1,5
0	200	2100	0	25	32	36	60	3

Указание:

- Мощность P и крутящий момент M связаны между собой выражением

$$P = \frac{Mn}{30}.$$

- Полярный момент сопротивления поперечного сечения трубчатого вала $W_p = 0,2d^3(1 - \alpha^4)$,

где $\alpha = \frac{d_1}{d_2}$.

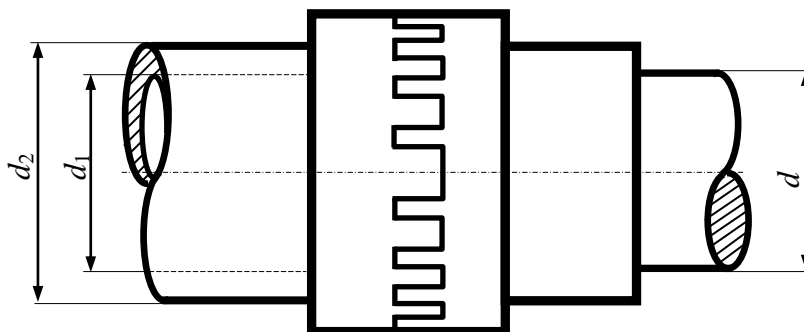


Рис. Зв

3г

Проверить прочность и жесткость стального бруса прямоугольного поперечного сечения, если брус нагружен крутящим моментом M (рис.3г). Размеры бруса принять по таблице.

Допускаемый угол закручивания дан для $l = 1\text{ м}$. Модуль сдвига $G = 80$ ГПа. Сравнить с брусом круглого профиля, имеющего ту же площадь поперечного сечения.

Данные взять из таблицы 3г.

Таблица 3г

По последней цифре матрикула	M $\text{Н}\cdot\text{м}$	b см	По предпоследней цифре матрикула	a/b	$[\tau]$ МПа	$[\varphi^{\circ}]$ град/пог.м
1	50	2,4	1	10	50	1,5
2	120	2,5	2	4	60	2
3	110	2,5	3	6	70	3
4	100	2,5	4	8	70	1,5
5	140	3,2	5	6	50	2
6	150	4,0	6	4	60	3
7	180	4,2	7	2	70	2
8	160	3,2	8	4	80	2
9	90	2,2	9	8	60	1,5
0	200	2,5	0	1	60	3

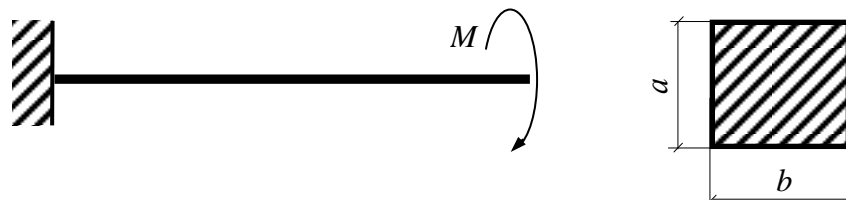


Рис. 3г

Указание: для расчета используются формулы (1) , (2) и таблица 3д.

Краткие теоретические сведения из теории кручения стержней призматического сечения

Кручение стержней прямоугольного поперечного сечения является значительно более сложной по сравнению с задачей кручения круглого вала. Допущения, принятые для круглого вала, не годятся для случая прямоугольного поперечного сечения. Так, например, нарушается закон плоских сечений. Происходит так называемая депланация сечения, когда отдельные точки сечения перемещаются вдоль оси вала и сечение перестает быть плоским. Точное решение для некоторых типов поперечного сечения приводятся в теории упругости.

Рассмотрим некоторые общие соображения относительно законов распределения напряжений в поперечных сечениях некруглой формы, а затем приведем готовые формулы, полученные методами теории

упругости. Прежде всего довольно просто установить, что касательные напряжения в поперечных сечениях для точек, расположенных вблизи контура, должны быть направлены по касательной к контуру.

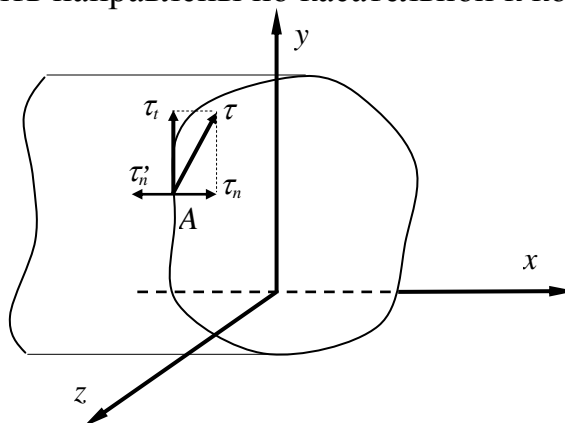


Рис. 3д

Проведем доказательство от противного. Допустим, что напряжение в точке A (рис.3д) направлено под некоторым углом к контуру. Разложим это напряжение на две составляющие: по касательной к контуру τ_t и по нормали τ_n . По закону парности касательных напряжений на свободной поверхности бруса должно возникнуть касательное напряжение $\tau'_n = \tau_n$. Но внешняя поверхность свободна от нагрузки и к ней никаких внешних сил не приложено. Тогда $\tau'_n = 0$, а следовательно $\tau_n = 0$ и касательное напряжение τ

вблизи контура должно быть направлено по касательной к контуру.

Совершенно аналогично можно показать, что в случае, если поперечное сечение имеет внешние углы, то в них касательные напряжения обращаются в нуль.

На основании сказанного становится понятной эпюра распределения касательных напряжений для прямоугольного поперечного сечения, показанном на рис.3е.

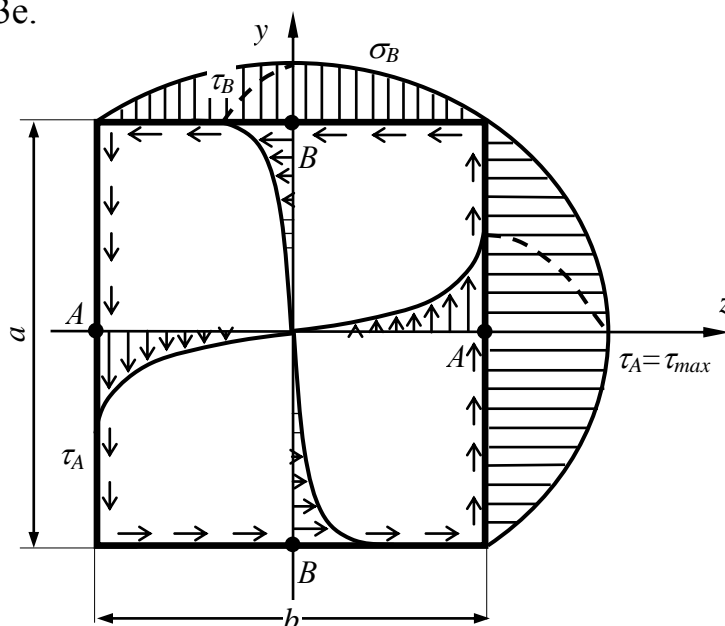


Рис. 3е

В углах напряжения равны нулю, а максимальные напряжения возникают в серединах длинных сторон прямоугольного сечения в точках A

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{T}{W_k}, \quad (1)$$

где $W_k = \alpha b^3$ - момент сопротивления поперечного сечения (аналогично как и для стержней с круглым профилем поперечного сечения).

Касательные напряжения в точке B короткой стороны

$$\tau_B = \gamma \tau_{\max}.$$

Угол закручивания определяется по формуле

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_k}, \quad (2)$$

где $I_k = \beta b^4$ - момент инерции поперечного сечения.

Входящие в эти формулы коэффициенты α , β , γ зависят от соотношения сторон прямоугольного сечения a/b . Для некоторых значения a/b числовые значения даются в табл. 3д.

Таблица 3д

a/b	α	β	γ
1,0	0,208	0,140	1,0
1,5	0,346	0,294	0,859
2,0	0,493	0,457	0,795
3,0	0,801	0,790	0,753
4,0	1,123	1,123	0,745
6,0	1,789	1,789	0,743
8,0	2,456	2,456	0,742
10,0	3,123	3,123	0,742

Проведем сравнительный анализ результатов вычисления касательных напряжений и угла закручивания на единицу длины при различных соотношениях a/b (табл.3е). Здесь же дадим результаты и для круглого профиля при одинаковой с прямоугольным профилем площади поперечного сечения.

Пусть $T=200$ Н·м, $A=4$ см², $G=80$ ГПа.

Таблица 3е

b см	a/b	W_k см ³	τ_{\max} МПа	τ_B МПа	I_k см ⁴	φ град/м
2,000	1,0	1,66	120	1,20	2,26	6,25
1,414	2,0	1,39	144	1,14	1,83	7,75
1,000	4,0	1,12	179	1,33	1,12	12,75
0,633	10,0	0,79	253	1,88	0,50	28,50
$d=2,257$ см	круглое	2,31	86	86,00	2,61	5,50

Для круглого сечения с $A=4 \text{ см}^2$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4}{3,14}} = 2,257 \text{ см}$$

$$\tau_{\max} = \frac{I}{W_k} = \frac{I}{0,2d^3} = \frac{200}{0,2 \cdot 2,257^3 \cdot 10^{-6}} = 86 \cdot 10^6 \text{ Па} = 86 \text{ МПа}$$

$$\varphi = \frac{T \cdot 1 \cdot 57,3^0}{GI_k} = \frac{T \cdot 57,3^0}{G \cdot 0,1d^4} = \frac{200 \cdot 57,3^0}{80 \cdot 10^9 \cdot 0,1 \cdot 2,257^4 \cdot 10^{-8}} = 5,50^0$$

С увеличением отношения сторон a/b с одного до 10 ($a/b=1$ до $a/b=10$) прямоугольного сечения увеличивается максимальное касательное напряжение τ_{\max} в 2 раза, а угол закручивания φ более чем в 4 раза при $A=const$.

В случае круглого профиля при той же площади поперечного сечения значения τ_{\max} и φ меньше, чем аналогичные значения для бруса с прямоугольным профилем поперечного сечения даже при $a/b=1$.

Другими словами, при одинаковой площади поперечного сечения, а значит при одинаковой массе, стержень круглого профиля жестче и более прочен по сравнению со стержнем некруглого профиля.

3. Заклепочные соединения

Работа 4

Балка подвешена на стержнях AC и BD , состоящих из двух уголков каждый, и нагружена сосредоточенной силой F (рис.4а). Требуется:

- Определить усилия в стержнях AC и BD , исходя из условий равновесия и считая балку AB абсолютно жесткой.
- Подобрать сечения этих стержней из равнобоких уголков по сортаменту прокатных сталей при допуске напряжении $[\sigma] = 120$ МПа, руководствуясь следующими указаниями:
 - предварительно снизить допусковое напряжение на 15% из за ослабления стержней заклепочными отверстиями;
 - принять диаметр отверстий d и расстояние c от оси заклепок до обушка уголка в соответствии с таблицей 4б.
 - Проверить напряжение в стержне, учитывая действительное ослабление заклепками и указать разницу между действительным и допусковым напряжением в процентах.
- Определить количество заклепок, необходимое для прикрепления стержня AC к фасонному листу и толщину фасонного листа δ при следующих допускаемых напряжениях: на срез $[\tau] = 110$ МПа, на смятие $[\sigma_{см}] = 245$ МПа. Шаг заклепок $e = 2,5d$. Расчет вести по диаметру заклепочного отверстия, который равен диаметру отверстия.
- Определить необходимую ширину фасонного листа b_1 (рис.4б).
Данные изъять из таблицы 4а.

Таблица 4а

По последней цифре матрикула	a м	b м	По предпоследней цифре матрикула	F кН
1	1,0	4,0	1	700
2	2,0	3,0	2	500
3	1,5	3,5	3	500
4	1,0	5,0	4	420
5	1,2	3,8	5	500
6	1,4	3,6	6	1000
7	1,5	4,5	7	400
8	1,6	3,4	8	1000
9	1,8	3,2	9	750
0	1,0	6,0	0	490

Таблица 4б

Ширина полки уголка, мм	Диаметр заклепки d , мм	Расстояние c , мм
50	14	30
60	17	35
65	20	35
75	20	40
80	20	45
90	24	50
100	24	55
120	26	65

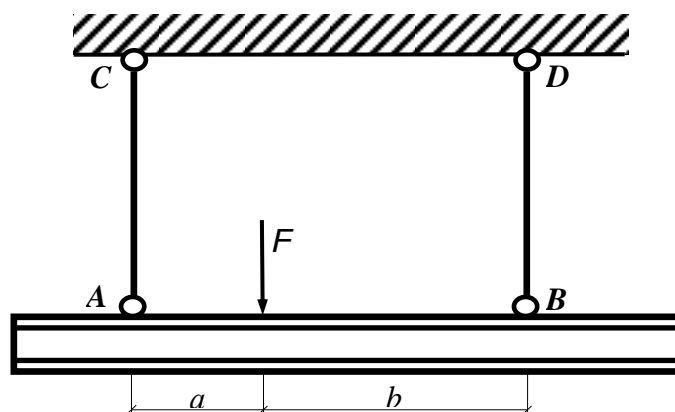


Рис. 4а

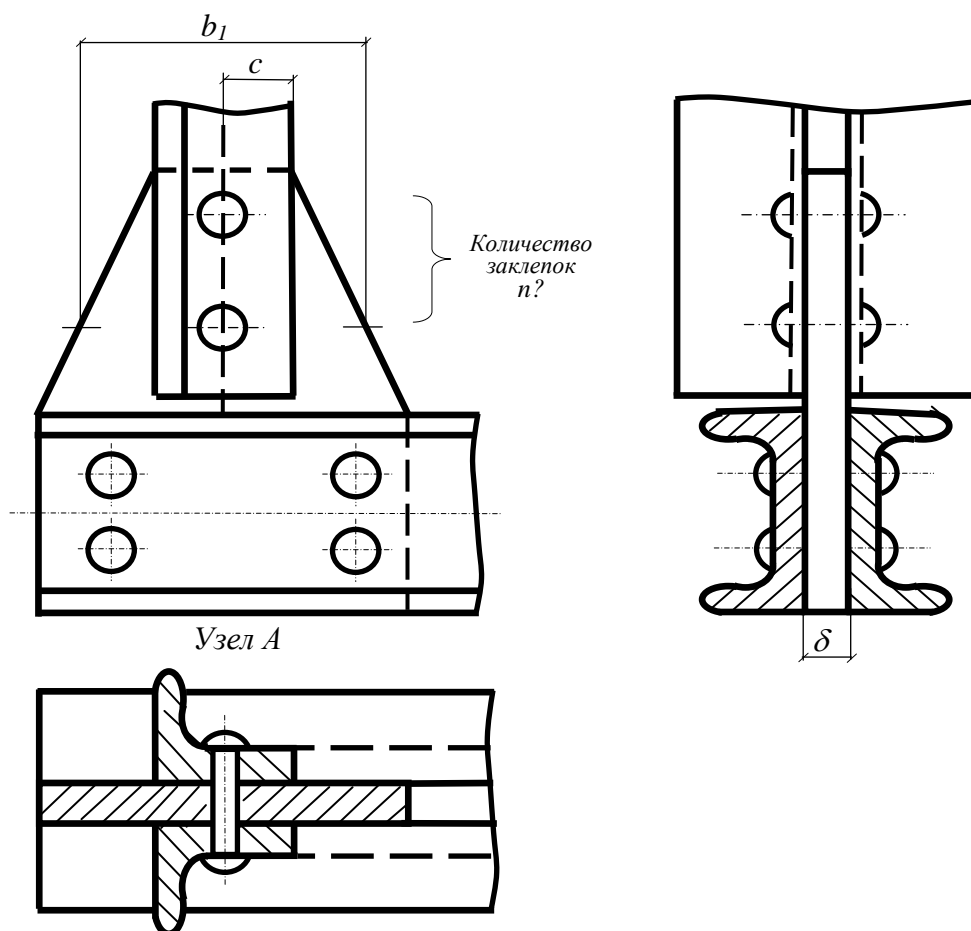


Рис. 4б

Пример решения

$$F = 800 \text{ кН};$$

$$a = 2 \text{ м};$$

$$b = 3 \text{ м};$$

$$[\sigma] = 140 \text{ МПа}.$$

Решение

1. Находим усилия в стержнях AC и BD, рассматривая равновесие балки AB (рис. 4в)

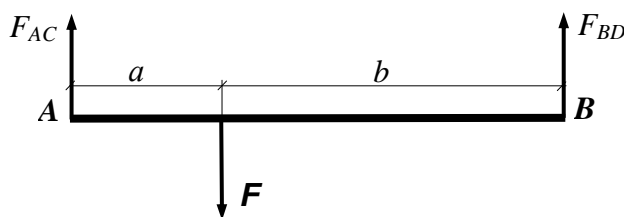


Рис. 4в

$$\sum M_A = 0; \quad -Fa + F_{BD}(a+b) = 0$$

$$F_{BD} = \frac{Fa}{(a+b)} = \frac{800 \cdot 2}{2+3} = 320 \text{ кН}$$

откуда

$$F_{AC} = F - F_{BD} = 800 - 320 = 480 \text{ кН}$$

Растягивающее усилие N в стержнях AC и BD соответственно равны $N_{AC} = 480 \text{ кН}$ и $N_{BD} = 320 \text{ кН}$.

2. Подбираем уголок из условия прочности на разрыв (растяжение).

2а. Тогда площадь двух уголков

$$A_{\text{общ}} \geq \frac{N_{AC}}{[\sigma]0,85},$$

допускаемое напряжение снижено на 15%

$$A_{\text{общ}} \geq \frac{480 \cdot 10^3}{140 \cdot 10^6 \cdot 0,85} \geq 0,00403 \text{ м}^2 \geq 40,3 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8509-57 подбираем равнобокий уголок с номером профиля 10, имеющего площадь поперечного сечения $A = 19,2 \text{ см}^2$.

2б. В соответствии с таблицей 4а при ширине полки уголка 100 мм (номер профиля равный 10 соответствует ширине полки равной 10 см).

Принимаем диаметр заклепки $d = 24 \text{ мм}$ и $c = 55 \text{ мм}$.

2в. Определяем действительное напряжение в стержне AC с учетом ослабления поперечного сечения отверстием под заклепку (рис.4г).

Площадь нетто двух уголков

$$A_{\text{нетто}} = 2 \cdot 19,2 \cdot 10^2 - 2 \cdot 24 \cdot 10 = 3360 \text{ мм}^2 = 33,6 \text{ см}^2.$$

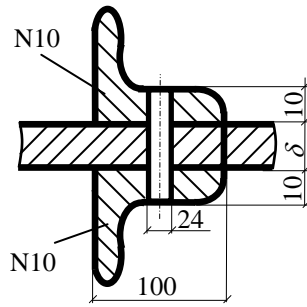


Рис. 4г

Действительное напряжение

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A_{\text{нетто}}} = \frac{480 \cdot 10^3}{33,6 \cdot 10^{-4}} = 142,9 \cdot 10^6 \text{ Па} =$$

$$142,9 \text{ МПа.}$$

Разница между действительным и допускаемым напряжениями

$$\sigma_{AC} = \frac{\sigma_{AC} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{142,9 - 140}{140} \cdot 100\% = 2\%, \text{ что вполне допустимо.}$$

3а. Определяем количество заклепок n по условию прочности на срез

$$\tau = \frac{4N_{AC}}{z_0 n \pi d^2} \leq [\tau]$$

Примечание: Приняты допущения о том, что

- Касательные напряжения равномерно распределены по сечению.
- Сила распределяется между всеми заклепками поровну. Следует отметить, что в упругой стадии заклепки в соединении работают неравномерно, на концах соединения они более загружены, а в середине меньше. Но в пластической стадии усилия в заклепках за счет текучести выравниваются. Это позволяет пользоваться указанным допущением о равномерной загрузке всех заклепок соединения.

$$n \geq \frac{4N_{AC}}{z_0 \pi d^2 [\tau]},$$

где $z_0 = 2$ – число плоскостей среза (рис.4г)

$$n \geq \frac{4 \cdot 480 \cdot 10^3}{2 \cdot 3,14 \cdot 24^2 \cdot 10^{-6} \cdot 110 \cdot 10^6} \geq 4,82$$

принимаем $n = 5$ заклепок.

3б. Из условия прочности на смятие находим толщину фасонного листа

$$\sigma_{см} = \frac{N_{AC}}{n d \delta} \leq [\sigma_{см}]$$

откуда

$$\delta \geq \frac{N_{AC}}{nd[\sigma_{cm}]} \geq \frac{480 \cdot 10^3}{5 \cdot 24 \cdot 10^{-3} \cdot 240 \cdot 10^6} \geq 0,0166 \text{ м} \geq 16,6 \text{ мм.}$$

Принимаем $\delta = 17 \text{ мм.}$

Примечание:

Поскольку толщина листа $\delta = 17 \text{ мм}$ меньше чем суммарная толщина обоих уголков, равная $2 \cdot 10 = 20 \text{ мм}$, то в проверке заклепок или уголков на смятие уже нет необходимости.

4. Определение ширины фасонного листа

4а. Построение эпюры продольной силы в уголках $N_{уг}$ и в фасонном листе $N_{ф}$

Строятся они, как обычно, по методу сечений в предположении равномерной загрузки всех 5-ти заклепок (рис.4д). В нашем случае усилие на одну заклепку составляет $480/5=96 \text{ кН}$.

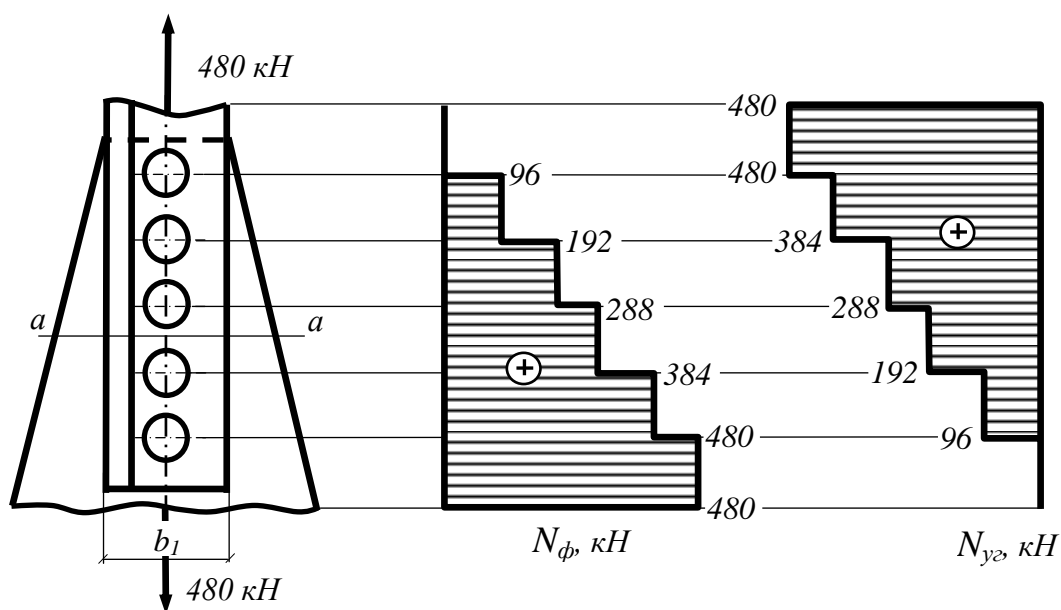


Рис. 4д

Для примера показаны часть фасонного листа (рис.4е) и часть уголков (рис.4и), из равновесия которых определяется продольная сила в сечении $a-a$.

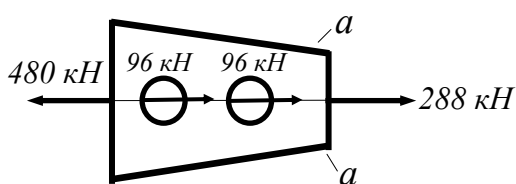


Рис. 4е

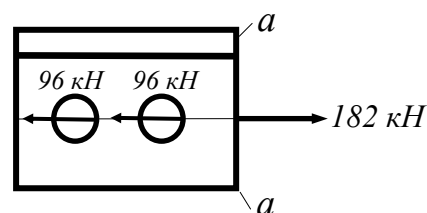


Рис. 4и

В любом сечении всего соединения в целом $N_{\phi} + N_{yг} = N$. Так в сечении $a-a$ $288+182=480$ кН.

4б. Определение необходимой ширины фасонного листа b_1 (рис.4д)

Из условия прочности на разрыв необходимая площадь

$$A_{нетто} \geq \frac{N_{\phi}}{[\sigma]} \geq \frac{480 \cdot 10^3}{140 \cdot 10^6} \geq 3428 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 3428 \text{ мм}^2.$$

С учетом ослабления сечения отверстием ширина b_1 (рис.4к)

$$A_{нетто} = b_1 \delta - d \delta$$

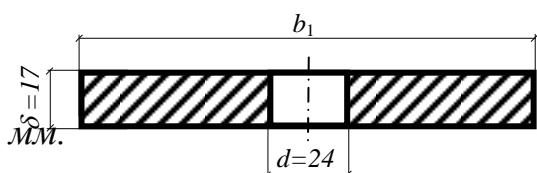


Рис. 4к

$$b_1 = \frac{A_{нетто} + d \delta}{\delta} = \frac{3428 + 24 \cdot 17}{17} = 226$$

Размер округлим до 230 мм.

На рис. 4л показан узел А с найденными размерами.

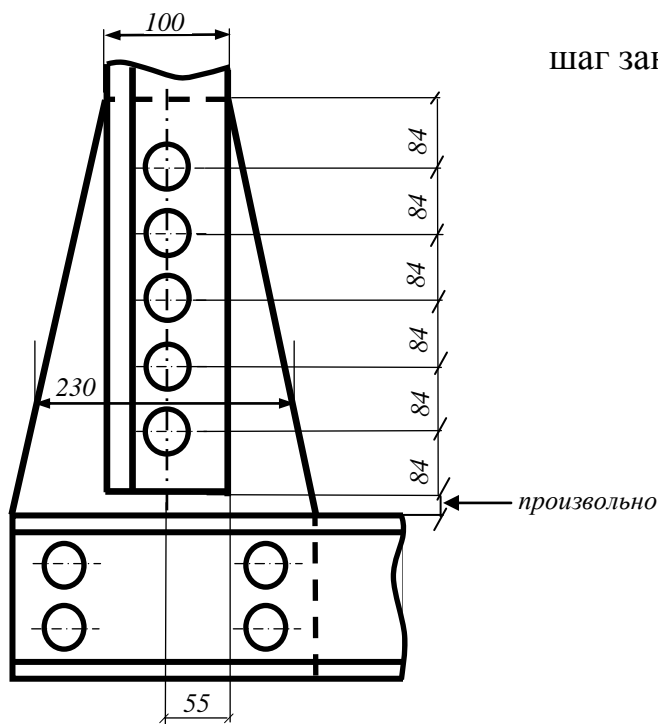


Рис. 4л

шаг заклепок $l = 3,5d = 3,5 \cdot 24 = 84$ мм

4. Сварные соединения

Работа 5

Подобрать сечение из двух неравнобоких уголков и рассчитать их прикрепление к фасонному листу (рис.5). Сварка ручная электродом марки Э42.

Данные взять из таблицы 5а.

Таблица 5а

По последней цифре матрикула	F кН	По предпоследней цифре матрикула	$[\sigma]$ МПа	$[\tau]$ МПа
1	700	1	120	105
2	800	2	130	105
3	500	3	140	110
4	420	4	150	110
5	600	5	160	120
6	1000	6	155	120
7	400	7	145	110
8	750	8	135	110
9	850	9	125	105
0	490	0	150	105

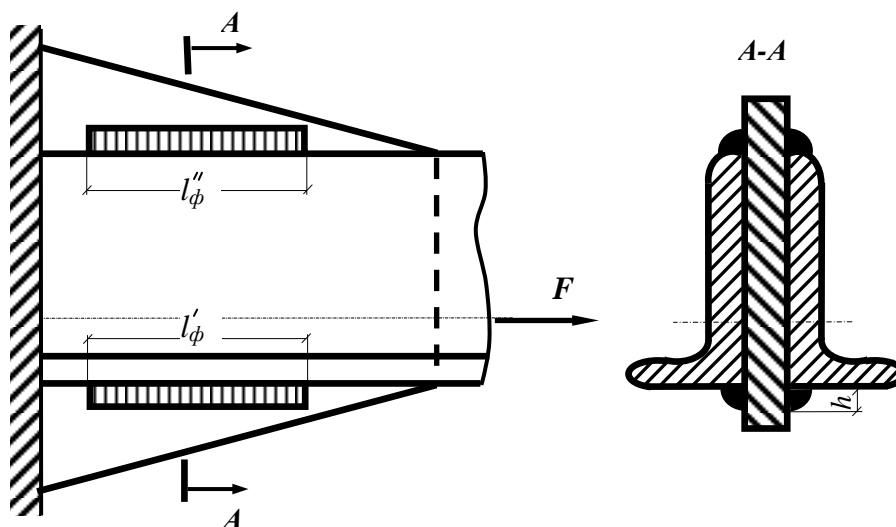


Рис. 5

Примечание.

Рассмотрим принцип расчета сварного соединения боковыми (фланговыми) швами. Сварные соединения не создают ослабления элементов, менее трудоемки чем другие виды соединений и поэтому более экономичны. Они пользуются наибольшим распространением в стальных конструкциях.

Разрушение фланговых швов происходит от среза по наименьшей возможной площади среза, расположенной в биссекторной плоскости прямого угла, как показано на рис.5а.

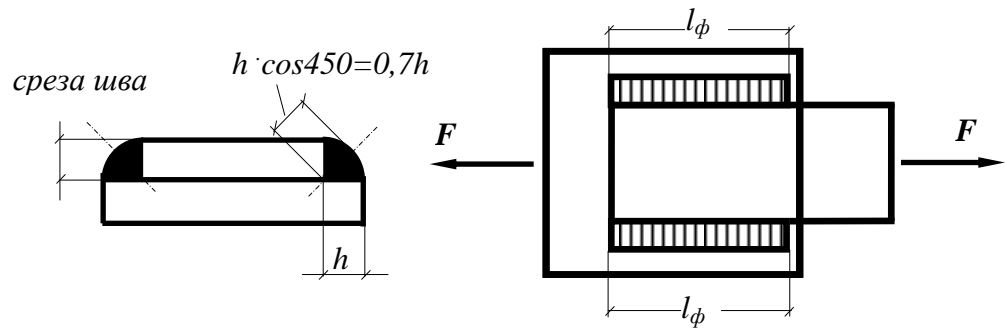


Рис. 5а

При составлении условия прочности предполагается равномерное распределение касательных напряжений по площади среза шва, тогда условие прочности будет

$$\frac{F}{0,7lh} \leq [\tau_{cp}],$$

где l - общая расчетная длина сварных швов;
 h - высота сварного шва;
 F - нагрузка (усилие в сварном шве).

Пример решения

$F = 1200 \text{ кН}$;
 $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$;
 $[\tau] = 110 \text{ МПа}$.

Решение

3. Подбор уголков. По условию прочности на растяжение требуемая общая площадь двух уголков (ослабление отсутствует)

$$A_{\text{общ}} \geq \frac{F}{[\sigma]} \geq \frac{1200 \cdot 10^3}{140 \cdot 10^6} \geq 85,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \geq 85,7 \text{ см}^2,$$

тогда требуемая площадь одного уголка

$$A \geq \frac{85,7}{2} \geq 42,85 \text{ см}^2.$$

По сортименту прокатных сталей ГОСТ 8510-57 уголок с N⁰ профиля 20/12,5 (200x25x14), у которого площадь поперечного сечения $A = 43,9 \text{ см}^2$.

Проверка его прочности дает

$$\sigma = \frac{1200 \cdot 10^3}{2 \cdot 43,9 \cdot 10^{-4}} = 136,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 136,7 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

2. Определение сил, действующих на верхние N'' и нижние N' швы крепления из условия равновесия трех сил (рис.5 б).

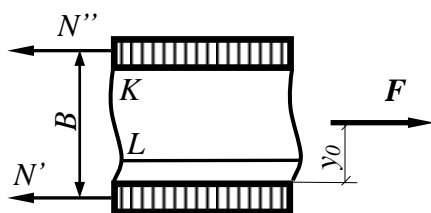


Рис. 5б

Составим уравнения моментов относительно точек K и L

$$\begin{aligned} \sum M_K = 0; & \quad F(B - y_0) - N' B = 0, \\ \sum M_L = 0; & \quad N'' B - F \cdot y_0 = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$N' = \frac{F(B - y_0)}{B}, \quad N'' = \frac{F y_0}{B}.$$

В нашем случае $B = 200$ мм (длинная полка уголка, которой он прикрепляется к фасонному листу), $y_0 = 66,2$ мм (расстояние до центра тяжести уголка, взятого из таблиц сортимента).

Тогда

$$\begin{aligned} N' &= \frac{1200 \cdot (200 - 66,2)}{200} = 803 \text{ кН}, \\ N'' &= \frac{1200 \cdot 66,2}{200} = 397 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Учитывая закругления кромок уголка, следует задаваться высотой верхнего шва h'' на 1-2 мм меньше толщины полки уголка $d = 14$ мм. Высоту h' нижнего шва по техническим условиям можно сделать несколько больше, но не более чем $1,5d$. Примем для верхнего и нижнего швов $h' = h'' = 2$ мм.

Каждая из сил N' и N'' воспринимается двумя швами (с одной и другой стороны фасонного листа). Поэтому условие прочности швов можно записать

$$\frac{N'}{2 \cdot 0,7 l_{\phi}' h'} \leq [\tau] \quad \text{и} \quad \frac{N''}{2 \cdot 0,7 l_{\phi}'' h''} \leq [\tau].$$

Откуда при наших данных получим

$$\begin{aligned} l_{\phi}' &\geq \frac{N'}{2 \cdot 0,7 h' [\tau]} \geq \frac{803 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,7 \cdot 12 \cdot 10^{-3} \cdot 110 \cdot 10^6} \geq 0,434 \text{ м}, \\ l_{\phi}'' &\geq \frac{N''}{2 \cdot 0,7 h'' [\tau]} \geq \frac{397 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,7 \cdot 12 \cdot 10^{-3} \cdot 110 \cdot 10^6} \geq 0,215 \text{ м}. \end{aligned}$$

Округляя до целых сантиметров получим расчетные длины швов $l_{\phi}' = 44$ см и $l_{\phi}'' = 22$ см.

Из конструктивных соображений верхний шов разбиваем на два участка по 11 см каждый.

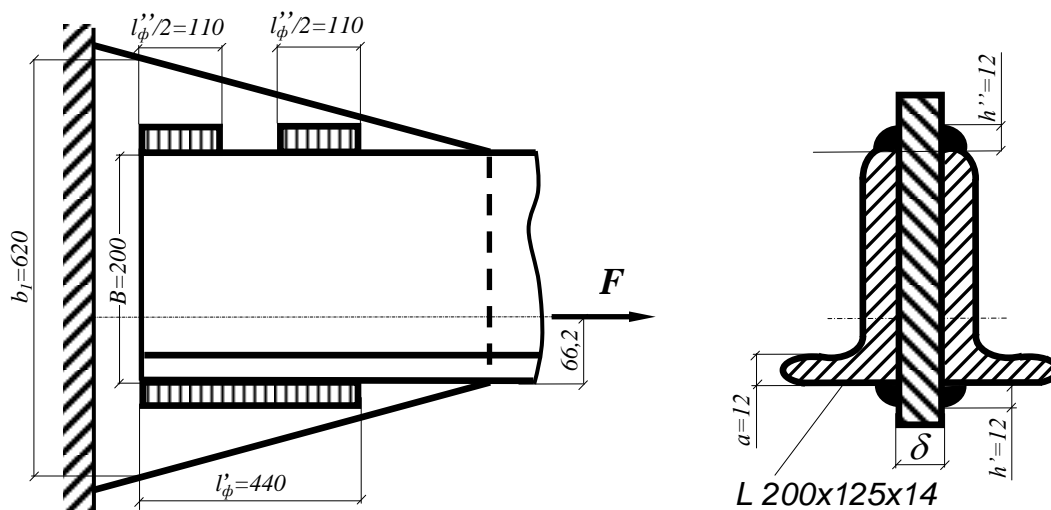


Рис. 5в

4. Определение ширину фасонного листа b_1 (рис.5в).

Толщину фасонного листа δ принимаем равной толщине полки уголка, т.е. $\delta = d = 14$ мм.

По условию прочности на разрыв

$$\frac{N}{A_{\text{фас}}} \leq [\sigma].$$

$$A_{\text{фас}} \geq \frac{N}{[\sigma]}, \quad N = F = 1200 \text{ кН}.$$

Максимальное значение продольной силы в данном сечении фасонного листа, где определяется ширина b_1 имеем

$$A_{\text{фас}} \geq \frac{1200 \cdot 10^3}{140 \cdot 10^6} \geq 8571 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Тогда

$$b_1 \geq \frac{A_{\text{фас}}}{\delta} \geq \frac{8571 \cdot 10^{-6}}{14 \cdot 10^{-3}} \geq 0,612 \text{ м}.$$

Округляем до целых сантиметров $b_1 \geq 62 \text{ см} \geq 620 \text{ мм}$.

5. Цилиндрические пружины

Работа 6

Жесткий брус прикреплен к шарнирно-неподвижной опоре и к двум пружинам с одинаковым средним диаметром D и с одинаковым диаметром круглой проволоки d (рис. 6). Пружина 1 имеет m витков, пружина 2 - n витков.

Требуется:

- Найти усилия и напряжения в обеих пружинах.
- Найти осадки обеих пружин, приняв $G = 85$ Гпа .
- Установить, при каком отношении витков m/n усилия в обеих пружинах равны между собой.
- Найти усилия, напряжения и осадки при найденном отношении и заданной величине m/n (или n). Данные взять из таблицы 6.

Таблица 6

Схема рисунка по последней цифре матрикула	Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	D	d	Число витков		F, H
		мм		m	n	
1	1	110	11	11	11	110
2	2	120	12	12	12	120
3	3	130	13	13	13	30
4	4	140	14	14	14	40
5	5	150	15	15	15	50
6	6	60	16	6	6	60
7	7	70	17	7	7	70
8	8	80	8	8	8	80
9	9	90	9	9	9	90
0	0	100	10	10	10	100

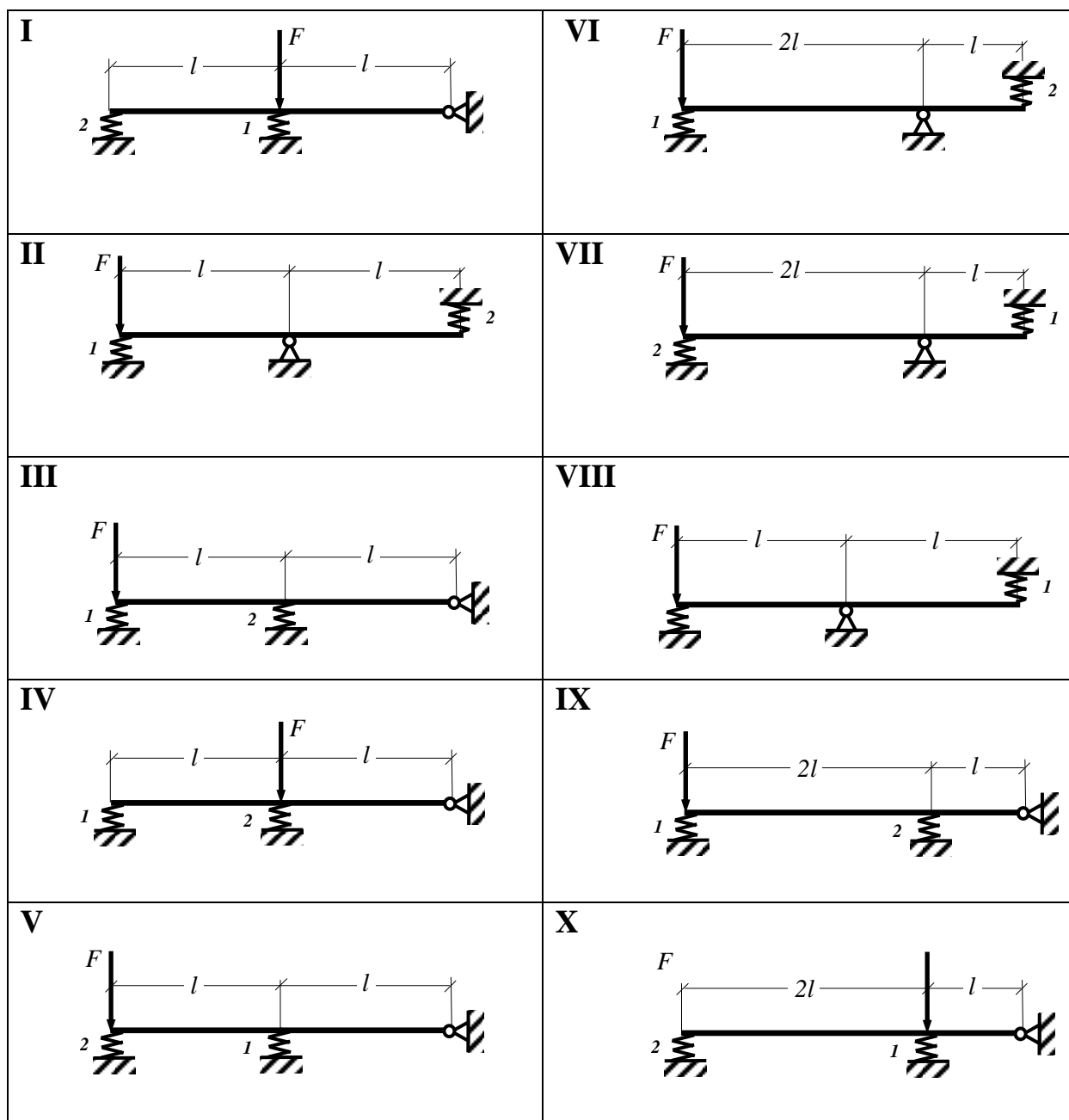
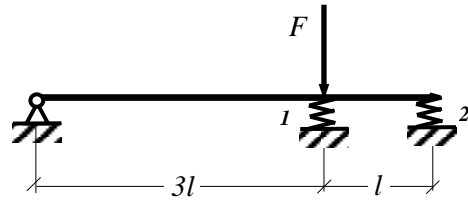


Рис.6

Пример решения:

$$\begin{aligned}
 F &= 200 \text{ Н} \\
 m &= 20 \\
 n &= 20 \\
 D &= 120 \text{ мм} \\
 d &= 14 \text{ мм} \\
 G &= 85 \text{ ГПа}
 \end{aligned}$$



Решение

1. Определение усилий и напряжений в пружинах

1.1. Определение усилий

Для определения двух неизвестных составим два уравнения, одно из которых уравнение равновесия $\sum M_A = 0$, а другое, выражающее пропорциональность осадок пружин λ_1 и λ_2 их расстояниям до шарнирной опоры (рис.6а).

Уравнение равновесия

$$\sum M_A = 0, \quad F_1 3l + F_2 4l - F 3l = 0.$$

Деформационное уравнение

$$\alpha = \frac{\lambda_1}{3l} = \frac{\lambda_2}{4l} \Rightarrow 4\lambda_1 = 3\lambda_2.$$

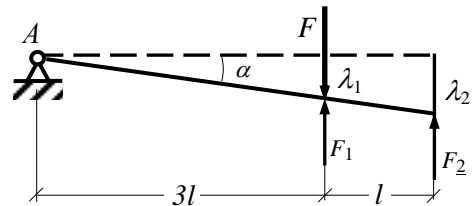


Рис. 6а

Это справедливо только при условии, что брус считаем абсолютно жестким, т.е. упругой деформацией изгиба пренебрегаем.

Учитывая, что осадки пружин λ_1 и λ_2 пропорциональны усилиям F_1 и F_2 , а пружины имеют одинаковые (т.е. имеют одну и ту же жесткость или деформируются на равную величину при приложении одинаковых сил).

Тогда из деформационного уравнения имеем

$$4F_1 = 3F_2 \Rightarrow F_1 = \frac{3}{4}F_2 \quad \text{и подставим в уравнение равновесия}$$

получим

$$\frac{3}{4}F_2 3l + F_2 4l - F 3l = 0 \quad \text{откуда}$$

$$F_2 = \frac{3F}{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3 \cdot 200}{\frac{9}{4} + 4} = 96 \text{ Н}, \quad F_1 = \frac{3}{4}F_2 = \frac{3}{4} \cdot 96 = 72 \text{ Н}.$$

1.2. Определение напряжений

Поправочный коэффициент (см. формулу 6.2)

$$k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0,615}{c} = \frac{4 \cdot 8,57 - 1}{4 \cdot 8,57 - 4} + \frac{0,615}{8,57} = 1,17,$$

где $c = \frac{D}{d} = \frac{120}{14} = 8,57$.

Максимальные напряжения (см. формулу 6.1)

в пружине 1

$$\tau_{\max} = \frac{8kF_1D}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 1,17 \cdot 72 \cdot 120}{3,14 \cdot 14^3} = 9,4 \text{ Н/мм}^2 = 9,4 \text{ МПа},$$

в пружине 2

$$\tau_{\max} = \frac{8kF_2D}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 1,17 \cdot 96 \cdot 120}{3,14 \cdot 14^3} = 12,5 \text{ Н/мм}^2 = 12,5 \text{ МПа}.$$

Эти напряжения значительно меньше допускаемых напряжений (рис.6 з).
Например, для латунной пружины при $d=14$ мм $[\tau]=150$ МПа.

2. Определение осадок пружин (см. формулу 6.4)

Для пружины 1

$$\lambda_1 = \frac{8F_1D^3m}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 72 \cdot 120^3 \cdot 10^{-9} \cdot 20}{200 \cdot 10^9 \cdot 14^4 \cdot 10^{-12}} = 0,00259 \text{ м} = 2,59 \text{ мм}$$

где $m = 20$ - число витков,
для пружины 2

$$\lambda_2 = \frac{8F_2D^3m}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 96 \cdot 120^3 \cdot 10^{-9} \cdot 20}{200 \cdot 10^9 \cdot 14^4 \cdot 10^{-12}} = 0,00345 \text{ м} = 3,45 \text{ мм}$$

где $n = 20$ - число витков.

3.Определение отношения m/n при котором усилие в пружинах одинаковое.

Из ранее установленного соотношения между осадками пружин λ_1 и λ_2 (рис.6а) можно найти отношение витков m/n $4\lambda_1=3\lambda_2$ или

$$\frac{4 \cdot 8F_1D^3m}{Gd^4} = \frac{3 \cdot 8F_2D^3n}{Gd^4},$$

считая $F_1 = F_2$, имеем $4m=3n$ т.е. $m/n=3/4$.
Например, если $m=20$, то

$$n = \frac{4m}{3} = \frac{4 \cdot 20}{3} = 26,7 = 27 \text{ витков.}$$

4. Определение усилий, напряжений при $m=20$ и $n=27$ витков.

4.1. Из уравнения равновесия (рис.6а)

$$\sum M_A = 0, \quad F_1 3l + F_2 4l - F 3l = 0 \text{ при } F_1 = F_2, \text{ получим}$$

$$F_1 3l + F_1 4l - F 3l = 0, \quad F_1 = \frac{F 3l}{3l + 4l} = \frac{200 \cdot 3}{3 + 4} = 85,7 \text{ Н, т.е. } F_1 = F_2 = 85,7 \text{ Н.}$$

4.2. Максимальные напряжения в обеих пружинах в данном случае будут одинаковыми

$$\tau_{\max} = \frac{8kF_1 D}{\pi d^3} = \frac{8kF_2 D}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 1,17 \cdot 85,7 \cdot 120}{3,14 \cdot 14^3} = 11,2 \text{ Н/мм}^2 = 11,2 \text{ МПа.}$$

4.3. Осадки пружин соответственно

$$\lambda_1 = \frac{8F_1 D^3 m}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 85,7 \cdot 120^3 \cdot 10^{-9} \cdot 20}{85 \cdot 10^9 \cdot 14^4 \cdot 10^{-12}} = 0,00725 \text{ м} = 7,25 \text{ мм}$$

$$\lambda_2 = \frac{8F_2 D^3 m}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 85,7 \cdot 120^3 \cdot 10^{-9} \cdot 20}{85 \cdot 10^9 \cdot 14^4 \cdot 10^{-12}} = 0,00979 \text{ м} = 9,79 \text{ мм}$$

проверим условие $4\lambda_1 = 3\lambda_2$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot 7,25 = 29,00 \\ 3 \cdot 9,79 = 29,37 \end{array} \right\} \Rightarrow 0,37 \text{ разница.}$$

Эта разница возникла из за округления числа витков пружины 2 до целого значения.

Пружины имеют широкое распространение в машиностроении. Рассмотрим теорию расчета винтовых цилиндрических пружин с малым шагом витка (рис.6 б), т.е. таких пружин, у которых угол наклона α к плоскости (обычно $<10-12^\circ$) перпендикулярной оси пружины мал и поэтому можно принять, что витки лежат в этой плоскости. Пружина характеризуется следующими основными геометрическими параметрами (рис.6 б):

- диаметром проволоки - d
- средним диаметром - D
- наружным диаметром $D + d$ и внутренним диаметром $D - d$
- индексом пружин $c = D/d$
- n - число рабочих витков.

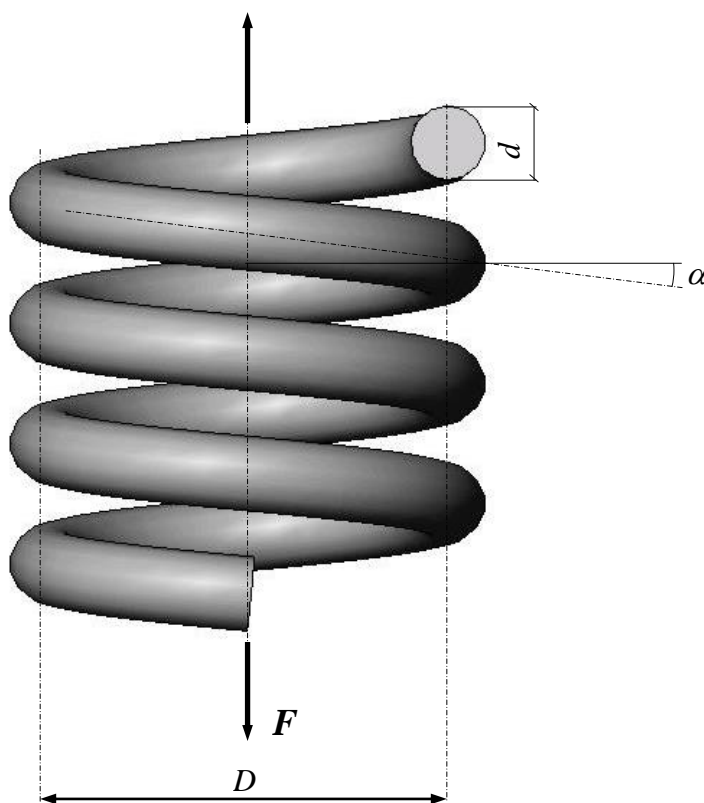
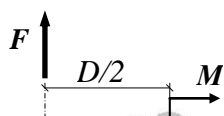


Рис. 6.б

В зависимости от вида воспринимаемых рабочих нагрузок витые пружины подразделяются на пружины растяжения и пружины сжатия и пружины кручения. Последние нагружаются двумя моментами в плоскости перпендикулярной оси пружины.

Конструктивной особенностью пружин перечисленных типов является отделка концов. Концевые витки пружины растяжения и кручения отгибаются с таким расчетом, чтобы в каждом конкретном случае могло быть осуществлено крепление пружины к смежным деталям.

У пружины сжатия крайние витки поджимаются и сошлифовываются с торцов, чем обеспечивается создание опорных плоскостей. При



определении перемещений и напряжений, однако, указанные особенности пружин обычно не учитываются и концевые витки из рассмотрения исключаются.

Определим зависимость изменения высоты пружины растяжения-сжатия от осевой силы F . В любом поперечном сечении витка пружины растяжения-сжатия возникает результирующая внутренняя сила F и момент $M = F \frac{D}{2}$ (рис.6в).

Внутренняя сила F параллельная оси пружины, а плоскость момента M совпадает с плоскостью пары сил F . Нормальное поперечное сечение витка повернуто по отношению к этой плоскости на угол α (рис.6г).

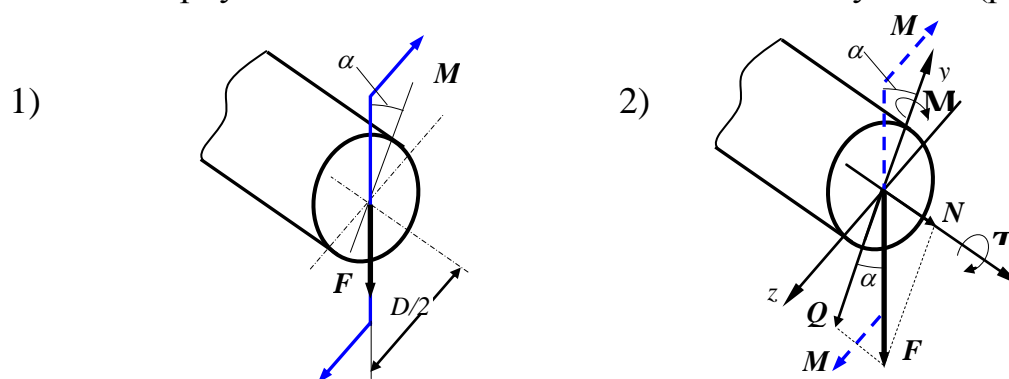


Рис.6 г

Раскладываемый момент M и силу F на составляющие относительно осей, связанных с сечением (рис.6г2) и рис.6д, получим

$$T = F \frac{D}{2} \cos \alpha, M_y = F \frac{D}{2} \sin \alpha, Q = F \cos \alpha, N = F \sin \alpha.$$

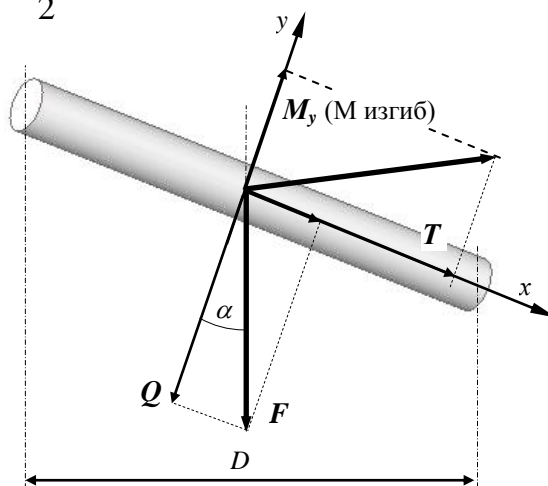


Рис.6 д

Учитывая, что угол подъема витков у большинства пружин $\alpha < 10 \div 12^\circ$ ($\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$), можно пренебречь изгибающим моментом

$M_y = F \frac{D}{2} \sin \alpha$ и осевой силой $N = F \sin \alpha$. Таким образом, в поперечном сечении прутка пружины действует крутящий момент $T = F \frac{D}{2}$ и поперечная сила $Q = F$.

От силы Q в поперечном сечении возникают касательные напряжения сдвига, которые можно приближенно принять равномерно распределенными по всему сечению прутка $\tau_1 = \frac{Q}{A} = \frac{4F}{\pi d^2}$.

Эпюра касательных напряжений показана на рис.6е.

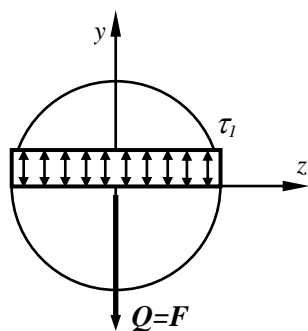


Рис. 6 е

От крутящего момента возникают касательные напряжения сдвига, максимальные значения которых определяются по известной нам формуле

$$\tau_2^{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{8FD}{\pi d^3}$$

где $W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$.

Эпюра касательных напряжений τ_2 показана на рис.6ж.

Максимальные касательные напряжения будут в точке сечения прутка наиболее близко расположенной к оси пружины, где напряжения τ_1 и τ_2^{\max} совпадают по направлению. Таким образом суммарное напряжение τ_{\max} будет

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2^{\max} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{8FD}{\pi d^3} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D} \right)$$

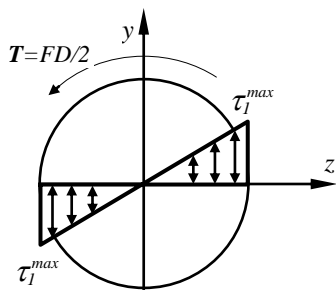


Рис. 6 ж

В большинстве случаев $c = \frac{D}{d} = 4 \div 12$, следовательно, $\frac{d}{2D} = 0,125 \div 0,042$, а поэтому по сравнению с единицей этим слагаемым в скобках можно пренебречь. Это равносильно пренебрежению напряжениями сдвига от поперечной силы по сравнению с напряжениями от кручения. В практических расчетах вводится поправочный коэффициент k , учитывающий кривизну витка и влияние перерезывающих поперечных сил. Таким образом

$$\tau_{\max} = \frac{8kFD}{\pi d^3} \quad (6.1)$$

$$\text{где } k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0,615}{c} \quad (6.2)$$

Поправочный коэффициент k увеличивается с уменьшением индекса пружины $c = \frac{D}{d}$. Так при $c = 12$ $k = 1,1$, а при $c = 4$ $k = 1,4$. Представление о величине допускаемых напряжений $[\tau]$ для пружин из различных материалов можно получить из рис.63.

Перемещения λ в цилиндрической пружине определяется следующей приближенной формулой

$$\lambda = \frac{F \pi D^3 n}{4G I_p} \quad (6.3)$$

где n - число рабочих витков;

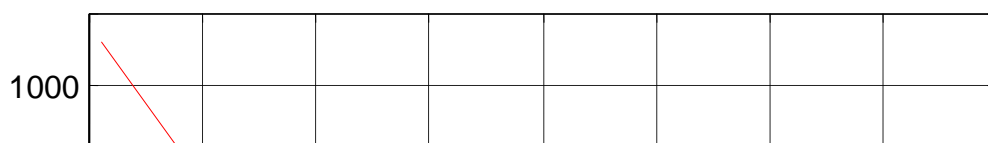
I_p - полярный момент инерции поперечного сечения проволоки.

Перемещения, обусловленные продольной и поперечной силой, как и для всякого бруса малы, а вследствие малости угла наклона витков α , малым будет и осевое перемещение, связанное с изгибом витка.

При определении величины n для пружины растяжения оттогнутая часть витков на концах не учитывается. Для пружины сжатия из полного числа витков исключается примерно $\frac{3}{4}$ витка с каждого торца, поскольку эти витки поджаты при навивке к соседним и свободно деформироваться не могут. Таким образом, предполагается, что 1,5 витка в работе не участвует. Если пружина навита из круглой проволоки, то $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ и формула перемещений принимает вид

$$\lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4} \quad (6.4).$$

τ , МПа



Работа 7

6.Подбор поперечного сечения при изгибе

Целью данной работы является подбор сечений и проверка прочности в случае плоского поперечного изгиба прямых брусьев.

Требуется:

- Построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_z .
- Определить размеры поперечного сечения или номер профиля балок в соответствии с указанными типами сечений и величинами допускаемых напряжений $[\sigma]$.
- Сделать проверку прочности подобранного сечения по касательным напряжениям.

Схема выбирается по последней цифре матрикула.

Указание:

1. Подбор сечения осуществляется по условию прочности при изгибе для нормальных напряжений

$$\sigma_x = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]$$

где W_z - осевой момент сопротивления поперечного сечения:

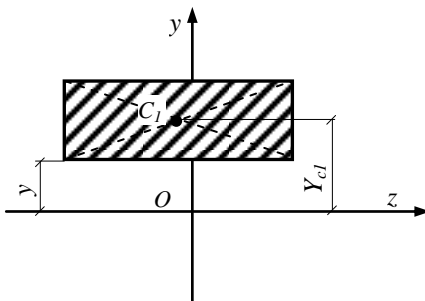
- для прямоугольного сечения $W_z = \frac{bh^2}{6}$,
- для кругого сечения $W_z = 0,2d^3$.

2. Касательные напряжения вычисляются по формуле Журавского

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y S_z}{I_z b}$$

где I_z - осевой момент инерции поперечного сечения,

S_z - статический момент отсеченной части сечения относительно нейтральной линии, определяемый по формуле $S_z = A_y y_{c1}$, где



y_{c1} - центр тяжести отсеченной части сечения и A_y - площадь отсеченной части.

NB! Некоторые материалы к которым относится и дерево очень плохо сопротивляются сдвигу, поэтому проверка прочности балок, изготовленных из таких материалов является обязательной.

В отличие от нормальных напряжений, максимальные значения которых в крайних волокнах сечения, максимальные касательные напряжения в центре.

I Дана консольная балка (рис.7а).

Материал балки – сосна.

Допускаемые напряжения $[\sigma] = 11$ МПа

$[\tau] = 2$ МПа.

Таблица 7а

Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	a м	F_1 кН	F_2 кН	h/b
1	0,7	16	14	1,5
2	0,6	17	15	1,8
3	0,5	20	12	2,0
4	0,8	22	11	2,4
5	0,9	24	10	2,8
6	1,0	18	9	3,0
7	1,1	26	8	1,7
8	1,2	28	7	1,4
9	1,3	30	6	1,2
0	1,4	32	4	1,2

Сечение прямоугольное с отношением высоты к ширине h/b .
Данные для расчета приведены в таблице 7а.

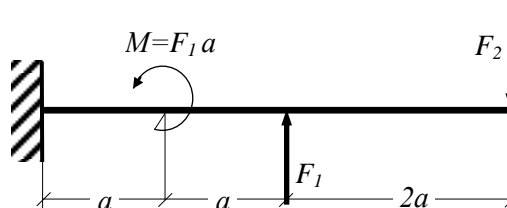


Рис.7а

II Материал балки – ель (рис.7б).

Сечение прямоугольное с отношением высоты к ширине h/b .

Допускаемые напряжения $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$
 $[\tau] = 1,6 \text{ МПа}$.

Данные для расчета приведены в таблице 7б.

Таблица 7б

Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	a м	b м	M_1 кНм	M_2 кНм	F кН
1	2,0	4,0	30	20	8,0
2	2,0	3,0	9	19	9,0
3	4,0	2,0	12	18	7,0
4	2,5	3,5	4	12	6,0
5	1,5	2,5	7	16	10,0
6	1,4	3,7	8	22	9,5
7	3,5	1,5	11	17	8,5
8	1,0	3,6	12	22	6,5
9	1,2	3,8	5	24	7,5
0	0,9	4,0	6	25	11,0

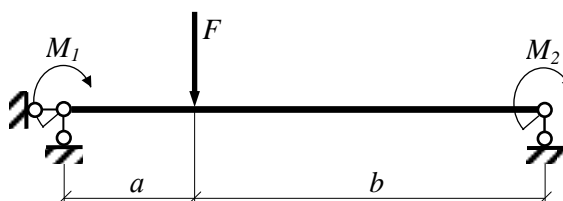


Рис.7б

III Материал балки – листовинница (рис.7в).
Сечение балки круглое.

Допускаемые напряжения $[\sigma] = 13 \text{ МПа}$

$[\tau] = 2 \text{ МПа}$.

Данные для расчета приведены в таблице 7б.

Таблица 7в

Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	l м	p кН/м	F кН	M кНм
1	1	5	16	12
2	2	6	15	14
3	3	8	18	13
4	4	10	25	20
5	5	12	20	24
6	6	4	8	9
7	7	7	10	11
8	8	3	12	15
9	9	9	14	16
0	0	3	23	17

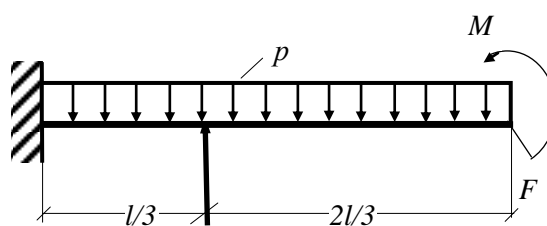


Рис. 7в

IV Материал балки – сталь 3 (рис.7г).

Сечение составлено из двух поставленных рядом прокатных швеллеров по ГОСТ.

Допускаемые напряжения $[\sigma] = 140$ МПа

$[\tau] = 100$ МПа.

Данные для расчета приведены в таблице 7г.

Таблица 7г

Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	a м	F кН	p кН/м	M кН·м
1	2,4	80	10	80
2	2,3	90	15	70
3	2,2	100	20	60
4	2,1	110	25	55
5	2,0	120	30	40
6	1,9	140	35	50
7	1,8	160	40	30
8	1,7	180	45	25
9	1,6	200	50	20
0	1,5	220	60	10

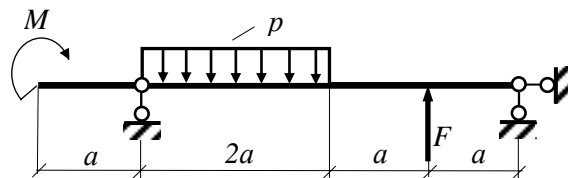


Рис.7г

V Материал балки – дуб (рис.7д).

Сечение балки - круглое.

Допускаемые напряжения $[\sigma] = 14 \text{ МПа}$

$[\tau] = 2,8 \text{ МПа}$.

Данные для расчета приведены в таблице 7д.

Таблица 7д

<i>Исходные данные по предпоследней цифре матрикула</i>	<i>a м</i>	<i>p кН/м</i>	<i>F кН</i>	<i>M кН·м</i>
1	1,8	4	8	4
2	1,6	5	9	3
3	1,5	3	10	5
4	1,4	2	20	6
5	1,3	12	22	7
6	1,2	10	12	10
7	1,1	8	18	12
8	1,0	7	16	15
9	0,9	6	19	20
0	0,7	9	14	17

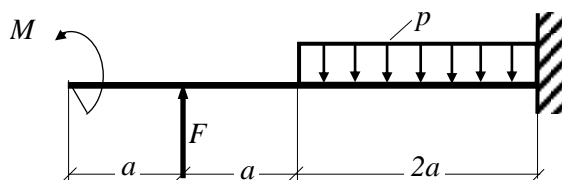


Рис.7д

VI Материал балки – сталь 3 (рис.7е).

Подобрать сечение балки из двух поставленных рядом прокатных двутавров по ГОСТ.

Допускаемые напряжения $[\sigma] = 140$ МПа
 $[\tau] = 100$ МПа.

Данные для расчета приведены в таблице 7е.

Таблица 7е

Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	a м	b м	c м	M кНм	p кН/м
1	1,0	1,0	1,0	30	8
2	2,0	1,5	1,4	40	10
3	2,0	2,0	1,9	90	12
4	3,0	2,5	1,2	80	13
5	3,0	2,8	1,3	70	15
6	4,0	3,0	1,5	100	18
7	4,0	3,1	1,6	20	20
8	5,0	3,2	1,7	120	25
9	5,0	3,5	1,8	50	30
0	6,0	4,0	2,0	60	40

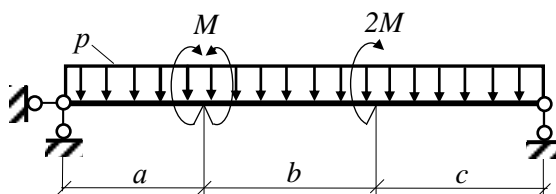


Рис.7е

VII Материал балки – сталь 3 (рис.7ж).

Подобрать сечение балки из двух поставленных рядом прокатных двутавров по ГОСТ.

Допускаемые напряжения $[\sigma] = 140$ МПа
 $[\tau] = 100$ МПа.

Данные для расчета приведены в таблице 7ж.

Таблица 7ж

Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	a м	F кН	p кН/м	M кНм
1	0,5	150	15	25
2	0,6	140	20	30
3	0,7	130	25	35
4	0,8	120	28	38
5	0,9	110	30	40
6	1,0	100	32	60
7	1,1	80	34	70
8	1,2	70	36	80
9	1,3	60	38	90
0	1,4	90	40	100

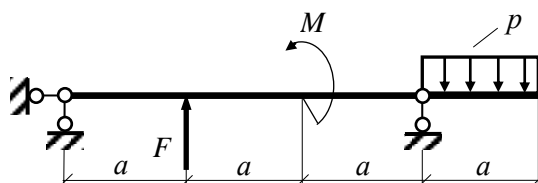


Рис.7ж

VIII Материал балки – сталь 3 (рис.7з).

Сечение составлено из двух поставленных рядом прокатных двутавров по ГОСТ.

Допускаемые напряжения $[\sigma] = 140$ МПа
 $[\tau] = 100$ МПа.

Данные для расчета приведены в таблице 7з.

Таблица 7з

Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	a м	F кН	p кН/м	M кН·м
1	1,6	80	5	10
2	1,8	70	6	20
3	1,9	100	8	30
4	2,1	60	10	40
5	2,3	90	12	50
6	2,4	40	15	60
7	2,5	50	18	70
8	2,7	110	20	80
9	2,8	120	25	18
0	3,0	105	30	32

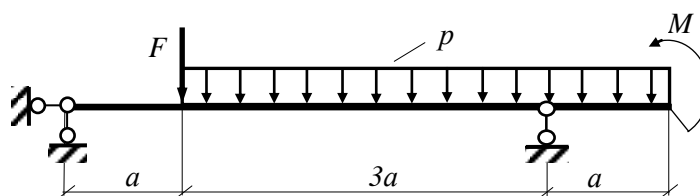


Рис.7з

IX Материал балки – сталь 3 (рис.7и).

Подобрать сечение балки из двух поставленных рядом прокатных швеллеров по ГОСТ.

Допускаемые напряжения $[\sigma] = 120$ МПа

$[\tau] = 90$ МПа.

Данные для расчета приведены в таблице 7и.

Таблица 7и

Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	a м	F кН	p кН/м	M кНм
1	0,5	150	15	25
2	0,6	140	20	30
3	0,7	130	25	35
4	0,8	120	28	38
5	0,9	110	30	40
6	1,0	100	32	60
7	1,1	80	34	70
8	1,2	70	36	80
9	1,3	60	38	90
0	1,4	90	40	100

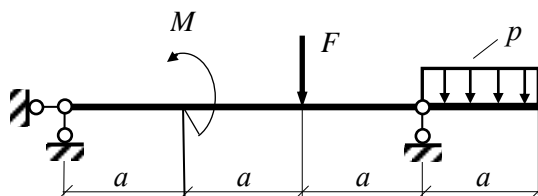


Рис.7и

VIII Материал балки – сталь 3 (рис.7к).

Сечение составлено из двух поставленных рядом прокатных швеллеров по ГОСТ.

Допускаемые напряжения $[\sigma] = 140$ МПа
 $[\tau] = 100$ МПа.

Данные для расчета приведены в таблице 7к.

Таблица 7к

Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	a м	F кН	P кН/м	M кНм
1	1,6	80	5	10
2	1,8	70	6	20
3	1,9	100	8	30
4	2,1	60	10	40
5	2,3	90	12	50
6	2,4	40	15	60
7	2,5	50	18	70
8	2,7	110	20	80
9	2,8	120	25	18
0	3,0	105	30	32

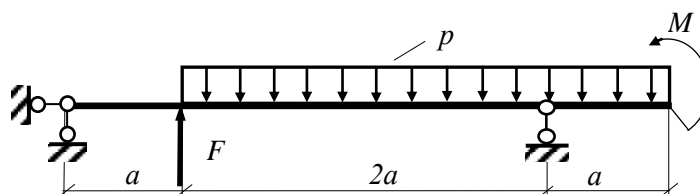


Рис.7к

7. Определение допускаемой силы при изгибе

Работа 8

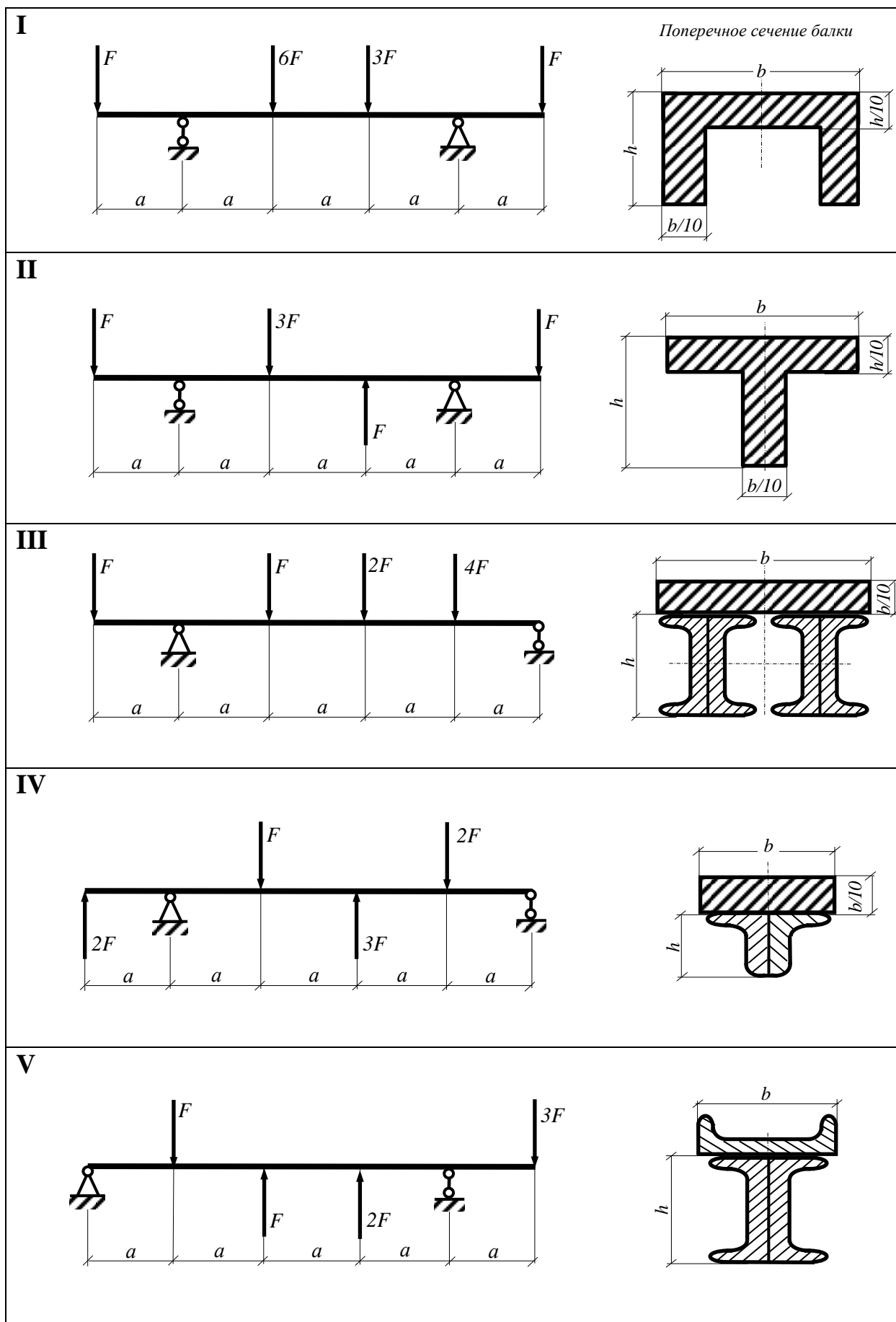
Требуется по заданной схеме нагружения балки, размерам и допускаемым напряжениям определить допускаемую величину нагрузки F (рис.8). Материал балки чугун с допускаемыми напряжениями на растяжении $[\sigma]_p$ и сжатие $[\sigma]_c$ соответственно.

Проверить сечение на прочность по касательным напряжениям, принимая допускаемое касательное напряжение в пределах $[\tau] = (0,5...0,65) [\tau]_p$.

Данные для расчета приведены в таблице 8.

Таблица 8

Схема рисунка по последней цифре матрикула	Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	a м	b см	h см	$[\sigma]_p$, МПа	$[\sigma]_c$, МПа
1	1	1,0	10	10	30	112
2	2	1,2	12	12	32	118
3	3	1,4	14	12	36	120
4	4	1,6	16	14	40	120
5	5	1,8	18	16	45	120
6	6	2,0	20	18	50	120
7	7	1,5	22	20	38	1
8	8	1,1	16	14	38	120
9	9	0,8	14	12	28	118
0	0	0,6	12	10	28	115



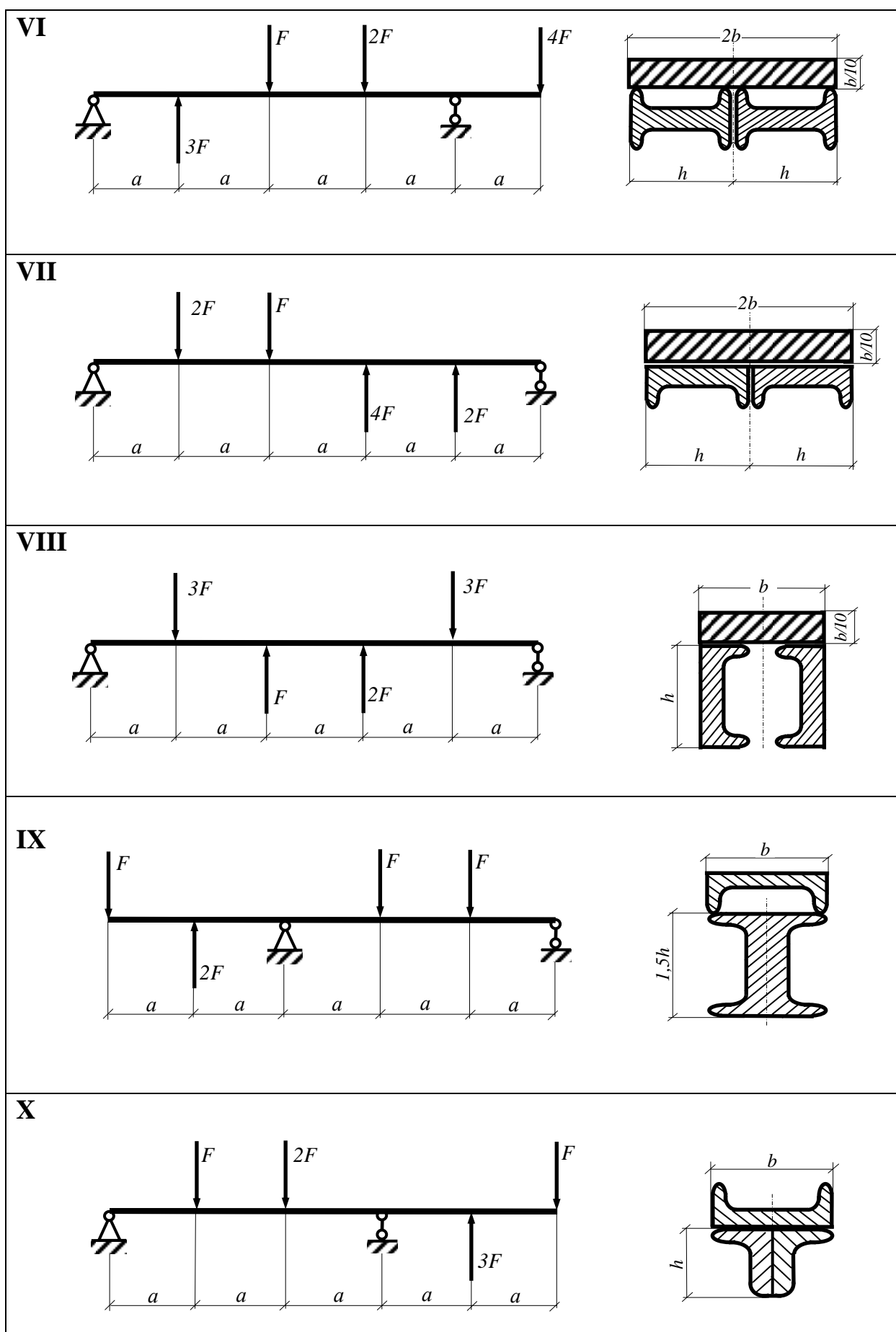
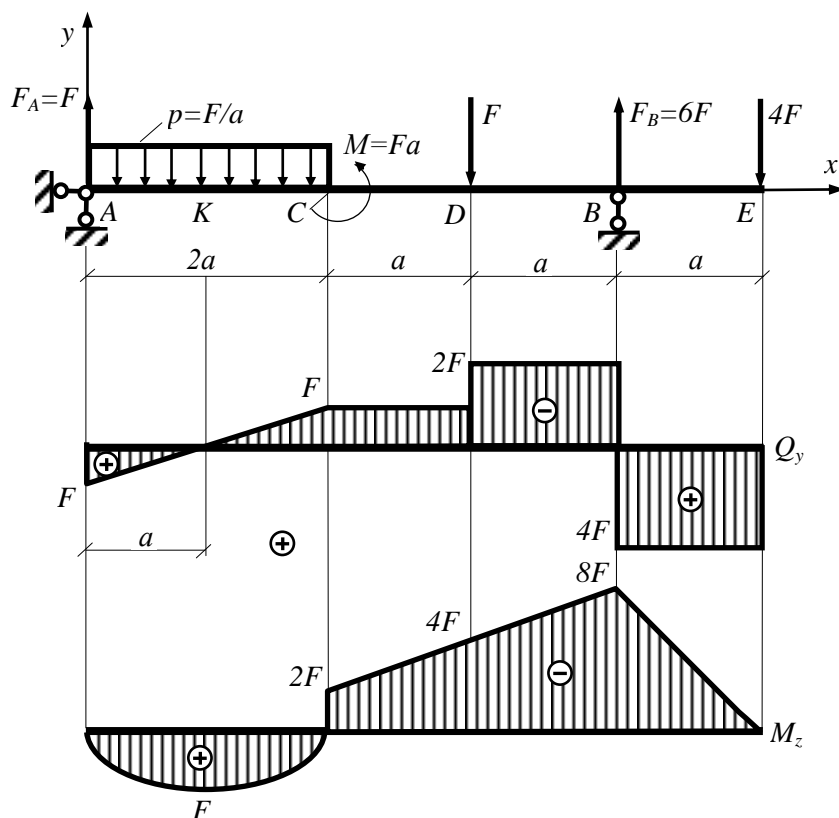


Рис.8

Пример решения:**Дано:**

$$a = 2,0 \text{ м}$$

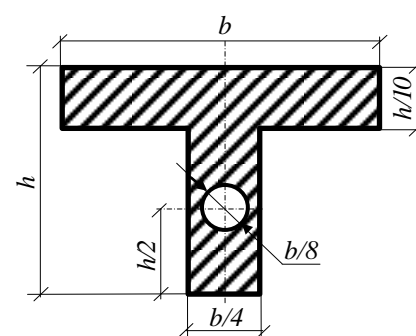
$$[\sigma]_p = 50 \text{ МПа}$$

$$[\sigma]_c = 120 \text{ МПа}$$

$$h = 20 \text{ см}$$

$$b = 24 \text{ см}$$

Поперечное сечение балки

**1. Реакции опор**

Примем размерность силы в F кН из уравнений равновесий получим

$$\sum M_A = 0; \quad -\frac{F}{a} \cdot 2a \cdot \frac{2a}{2} + M - F \cdot 3a + F_B \cdot 4a - 4F \cdot 5a = 0$$

$$-2F \cdot a + F \cdot a - F \cdot 3a + F_B \cdot 4a - 20Fa = 0$$

$$F_B = \frac{2F \cdot a - F \cdot a + F \cdot 3a + 20Fa}{4a} = 6F \text{ кН}$$

$$\sum F_{K_y} = 0; \quad F_A - \frac{F}{a} \cdot 2a - F + F_B - 4F = 0$$

$$F_A = 2F + F - F_B + 4F = 2F + F - 6F + 4F = F \text{ кН}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; \quad & -F_A \cdot 4a + \frac{F}{a} \cdot 2a \cdot \left(\frac{2a}{2} + 2a \right) + M + F \cdot a - 4F \cdot a = \\ & = -4F_A + 6F \cdot a + F \cdot a + F \cdot a - 4F \cdot a = 0 \end{aligned}$$

2. Эпюры внутренних сил Q_y и M_z

а) идем слева

сечение A: $Q_y = F_B = F; \quad M_z = 0$

сечение C: $Q_y = F_B - \frac{F}{a} \cdot 2a = F - 2F = -F \text{ кН}$

до $M_z = F_B \cdot 2a - \frac{F}{a} \cdot 2a \cdot \frac{2a}{a} = F \cdot 2a - F \cdot 2a = 0$

после $M_z = 0 - M = 0 - F \cdot a = -F \cdot a = -2F \text{ кНм}$

сечение D:

до $Q_y = F_B - \frac{F}{a} \cdot 2a = F - 2F = -F \text{ кН}$

после $Q_y = -F - F = -2F \text{ кН}$

$$M_z = F_B \cdot 3a - \frac{F}{a} \cdot 2a \cdot \left(\frac{2a}{2} + a \right) - M = F \cdot 3a - 4F \cdot a - F \cdot a = -2F \cdot a = -4F \text{ кНм}$$

кНм

б) идем справа

сечение E: $Q_y = F; \quad M_z = 0$

сечение B:

до $Q_y = 4F \text{ кН}$

после $Q_y = 4F - F_B = 4F - 6F = -2F \text{ кН}$

$$M_z = -4F \cdot a = -8F \text{ кНм}$$

Проверка:

При вычислении Q_y и M_z в сечении B слева получим:

сечение B:

до $Q_y = F_A - \frac{F}{a} \cdot 2a - F = -2F \text{ кН (совпадает)}$

после $Q_y = -2F + F_B = -2F + 6F = 4F \text{ кН (совпадает)}$

$$M_z = -F_A \cdot 4a + \frac{F}{a} \cdot 2a \cdot \left(\frac{2a}{a} + 2a \right) + M + F \cdot a \text{ кНм}$$

$$M_z = -4F \cdot a + 6F \cdot a + F \cdot a + F \cdot a = -4F \cdot a = -8F \text{ кНм (совпадает)}$$

Экстремальный изгибающий момент M_z в сечении ($x = a$), где $Q_y = 0$

$$M_z^{ext} = F_A \cdot a - \frac{F}{a} \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} \right) = F \cdot a - \frac{Fa}{2} = \frac{Fa}{2} = 2 \text{ кНм}$$

Так как эпюра изгибающих моментов строится со стороны растянутых волокон, то изогнутая ось балки приблизительно имеет вид (рис.8б)



Рис. 8б

3. Главные моменты инерции поперечного сечения (рис.8в)

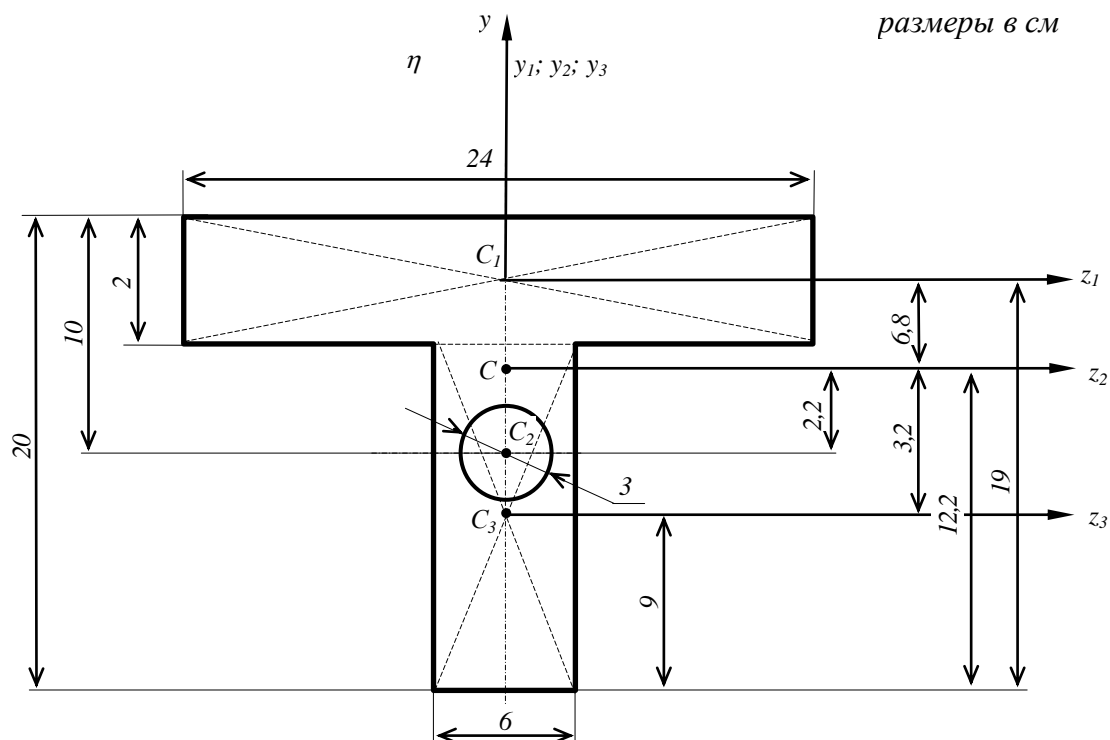


Рис.8в

3.1. Координаты центра тяжести поперечного сечения

$$\xi_C = 0 \quad (\text{в силу симметрии})$$

$$\eta_C = \frac{\eta_{C1}A_1 - \eta_{C2}A_2 + \eta_{C3}A_3}{A_1 - A_2 + A_3},$$

где

$$\eta_{C1} = 19 \text{ см}$$

$$\eta_{C2} = 10 \text{ см}$$

$$\eta_{C3} = 9 \text{ см}$$

$$A_1 = 24 \cdot 2 = 48 \text{ см}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot 3^2}{4} = 7 \text{ см}^2$$

$$A_3 = 6 \cdot 18 = 108 \text{ см}^2$$

$$\eta_C = \frac{19 \cdot 48 - 10 \cdot 7 + 9 \cdot 108}{48 - 7 + 108} = 12,2 \text{ см}$$

3.2. $I_z = I_z^{(1)} - I_z^{(2)} + I_z^{(3)}$

$$I_z^{(1)} = I_{z1} + 6,8^2 \cdot A_1 = \frac{24 \cdot 2^3}{12} + 6,8^2 \cdot 48 = 2235 \text{ см}^4$$

$$I_z^{(2)} = I_{z2} + (-2,2)^2 \cdot A_2 = \frac{\pi \cdot 3^4}{64} + (-2,2)^2 \cdot 7 = 38 \text{ см}^4$$

$$I_z^{(3)} = I_{z2} + (-3,2)^2 \cdot A_3 = \frac{6 \cdot 18^3}{12} + (-3,2)^2 \cdot 108 = 4022 \text{ см}^4$$

$$I_z = 2235 - 38 + 4022 = 6119 \text{ см}^4$$

$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)} + I_y^{(3)}$$

$$I_y^{(1)} = I_{y1} = \frac{2 \cdot 24^3}{12} = 2304 \text{ см}^4$$

$$I_y^{(2)} = I_{y2} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 3^4}{64} = 4 \text{ см}^4$$

$$I_y^{(3)} = I_{y3} = \frac{18 \cdot 6^3}{12} = 324 \text{ см}^4$$

$$I_z = 2304 - 4 + 324 = 2624 \text{ см}^4$$

4. Допускаемая величина нагрузки F

Поскольку чугун не одинаково работает на растяжение и сжатие и поперечное сечение не симметрично относительно нейтральной линии, совпадающей с главной осью z построим эпюру нормальных напряжений в сечениях, где $M_z = -8F$ и $M_z = F$ (рис.8г).

сечение В $M_z = -8F$

(растянуты верхние волокна)

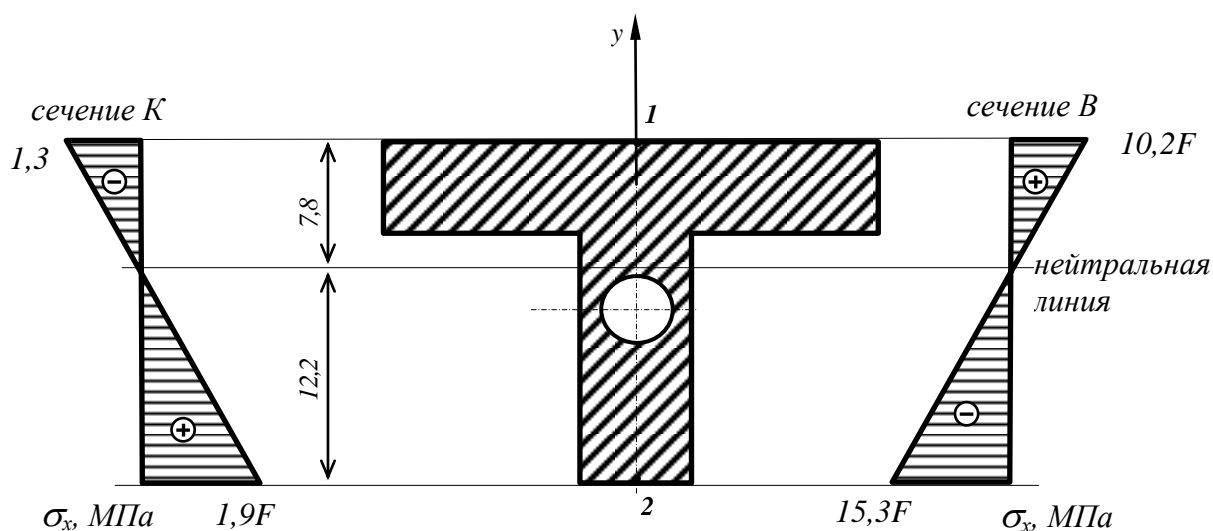


Рис.8г

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}$$

точка 1 $y=7,8 \text{ см}$

$$\sigma_x = \frac{8 \cdot F \cdot 10^3 \cdot 7,8 \cdot 10^{-2}}{6119 \cdot 10^{-8}} = 10,2 \cdot F \cdot 10^6 \text{ Па} = 10,2 F \text{ МПа}$$

(положительное)

точка 2 $y=12,2$ см

$$\sigma_x = -\frac{8 \cdot F \cdot 10^3 \cdot 12,2 \cdot 10^{-2}}{6119 \cdot 10^{-8}} = -15,3 \cdot F \cdot 10^6 \text{ Па} = -15,3 F \text{ МПа}$$

(отрицательное)

При вычислениях знаки M_z и y не принимаются во внимание, знаки напряжений определяются по растянутым и сжатым волокнам.

NB! Значение принято в кН.

сечение K $M_z^{ext} = F$ (растянуты нижние волокна)

точка 1 $y=7,8$ см

$$\sigma_x = -\frac{F \cdot 10^3 \cdot 7,8 \cdot 10^{-2}}{6119 \cdot 10^{-8}} = -1,3 \cdot F \cdot 10^6 \text{ Па} = -1,3 F \text{ МПа}$$

точка 2 $y=12,2$ см

$$\sigma_x = \frac{F \cdot 10^3 \cdot 12,2 \cdot 10^{-2}}{6119 \cdot 10^{-8}} = 1,9 \cdot F \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,9 F \text{ МПа}$$

Максимальные растягивающие и сжимающие нормальные напряжения в сечении В:

$$\sigma_{1x} = 10,2 \cdot F \text{ МПа} \quad \sigma_{2x} = -15,3 \cdot F \text{ МПа}$$

По условиям прочности определяем допускаемую силу $[F]$

$$\sigma_{1x} \leq [\sigma]_p \quad \text{и} \quad |\sigma_{2x}| \leq [\sigma]_c$$

$$10,2[F] \leq 50 \quad [F] \leq \frac{50}{10,2} \leq 4,9 \text{ кН}$$

$$|-15,3[F]| \leq 120 \quad [F] \leq \frac{120}{|-15,3|} \leq 7,8 \text{ кН}$$

принимаем $[F] \leq 4,9 \text{ кН}$.

5. Проверка допускаемой нагрузки по касательным напряжениям

Так как поперечное сечение ослаблено отверстием (рис.8д), то необходимо провести проверку по касательным напряжениям в этом месте, которые определяются

$$\tau = \frac{Q_y S_z}{I_z b_y}$$

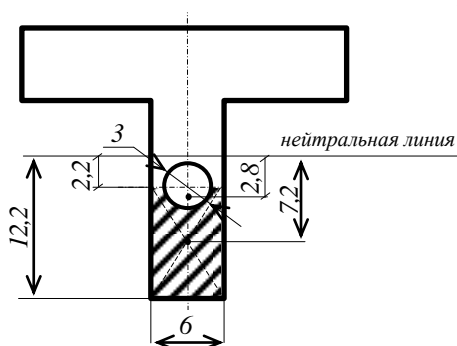


Рис.8д

где $Q_y = 4F = 4 \cdot 4,9 = 19,6 \text{ кН}$
 $b_y = 6 - 3 = 3 \text{ см}$ - ширина сечения
 в этом месте,
 S_z - статический момент
 заштрихованной площади
 относительно нейтральной линии

$$S_z = S_z^{(1)} - S_z^{(2)}$$

где $S_z^{(1)} = 6 \cdot 10 \cdot 7,2 = 432 \text{ см}^3$ - статический момент прямоугольника

$$S_z^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \cdot \left(\frac{2 \cdot 3}{3\pi} + 2,2 \right) = 10 \text{ см}^3$$

где $\frac{2 \cdot 3}{3\pi}$ - координаты центра тяжести полукруга относительно диаметра

$$S_t = 432 - 10 = 422 \text{ см}^3$$

$$\tau = \frac{19,6 \cdot 10^3 \cdot 422 \cdot 10^{-6}}{6119 \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 4,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 4,5 \text{ МПа}$$

Допускаемые касательные напряжения составляют

$$[\tau] = (0,5 \dots 0,6) [\sigma]_p = (0,5 \dots 0,6) \cdot 50 = (25 \dots 30) \text{ МПа}$$

Условие прочности по касательным напряжениям удовлетворяется $\tau < [\tau]$.

8. Плоское напряженное состояние

Работа 9

Стальной кубик находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (одно из трех главных напряжений равно нулю). Требуется найти:

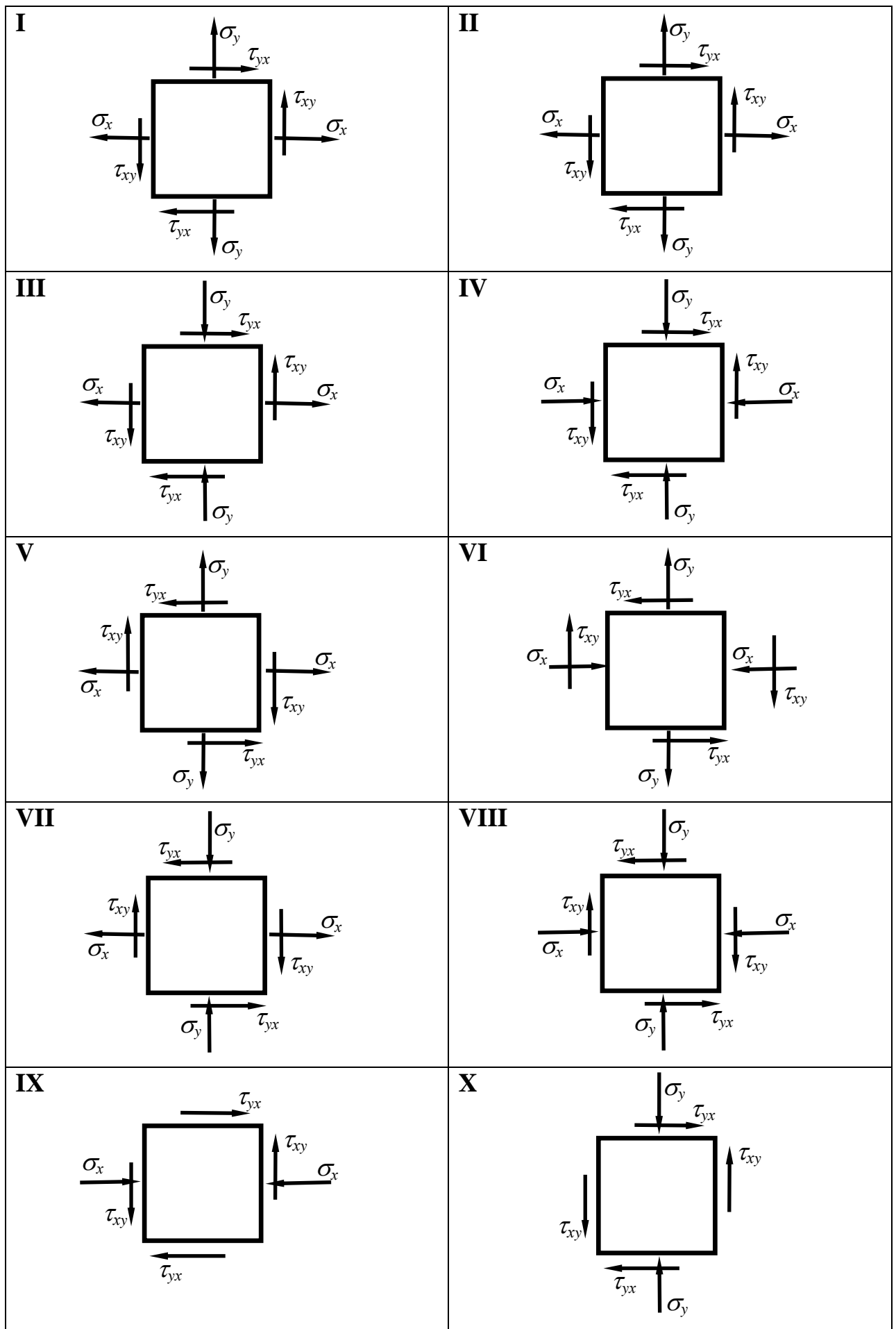
- 1) главные напряжения и направление главных площадок;
- 2) максимальные касательные напряжения, равные наибольшей полуразности главных напряжений;
- 3) относительные деформации ε_x , ε_y и ε_z ;
- 4) относительное изменение объема;
- 5) удельную потенциальную энергию деформаций;
- 6) эквивалентное напряжение по III теории прочности.

Данные взять из таблицы 9.

Принять коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$ и модуль упругости 210 ГПа.

Таблица 9

Схема По последней цифре матрикула	Исходные данные По предпоследней цифре матрикула	Напряжения			
		σ_x МПа	σ_y МПа	$\tau_{xy}=\tau_{yx}$ МПа	$[\sigma]$ МПа
I	1	50	120	20	160
II	2	60	110	40	150
III	3	70	100	50	140
IV	4	80	90	60	130
V	5	90	80	70	130
VI	6	100	70	80	140
VII	7	110	60	90	150
VIII	8	120	50	40	160
IX	9	130	40	50	170
X	0	140	30	60	180



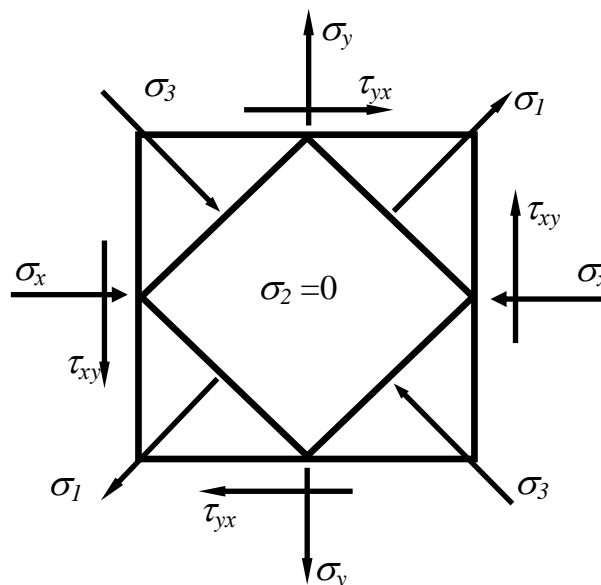
Пример решения:

$$\sigma_y = 180 \text{ МПа}$$

$$\tau_{yx} = 130 \text{ МПа}$$

$$\tau_{xy} = 130 \text{ МПа}$$

$$\sigma_x = 200 \text{ МПа}$$



1) положение главных площадок

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2 \cdot 130}{-200 - 180} = \frac{260}{380} = 0,68$$

$$2\alpha_0 = \operatorname{arctg} 0,68$$

$$2\alpha_0 = 34,2^\circ \text{ или } \alpha_0 = 17,1^\circ.$$

Нормаль к одной из главных площадок образует с нормальным напряжением σ_x угол, который откладывается против хода часовой стрелки ($\alpha_0=0$).

Нормаль к другой главной площадке образует с σ_x угол $\alpha_0 + 90^\circ$.

Значения главных напряжений

$$\sigma_{\text{rea}} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2}$$

$$\sigma_{\text{rea}} = \frac{(-200 + 180) \pm \sqrt{(-200 - 180)^2 + 4 \cdot 130^2}}{2} = \frac{-20 \pm 460,4}{2} =$$

имеем

$$\sigma_1 = 220,2 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -240,2 \text{ МПа}.$$

Для расстановки на главных площадках значений главных напряжений (где действует $\sigma_{\max}=\sigma$, а где $\sigma_{\min}=\sigma_3$) надо было по правилам математики исследовать знак второй производной.

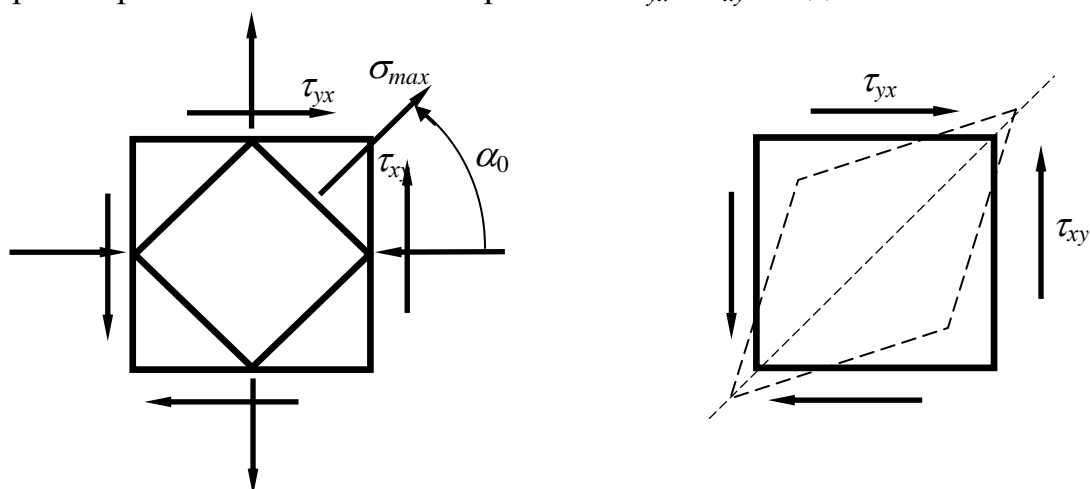
$$\frac{d^2\sigma_\alpha}{d\alpha^2} \text{ при } \alpha = \alpha_0 \text{ и } \alpha = \alpha_0 + 90^\circ$$

(где

$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha$ - нормальное напряжение на произвольной площадке).

Но можно это сделать и другим способом.

Направление $\sigma_{\max} = \sigma_I$ всегда проходит через две четверти осей координат, в которых стрелки касательных напряжений τ_{yx} и τ_{xy} сходятся.



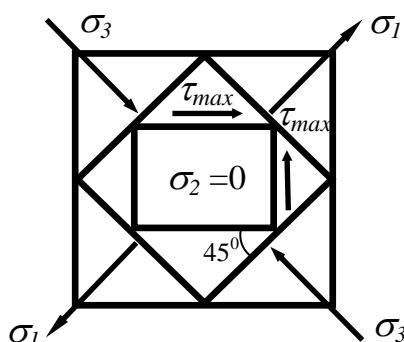
Это видно из того, что касательные напряжения создают удлинение одной из диагоналей. Именно в этом направлении и действует растягивающее напряжение $\sigma_{\max} = \sigma_I$.

2. максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{220,2 - (-240,2)}{2} = 230,2 \text{ МПа}$$

и действует по площадке, наклонной под углом 45° к максимальному и минимальному из трех главных напряжений.



3. относительные деформации

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_x = \frac{-200 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^9} - \frac{0,3}{210 \cdot 10^9} (180 \cdot 10^6 + 0) = -1,21 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{180 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^9} - \frac{0,3}{210 \cdot 10^9}(-200 \cdot 10^6 + 0) = 1,14 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = 0 - \frac{0,3}{210 \cdot 10^9}(180 \cdot 10^6 - 200 \cdot 10^6) = 0,029 \cdot 10^{-3}$$

4. изменение объема

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (-1,21 + 1,14 + 0,029) \cdot 10^{-3} = 0,04 \cdot 10^{-3}$$

Относительное изменение объема e – инвариантная величина, не зависящая от направления осей. Чтобы убедиться в этом найдем относительные деформации через главные напряжения

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) \quad \varepsilon_1 = \frac{220,2 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^9} - \frac{0,3}{210 \cdot 10^9}(0 - 240,2 \cdot 10^6) = 1,39 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad \varepsilon_2 = 0 - \frac{0,3}{210 \cdot 10^9}(220,2 - 240,2) \cdot 10^6 = 0,0286 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad \varepsilon_3 = -\frac{240,2 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^9} - \frac{0,3}{210 \cdot 10^9}(220,2 \cdot 10^6 + 0) = -1,46 \cdot 10^{-3}$$

относительное изменение объема

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (1,39 + 0,0286 - 1,46) \cdot 10^{-3} = 0,04 \cdot 10^{-3}$$

Как видно результаты расчетов совпадают.

Например, если $V=1 \text{ м}^3$, то

$$\Delta V = eV = 0,04 \cdot 10^{-3} \cdot 1 = 40 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 40 \text{ см}^3.$$

5. удельная потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3 =$$

$$= \frac{1}{2}(220,2 \cdot 1,39 + 0 + 240,2 \cdot 1,46) \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} = 438 \cdot 10^3 \text{ J/m}^3$$

б. эквивалентное напряжение по III теории прочности

$$\sigma_e^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = 220,2 - (-240,2) = 460,4 > [\sigma] = 340 \text{ МПа}$$

в данном случае условие прочности не выполнено.

9. Косой изгиб

Работа 10

Деревянная балка (рис.10) прямоугольного поперечного сечения нагружена вертикальной силой F в точке A и горизонтальной силой F в точке B (обе точки расположены на оси балки). На опорах балки возникают как вертикальные, так и горизонтальные реакции, направленные перпендикулярно плоскости чертежа.

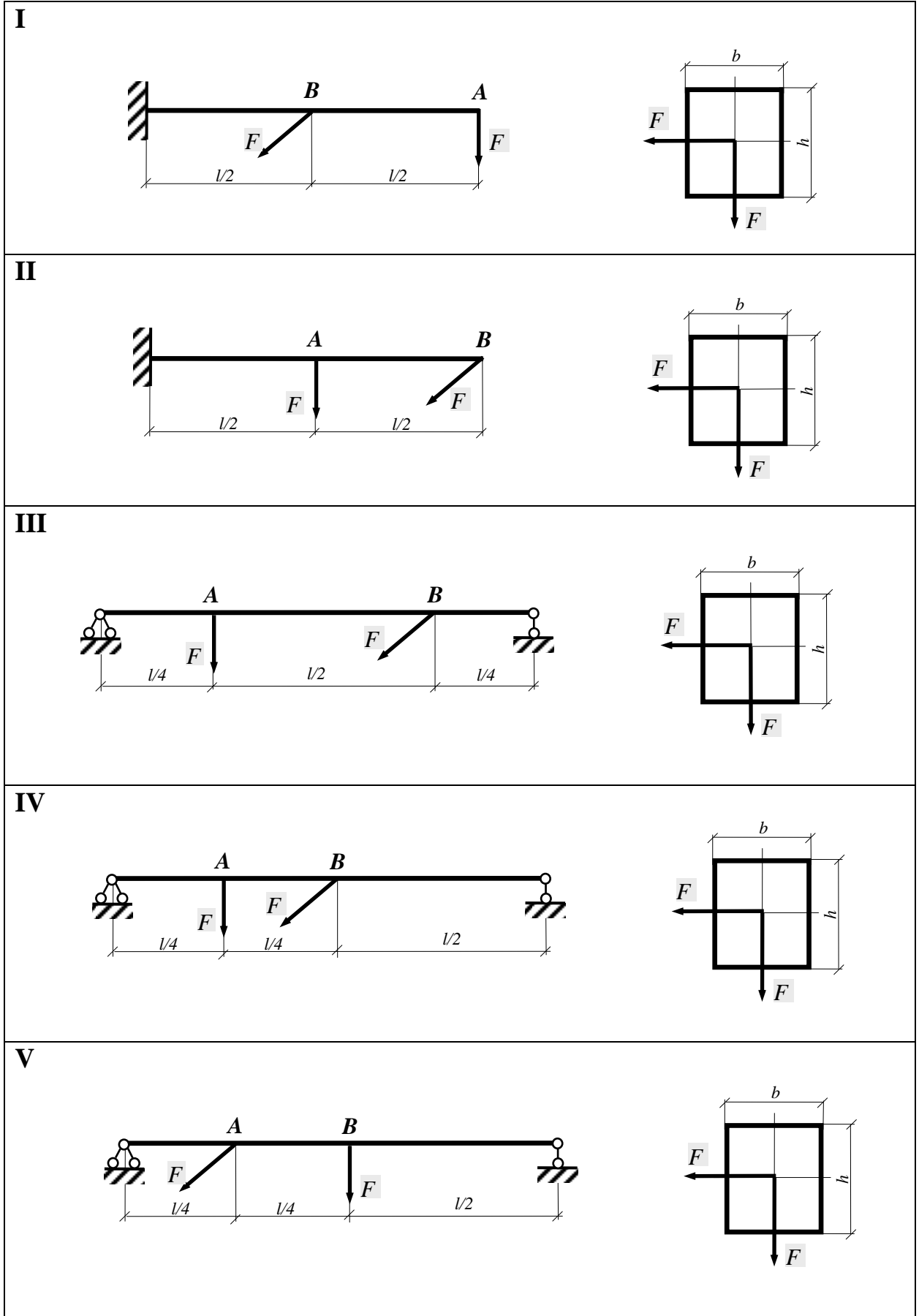
Требуется:

- 7) построить эпюры M_z и M_y и установить положение опасного сечения;
- 8) подобрать размеры поперечного сечения h и b при допуске напряжении $[\sigma]=8$ МПа;
- 9) определить положение нейтральной линии в опасном сечении балки и построить эпюру нормальных напряжений.

Данные взять из таблицы 10.

Таблица 10

Схема рис. по последней цифре матрикула	Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	Напряжения		
		F кН	l м	h/b
I	1	1	1,1	1,1
II	2	2	1,2	1,2
III	3	3	1,3	1,3
IV	4	4	1,4	1,4
V	5	5	1,5	1,5
VI	6	6	1,6	1,6
VII	7	7	1,7	1,7
VIII	8	8	1,8	1,8
IX	9	9	1,9	1,9
X	0	10	2,0	2,0



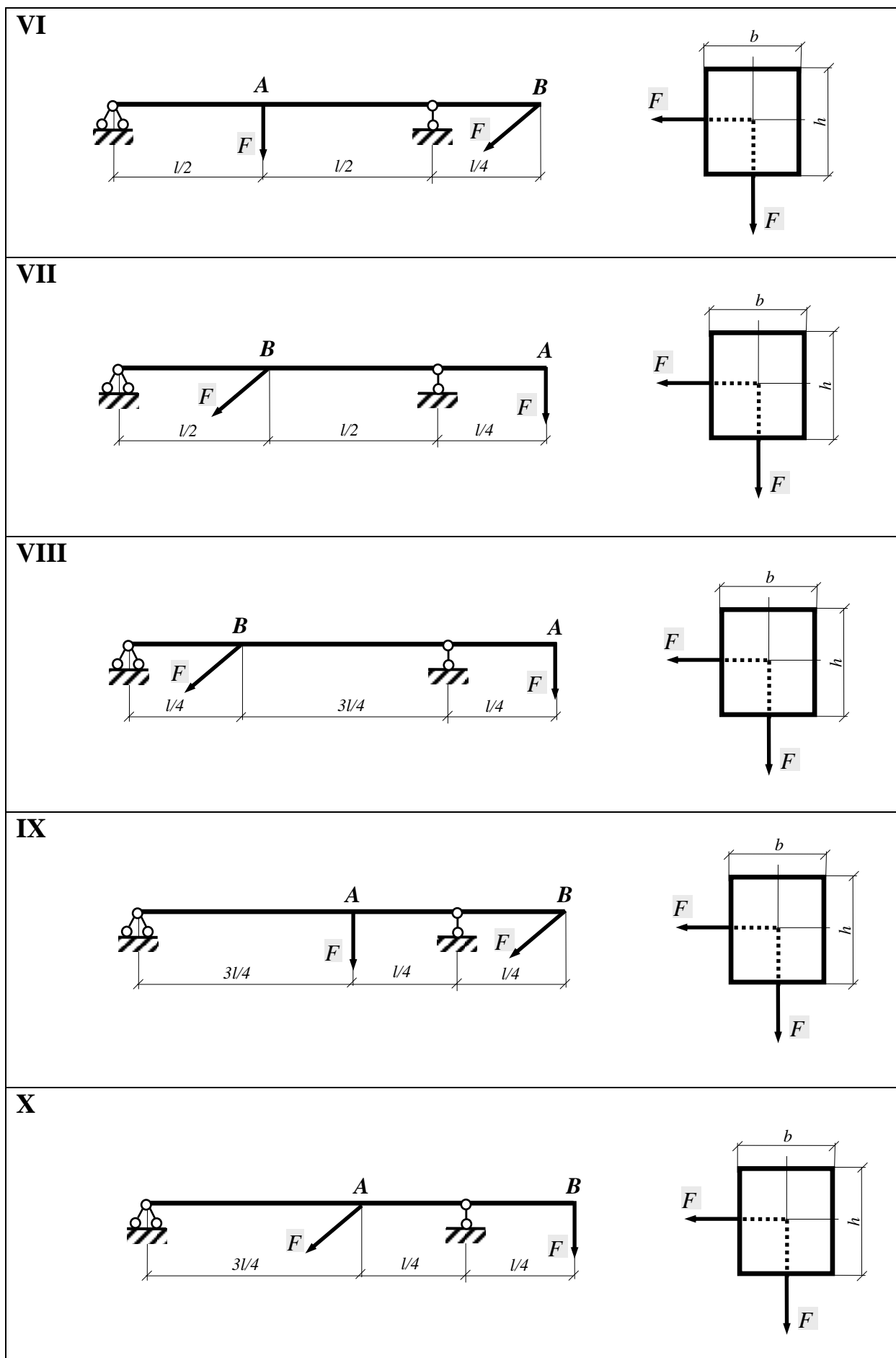
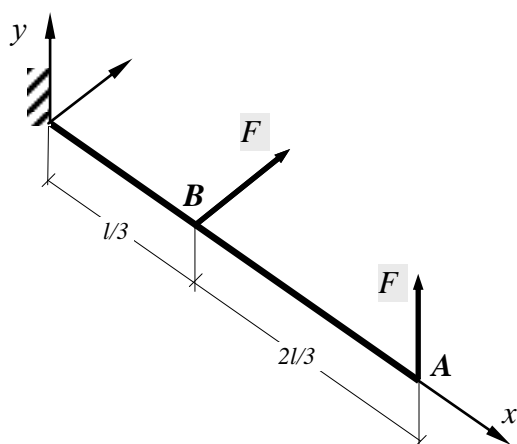


Рис.10

Пример решения:

$$F = 5 \text{ кН}$$

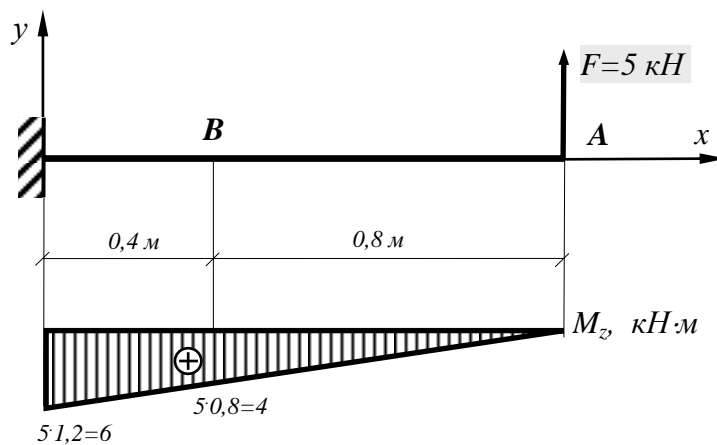
$$[\sigma] = 8 \text{ МПа}$$

$$l = 1,2 \text{ м}$$

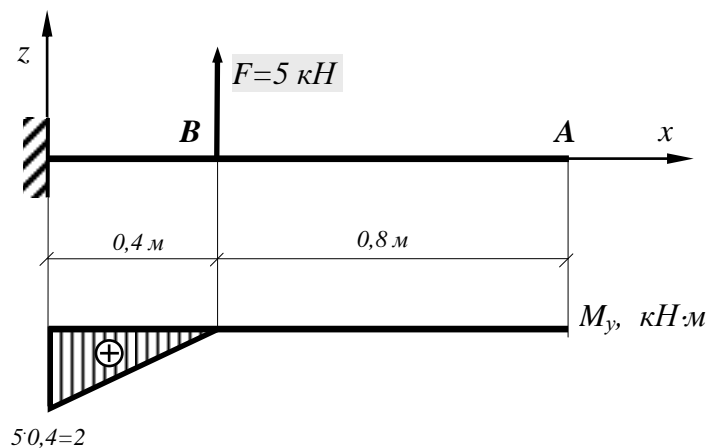
$$\frac{h}{b} = 3$$

1. построение эпюр изгибающих моментов

а) вертикальная плоскость



б) горизонтальная плоскость



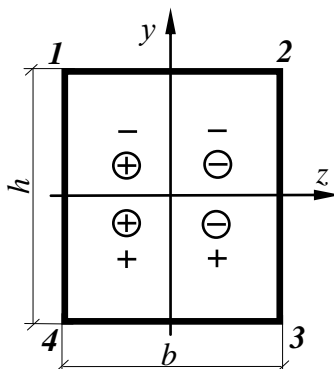
Опасное сечение в заделке балки.

2. подбор сечения из условия прочности

В заделке действуют два изгибающих момента. Одновременный изгиб в двух плоскостях в результате приводит к косому изгибу. Для определения напряжений в наиболее удаленных точках от обеих главных осей инерции вместо общей формулы можно применять частную формулу

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y}$$

где $W_z = \frac{bh^2}{6}$ и $W_y = \frac{bh^2}{6}$ - осевые моменты сопротивления прямоугольного сечения.



При изгибе в вертикальной плоскости нижние волокна растянуты и нормальные напряжения растягивающие.

При изгибе в горизонтальной плоскости растянутые волокна слева от оси y , где будут действовать растягивающие нормальные напряжения (они показаны в кружочках).

В точке 2 сечения в заделке будет наибольшее сжимающее напряжение, а в точке 4 наибольшее растягивающее напряжение.

$$\sigma_4 = |\sigma_2| = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]$$

Учитывая соотношение $h/b = 3$

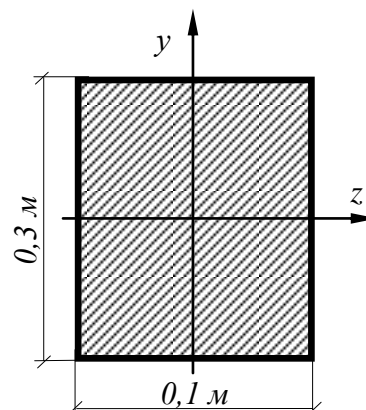
имеем
$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(3b)^2}{6} = \frac{9b^3}{6}$$

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{3b \cdot b^2}{6} = \frac{3b^3}{6}$$

отсюда

$$\frac{M_z \cdot 6}{9b^3} + \frac{M_y \cdot 6}{3b^3} \leq [\sigma]$$

$$b^3 \geq \frac{\frac{M_z \cdot 6}{9} + \frac{M_y \cdot 6}{3}}{[\sigma]} \quad b \geq \sqrt[3]{\frac{2M_z + 6M_y}{3[\sigma]}}$$



сечение балки

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 6 \cdot 10^3 + 6 \cdot 2 \cdot 10^3}{3 \cdot 8 \cdot 10^6}} \geq 0,1 \text{ м}$$

$$h \geq 3b \geq 3 \cdot 0,1 \geq 0,3 \text{ м}$$

3. положение нейтральной линии

Положение нейтральной линии при косом изгибе можно установить, приравняв нулю напряжения в точках, принадлежащих этой линии.

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0$$

$$y = -\frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{I_z}{M_z} z = \operatorname{tg} \varphi \cdot z$$

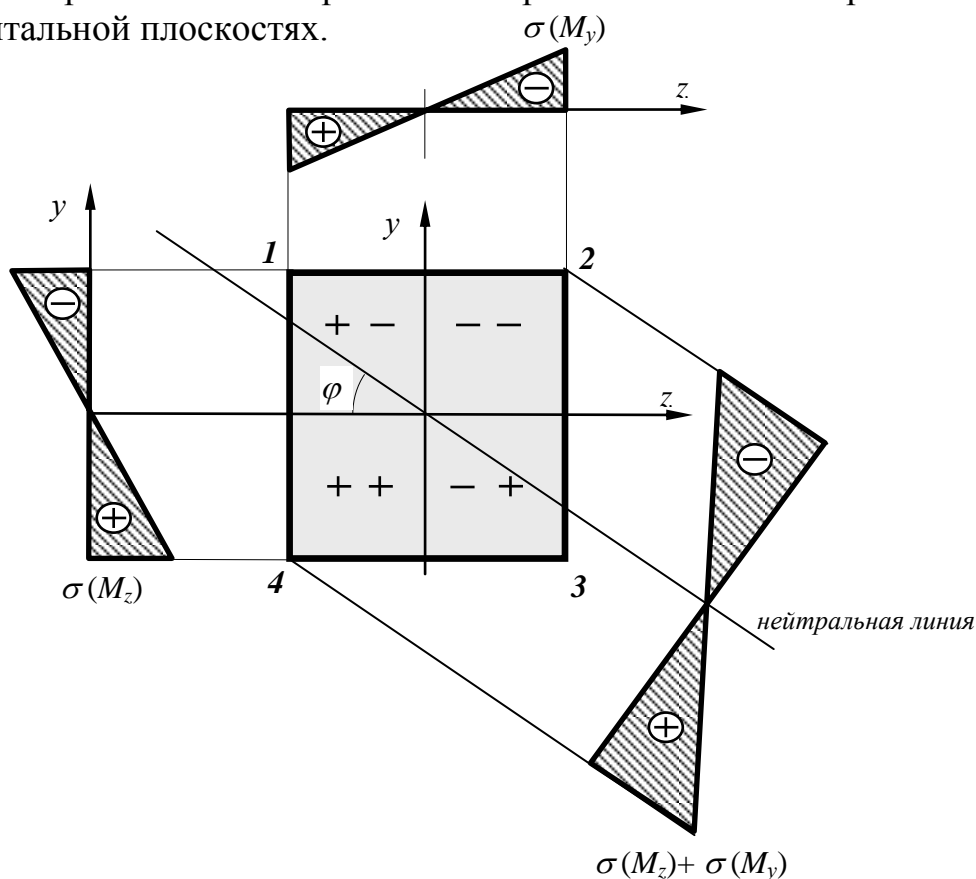
где $\operatorname{tg} \varphi \cdot z = -\frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{I_z}{M_z}$

имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{I_z}{M_z} = -\frac{M_y \cdot b \cdot h^3 \cdot 12}{12 \cdot h \cdot b^3 \cdot M_z} = -\frac{h^2}{b^2} \cdot \frac{M_y}{M_z} = -\left(\frac{h}{b}\right)^2 \cdot \frac{M_y}{M_z}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -(3)^2 \cdot \frac{2}{6} = -\frac{9 \cdot 2}{6} = -3 \quad \varphi = -71,5^\circ$$

нейтральная линия проходит через 2-ую и 4-ую четверти. Заметим, что положение нейтральной линии легко определяется после расстановки знаков нормальных напряжений при изгибе в вертикальной и горизонтальной плоскостях.



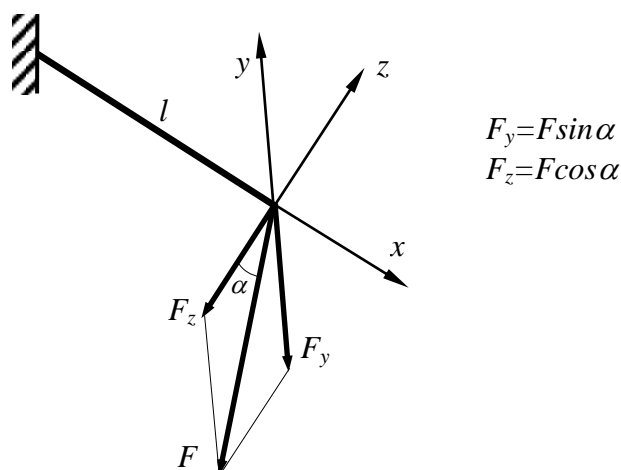
На рисунке показаны эпюры изгибающих моментов в точках расположенных на нейтральных линиях $\sigma(M_z)$, $\sigma(M_y)$ и $\sigma(M_z)+\sigma(M_y)$. Точки 2 и 4 наиболее удаленные точки от нейтральной линии при косом изгибе.

Определение перемещений при косом изгибе

Пусть консольная балка длиной l изгибается силой F , плоскость действия которой составляет с главной вертикальной плоскостью угол α .

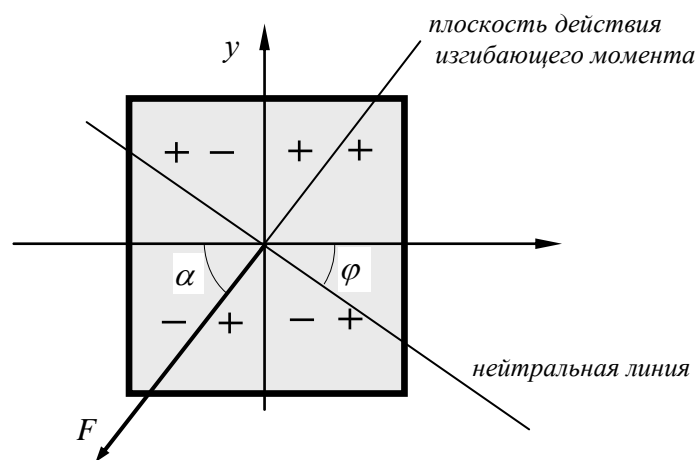
При прямом поперечном изгибе перемещения точек оси балки происходят в плоскости действия изгибающего момента или в плоскости перпендикулярной нейтральной линии.

При косом изгибе в общем случае будет уже другая картина.



Тангенс угла наклона нейтральной линии при косом изгибе

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot z = -\frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{I_z}{M_z}$$



Нейтральная линия и плоскость действия изгибающего момента перпендикулярны, если

$$\alpha + \varphi + 90 = 180^0 \text{ или } \alpha + \varphi = 90^0$$

$$\varphi = 90^0 - \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(90^0 - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

Учитывая, что $M_z = F \sin \alpha$ и $M_y = F \cos \alpha$ имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{F \cos \alpha \cdot l}{F \sin \alpha \cdot l} \cdot \frac{I_z}{I_y} = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{I_z}{I_y} \quad \text{т.е.} \quad \operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{I_z}{I_y}$$

Условие перпендикулярности будет выполняться только если $I_z = I_y$, т.е. в случае круглого или квадратного сечения.

Вертикальное перемещение конца балки

$$\Delta l_y = \frac{1}{3} \cdot \frac{F_y \cdot l^3}{EI_z}$$

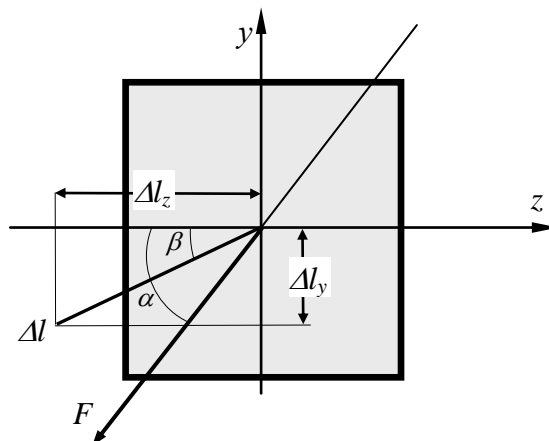
и горизонтальное перемещение

$$\Delta l_z = \frac{1}{3} \cdot \frac{F_z \cdot l^3}{EI_z}$$

откуда

$$\Delta l_y = \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot \sin \alpha \cdot l^3 \cdot 12}{E \cdot b \cdot h^3} \quad \Delta l_z = \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot \cos \alpha \cdot l^3 \cdot 12}{E \cdot h \cdot b^3}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta l_y}{\Delta l_z} = \frac{F \cdot \sin \alpha \cdot l^3 \cdot 12 \cdot 3 \cdot E \cdot h \cdot b^3}{3 \cdot E \cdot b \cdot h^3 \cdot F \cdot \cos \alpha \cdot l^3 \cdot 12} = \frac{b^2}{h^2}$$



Например, если $\alpha = 45^0$ (направление действия силы), β - угол, определяющий направление перемещения зависит от отношения вертикальной и горизонтальной жесткостей. Перемещение будет больше там где меньше изгибная жесткость.

Общее перемещение

$$\Delta l = \sqrt{\Delta l_z^2 + \Delta l_y^2}$$

$$F = 5 \text{ кН}$$

$$\alpha = 45^0$$

$$l = 1 \text{ м}$$

$$h = 0,3 \text{ м}$$

$$b = 0,2 \text{ м}$$

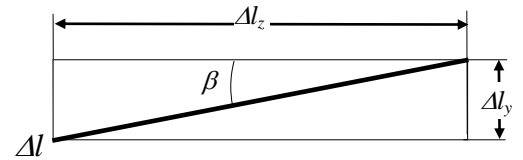
$$E = 10 \text{ ГПа}$$

$$\Delta l_y = \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot \sin \alpha \cdot l^3 \cdot 12}{E \cdot b \cdot h^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 10^3 \cdot \sin 45^\circ \cdot 1^3 \cdot 12}{10 \cdot 10^9 \cdot 0,1 \cdot 0,3^3} = 523 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,52 \text{ мм}$$

$$\Delta l_z = \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot \cos \alpha \cdot l^3 \cdot 12}{E \cdot h \cdot b^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 10^3 \cdot \cos 45^\circ \cdot 1^3 \cdot 12}{10 \cdot 10^9 \cdot 0,3 \cdot 0,1^3} = 4713 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 4,7 \text{ мм}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta l_y}{\Delta l_z} = \frac{0,523}{4,71} = 0,11 \quad \beta \approx 6^\circ$$

$$\Delta l = \sqrt{0,52^2 + 4,7^2} = 4,74 \text{ мм}$$



10. Внецентренное сжатие

Работа 11

Чугунный короткий, поперечное сечение которого изображено ниже (рис.11) сжимается продольной силой F , приложенной в точке A .

Требуется:

- 1) определить главные моменты инерции;
- 2) вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через F и размеры сечения;
- 3) найти допускаемую нагрузку F при заданных размерах сечения и допускаемых для чугуна на сжатие $[\sigma_c]$ и на растяжение $[\sigma_p]$;
- 4) Построить ядро сечения. Данные взять из таблицы 11.

Таблица 11

Схема по последней цифре матрикула	Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	a	b	$[\sigma_c]$	$[\sigma_p]$
		см		МПА	
I	1	6	6	110	21
II	2	2	2	120	22
III	3	3	3	130	23
IV	4	4	4	140	24
V	5	5	5	150	25
VI	6	6	6	60	26
VII	7	2	2	70	27
VIII	8	3	3	80	28
IX	9	4	4	90	29
X	0	5	5	100	30

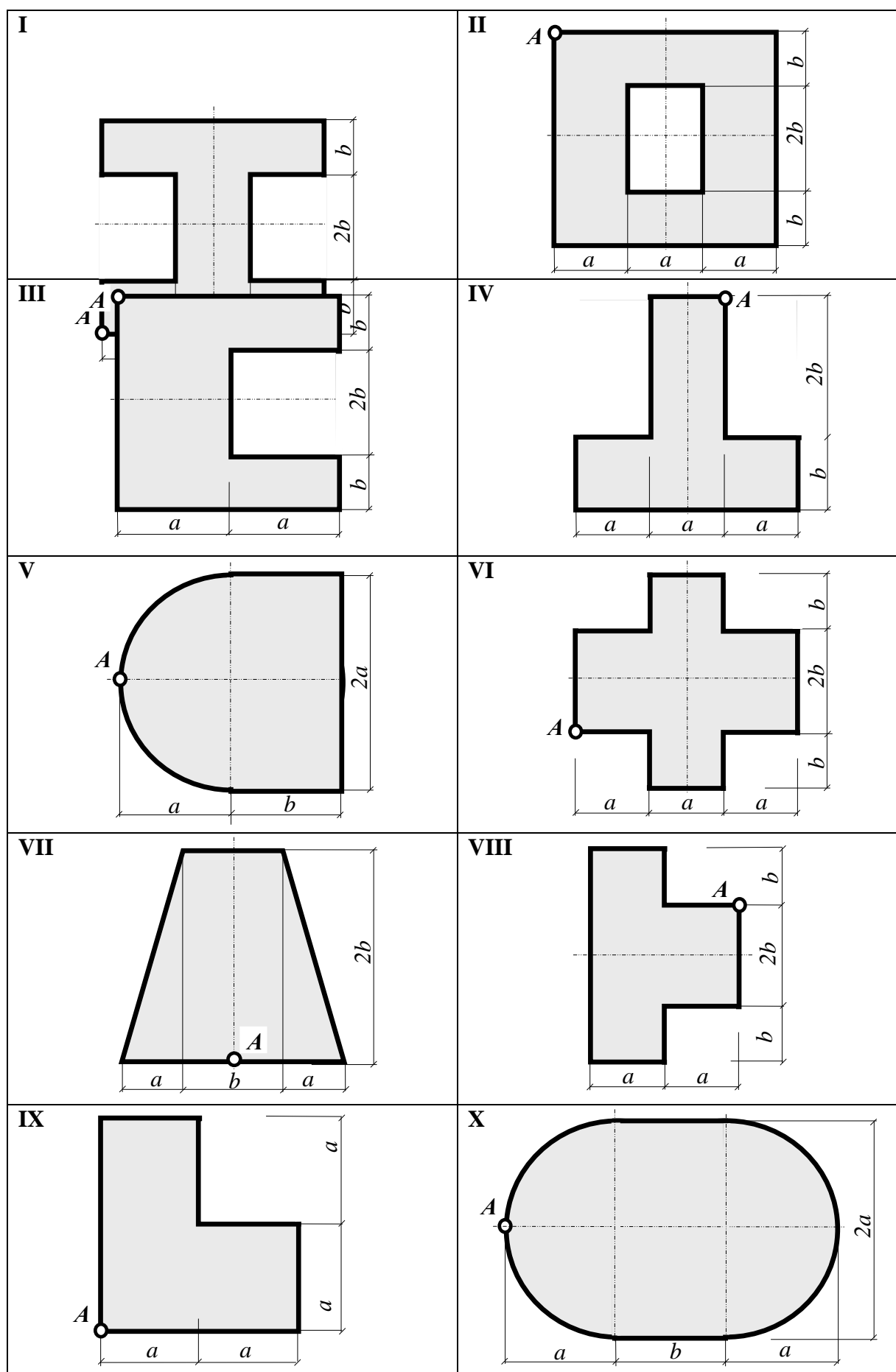


Рис.11

Пример решения:

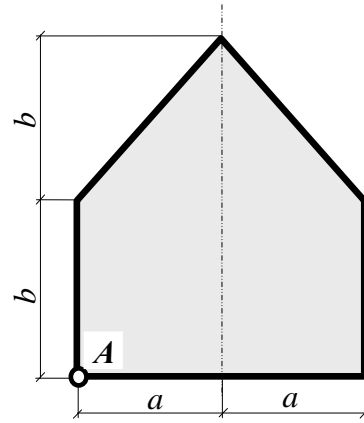
Дано:

$a = 5 \text{ см}$

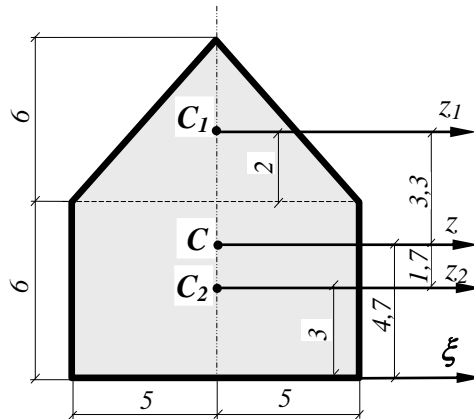
$b = 6 \text{ см}$

$[\sigma_C] = 140 \text{ МПа}$

$[\sigma_P] = 25 \text{ МПа}$

**1) Определяем главные моменты инерции**

а) Находим центр тяжести сечения (размеры в см)



$\xi_C = 0$

$$\eta_C = \frac{A_1 \eta_{1C} + A_2 \eta_{2C}}{A_1 + A_2} \quad \eta_C = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot (6+2) + 10 \cdot 6 \cdot 3}{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 + 10 \cdot 6} = 4,7 \text{ см}$$

где A_1 - площадь треугольника, A_2 - площадь прямоугольника
 η_{1C} , η_{2C} - их координаты центра тяжести.

б) Главные моменты инерции

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)}$$

$$I_z^{(1)} = I_{z1} + 2,8^2 \cdot A_1 = \frac{10 \cdot 6^3}{36} + 3,3^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 387 \text{ см}^4$$

$$I_z^{(2)} = I_{z2} + 1,7^2 \cdot A_2 = \frac{10 \cdot 6^3}{12} + 1,7^2 \cdot 10 \cdot 6 = 353 \text{ см}^4$$

$$I_z = 387 + 353 = 740 \text{ см}^4$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)}$$

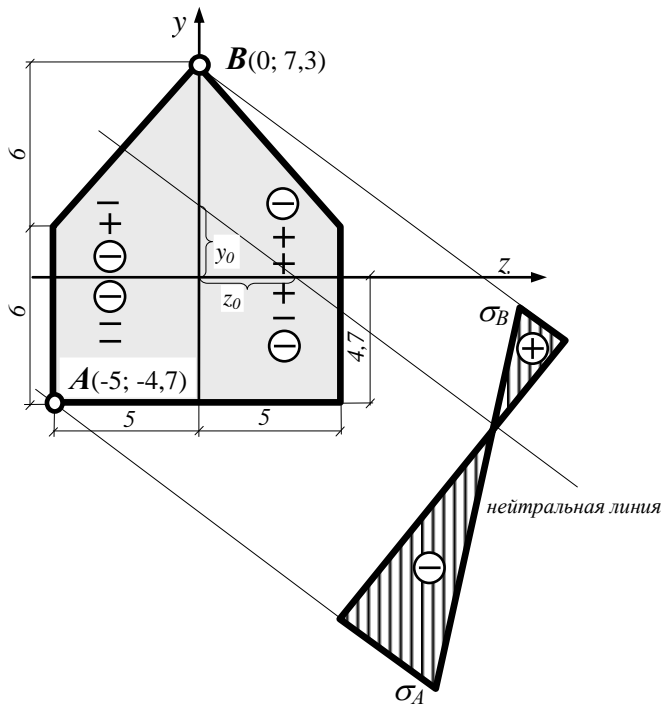
$$I_y^{(1)} = I_{y1} + 0 = \frac{6 \cdot 10^3}{48} + 0 = 125 \text{ см}^4$$

$$I_y^{(2)} = I_{y2} + 0 = \frac{6 \cdot 10^3}{12} + 0 = 500 \text{ см}^4$$

$$I_z = 125 + 500 = 625 \text{ см}^4$$

2) Напряжения в поперечном сечении.

Находим наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения. Для этого определяем положение нейтральной линии.



От изгиба относительно оси z $\sigma_x > 0$ в 1 и 2 четвертях, а в 3 и 4 $\sigma_x < 0$.

От изгиба относительно оси y $\sigma_x > 0$ в 1 и 4 четвертях, а в 2 и 3 $\sigma_x < 0$, от продольного сжатия во всех четвертях $\sigma_x < 0$ (эти знаки в кружочках).

Напряжения в любой точке сечения

$$\sigma_x = -\frac{F}{A} - \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

где $M_z = F \cdot y_p$ - изгибающий момент относительно оси z , а y_p координата

точки приложения осевой силы относительно главной оси.

$M_y = F \cdot z_p$ - изгибающий момент относительно оси y , а z_p координата

точки приложения осевой силы относительно главной оси.

Уравнение нейтральной линии получим из условия, что $\sigma_x = 0$, тогда

$$\frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = -\frac{F}{A}$$

$$\frac{z}{I_y} M_y + \frac{y}{I_z} M_z = -\frac{F}{A}$$

$$\frac{z}{I_y} F \cdot z_p + \frac{y}{I_z} F \cdot y_p = -\frac{F}{A} \quad \text{делим на } -\frac{F}{A}$$

$$-\frac{z \cdot F \cdot z_p \cdot A}{I_y \cdot F} - \frac{y \cdot F \cdot y_p \cdot A}{I_z \cdot F} = 1$$

$i_y^2 = \frac{I_y}{A}$ и $i_z^2 = \frac{I_z}{A}$ - радиусы инерции поперечного сечения

обозначим $z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p}$; $y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p}$ - отрезки отсекаемые нейтральной линией

на координатных осях z и y и уравнение нейтральной линии

$$\frac{z}{z_0} + \frac{y}{y_0} = 1$$

Учитывая исходные данные имеем

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{625}{90} = 6,94 \text{ см}^2 \quad A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 + 6 \cdot 10 = 90 \text{ см}^2$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{740}{90} = 8,22 \text{ см}^2$$

Тогда $z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{6,94}{-5} = 1,39 \text{ см}$ $y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{8,22}{-4,7} = 1,75 \text{ см}$

откладывая на осях z и y соответственно отрезки $z_0 = 1,39 \text{ см}$ и $y_0 = 1,75 \text{ см}$, получим нейтральную линию. Проведя касательные к поперечному сечению параллельно нейтральной линии, получим точки A и B , как наиболее удаленные от нейтральной линии.

Наибольшее растягивающее напряжение

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot y_p \cdot y_B}{I_z} - \frac{F \cdot z_p \cdot z_B}{I_y} = -\frac{F}{90} - \frac{F(-4,7) \cdot 7,3}{740} - \frac{F(-5) \cdot 0}{625} =$$

$$= F \left(-\frac{1}{90} + \frac{4,7 \cdot 7,3}{740} \right) = 0,035F \frac{H}{\text{см}^2} = 350 \frac{H}{\text{м}^2} = 350F \text{ Па}$$

Наибольшее сжимающее напряжение

$$\sigma_A = \left| -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot y_p \cdot y_A}{I_z} - \frac{F \cdot z_p \cdot z_A}{I_y} \right| = \left| -\frac{F}{90} - \frac{F(-4,7)(-4,7)}{740} - \frac{F(-5)(-5)}{625} \right| =$$

$$= 0,081 \cdot F \frac{H}{\text{см}^2} = 810F \frac{H}{\text{м}^2} = 810F \text{ Па}$$

3) Находим допускаемую силу из условия прочности чугуна $[\sigma_C] = 140 \text{ МПа}$
 $[\sigma_p] = 25 \text{ МПа}$

$$\sigma_A = 810[F] \leq [\sigma_C] \quad [F] \leq \frac{[\sigma_C]}{810} \leq \frac{140 \cdot 10^6}{810} \leq 172840 \text{ Н} = 172,8 \text{ кН}$$

$$\sigma_B = 350[F] \leq [\sigma_p] \quad [F] \leq \frac{[\sigma_p]}{350} \leq \frac{25 \cdot 10^6}{350} \leq 71429 \text{ Н} = 71,4 \text{ кН}$$

Принимаем допускаемую силу $[F] \leq 71,4 \text{ кН}$.

4) Построение ядра сечения

Ядром сечения называется область поперечного сечения, очерченная вокруг центра тяжести и характерная тем, что продольная сила, приложенная в этой области, вызывает во всех точках поперечного сечения напряжения одного знака. Чтобы построить ядро сечения, необходимо рассмотреть всевозможные положения касательных к контуру сечения и, предполагая, что эти касательные представляют собой нейтральные линии, найти по отношению к главным осям сечения соответствующие координаты граничных точек ядра сечения, а затем по этим точкам очертить само ядро.

Другими словами решаем обратную задачу, находим координаты точки приложения силы F при заданных отрезках, отсекаемых нейтральной линией на осях координат.

Исходя из уравнения нейтральной линии

$$\frac{z}{z_0} + \frac{y}{y_0} = 1$$

где $z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p}$; $y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p}$

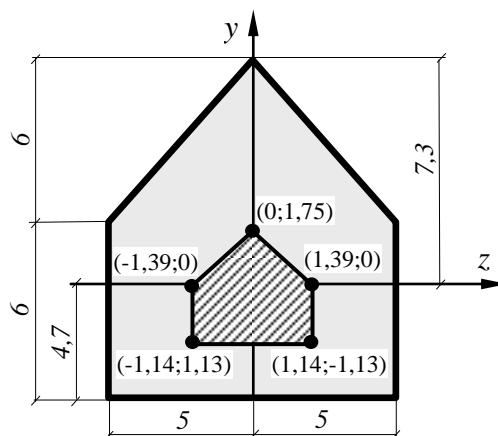
откуда координаты точки приложения силы F , определяются

$$z_p = -\frac{i_y^2}{z_0} \quad \text{и} \quad y_p = -\frac{i_z^2}{y_0}$$

Для данного примера имеем (размеры в см)

$$i_y^2 = 6,94 \text{ см}^2$$

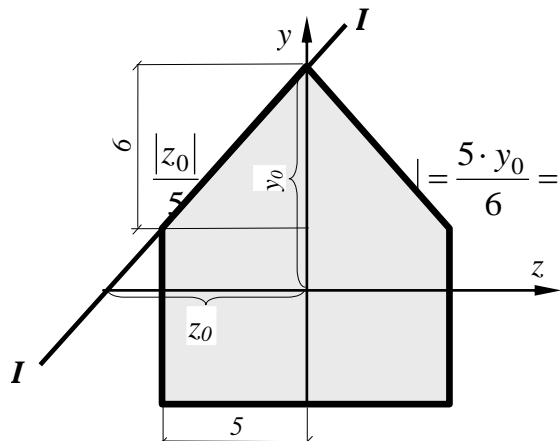
$$i_z^2 = 8,22 \text{ см}^2$$



Надо рассмотреть пять положений касательных к контуру сечения

- $y_0 = 7,3 \text{ см}$ $z_0 = -6,083 \text{ см}$ где

значение $|z_0|$ найдем из пропорции

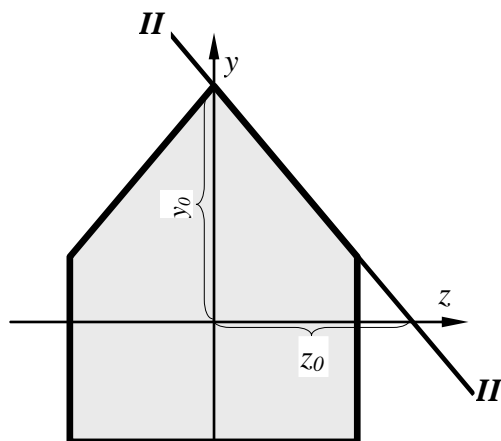


и координата $z_0 = -6,083 \text{ см}$

$$z_p = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{6,94}{-6,083} = 1,14 \text{ см}$$

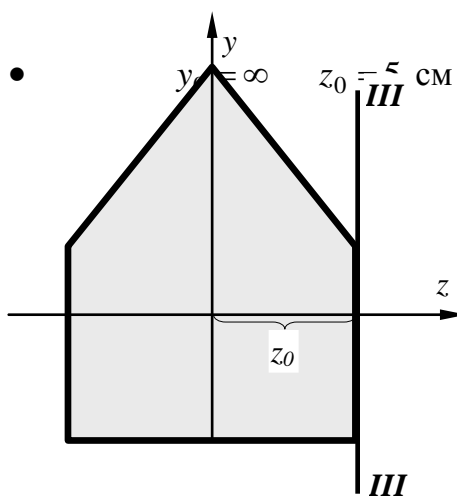
$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{8,22}{7,3} = -1,13 \text{ см}$$

- $y_0 = 7,3 \text{ см}$ $z_0 = 6,083 \text{ см}$



$$z_p = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{6,94}{6,083} = -1,14 \text{ см}$$

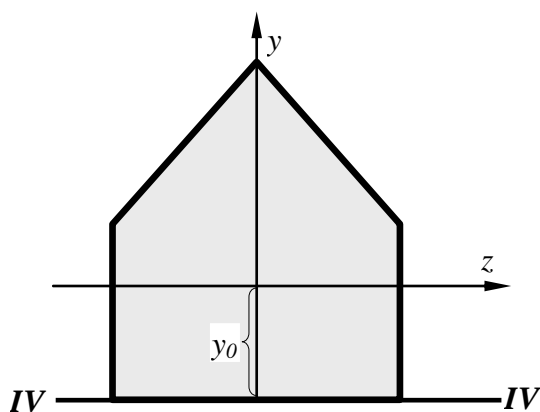
$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{8,22}{7,3} = -1,13 \text{ см}$$



$$z_p = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{6,94}{5} = -1,39 \text{ см}$$

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{8,22}{\infty} = 0$$

- $y_0 = -4,7 \text{ см}$ $z_0 = \infty$

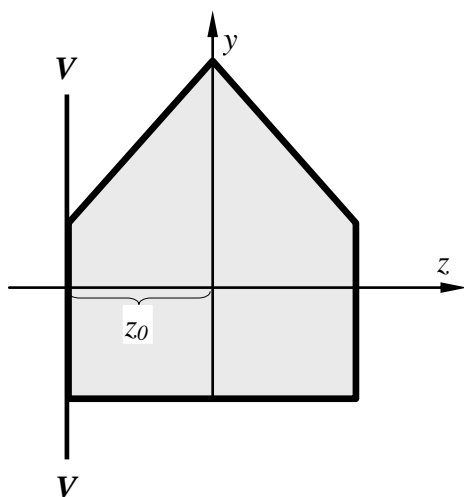


$$z_p = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{6,94}{\infty} = 0$$

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{8,22}{-4,7} = 1,75 \text{ см}$$

Ядро сечения имеет очертания пятиугольника, также как и очертание контура поперечного сечения.

- $y_0 = \infty$ $z_0 = -5 \text{ см}$

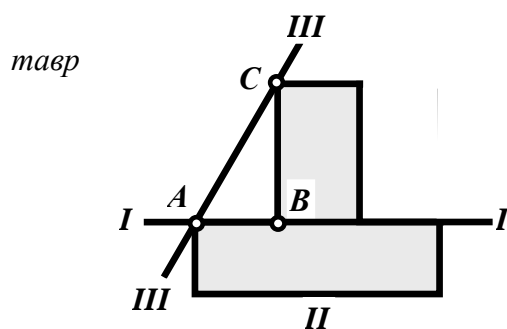


$$z_p = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{6,94}{-5} = 1,39 \text{ см}$$

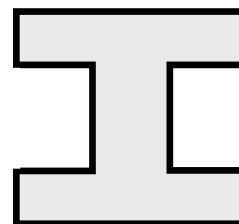
$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{8,22}{\infty} = 0$$

NB! Если поперечное сечение имеет оси симметрии, то и ядро сечения симметрично и можно определять меньшее число его вершин.

В случае, если контур поперечного сечения имеет внутренние углы.



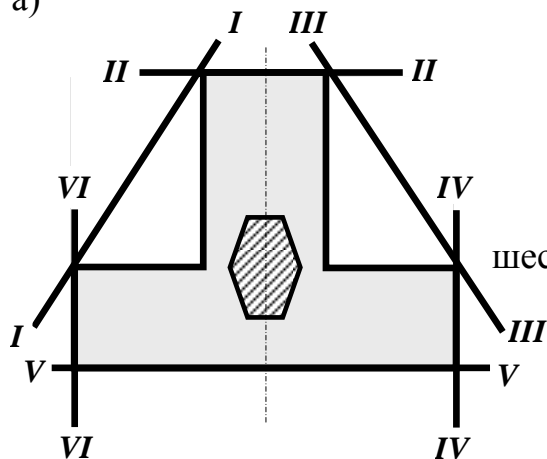
двутавр



то число сторон у ядра сечения не совпадает с числом сторон у самого сечения. Это объясняется тем, что нейтральную линию нельзя совместить с ребром AB и BC , так как в этом случае она не будет касательной к контуру сечения, а будет его пересекать. Поэтому надо проводить нейтральную линию через A и B ($III-III$).

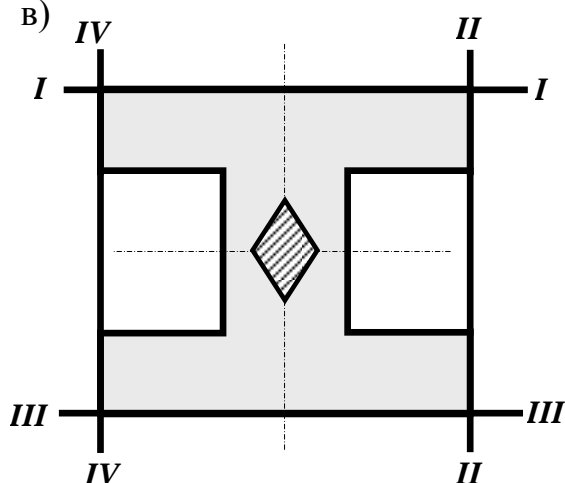
Рекомендации при построении ядра сечения в таких случаях:

а)



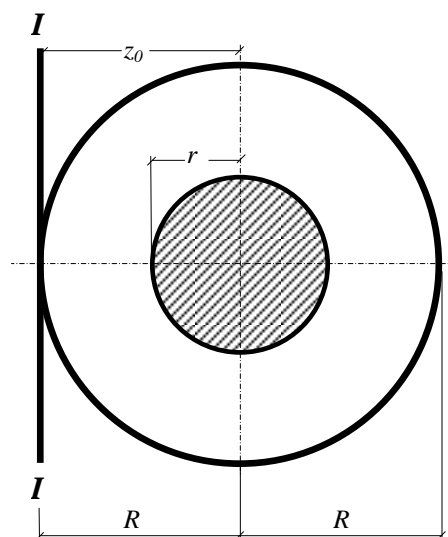
ядро сечения имеет вид шестиугольника

б)



ядро сечения имеет вид ромба

в) круг симметричен относительно центра, поэтому достаточно рассмотреть любое положение касательной и ядро сечения будет иметь вид круга с радиусом r .



$$z_0 = -R = -\frac{d}{2}$$

$$r = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{I_y}{A \cdot z_0} = -\frac{\pi \cdot d^4 \cdot 4}{64 \cdot \pi \cdot d^2 \cdot z_0} = -\frac{d^2}{16 \cdot \left(-\frac{d}{2}\right)} = \frac{d}{8}$$

11. Изгиб с кручением

Работа 12

Шкив с диаметром D_1 и с углом наклона ветвей ремня к горизонту α_1 делает n оборотов в минуту и передает мощность P кВт (см. рисунок). Два других шкива имеют одинаковый диаметр D_2 и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту α_2 и каждый из них передает мощность $P/2$. Требуется :

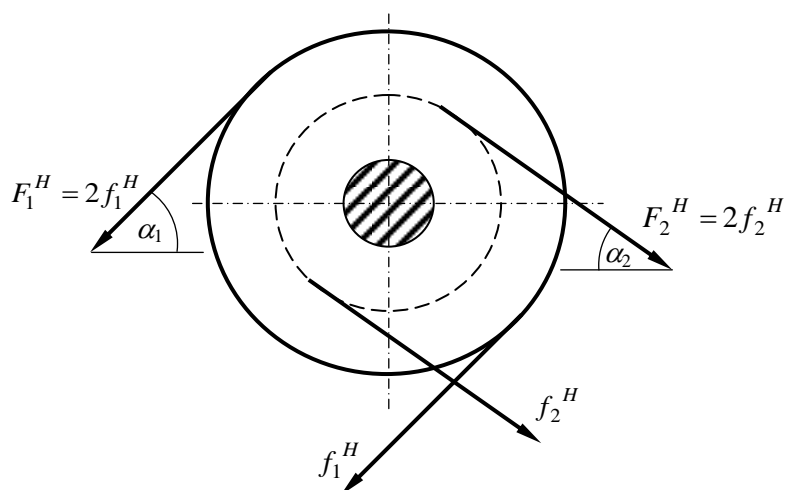
- 1) определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным P и n ;
- 2) определить окружные усилия F_1^H и F_2^H , действующие на шкивы, по найденным моментам и заданным диаметрам шкивов D_1 и D_2 ;
- 3) определить давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям;
- 4) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);
- 5) построить эпюру крутящих моментов – T ;
- 6) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил M_y и от вертикальных сил M_z ;
- 7) построить эпюру суммарных изгибающих моментов $M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$ (для каждого поперечного сечения имеется своя плоскость действия суммарного изгибающего момента; но для круглого сечения можно совместить плоскости изгибающих моментов для всех поперечных сечений и построить суммарную эпюру в плоскости чертежа; при построении эпюры надо учесть, что для некоторых участков вала она не будет прямолинейной);
- 8) по эпюрам крутящих моментов T и изгибающим моментам найти опасное сечение и определить наибольший расчетный момент по третьей теории прочности;
- 9) подобрать диаметр вала d при $[\sigma] = 70$ МПа и округлить его значение до ближайшего равного: 30, 45, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм.

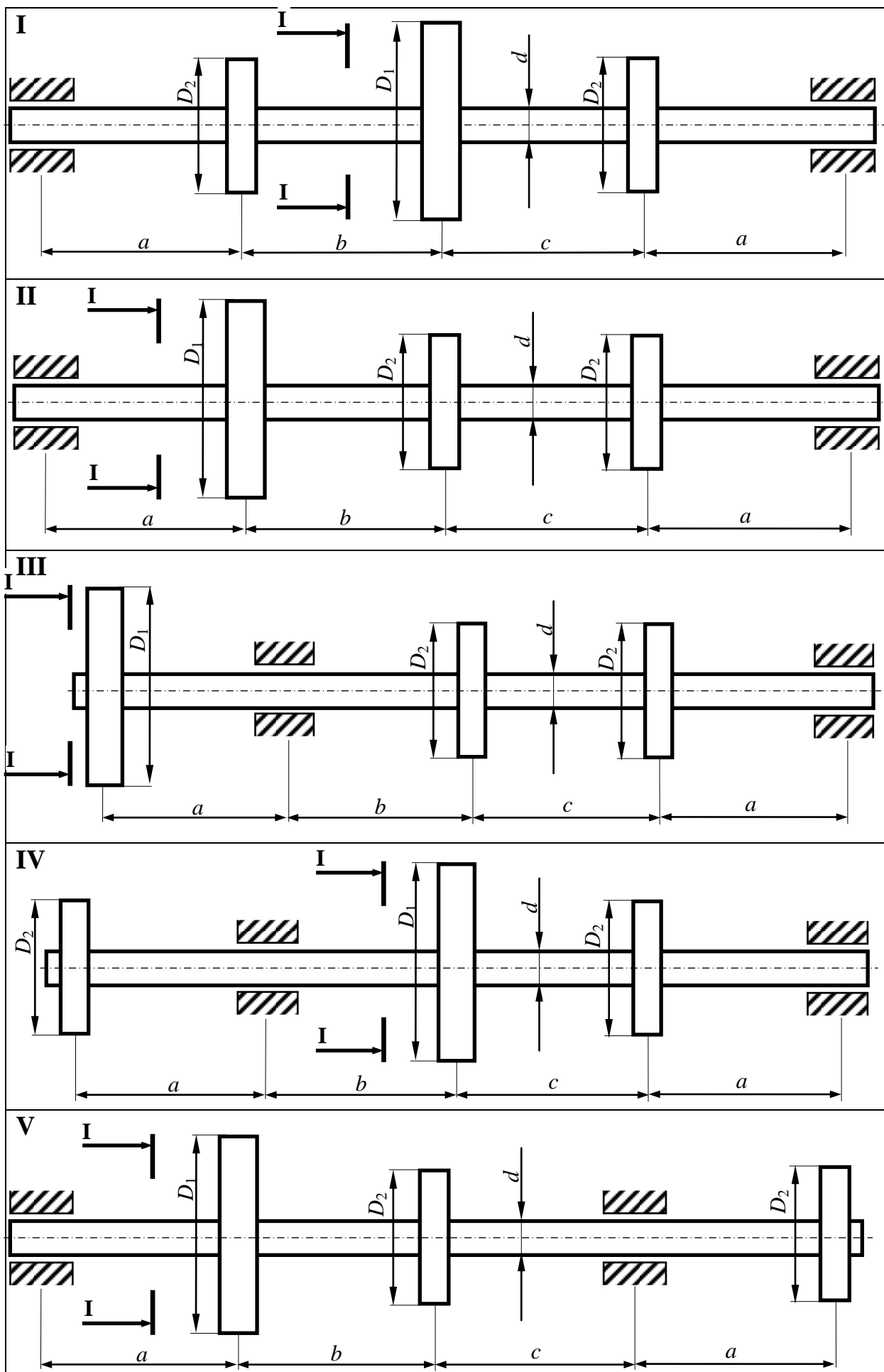
Данные взять из таблицы 12.

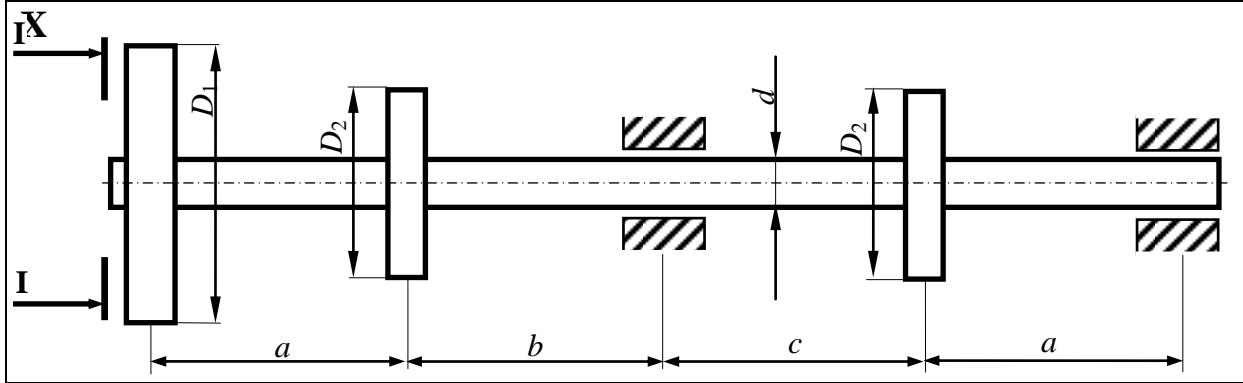
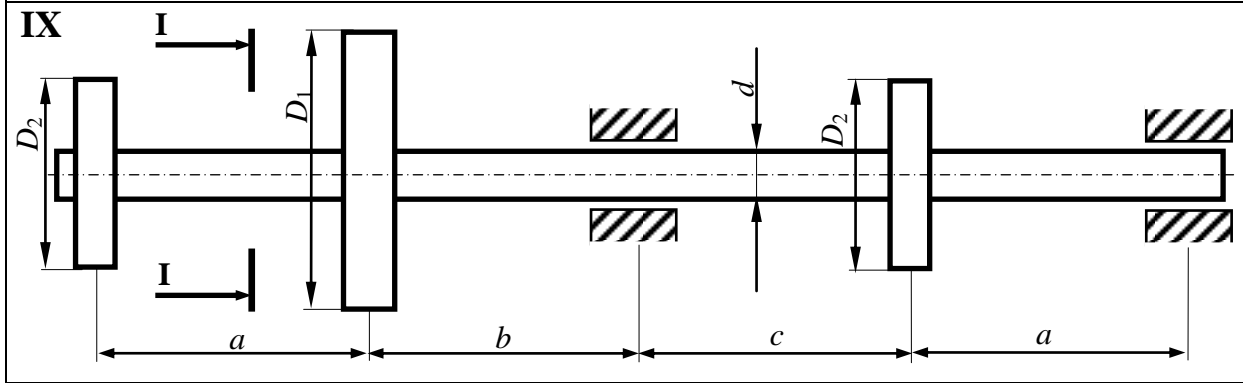
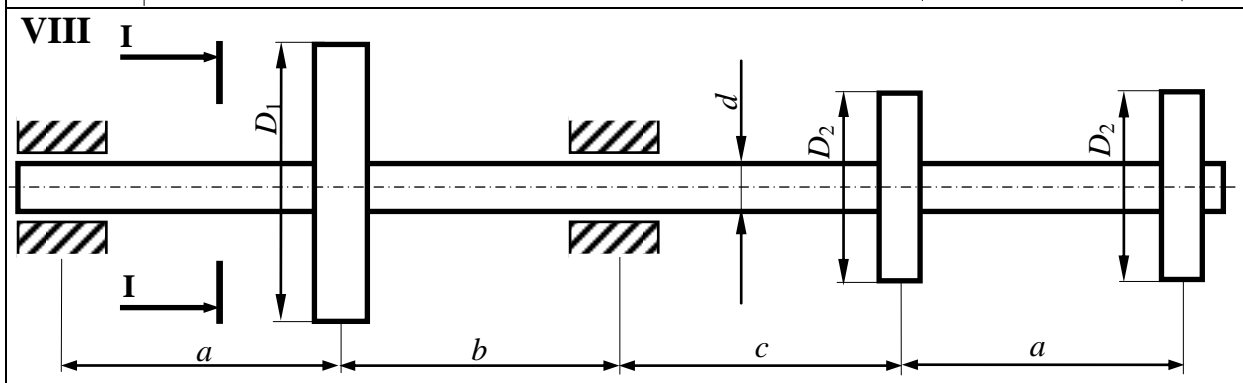
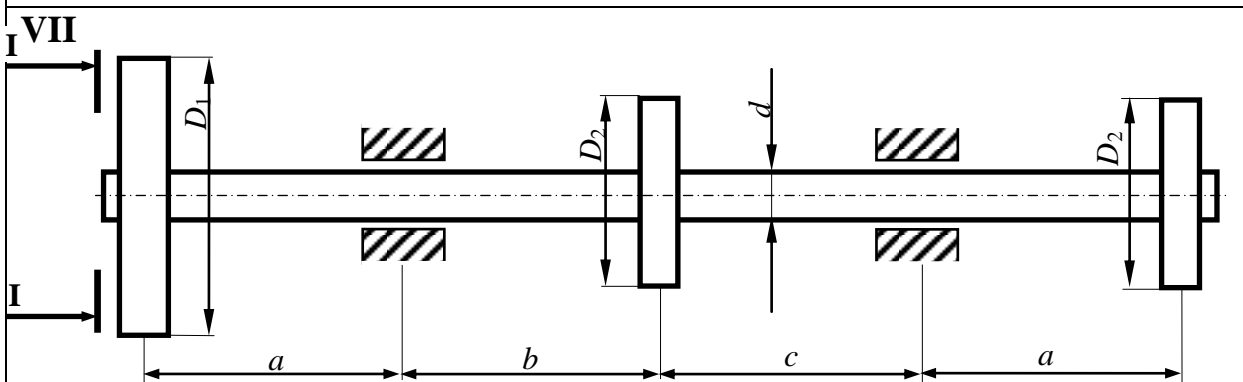
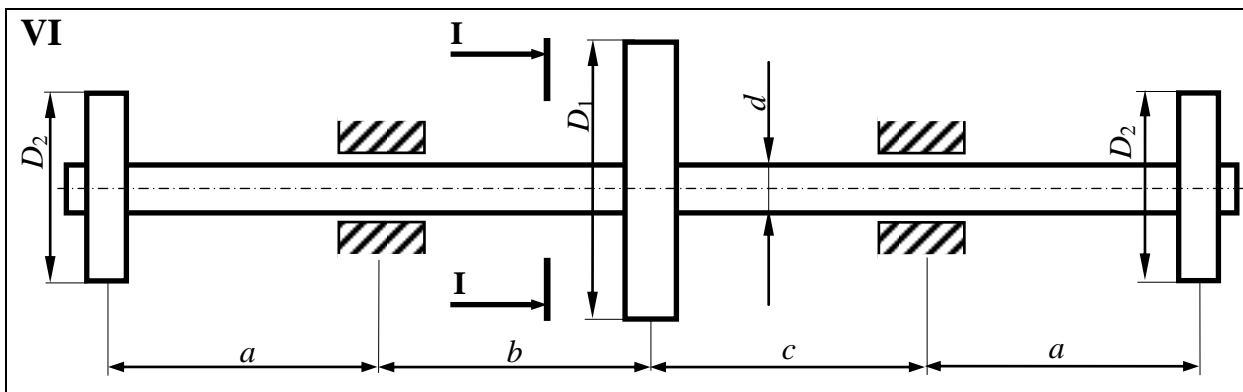
Таблица 12

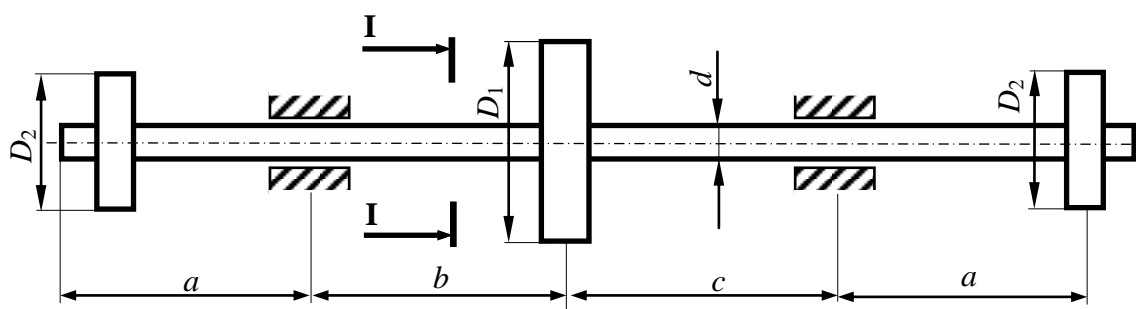
Схема по рис. 1. Последняя цифра Матрикула	Исходные данные. Предпоследняя цифра матрикула	P , кВт	n , грт	a	b	c	D_1	D_2	α_1	α_2
				m						
I	1	10	100	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0	10	10
II	2	20	200	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1	20	20
III	3	30	300	1,3	1,3	1,3	1,3	1,2	30	30
IV	4	40	400	1,4	1,4	1,4	1,4	1,3	40	40
V	5	50	500	1,5	1,5	1,5	1,5	1,4	50	50
VI	6	60	600	1,6	1,6	1,6	0,6	0,5	60	60
VII	7	70	700	1,7	1,7	1,7	0,7	0,6	70	70
VIII	8	80	800	1,8	1,8	1,8	0,8	0,7	80	80
IX	9	90	900	1,9	1,9	1,9	0,9	0,8	90	90
X	0	100	1000	1,0	1,0	1,0	1,0	0,9	0	0

Сечение I-I

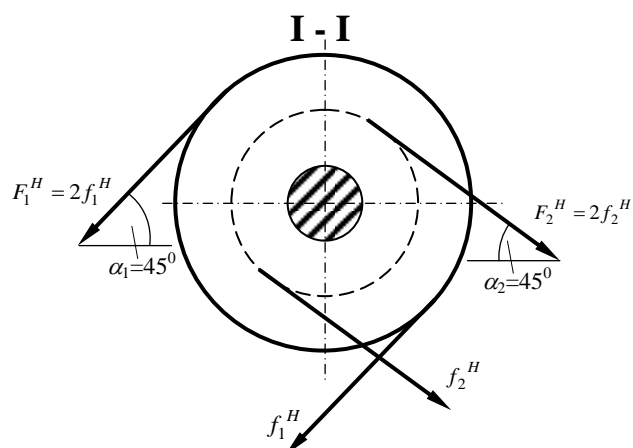






Пример решения:

$$\begin{aligned}
 P &= 157 \text{ kW} \\
 n &= 600 \text{ rpm} \\
 a &= b = c = 0,6 \text{ m} \\
 D_1 &= 2 \text{ m} \\
 D_2 &= 1,25 \text{ m} \\
 \alpha_1 &= \alpha_2 = 45^\circ
 \end{aligned}$$

**1. моменты приложенные к шкивам**

$$M_1 = \frac{P_1}{\omega_1} = \frac{30P_1}{\pi n_1} = \frac{30 \cdot 157 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 600} = 2500 \text{ Н}\cdot\text{м} = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$M_2 = \frac{P_2}{\omega_1} = \frac{30P_2}{\pi n_1} = \frac{30 \cdot 0,5 \cdot 157 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 600} = 1250 \text{ Н}\cdot\text{м} = 1,25 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

PS!

Зависимость между натяжениями ведущей и ведомой нити определяется по формуле Эйлера

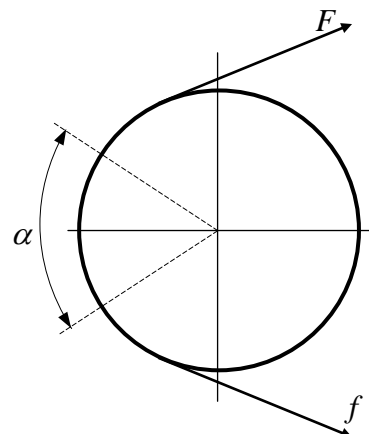
$$F = fl^{\mu\alpha}$$

где μ - коэффициент трения между ремнем и шкивом;
 α - угол обхвата шкива ремнем в рад;
 $l = 2,71$ - основание натурального логарифма.

Если $\alpha = 180^\circ$, $f = 0,2$ имеем

$$F = fl^{\frac{0,2 \cdot 180^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ}} = fl^{0,2\pi} = 1,87 f$$

Если $\alpha = 180^\circ$, $f = 0,25$ имеем



$$F = fl^{0,25\pi} = 2,19 f$$

если $\alpha = 180^\circ$, $f = 0,3$ имеем

$$F = fl^{0,3} = 2,57 f \text{ и т.д.}$$

В случае цепной передачи натяжение ведомой нити равняется ≈ 0 .

2. окружные усилия (натяжения в ветвях ремней)

$$M_1 = F_1^H \cdot \frac{D_1}{2} - f_1^H \cdot \frac{D_1}{2} = \frac{D_1}{2} (F_1^H - f_1^H) = \frac{D_1}{2} (2f_1^H - f_1^H) = \frac{D_1 f_1^H}{2}$$

$$M_2 = F_2^H \cdot \frac{D_2}{2} - f_2^H \cdot \frac{D_2}{2} = \frac{D_2}{2} (F_2^H - f_2^H) = \frac{D_2}{2} (2f_2^H - f_2^H) = \frac{D_2 f_2^H}{2}$$

откуда

$$f_1^H = \frac{2M_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 2500}{2} = 2500 \text{ Н} = 2,5 \text{ кН}$$

$$f_2^H = \frac{2M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 1250}{1,25} = 2000 \text{ Н} = 2,0 \text{ кН}$$

$$F_1^H = 2f_1^H = 2 \cdot 2,5 = 5,0 \text{ кН}, \quad F_2^H = 2f_2^H = 2 \cdot 2,0 = 4,0 \text{ кН.}$$

3. давление на вал от натяжения ремней равняется:

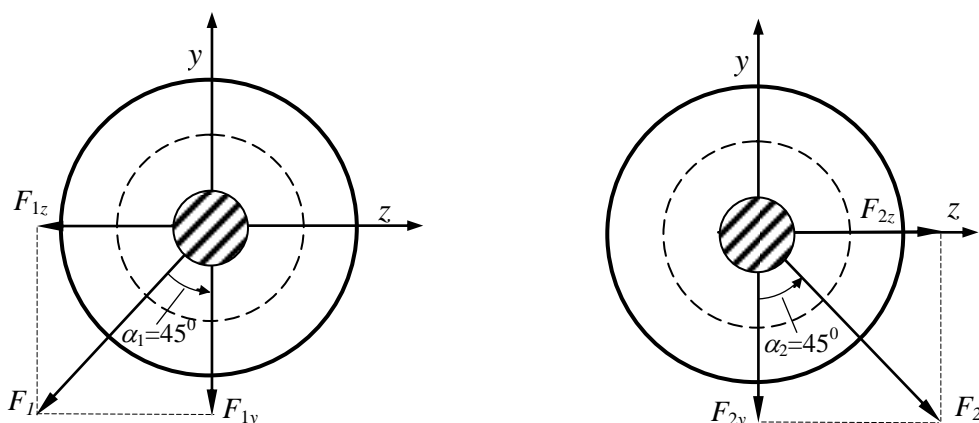
а) в сечении расположения шкива D_1

$$F_1 = F_1^H + f_1^H = 5,0 + 2,5 = 7,5 \text{ кН}$$

б) в сечении расположения шкива D_2

$$F_2 = F_2^H + f_2^H = 4,0 + 2,0 = 6,0 \text{ кН}$$

4. силы, изгибающие вал соответственно в вертикальной и горизонтальной плоскости



найдем

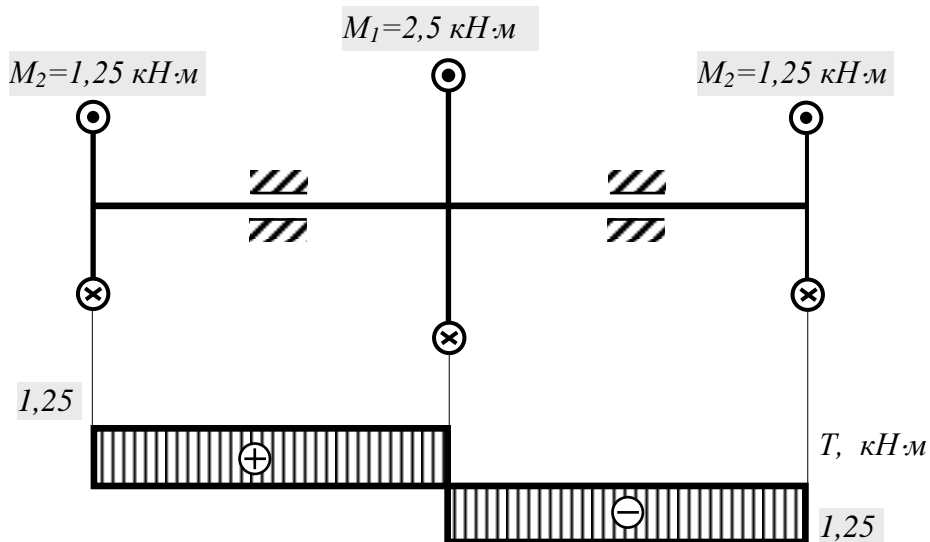
$$F_{1z} = F_1 \sin \alpha_1 = F_1 \cdot \sin 45^\circ = 7,5 \cdot 0,707 = 5,3 \text{ кН}$$

$$F_{1y} = F_1 \cos \alpha_1 = F_1 \cdot \cos 45^\circ = 7,5 \cdot 0,707 = 5,3 \text{ кН}$$

$$F_{2z} = F_2 \sin \alpha_2 = F_2 \cdot \sin 45^\circ = 6,0 \cdot 0,707 = 4,2 \text{ кН}$$

$$F_{2y} = F_2 \cos \alpha_2 = F_2 \cdot \cos 45^\circ = 6,0 \cdot 0,707 = 4,2 \text{ кН}$$

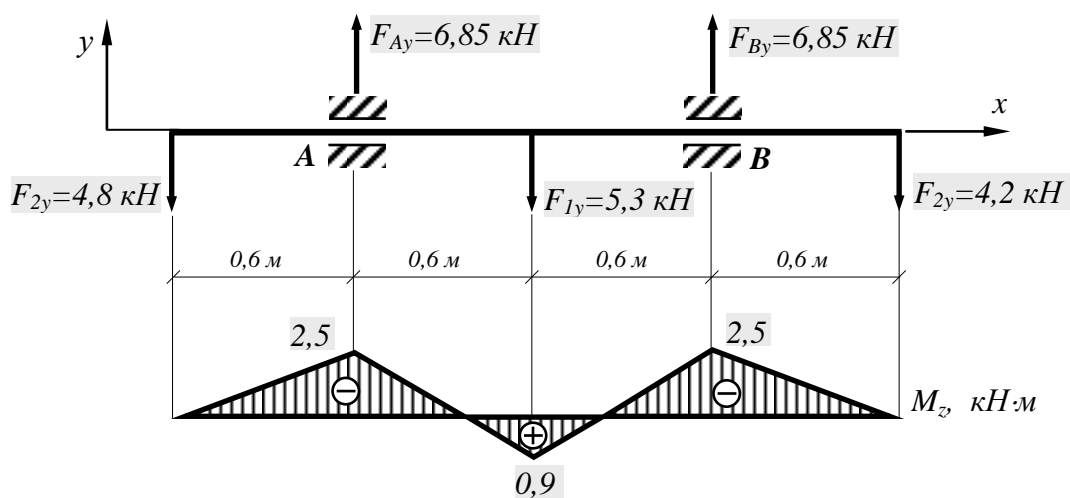
5. эюра крутящих моментов



PS! Знаки для крутящих моментов принципиального значения не имеют, поэтому на эюре их можно не показывать.

6. эюры изгибающих моментов

а) вертикальная плоскость



Реакции в вертикальной плоскости

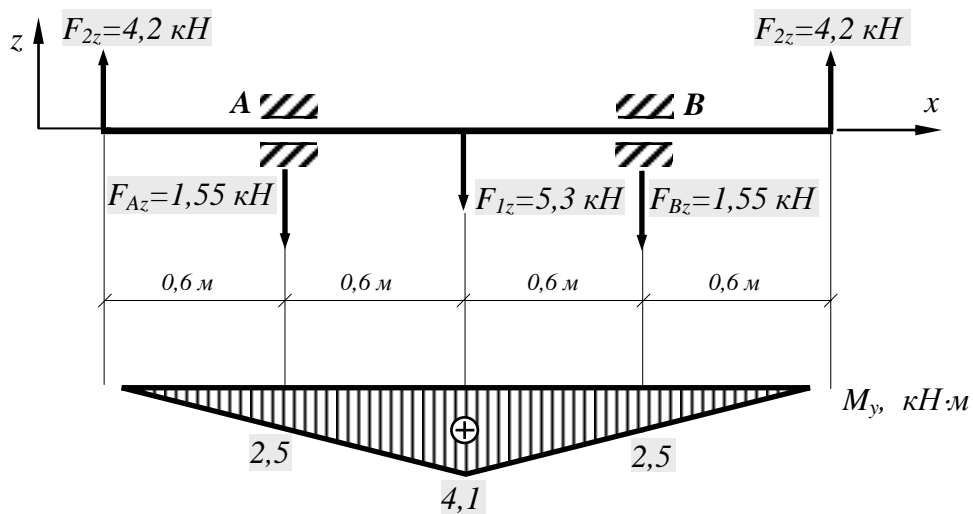
$$\sum M_A = 0 \quad F_{2y} \cdot 0,6 - F_{1y} \cdot 0,6 + F_{By} \cdot 1,2 - F_{2y} \cdot 1,8 = 0$$

$$F_{By} = \frac{F_{2y} \cdot 1,8 + F_{1y} \cdot 0,6 - F_{2y} \cdot 0,6}{1,2} = \frac{4,2 \cdot 1,8 + 5,3 \cdot 0,6 - 4,2 \cdot 0,6}{1,2} = 6,85 \text{ кН}$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad -F_{2y} + F_{Ay} - F_{1y} + F_{By} - F_{2y} = 0$$

$$F_{Ay} = F_{2y} + F_{1y} + F_{2y} - F_{By} = 4,2 + 5,3 + 4,2 - 6,85 = 6,85 \text{ кН}$$

б) горизонтальная плоскость



Реакции в горизонтальной плоскости

$$\sum M_A = 0 \quad -F_{2z} \cdot 0,6 - F_{1z} \cdot 0,6 - F_{Bz} \cdot 1,2 + F_{2z} \cdot 1,8 = 0$$

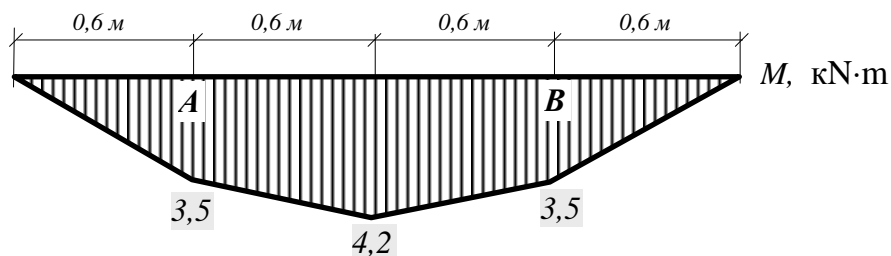
$$F_{Bz} = \frac{F_{2z} \cdot 1,8 - F_{2z} \cdot 0,6 - F_{1z} \cdot 0,6}{1,2} = \frac{4,2 \cdot 1,8 - 4,2 \cdot 0,6 - 5,3 \cdot 0,6}{1,2} = 1,55 \text{ кН}$$

$$\sum F_{kz} = 0 \quad F_{2z} - F_{Az} - F_{1z} - F_{Bz} + F_{2z} = 0$$

$$F_{Az} = F_{2z} - F_{1z} - F_{Bz} + F_{2z} = 4,2 - 5,3 - 1,55 + 4,2 = 1,55 \text{ кН}$$

7. суммарная эпюра изгибающих моментов

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$



8. по эюрам T и M наибольший расчетный момент по третьей теории прочности будет в сечении расположения шкива D_1

$$M_p^{III} = \sqrt{M^2 + T^2} = \sqrt{4,2^2 + 1,25^2} = 4,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

9. диаметр вала из условия прочности

$$\sigma_3^{III} = \frac{M_p^{III}}{W_z} \leq [\sigma]$$

$$W_z \geq \frac{M_p^{III}}{[\sigma]} \geq \frac{4,4 \cdot 10^3}{70 \cdot 10^6} = 63 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

учитывая, что $W_z = 0,1d^3$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{63 \cdot 10^{-6}}{0,1}} = 8,6 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 86 \text{ мм}$$

12. Пространственные стержни с ломанной осью

Работа 13

На рисунке (рис.13) изображена в аксонометрии ось ломанного стержня круглого поперечного сечения, расположенная в горизонтальной плоскости и имеющая прямые углы в точках A и B . На стержень действует вертикальная нагрузка.

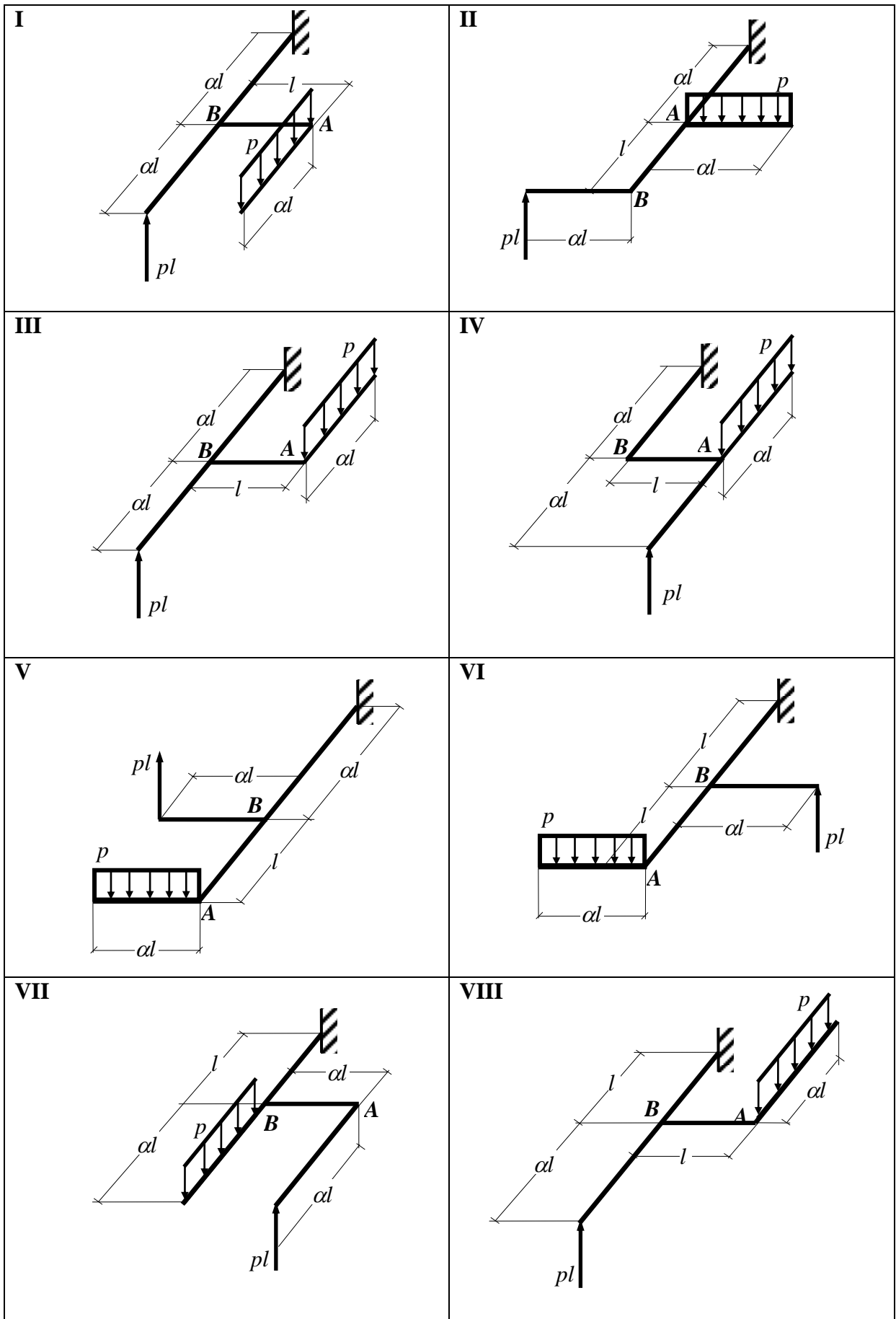
Требуется:

- 1) построить отдельно (в аксонометрии эпюры изгибающих и крутящих моментов);
- 2) установить опасное сечение и найти для него расчетный момент по IV теории прочности;
- 3) найти диаметр стержня из условия прочности, если $[\sigma] = 120$ МПа.

Данные взять из таблицы 13.

Таблица 13

Схема рисунка по последней цифре матрикула	Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	α	l , м	P , кН /м
I	1	1,1	1,0	2,0
II	2	1,2	0,9	1,8
III	3	1,3	0,8	1,6
IV	4	1,4	0,7	1,4
V	5	1,5	0,6	1,2
VI	6	0,6	1,0	1,8
VII	7	0,7	0,9	1,6
VIII	8	0,8	0,8	1,4
IX	9	0,9	0,7	1,2
X	0	1,0	0,6	1,0



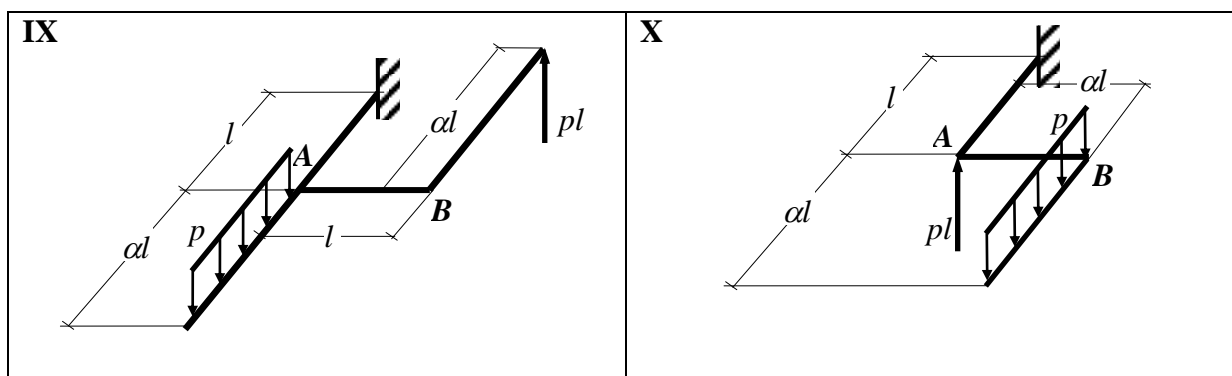
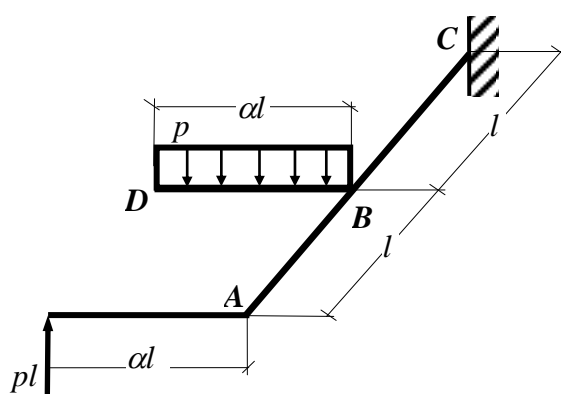


Рис.13

Пример решения:

$$\begin{aligned}
 p &= 4 \text{ кН/м} \\
 l &= 0,5 \text{ м} \\
 \alpha &= 1,0 \\
 [\sigma] &= 120 \text{ МПа}
 \end{aligned}$$

1. Построение эпюр изгибающих и крутящих моментов

В точке A изгибающий момент

$$M_a = pl \cdot \alpha l = 4 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 0,5 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Изгибающий момент в точке B на участке BD действия распределенной нагрузки

$$M_B = \frac{p \cdot (\alpha l)^2}{2} = \frac{4 \cdot (1 \cdot 0,5)^2}{2} = 0,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Для облегчения построения эпюр на участке AC можно использовать приведение сил к данному центру.

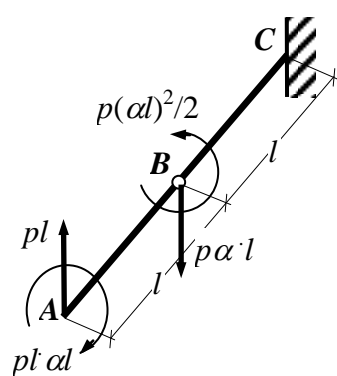
Тогда в точке A будет действовать вертикальная сила pl изгибающая стержень AC и момент $pl \alpha l$, вызывающий кручение стержня AC . А в точке B – вертикальная сила $p \alpha l$ и момент $p(\alpha l)^2$ вызывающий кручение стержня BC можно представить AC после приведения сил в точки A и B следующим образом:

для участка AB

$$M_B = pl \cdot l = 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$M_C = pl \cdot 2l - pl \cdot l \cdot l = 4 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 0,5 - 4 \cdot 1 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Крутящий момент на участке AB

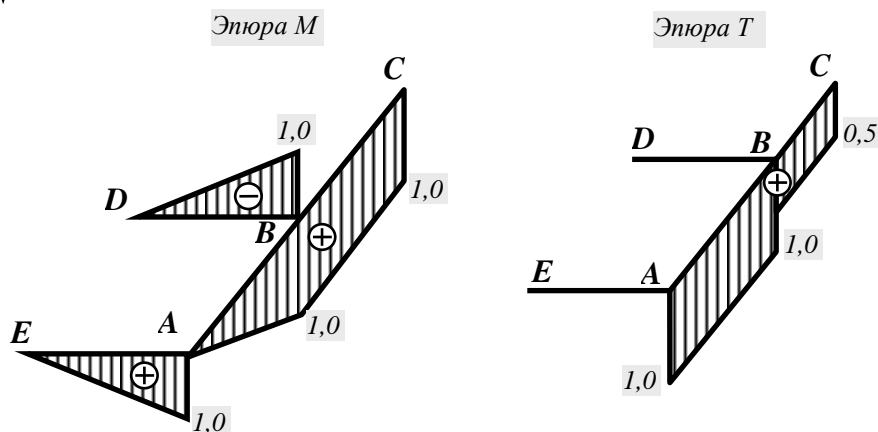


$$T_A = pl \cdot \alpha l = 4 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 0,5 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

на участке BC

$$T_B = T_A - \frac{p(\alpha l)^2}{2} = 1 - \frac{4(1 \cdot 0,5)^2}{2} = 0,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Окончательно эпюры M и T в аксонометрии выглядят



Знак на эпюре T не имеет принципиального значения.

2. Опасное сечение будет на участке AB в точке B.

Расчетный момент по IV теории прочности

$$M_p^{IV} = \sqrt{M^2 + 0,75T^2} = \sqrt{1^2 + 0,75 \cdot 1^2} = 1,32 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

3. Диаметр из условия прочности

$$\frac{M_p^{IV}}{W_z} \leq [\sigma] \quad W_z \geq \frac{M_p^{IV}}{[\sigma]} \geq \frac{1,32 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6} = 11 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

Учитывая, что момент сопротивления $W_z = 0,1d^3$ имеем

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{11 \cdot 10^{-6}}{0,1}} \geq 4,8 \cdot 10^{-2} \geq 48 \text{ мм} \quad \text{округляя } d = 50 \text{ мм}$$

При расчете по III теории прочности расчетный момент

$$M_p^{III} = \sqrt{M^2 + T^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = 1,41 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$W_z \geq \frac{1,41 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6} \geq 11,78 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{11,78 \cdot 10^{-6}}{0,1}} \geq 4,82 \cdot 10^{-2} \text{ м} \geq 48,2 \text{ мм}$$

Результат почти не отличается от результата по IV теории прочности.

Расчеты по обеим теориям дают достаточно близкие друг к другу результаты.

13. Статически неопределимые системы

Работа 14

Для балки изображенной на рисунке (рис.14) требуется:

- 1) найти изгибающий момент на левой опоре (в долях pl^2);
- 2) построить эпюры Q_y и M_z ;
- 3) построить эпюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две на консоли.

Данные взять из таблицы 14.

Таблица 14

<i>Схема рис. по последней цифре матрикула</i>	<i>Исходные данные по предпоследней цифре матрикула</i>	α	β
I	1	0,1	0,1
II	2	0,2	0,2
III	3	0,3	0,3
IV	4	0,4	0,4
V	5	0,5	0,5
VI	6	0,6	0,6
VII	7	0,7	0,7
VIII	8	0,8	0,8
IX	9	0,9	0,9
X	0	1,0	1,0

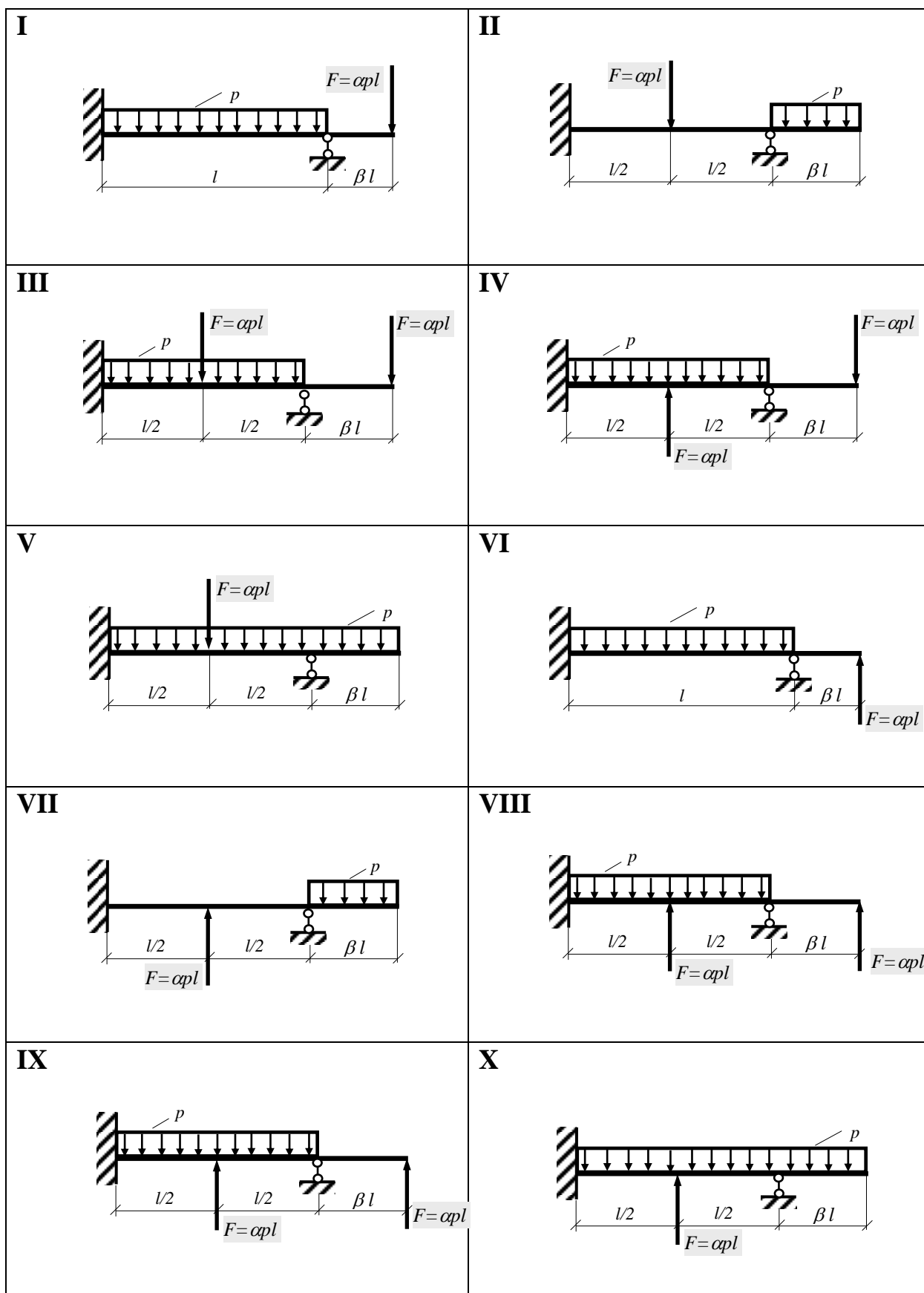
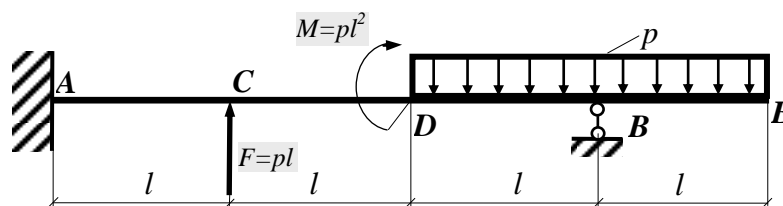
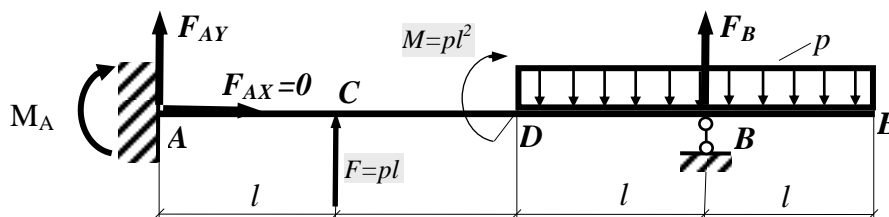


Рис.14

Пример решения:**Определение степени статической неопределимости системы**

Имеем четыре неизвестные реакции опор (три в жесткой заделке А и одну в шарнирно-подвижной опоре). В данном случае силы расположены в одной плоскости, для которой можно составить только три уравнения равновесия (уравнения статики). Поэтому система является один раз статически неопределимой.

Составление “основной системы” метода сил

Выбираем основную систему путем замены жесткой заделки на опоре А шарнирно-неподвижной опорой и неизвестным моментом M_A . Уравнение совместимости деформаций (уравнение метода сил) имеет вид

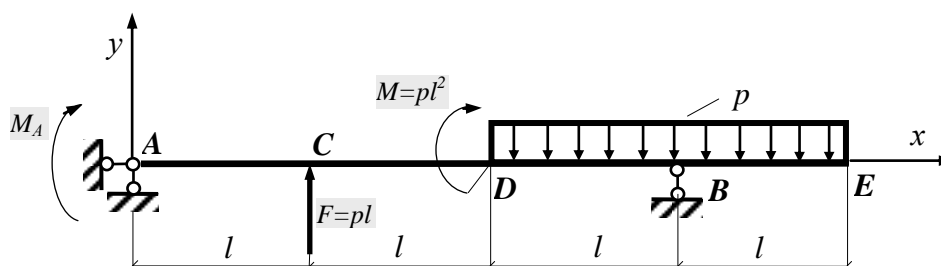
$$\delta_{11}M_A + \Delta_{1p} = 0,$$

которое физически выражает условие, что суммарный угол поворота на левой опоре от заданной нагрузки и от опорного момента M_A равен нулю.

Где δ_{11} - единичное перемещение в точке приложения неизвестного момента M_A ; Δ_{1p} - перемещение в той же точке А от заданной нагрузки.

Определение перемещений можно выполнить или по формуле Мора или с помощью универсального уравнения изогнутой оси балки (уравнение метода начальных параметров).

“Основная система”, эквивалентная статически заданной



1. Определение опорного момента M_A

Из уравнения совместности деформаций

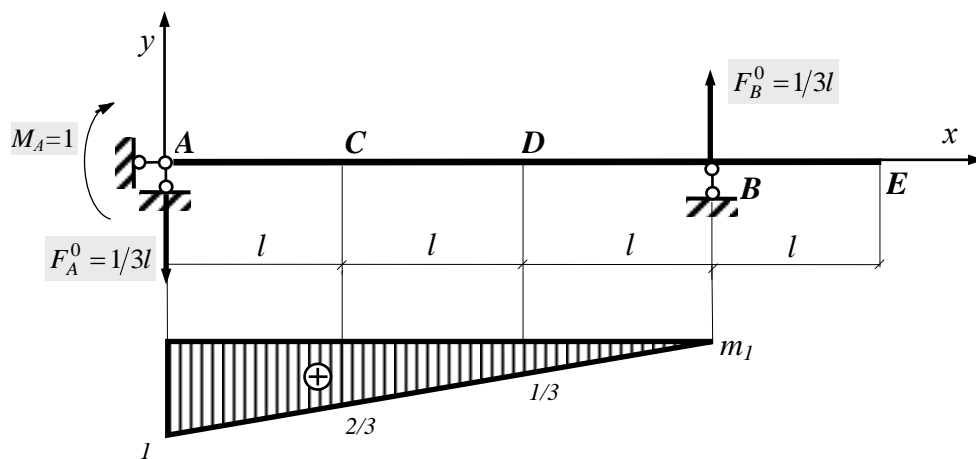
$$M_A = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}$$

1.1. Определение перемещений по формуле Мора

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{m_1 m_1}{EI_z} dx, \quad \Delta_{1p} = \sum \int_0^l \frac{m_1 M_p}{EI_z} dx,$$

где m_1 – единичная эпюра от единого момента, приложенного в точке А;
 M_p – грузовая эпюра от заданной нагрузки.

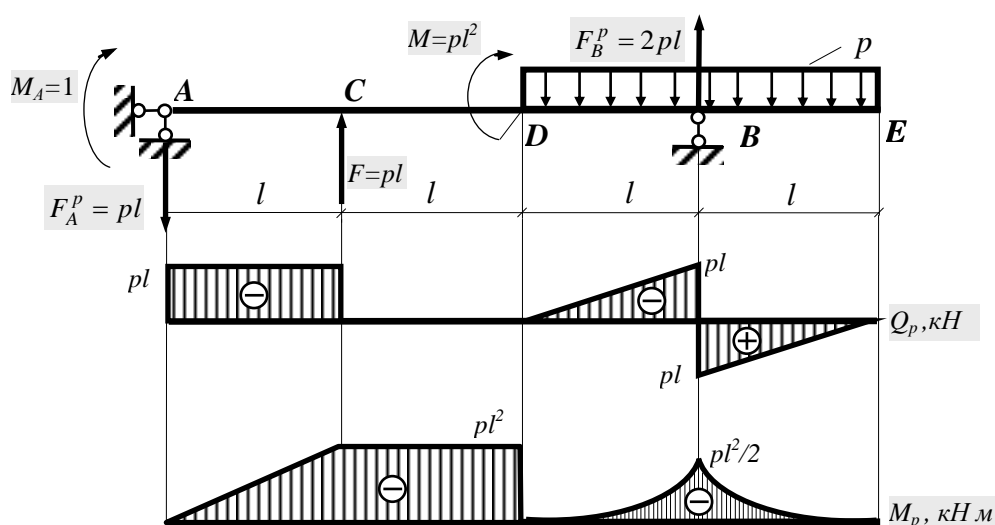
Единичная эпюра m_1



Реакции опор F_A^0 и F_B^0 образуют пару сил, момент которой равен единичному моменту $M_A = 1$. Откуда

$$F_A^0 = F_B^0 = \frac{M_A}{3l} = \frac{1}{3l}$$

Грузовая эюра M_p



Реакции опор F_A^p и F_B^p находим из уравнений равновесия

$$\sum M_A = 0 \quad pl \cdot l - pl^2 + F_B^p \cdot 3l - p \cdot 2l \cdot 3l = 0$$

$$F_B^p = \frac{6pl^2}{3l} = 2pl$$

$$\sum M_B = 0 \quad -F_A^p \cdot 3l - pl \cdot 2l - pl^2 = 0$$

$$F_A^p = \frac{-2pl^2 - pl^2}{3l} = -pl$$

Значения изгибающих моментов M_p

точка A $M_p = 0$

точка C $M_p = -pl \cdot l = -pl^2$

точка D_- $M_p = -pl \cdot 2l + pl \cdot l = -pl^2$

D_+ $M_p = -pl^2 + pl^2 = 0$

точка B $M_p = -pl \cdot 3l + pl \cdot 2l + pl^2 - \frac{pl^2}{2} = -\frac{pl^2}{2}$

Проверка в точке E , где $M_p = 0$ (свободный конец балки)

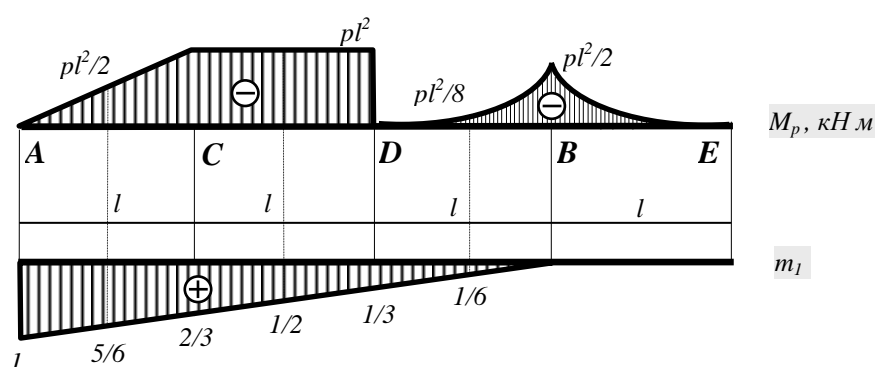
$$M_p = -pl \cdot 4l + pl \cdot 3l + pl^2 - \frac{p(2l)^2}{2} + 2pl \cdot l = -4pl^2 + 3pl^2 + pl^2 - 2pl^2 + 2pl^2 = 0$$

Решение интегралов Мора можно выполнить способом Симпсона, для этого надо знать значения моментов на каждом участке интегрирования: в начале, в середине и в конце.

Значения в серединах участков интегрирования для грузовой эюры M_p

участок	AC	$-\frac{pl^2}{2}$
участок	CD	$-pl^2 = const$
участок	DB	$-\frac{1}{2} \cdot \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{pl^2}{8}$

Значение момента M_p в середине участка DB можно вычислить через площадь эюры Q_p : а именно $M_p(DB/2) = M_D + \omega(Q_p) = 0 + (-\frac{1}{2} \cdot \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{2}) = -\frac{pl^2}{8}$, где M_D - начальное значение момента на участке DB , а $\omega(Q_p)$ площадь эюры Q_p на участке от точки D до середины участка. Для удобства "перемножения эюр" по Симпсону приводятся совмещенные одна под другой эюры m_1 и M_p .



"Перемноженная эюры" имеем

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{l}{6EI_z} \left[1^2 + 4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] + \frac{l}{6EI} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right] + \frac{l}{6EI} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 0 \right] = \\ &= \frac{l}{6EI_z} \left[1 + 4 \cdot \frac{100}{36} + \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{36} \right] = \frac{l}{6 \cdot 36 \cdot EI_z} (36 + 100 + 16 + 16 + 36 + 4 + 4 + 4) = \\ &= \frac{216l}{6 \cdot 36 EI_z} = \frac{l}{EI_z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= -\frac{l}{6EI_z} \left[\left(0 + 4 \cdot \frac{pl^2}{2} \cdot \frac{5}{6} + pl^2 \cdot \frac{2}{3} \right) + \left(pl^2 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot pl^2 \cdot \frac{1}{2} + pl^2 \cdot \frac{1}{3} \right) + \left(0 + 4 \cdot \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{1}{6} + 0 \right) \right] = \\ &= -\frac{pl^3}{6EI_z} \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) = -\frac{pl^3}{6 \cdot 12 \cdot EI_z} (20 + 8 + 8 + 24 + 4 + 1) = -\frac{65pl^3}{6 \cdot 12 \cdot EI_z} \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } M_A = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = +\frac{65pl^3 EI_z}{6 \cdot 12 EI_z l} = \frac{65pl^2}{72}$$

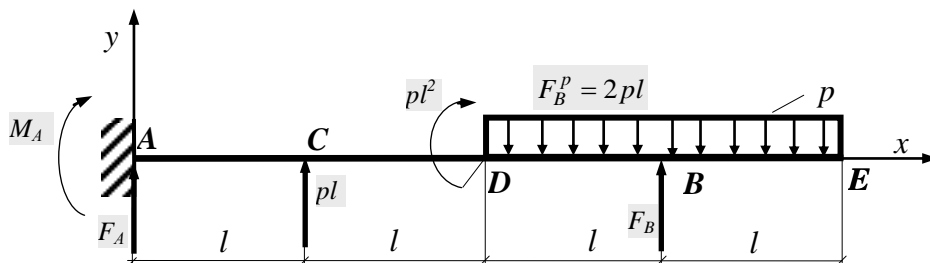
Второй способ решения

Этот способ основан на универсальном уравнении

$$EI_z y(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{\sum M(x-a)^2}{2!} + \frac{\sum F(x-b)^3}{3!} + \frac{p(x-c)^4}{4!}$$

положительными приняты:

M – по часовой стрелке, F – вверх, p – вверх и ось y вверх.



Составим два уравнения, одно из которых уравнение равновесия, а другое выражает условие равенства нулю прогиба на опоре B .

$$\sum M_B = 0 \quad -F_A \cdot 3l - M_A - pl \cdot 2l - pl^2 = 0$$

при $x = 3l$

$$EI_z y(3l) = 0 + 0 + \frac{M_A(3l-0)^2}{2} + \frac{F_A(3l-0)^3}{6} + \frac{pl(3l-l)^3}{6} + \frac{pl^2(3l-2l)^2}{2} - \frac{p(3l-2l)^4}{24} = 0$$

$$\frac{3}{2}l^2 \begin{cases} -F_A 3l - M_A - 3pl^2 = 0 \\ M_A \frac{9l^2}{2} + F_A \frac{27l^3}{26} + \frac{43pl^4}{24} = 0 \end{cases}$$

$$-M_A \left(-\frac{3}{2}l^2 + \frac{9}{2}l^2 \right) - \frac{9}{2}pl^4 - \frac{43pl^4}{24} = 0$$

$$M_A = \frac{65pl^4}{243l^2} = \frac{65pl^2}{72}$$

получили такой же результат, что в предыдущем случае при решении методом сил и с использованием формулы Мора.

2. Построение эпюр Q_y и M_x

Построение можно сделать двумя способами.

2.1. Первый способ

Это классический способ построения эпюр методом сечений.

Реакция $M_A = \frac{65pl^2}{72}$ найдена. Из составленного ранее уравнения равновесия $\sum M_B = 0$ определяем F_A

$$-F_A \cdot 3l - M_A - 3pl^2 = 0$$

$$-F_A \cdot 3l - \frac{65pl^2}{72} - 3pl^2 = 0$$

$$F_A = -\frac{pl^2}{3l} \left(3 + \frac{65}{72} \right) = -\frac{281pl}{72 \cdot 3} = -\frac{281pl}{216}$$

Из уравнения равновесия $\sum F_{ky} = 0$ находим реакцию F_B
 $F_A + pl - 2pl + F_B = 0,$

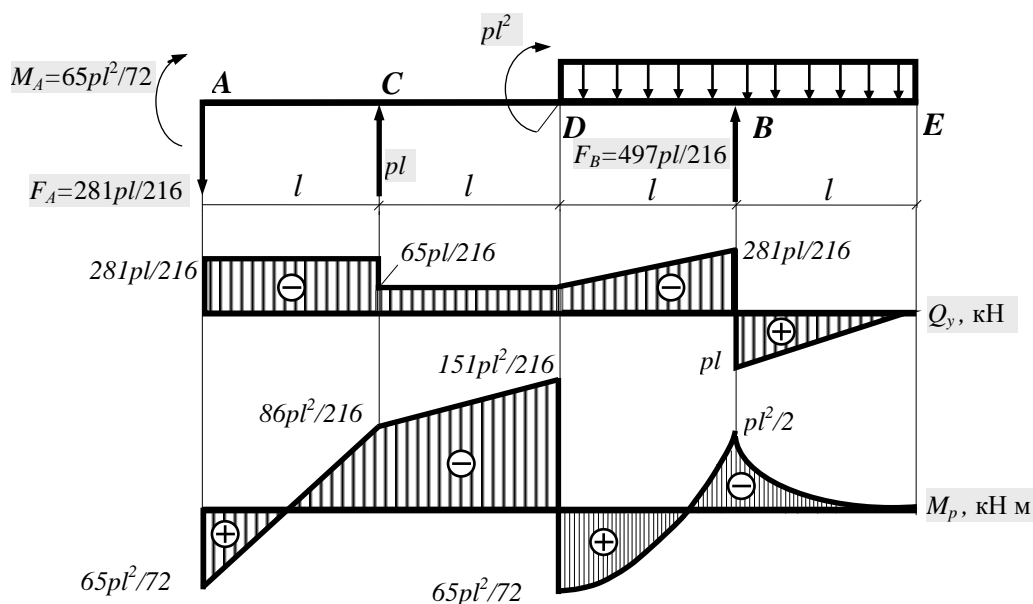
$$\text{откуда } F_B = pl - F_A = pl + \frac{281pl}{216} = \frac{497pl}{216}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \quad -M_A + pl \cdot l - pl^2 - p \cdot 2l \cdot 3l + F_B \cdot 3l = 0 \\ -\frac{65pl^2}{72} + pl^2 - pl^2 - 6pl^2 + \frac{497pl^2 \cdot 3}{216} = 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия обращаются в тождества.

Теперь строим обычным путем эпюры Q_y и M_z



NB! Вычисление значений изгибающих моментов производится с помощью интегральных зависимостей между M_z и Q_y , т.е. значение момента в конце рассматриваемого участка равно алгебраической сумме значений моментов в начале участка и площади эпюры Q_y на этом участке.

При вычислении слева:

$$M_A = \frac{65 pl^2}{72}$$

$$M_C = M_A + \omega(Q_y^{AC}) = \frac{65 pl^2}{72} - \frac{281 pl \cdot l}{216} = -\frac{86 pl^2}{216}$$

$$M_D = M_C + \omega(Q_y^{CD}) = -\frac{86 pl^2}{216} - \frac{65 pl \cdot l}{216} = -\frac{151 pl^2}{216}$$

$$M_{D+} = -\frac{151 pl^2}{216} + pl^2 = \frac{65 pl^2}{216}$$

$$M_B = M_D + \omega(Q_y^{DB}) = \frac{65 pl^2}{216} - \frac{1}{2} \left(\frac{65 + 281}{216} \right) pl^2 = -\frac{108 pl^2}{216} = -\frac{1}{2} pl^2.$$

Для проверки вычисляем значение M_B , идя справа

$$M_B = -\frac{1}{2} pl \cdot l = -\frac{1}{2} pl^2.$$

Как видно результаты вычисления M_B справа и слева совпадают

2.2. Второй способ

Это способ основан на сложении грузовых эпюр и уточненных (исправленных) эпюр.

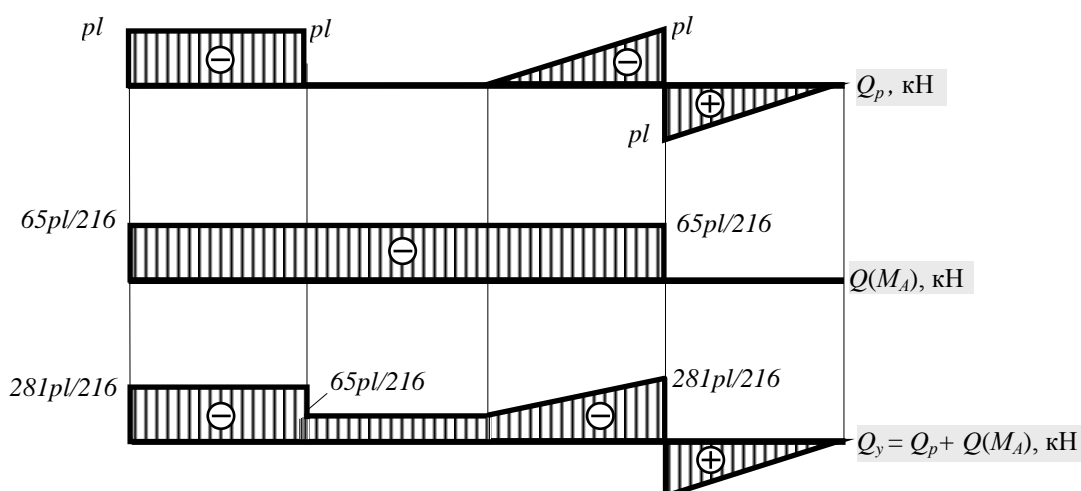
Общие реакции опор

$$F_A = F_A^0 \cdot M_A + F_A^p = -\frac{1}{3l} \cdot \frac{65 pl^2}{72} + (-pl) = -\frac{281 pl}{216}$$

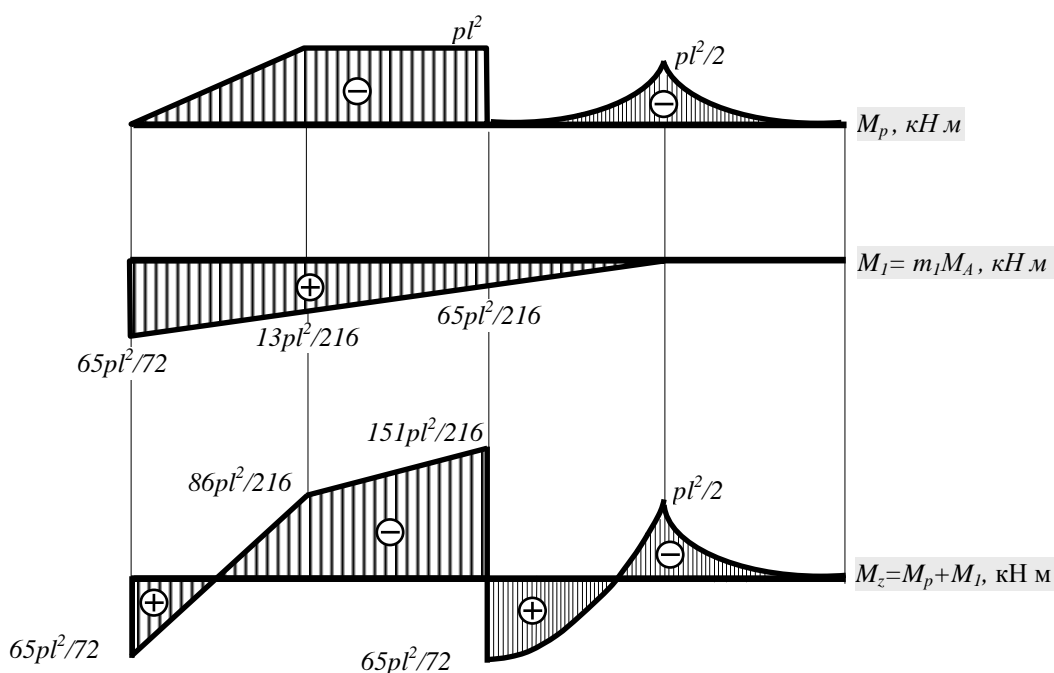
$$F_B = F_B^0 \cdot M_A + F_B^p = \frac{1}{3l} \cdot \frac{65 pl^2}{72} + 2pl = \frac{497 pl}{216},$$

где F_A^0 и F_B^0 единичные реакции от единичного момента $M_A=1$, а $F_A^0 M_A$ и $F_B^0 M_A$ уточненные (исправленные) реакции опор.

Тогда окончательно эпюра поперечных сил Q_y будет



Аналогично получается эпюра изгибающих моментов



3. Определение перемещений

Здесь целесообразнее использовать уравнение метода начальных параметров

$$y(0) = 0$$

$$EI_z y(l) = \frac{M_A (l-0)^2}{2} - \frac{F_A (l-0)^3}{6} = \frac{65 p l^2 \cdot l^2}{72 \cdot 2} - \frac{281 p l \cdot l^3}{216 \cdot 6} = \frac{p l^4 \cdot 304}{1296} = 0,234 p l^4$$

$$EI_z y(2l) = \frac{M_A (2l-0)^2}{2} - \frac{F_A (2l-0)^3}{6} + \frac{p l (2l-l)^3}{6} = \frac{65 p l^2 \cdot 4l^2}{72 \cdot 2} - \frac{281 p l \cdot 8l^3}{216 \cdot 6} + \frac{p l^4}{6} =$$

$$\frac{308 p l^4}{1296} = 0,238 p l^4$$

Найдем на участке AC эпюры M_z координату x , при которой $M_z = 0$

$$\frac{65 p l^2}{72} \cdot \frac{216}{86 p l^2} = \frac{x}{l-x}$$

$$\frac{195}{86} = \frac{x}{l-x}$$

$$195l - 195x = 86x$$

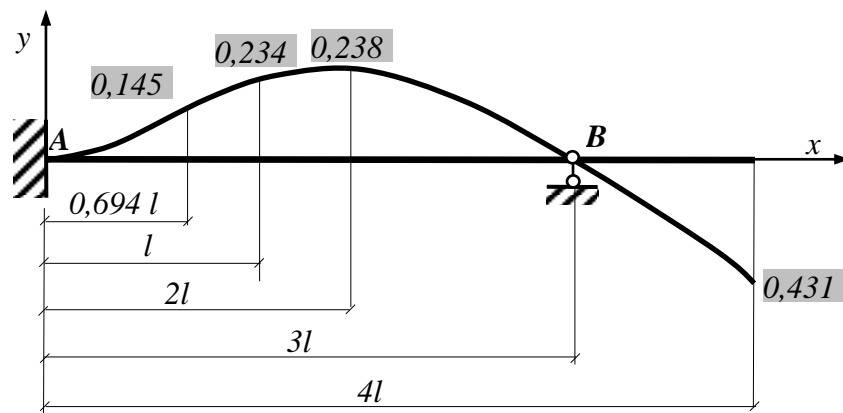
$$x = \frac{195l}{195 + 86} = 0,694l$$

тогда перемещение

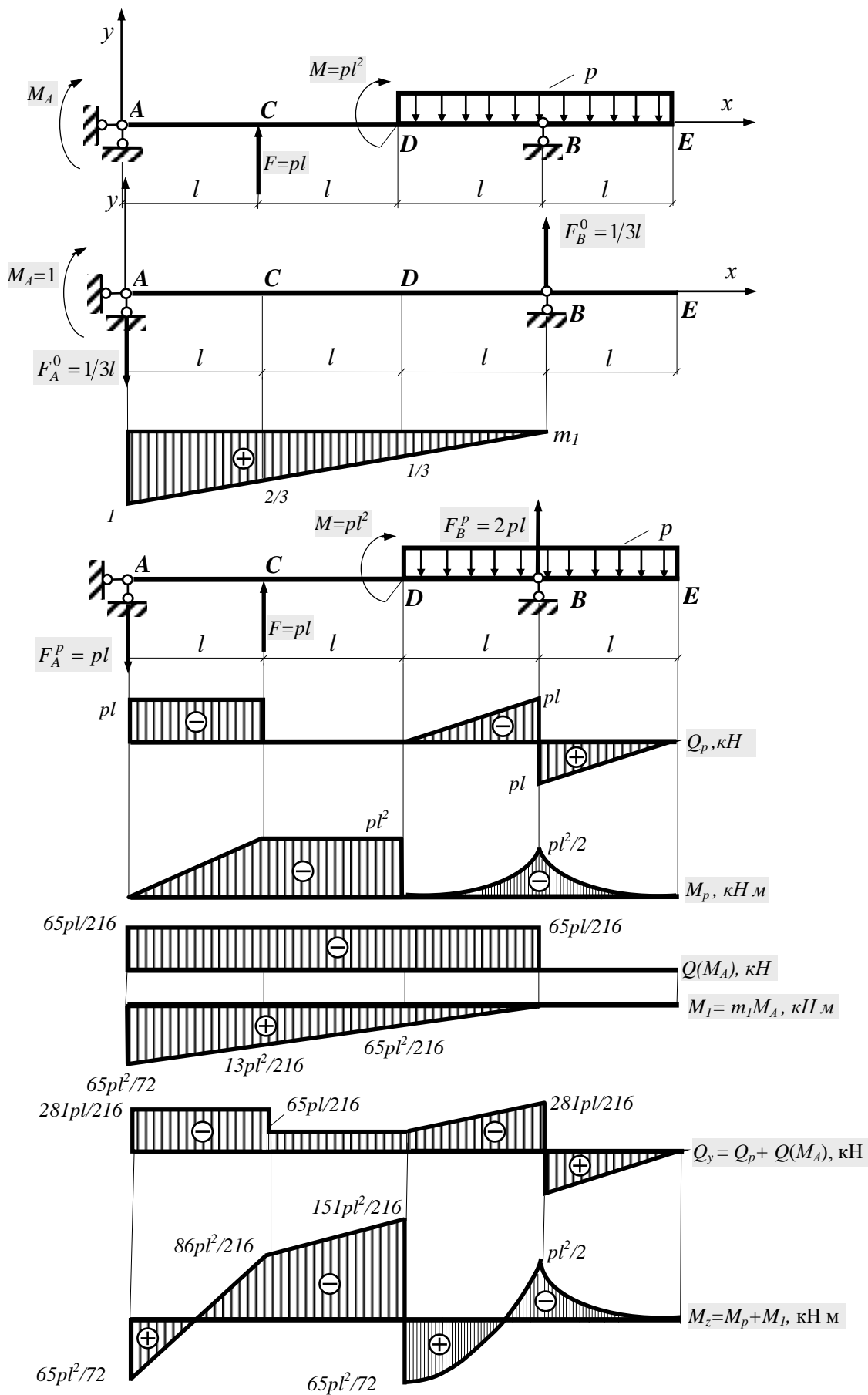
$$EI_y(0,694l) = \frac{M_A(0,694l-0)^2}{2} - \frac{F_A(0,694l-0)^3}{6} = \frac{65pl^2 \cdot 0,694^2 \cdot l^2}{72 \cdot 2} - \frac{281pl \cdot 0,694^3 \cdot l^3}{216 \cdot 6} = 0,145pl^4$$

$$EI_y(4l) = \frac{M_A(4l-0)^2}{2} - \frac{F_A(4l-0)^3}{6} + \frac{pl(4l-l)^3}{6} + \frac{pl^2(4l-2l)^2}{2} - \frac{p(4l-2l)^4}{24} + \frac{F_B(4l-3l)^3}{6} = \frac{65pl^2 \cdot 16l^2}{72 \cdot 2} - \frac{281pl \cdot 64l^3}{216 \cdot 6} + \frac{pl \cdot 27l^3}{6} + \frac{pl^2 \cdot 4l^2}{2} - \frac{p \cdot 16l^4}{24} + \frac{497pl \cdot l^3}{216 \cdot 6} = -0,43pl^4$$

При построении эпюры прогибов надо учесть, что упругая линия обращена выпуклостью вниз там, где изгибающий момент положительный, а выпуклостью вверх там, где он отрицательный. Нулевым точкам эпюры M соответствует точки перегиба упругой линии в точке $x = 0,694l$ перегиб упругой линии прогибов оси балки. Значения на эпюре прогибов надо умножить на $\frac{pl^4}{EI_z}$.



Общая картина всех эпюр, используемых при решении.



14. Устойчивость сжатого стержня

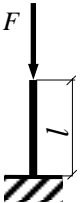
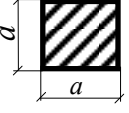
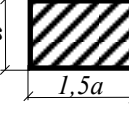
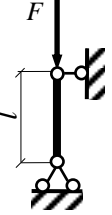
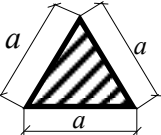
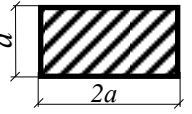
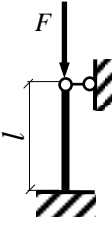
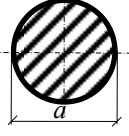
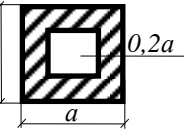
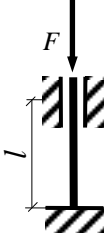
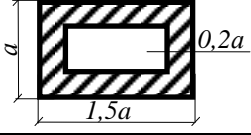
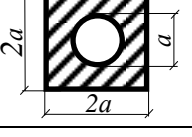
Работа 15

Стальной стержень длиной l сжимается силой F (рис.15). Требуется:

- 1) найти размеры поперечного сечения при допуске напряжении на простое сжатие $[\sigma] = 160$ МПа (расчет производить последовательными приближениями, предварительно задавшись коэффициентом $\varphi = 0,5$);
- 2) найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

Данные взять из таблицы 15.

Таблица 15

Схема закрепления последней цифре матрикула	Строка исходных данных по предпоследней цифре матрикула	F , кН	l , м	Форма сечения стержня
I		100	2,1	I 
II		200	2,2	II 
III		300	2,3	III 
IV		400	2,4	IV 
V		500	2,5	V 
VI		600	2,6	VI 
VII		700	2,7	VII 
VIII		800	2,8	VIII 

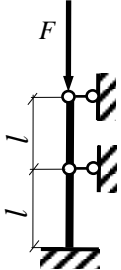
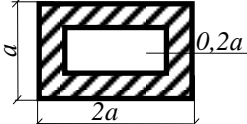
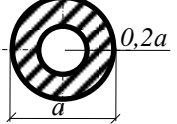
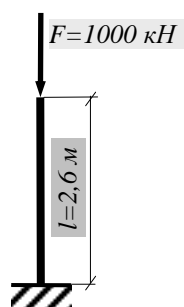

IX		900	2,9	IX 
X		1000	3,0	X 

Рис.15

Пример решения:

Сечение двутавр  $[\sigma]=190$ МПа.
 Коэффициент φ снижения допускаемых напряжений для стали Ст.3 приведены в таблице ниже.

Коэффициент φ снижения допускаемых напряжений

<i>Гибкость, λ</i>	<i>Сталь Ст.3</i>	<i>Дерево</i>
0	1,0	1,0
10	0,99	0,99
20	0,96	0,97
30	0,88	0,93
40	0,85	0,87
50	0,82	0,80
60	0,78	0,71
70	0,74	0,60
80	0,69	0,48
90	0,63	0,38
100	0,56	0,31
110	0,49	0,25
120	0,43	0,22
130	0,38	0,18
140	0,34	0,16
150	0,31	0,14
160	0,28	0,12
170	0,25	0,11
180	0,23	0,10
190	0,21	0,09
200	0,19	0,08

Приближение 1

Принимаем в первом приближении $\varphi_1=0,5$.

Из условия $\frac{N}{A\varphi} = [\sigma] \quad N = F$.

Находим площадь сечения

$$A_1 = \frac{N}{[\sigma]\varphi_1} = \frac{1000 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6 \cdot 0,5} = 105 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 10^5 \text{ см}^2$$

В соответствии с таблицей сортамента принимаем двутавр N55 для которого $A=113 \text{ см}^2$. Радиус инерции $i_{\min}=3,46 \text{ см}^2$.

Находим гибкость

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 260}{3,46} = 150$$

$\mu = 2$ - коэффициент, учитывающий условия закрепления (см.учебник).

По таблице при $\lambda=150 \quad \varphi = 0,31$, это будет второе приближение.

Приближение 2 $\varphi_2 = 0,31$

$$A_2 = \frac{N}{[\sigma]\varphi_2} = \frac{1000 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6 \cdot 0,31} = 169 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 169 \text{ см}^2$$

Принимаем двутавр N70 для которого $A=174 \text{ см}^2$. Радиус инерции $i_{\min}=3,96 \text{ см}^2$.

Гибкость

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 260}{3,96} = 131$$

По таблице при $\lambda=130 \quad \varphi = 0,38$

$$\lambda=140 \quad \varphi = 0,34$$

тогда для $\lambda=131$

$$\varphi = 0,38 - \frac{0,38 - 0,34}{10} \cdot 1 = 0,376$$

Приближение 3 $\varphi_3 = 0,376$

$$A_3 = \frac{N}{[\sigma]\varphi_3} = \frac{1000 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6 \cdot 0,376} = 140 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 133 \text{ см}^2$$

Двутавр N65 для которого $A=151 \text{ см}^2$. Радиус инерции $i_{\min}=3,79 \text{ см}^2$.

Гибкость

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 260}{3,79} = 137$$

По таблице при $\lambda=140 \quad \varphi = 0,34$
 $\lambda=130 \quad \varphi = 0,31$

тогда для $\lambda=137$

$$\varphi = 0,38 - \frac{0,38 - 0,34}{10} \cdot 7 = 0,352$$

Приближение 4 $\varphi_4 = 0,352$

$$A_4 = \frac{N}{[\sigma]\varphi_4} = \frac{1000 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6 \cdot 0,352} = 150 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 150 \text{ см}^2$$

Подходит двутавр N65 с $A=151 \text{ см}^2$, что совпадает с предыдущим приближением. На этом задача подбора сечения заканчивается.

Проверка решения.

Напряжение в стержне для подобранного сечения будет

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{1000 \cdot 10^3}{151 \cdot 10^{-4}} = 66,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 66,2 \text{ МПа}$$

Допускаемые напряжения на устойчивость при $\varphi = 0,352$

$$[\sigma] = \varphi[\sigma] = 0,352 \cdot 190 = 66,9 \text{ МПа}$$

т.е. действительное напряжение

$66,2 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 66,9 \text{ МПа}$ практически совпадает с допускаемым напряжением.

Критическая сила и коэффициент запаса

Так как $\lambda=137 \rightarrow \lambda_{кр}=105$ для стали Ст.3, то критическая сила определяется по

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} \text{ - формула Эйлера.}$$

$E = 210 \text{ ГПа}$, для двутавра N65 $I_{\min}=2170 \text{ см}^4$, $A=151 \text{ см}^2$

$$F_{кр} = \frac{3,14^2 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 2170 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 2,26)^2} = 1661620 \text{ Н} = 1661,6 \text{ кН}$$

Коэффициент запаса

$$n_s = \frac{F_{kp}}{F} = \frac{1661,6}{1000} = 1,66.$$

При $\lambda < \lambda_{kp} = 105$ критическое напряжение определяется по формуле Ясинского

$$\sigma_{kp} = a - b\lambda$$

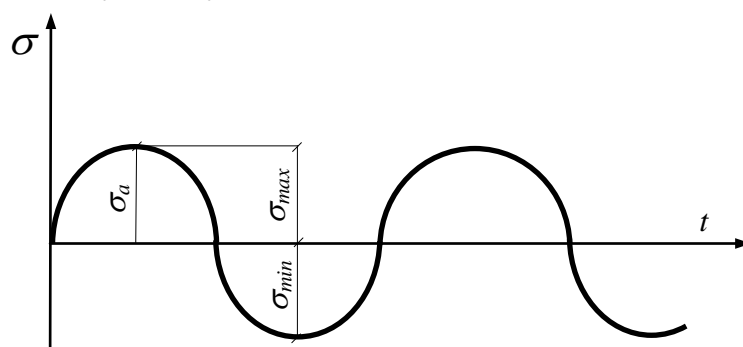
где для стали Ст.3 $\sigma_{kp} = 314 - 1,14\lambda$, для дерева $\sigma_{kp} = 29 - 0,192\lambda$.

При $\lambda < 40$ стержень настолько короткий, что критическое напряжение принимается равным пределу текучести. Для стали Ст.3 $\sigma_T = 240$ МПа.

15. Расчет на выносливость

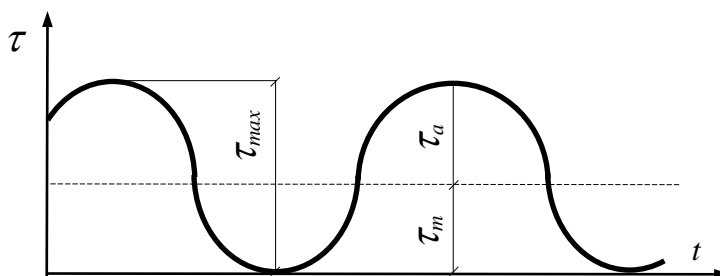
В опасном сечении вала с диаметром d действует крутящий момент T и изгибающий момент M . Вал сделан из углеродистой стали (предел прочности которой равен σ_B , а предел текучести σ_T) и не имеет резких переходов, выточек, канавок; поверхность его чисто обработана.

Определить коэффициент запаса прочности в опасном сечении вала, приняв нормальные напряжения изгиба изменяющимися по симметричному циклу,



$\sigma_m = 0$, $\sigma_{max} = \sigma_a$ - симметричный цикл

а касательные напряжения кручения по пульсирующему циклу (от нуля до максимального значения).



$\tau_a = \tau_m = \tau_{max}/2$ - пульсирующий цикл

Такой случай характерен для вала зубчатой передачи (редуктор). Коэффициенты концентрации напряжений и масштабные коэффициенты считать одинаковыми для нормальных и касательных напряжений.

Данные взять из таблицы 16.

Таблица 16

Диаметр по последней цифре матрикула		Строка по предпоследней цифре матрикула	M	T	σ_B	σ_T
			N·m		MPa	
I	31	1	210	310	510	240
II	32	2	220	320	520	240
III	33	3	230	330	530	250
IV	34	4	240	340	540	250
V	35	5	250	350	550	260
VI	36	6	260	360	560	260
VII	37	7	270	370	570	270
VIII	38	8	280	380	580	270
IX	39	9	290	390	590	280
X	40	0	300	400	600	280

Пример решения:

Исходные данные: $d = 50 \text{ mm}$, $\sigma_B = 610 \text{ MPa}$, $\sigma_T = 360 \text{ MPa}$,
 $T = 810 \text{ N}\cdot\text{m}$, $M = 680 \text{ N}\cdot\text{m}$.

Для углеродистых сталей $\sigma_{-1} = 0,5\sigma_B$ и $\tau_{-1} = 0,22\sigma_B$ – предел выносливости для симметричного цикла нагружения при изгибе и кручении;

$\sigma_0 \approx 1,5\sigma_{-1}$ и $\tau_0 \approx 1,5\tau_{-1}$ – предел выносливости при пульсирующем цикле нагружения при изгибе и кручении соответственно; $\tau_T = 0,65\sigma_T$ – предел текучести при кручении.

Имеем

$$\sigma_{-1} = 0,5 \cdot 610 = 305 \text{ MPa}$$

$$\tau_{-1} = 0,22 \cdot 610 = 134 \text{ MPa}$$

$$\sigma_0 = 1,5 \cdot 305 = 457 \text{ MPa}$$

$$\tau_0 = 1,5 \cdot 134 = 201 \text{ MPa}$$

$$\tau_T = 0,65 \cdot 360 = 216 \text{ MPa}$$

1. Максимальные нормальные и касательные напряжения**2.1. Нормальные напряжения**

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$$

где $W_z = 0,1d^3$ – осевой момент сопротивления круглого сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{680}{0,1 \cdot 50^3 \cdot 10^{-9}} = 54,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 54,4 \text{ МПа}$$

2.2. Касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$$

где $W_p = 0,2d^3$ – полярный момент сопротивления круглого сечения

$$\tau_{\max} = \frac{810}{0,2 \cdot 50^3 \cdot 10^{-9}} = 32,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 32,4 \text{ МПа}$$

3. Определение коэффициентов, влияющих на предел выносливости

3.1. Эффективный (действительный) коэффициент концентрации напряжений

$$K_{\sigma} = K_{\tau} = 1,2 + 0,2 \cdot \frac{\sigma_B - 40}{110} = 1,2 + 0,2 \cdot \frac{610 - 40}{110} = 2,24$$

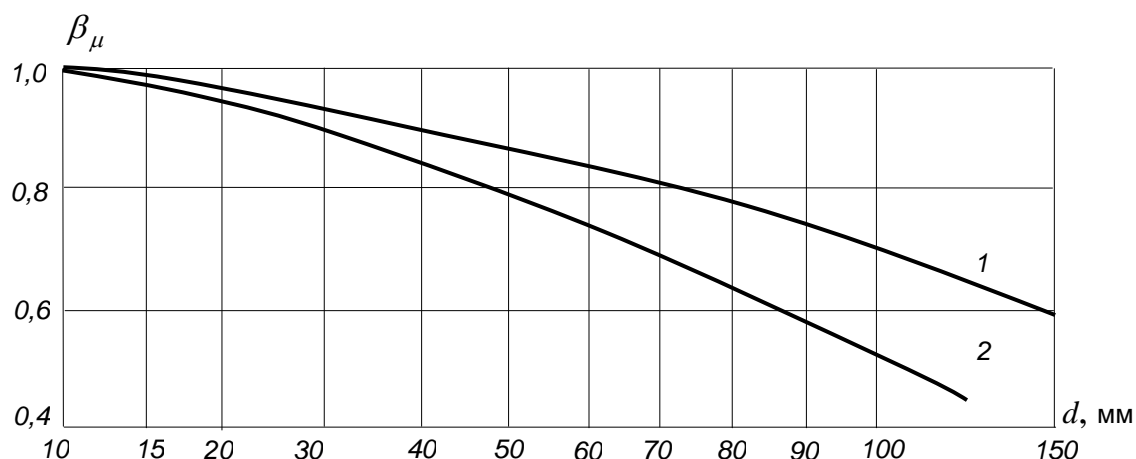
3.2. Масштабный коэффициент концентрации напряжений

$$\frac{1}{\beta_{\mu}} = 1,2 + 0,1 \cdot (d - 3) \quad d - \text{берется в см}$$

$$\beta_{\mu} = \frac{1}{1,2 + 0,1 \cdot (50 \cdot 10^{-1} - 3)} = 0,714$$

Из графика видно (по кривой 2) $\beta_{\mu} = 0,714$, что согласуется с расчетными данными.

На нижеприведенном рисунке показаны ориентировочные значения масштабного коэффициента β_{μ} для различных марок стали.

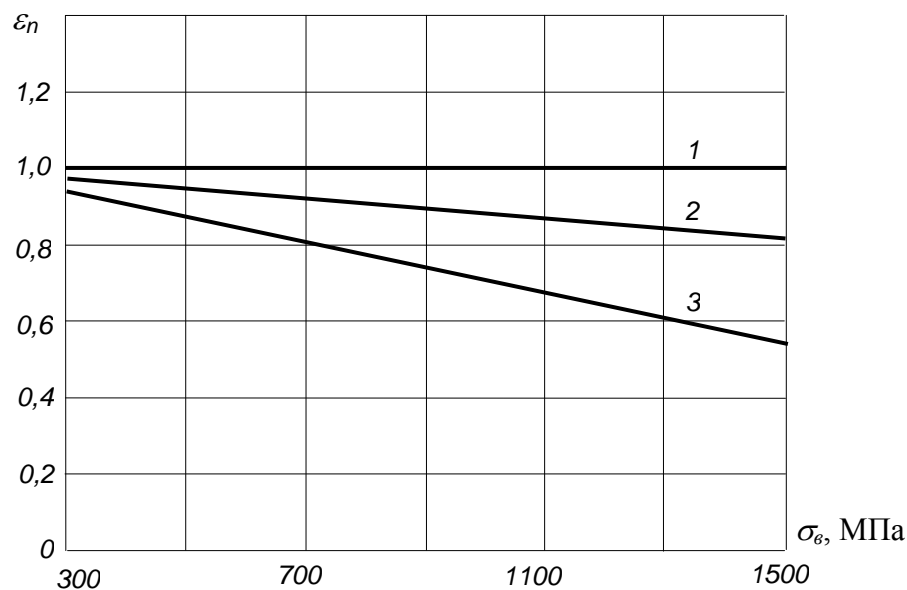


Кривая 1 – для углеродистой стали при отсутствии местных напряжений.

Кривая 2 – для легированной стали при отсутствии концентрации напряжений и для углеродистой стали при умеренной концентрации.

3.3. Коэффициент качества поверхности

На графиках ниже приведены ориентировочные значения коэффициента качества ε_n поверхности различных сталей в зависимости от их предела прочности σ_s .



Кривая 1 – для шлифованных образцов.

Кривая 2 – для образцов, обработанных резцом.

Кривая 3 – для образцов, поверхность которых имеет мелкую насечку.

Имеем $\varepsilon_n = 1,0$ (прямая 1).

Общий коэффициент для детали:

а) для нормальных напряжений

$$K_{\sigma d} = \frac{K_{\sigma}}{\beta_m \cdot \varepsilon_n} = \frac{2,24}{0,714 \cdot 1,0} = 3,13$$

б) для касательных напряжений

$$K_{\tau d} = \frac{K_{\tau}}{\beta_m \cdot \varepsilon_n} = \frac{2,24}{0,714 \cdot 1,0} = 3,13$$

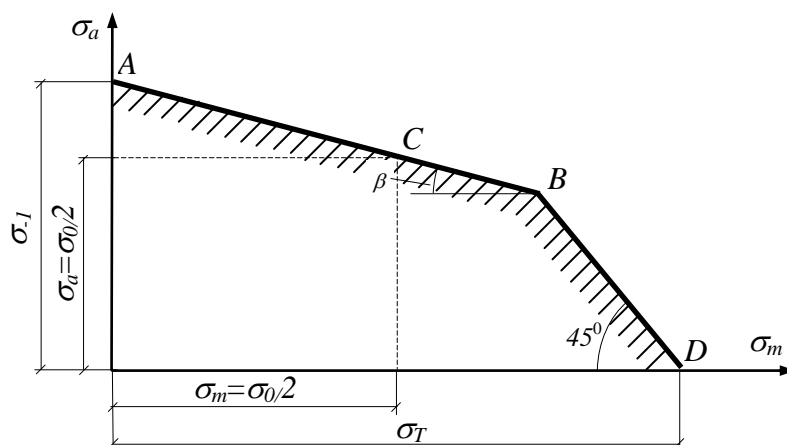
3.4. Коэффициент запаса

а) по нормальным напряжениям

по схематизированной диаграмме (рисунок) предельных амплитудных напряжений

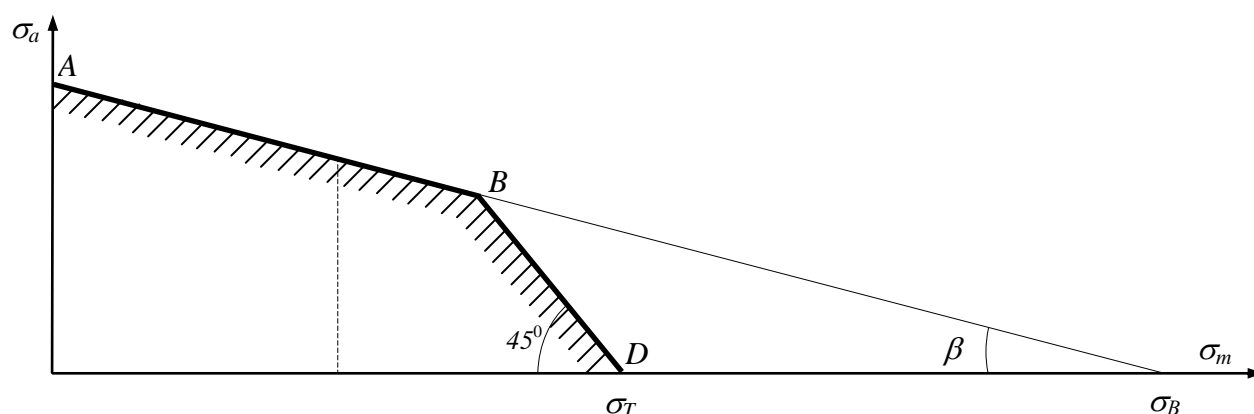
$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma d} \cdot \sigma_a + \psi \sigma_m} = \frac{2,24}{0,714 \cdot 1,0} = 3,13$$

А) Диаграмма предельных амплитудных напряжений



Коэффициент $\psi = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{-1} - 0,5\sigma_0}{0,5\sigma_0}$ или $\psi = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B}$ если применяется еще более упрощенная диаграмма предельных амплитуд

В)



Получим

по рис.А
$$\psi = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{-1} - 0,5\sigma_0}{0,5\sigma_0} = \frac{305 - 0,5 \cdot 457}{0,5 \cdot 457} = 0,33$$

по рис.В
$$\psi = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} = \frac{305}{610} = 0,5$$

$\sigma_m = 0$; $\sigma_a = \sigma_{max}$ - амплитудное значение при симметричном цикле нагружения

$$\sigma_a = 54,4 \text{ МПа} \quad S_\sigma = \frac{305}{3,13 \cdot 54,4 + 0,33 \cdot 0} = 1,79$$

при $\psi = 0,5$
$$S_\sigma = \frac{305}{3,13 \cdot 54,4 + 0,5 \cdot 0} = 1,79 \text{ (так как } \sigma_m = 0)$$

б) по касательны напряжениям аналогично как для нормальных напряжений

$$S_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau_d} \cdot \tau_a + \psi \tau_m}$$

; $\tau_a = \tau_m = \tau_{\max}/2$ - при пульсирующем цикле нагружения

$$\tau_a = \tau_m = 32,4/2 = 16,2 \text{ МПа}$$

$$\psi = \operatorname{tg} \beta = \frac{\tau_{-1} - 0,5\tau_0}{0,5\tau_0} = \frac{134 - 0,5 \cdot 201}{0,5 \cdot 201} = 0,33 \text{ или}$$

$$\psi = \operatorname{tg} \beta = \frac{\tau_{-1}}{\tau_B} = \frac{134}{370} = 0,36$$

предел прочности при кручении принято $\tau_B \approx 0,6\sigma_B = 0,6 \cdot 610 \approx 370$.

Поскольку значения ψ по обеим формулам достаточно близки между собой, примем расчетное значение $\psi = 0,33$.

$$S_{\tau} = \frac{134}{3,13 \cdot 16,2 + 0,33 \cdot 16,2} = 2,39.$$

3.5. Коэффициент запаса S_{σ} и S_{τ} по пределу текучести

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_a + \sigma_m} = \frac{360}{54,4 + 0} = 6,62$$

$$S_{\tau} = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_T}{\tau_a + \tau_m} = \frac{216}{16,2 + 16,2} = 6,67$$

принимая меньшие значения коэффициентов запаса

$$S_{\sigma} = 1,79 \quad S_{\tau} = 2,39$$

2.6. Общий коэффициент запаса определяется по эмпирической формуле Гафа и Полларда

$$\frac{1}{S^2} = \frac{1}{S_{\sigma}^2} + \frac{1}{S_{\tau}^2}$$

$$S = \frac{S_{\sigma} S_{\tau}}{\sqrt{S_{\sigma}^2 + S_{\tau}^2}} = \frac{1,79 \cdot 2,39}{\sqrt{1,79^2 + 2,39^2}} = 1,43$$

2.7. Оценка прочности

Условие прочности записывается в виде $S \geq [S]$

$[S] = 1,4 \dots 2,5$ - допускаемый коэффициент запаса по выносливости.

В данном случае $S = 1,43$ и больше минимального $[S]$, но на пределе.

16. Поперечный удар

Работа 17

На двутавровую балку, свободно лежащей на двух жестких опорах, с высоты h падает груз весом G (рис.17).

Требуется:

- 4) найти наибольшее нормальное напряжение в балке;
- 5) решить аналогичную задачу при условии, что первая опора заменена пружиной, податливость которой (т.е. осадка от груза весом 1 кН) равна c ;
- б) сравнить полученные результаты.

Данные взять из таблицы 17.

Массой балки пренебрегаем. Модуль упругости $E = 210 \text{ GPa}$.

Таблица 17

<i>Схема рисунка по последней цифре матрикула</i>	<i>Исходные данные по предпоследней цифре матрикула</i>	<i>N^o двутавра</i>	<i>l, м</i>	<i>G, Н</i>	<i>h, см</i>	<i>10³ см/кН</i>
I	1	20	2,1	1100	11	21
II	2	20а	2,2	1200	12	22
III	3	24	2,3	300	3	23
IV	4	24а	2,4	400	4	24
V	5	27	2,5	500	5	25
VI	6	27а	2,6	600	6	26
VII	7	30	2,7	700	7	27
VIII	8	30а	2,8	800	8	28
IX	9	33	2,9	900	9	29
X	0	36	3,0	1000	10	30

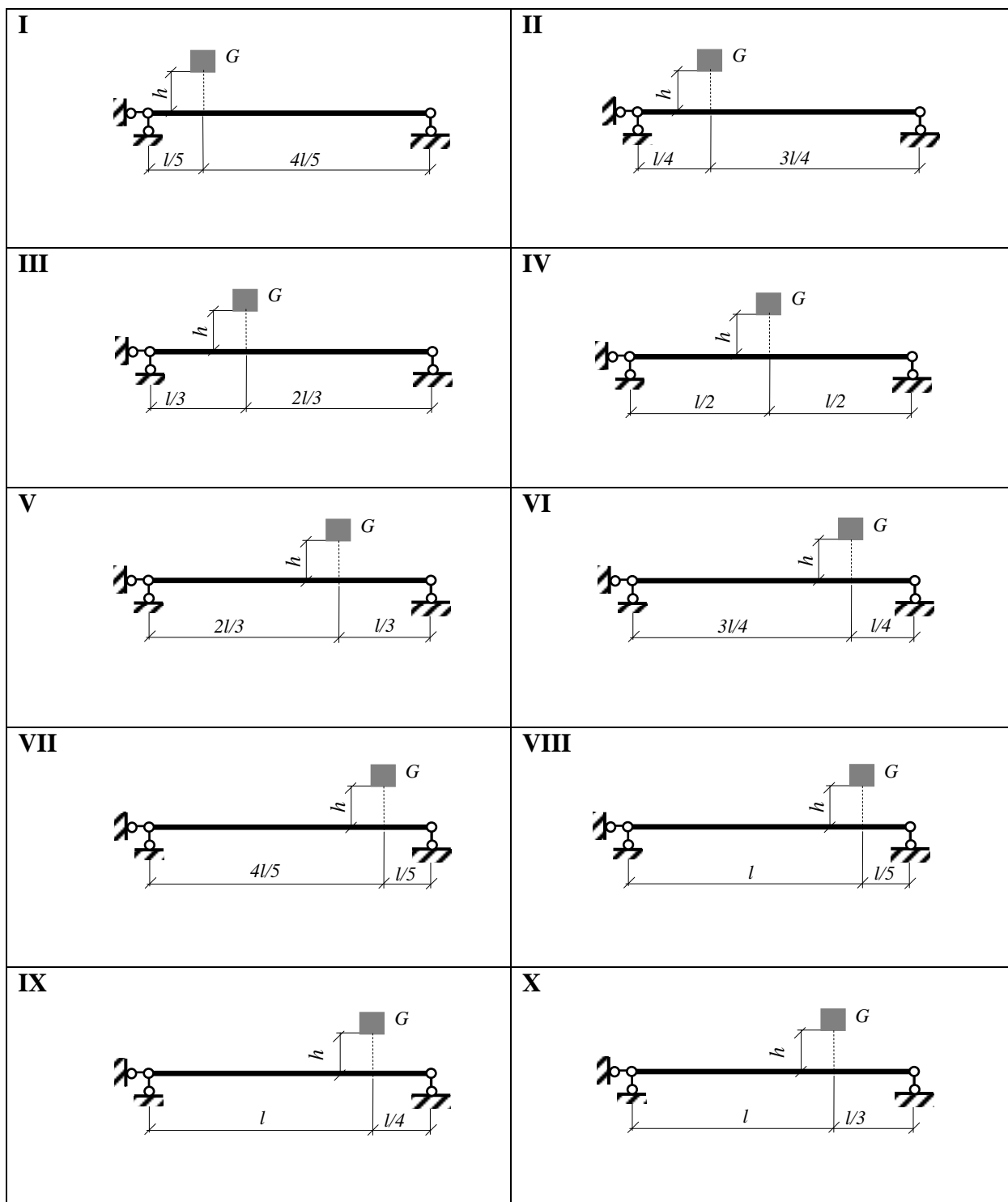


Рис.17

Пример решения:

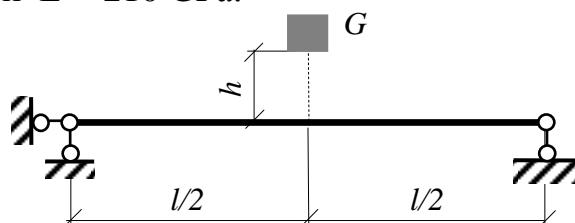
Груз весом $G = 20$ кН падает с высоты $h = 15$ см.

Податливость пружины $c = 1,4 \cdot 10^{-3}$ м/кН.

Двутавр №40, для которого $I_z = 18930$ см⁴, $W_z = 947$ см³.

Длина $l = 4$ м.

Модуль упругости $E = 210$ ГПа.

**1. Наибольшее нормальное напряжение**

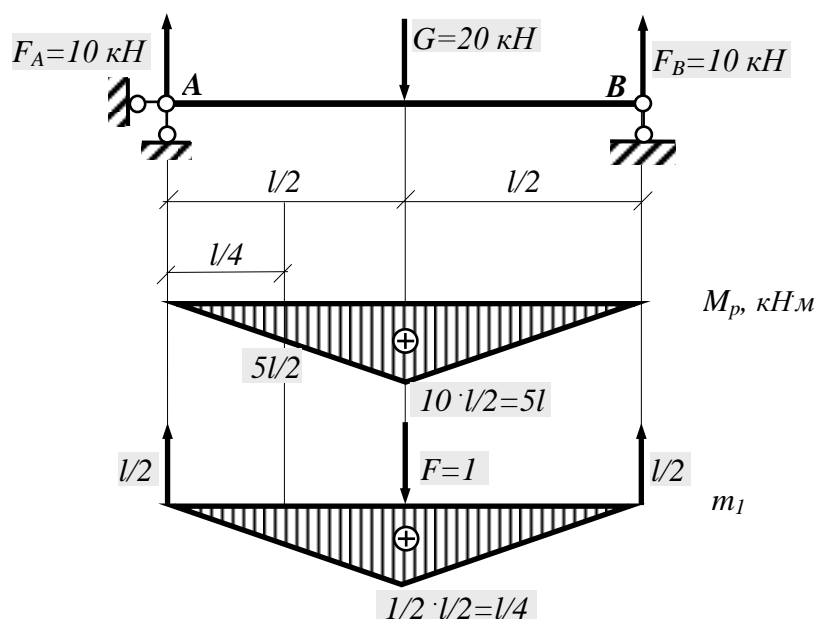
Динамический коэффициент при поперечном ударе груза о балку определяется по формуле

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}}$$

где $\Delta l_{ст}$ - статический прогиб балки в точке падения груза от силы равной весу падающего груза.

Статический прогиб находим по формуле Мора

$$\Delta l_{ст} = \sum \int_0^l \frac{M_p m_1}{EI_z} dx$$



Для построения грузовой эпюры M_p и единичной эпюры m_1 предварительно находим реакции опор, если это необходимо.

Решая интеграл Мора по формуле Симпсона имеем

$$\begin{aligned}\Delta l_{CT} &= \frac{l/2}{6EI_z} \left(0 + 4 \cdot \frac{5l}{2} \cdot \frac{l}{8} + 5l \cdot \frac{l}{4} \right) + \frac{l/2}{6EI_z} \left(5l \cdot \frac{l}{4} + 4 \cdot \frac{5l}{2} \cdot \frac{l}{8} + 0 \right) = \frac{l}{6EI_z} \left(0 + 4 \cdot \frac{5l}{2} \cdot \frac{l}{8} + 5l \cdot \frac{l}{4} \right) = \\ &= \frac{10l^3}{24EI_z} = \frac{20l^3}{48EI_z}\end{aligned}$$

PS! В случае приложения силы в середине балки прогиб под силой определяется по стандартной формуле $\Delta l = \frac{Fl^3}{48EI}$.

Отсюда

$$\Delta l_{CT} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 4^3}{48 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 18930 \cdot 10^{-8}} = 6,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Динамический коэффициент

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^{-2}}{6,7 \cdot 10^{-4}}} = 22,2$$

Статическое напряжение (максимальное значение) определяется по известной формуле

$$\sigma_{CT}^{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 4}{947 \cdot 10^{-6}} = 21,1 \text{ МПа}$$

где M_z^{\max} - максимальное значение изгибающего момента на грузовой

эпюре M_p .

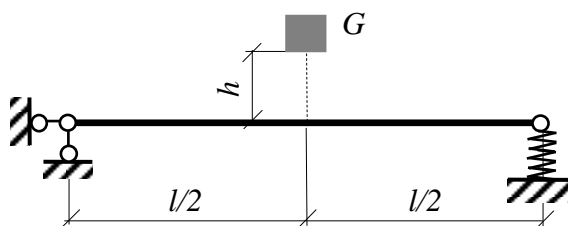
Максимальное динамическое нормальное напряжение

$$\sigma_d^{\max} = k_d \sigma_{CT}^{\max} = 22,2 \cdot 21,1 = 469 \text{ МПа}$$

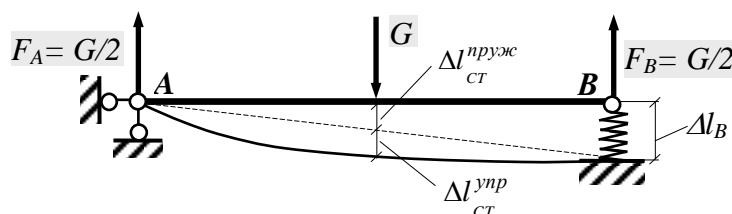
что может превышать пределы прочности для материала двутавра.

NB! Обычный прием уменьшения напряжений при ударе заключается в уменьшении жесткости конструкции, например, поставка упругой опоры.

2. Наибольшее нормальное напряжение при наличии упругой правой опоры



Статическое перемещение в точке падения груза будет складываться из двух перемещений: упругого перемещения $\Delta l_{ст}^{упр}$, определенного ранее и равного $6,7 \cdot 10^{-4}$ м и перемещения $\Delta l_{ст}^{пруж}$ от осадки правой опоры при условии, что балка считается абсолютно твердой и поворачивается в левой шарнирной опоре.



Реакции от силы G $F_A = F_B = G/2$. Осадка опоры B от силы давления равной по значению реакции F_B , но направленной в противоположную сторону

$$\Delta l_B = F_B c = \frac{G}{2} c$$

$$\Delta l_B = \frac{20}{2} \cdot 1,4 \cdot 10^{-3} = 14 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Перемещение $\Delta l_{ст}^{пруж}$ найдем из пропорции

$$\Delta l_{ст}^{пруж} = \frac{\Delta l_B}{l} \cdot \frac{l}{2} = \frac{\Delta l_B}{2} = \frac{14 \cdot 10^{-3}}{2} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Общее статическое перемещение

$$\Delta l = \Delta l_{ст}^{пруж} + \Delta l_{ст}^{упр} = 70 \cdot 10^{-4} + 6,7 \cdot 10^{-4} = 76,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

Динамический коэффициент

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^{-2}}{76,7 \cdot 10^{-4}}} = 7,3$$

Максимальное динамическое напряжение от удара

$$\sigma_d^{\max} = k_d \sigma_{ст}^{\max} = 7,3 \cdot 21,1 = 155 \text{ МПа}$$

что уже удовлетворяет условию прочности, если допускаемое напряжение считать $[\sigma] = 160$ МПа.

3. Сравнивая результаты по обоим вариантам, можно сделать вывод, что постановка пружины значительно уменьшило напряжение при ударе.

В случае жесткой опоры

$$\sigma_d^{\max} = 469 \text{ МПа}$$

В случае упругой опоры

$$\sigma_d^{\max} = 155 \text{ МПа}$$

Напряжение уменьшилось для второго варианта в $469/155=3$ раза.

Варьируя податливостью упругой опоры можно уменьшать или увеличивать напряжение при ударе.

Учет массы стержня, на который падает груз

В этом случае применяется приближенное решение, которое сводится к замене реальной балки системой с одной степенью свободы.

Распределенная масса по длине балки заменяется сосредоточенной массой в месте удара грузом. Величина сосредоточенной массы определяется из равенства кинетической энергии системы с распределенной массой кинетической энергии системы с одной степенью свободы (смю задания на колебания).

Для балки на двух шарнирных опорах при ударе падающим грузом в точку, расположенную посередине пролета динамический коэффициент

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{17}{35} + \frac{mg}{G}}},$$

где mg – вес балки;

G – вес падающего груза;

h – высота падения;

$\Delta l_{ст}$ – прогиб балки в точке удара от статического действия груза.

В данном случае для двутаврового сечения с N40, погонная масса $\bar{m} = 56,1$ кг.

Тогда вес балки при $l = 4$ м

$$mg = \bar{m} \cdot l \cdot g = 56,1 \cdot 4 \cdot 10 = 2244 \text{ Н} = 2,24 \text{ кН}$$

$$\Delta l_{ст} = 6,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \quad h = 15 \text{ см}$$

откуда

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^{-2}}{6,7 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{17}{35} + \frac{2,24}{20}}} = 21,6, \quad \text{что мало отличается от}$$

результата, полученного без учета массы балки, где $k_d = 22,1$ или в случае упругой опоры где $\Delta l_{ст} = 76,7 \cdot 10^{-4}$ м

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^{-2}}{76,7 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{17}{35} + \frac{2,24}{20}}} = 7,17, \text{ что сравнимо со значением}$$

полученным без учета массы балки, где $k_d = 7,3$.

Вывод: *распределенную массу балки в первом приближении для практических расчетов можно не учитывать.*

17. Колебания системы с одной степенью свободы

Работа18

На двух балках двутаврового сечения установлен двигатель весом G , делающий n оборотов в минуту (Рис.18). Центробежная сила инерции, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся частей двигателя, равна F . Собственный вес балок и силы сопротивления можно не учитывать.

Требуется найти:

- 7) частоту собственных колебаний ω ;
- 8) частоту изменения возмущающей силы p ;
- 9) коэффициент нарастания колебаний μ ;
- 10) общий динамический коэффициент k_d ;
- 11) характеристики переменного цикла напряжений: среднее значение σ_m , амплитудное значение σ_a и коэффициент асимметрии цикла r .

Модуль упругости $E = 210 \text{ GPa}$.

Данные взять из таблицы 18.

Таблица18

Схема рисунка по последней цифре матрикула	Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	№ двутавра	$l, \text{ м}$	G	F	n об/мин
				kH		
I	1	16	1,1	11	1	1400
II	2	18	1,2	12	2	1500
III	3	20а	1,3	13	3	1600
IV	4	20	1,4	14	4	1700
V	5	22а	1,5	15	5	1800
VI	6	22	1,6	16	6	1900
VII	7	24а	1,7	17	7	2000
VIII	8	24	1,8	18	8	2100
IX	9	27а	1,9	19	9	2200
X	0	27	2,0	20	10	2300

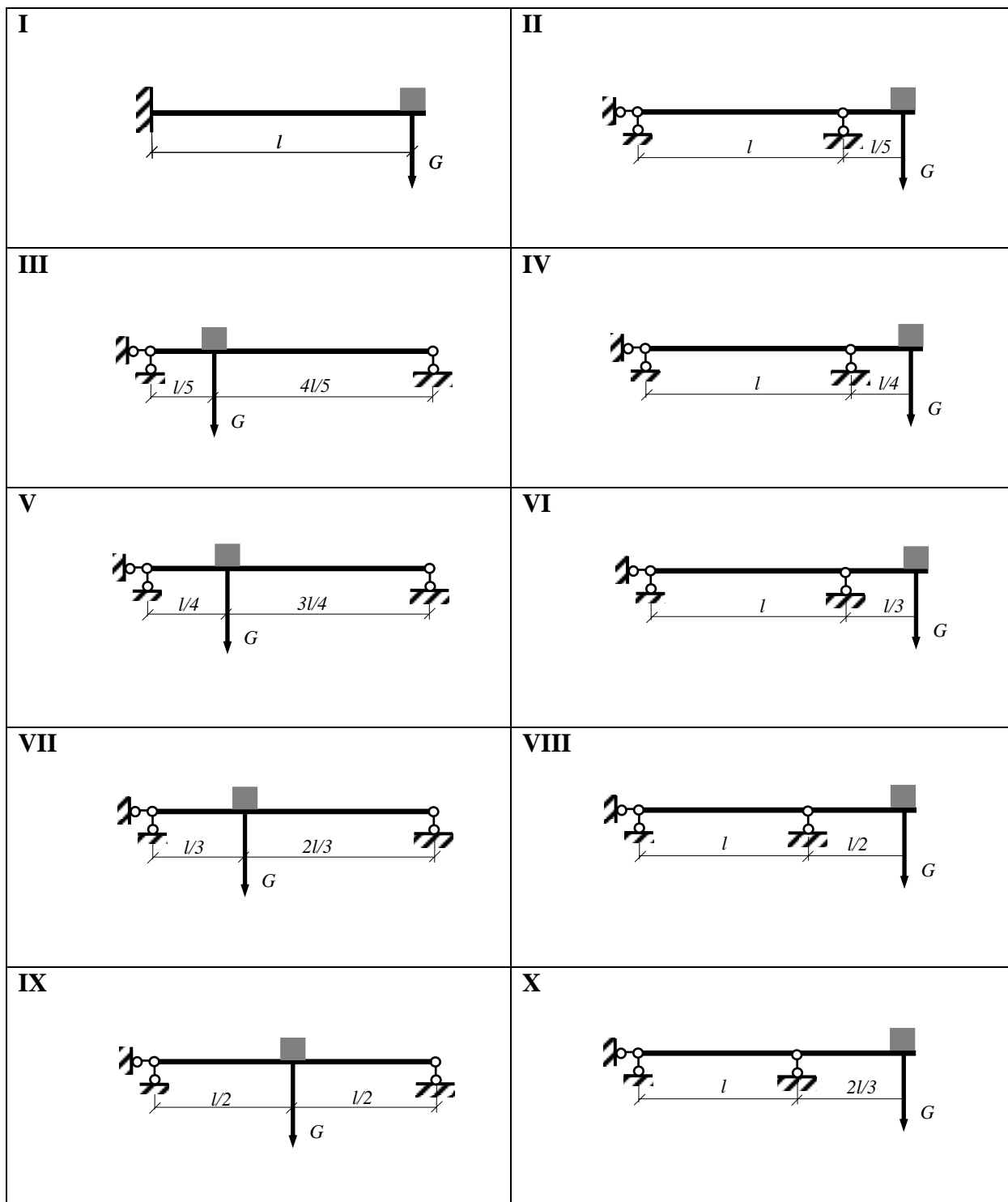


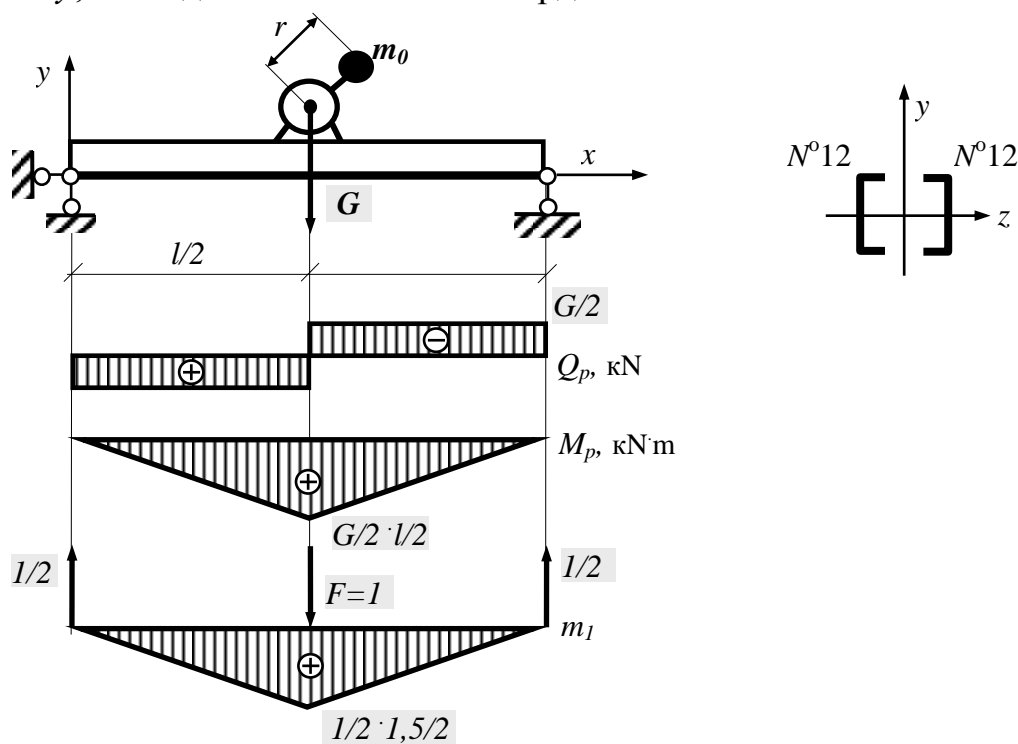
Рис.18

Пример решения:

Двигатель имеет несбалансированную вращающуюся массу $m_0 = 400$ кг. Радиус дисбаланса $r = 0,1$ мм. Число оборотов массы $n = 3000$ грм. Вес двигателя $G = 2$ кН. Длина балок $1,5$ м. В качестве профиля выбран швеллер № 12, момент инерции поперечного сечения каждой балки $I_z = 313$ см⁴, $W_z = 25$ см³.

4. Частота собственных колебаний

Представим колеблющуюся систему в виде невесомой упругой балки со сосредоточенной массой G в месте установки двигателя. Такая расчетная схема (динамическая модель) является системой с одной степенью свободы, где перемещение сосредоточенной массы m определяется одной координатой y , т.е. одной независимой координатой.



Для системы с одной степенью свободы частоты собственных колебаний определяется по формуле

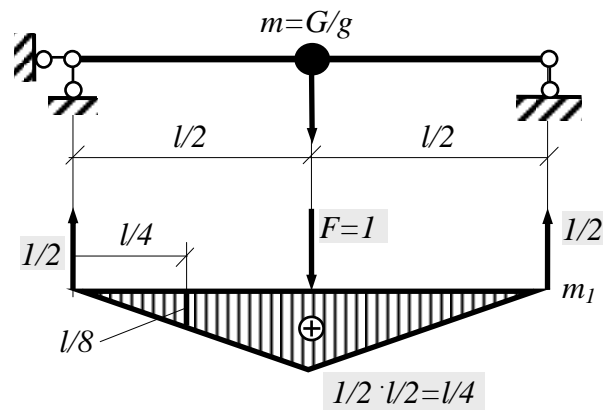
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}},$$

где $m = \frac{G}{g} = \frac{2 \cdot 10^3}{10} = 200$ кг – сосредоточенная масса, равная массе двигателя

δ_{11} – единичное перемещение, которое по формуле Мора будет

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{m_1 \cdot m_1}{EI_z} dx$$

где m_1 – единичная эпюра, представленная на рисунке.



При построении эпюры, если нужно находим реакции опор.
Решая интеграл Мора способом Симпсона имеем

$$\delta_{11} = \frac{l/2}{6EI_z} \left(0 + 4 \cdot \frac{l}{8} \cdot \frac{l}{8} + \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{4} \right) + \frac{l/2}{6EI_z} \left(\frac{l}{4} \cdot \frac{l}{4} + 4 \cdot \frac{l}{8} \cdot \frac{l}{8} \right) = 2 \frac{l/2}{6EI_z} \left(0 + 4 \cdot \frac{l}{8} \cdot \frac{l}{8} + \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{4} \right) = \frac{l^3}{48EI_z}$$

(для каждого участка интегрирования учитываем значения в начале, в середине и в конце участка)
откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{48EI_z}{ml^3}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 313 \cdot 10^{-8}}{200 \cdot 1,5^3}} = 305,7 \text{ s}^{-1},$$

учитывая, что момент инерции составного сечения из двух швеллеров будет равен $I_z = 2 \cdot 313 \text{ см}^4$.

5. Частота возмущающей силы

Круговая частота возмущающей силы равна угловой скорости вращения двигателя

$$p = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 3000}{30} = 314 \text{ s}^{-1}.$$

6. Коэффициент нарастания колебаний (коэффициент динамичности)

Коэффициент нарастания колебаний

$$\mu = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right|} = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{314}{305,7}\right)^2\right|} = 18,2$$

Как видно, частоты практически совпадают, т.е. в системе должен возникнуть резонанс. Система находится в опасной резонансной зоне, когда амплитуда колебаний резко возрастает и превышает статическое перемещение в 18,2 раза.

Отношение частот в данном случае составляет $\frac{p}{\omega} = \frac{314}{305,7} = 1,027$. Тогда как

опасной резонансной зоной считается диапазон отношения частот $\frac{p}{\omega}$ от 0,8 до 1,2 (рис.18а).

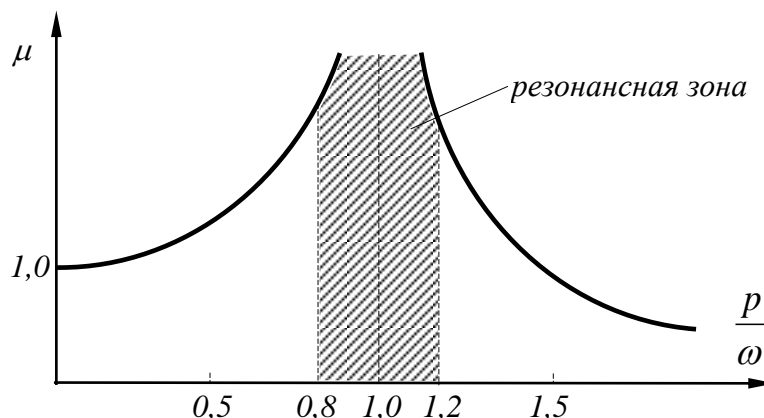


Рис.18а

Наиболее простой способ вывести систему из резонансной зоны уменьшить жесткость конструкции EI .

Выберем меньший номер профиля, например швеллер N°8, у которого $I_z = 99,9 \text{ см}^4$.

Тогда частота собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{48EI_z}{ml^3}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 99,9 \cdot 10^{-8}}{200 \cdot 1,5^3}} = 172,7 \text{ с}^{-1}.$$

Отношение частот составляет $\frac{p}{\omega} = \frac{314}{172,7} = 1,82$, что уже вдали от резонансной зоны $\frac{p}{\omega}$ от 0,8 до 1,2 (рис18а) и коэффициент динамичности

$$\mu = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \right| = \left| \frac{1}{1 - 1,82^2} \right| = 0,43$$

7. Общий динамический коэффициент

Находим максимальное значение возмущающей силы F (центробежная сила инерции)

$$F = m_o p^2 r = 400 \cdot 3,14^2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} = 3944 \text{ N} = 3,9 \text{ кН}$$

Учитывая коэффициент динамичности $\mu = 0,43$, определяем максимальную силу, которая действует на балку

$$F^{\max} = G + \mu F = 2 + 0,43 \cdot 3,9 = 3,67 \text{ кН}$$

$$F^{\min} = G - \mu F = 2 - 0,43 \cdot 3,9 = 0,32 \text{ кН}$$

В первом случае направления силы тяжести (статическая сила) G и динамической силы μF совпадают, во втором случае - противоположное (Рис.18б).

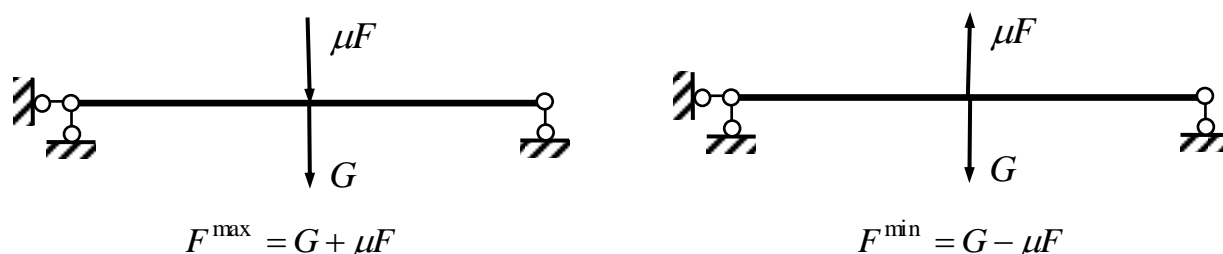


Рис.18б

Общий динамический коэффициент определяется по формуле

$$k_{\partial} = \frac{F^{\max}}{F_{CT}} = \frac{G + \mu F}{G} = 1 + \mu \frac{F}{G} \Rightarrow k_{\partial} = 1 + 0,43 \cdot \frac{3,9}{2} = 1,84,$$

где $F_{CT} = G$ - статическая нагрузка, F^{\max} - максимальная динамическая нагрузка и показывает во сколько раз максимальные динамические напряжения больше статических напряжений

$$\sigma_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \sigma_{CT} = 1,84 \cdot 15 = 27,6 \text{ МПа},$$

где
$$\sigma_{ст} = \frac{M_{ст}}{W_z} = \frac{(G/2) \cdot l/2}{W_z} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1,5/4}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = 15 \text{ МПа}$$
 только от действия статической силы тяжести.

8. Характеристики переменного цикла напряжений

Напряжения, возникающие под действием F^{\max} и F^{\min} будут

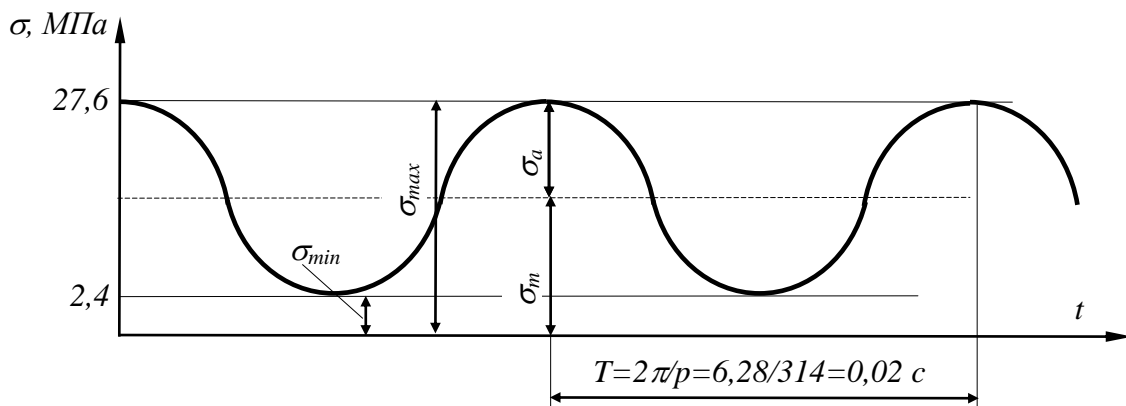
$$\sigma_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} = \frac{F^{\max} m_1}{W_z} = \frac{3,67 \cdot 10^3 \cdot 1,5/4}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = 27,6 \text{ МПа}$$

PS! (Учитываем, что для составного сечения из двух швеллеров момент сопротивления равен $W_z = 2 \cdot 25 \text{ см}^3$).

Максимальное значение на единичной эпюре $m_1 = \frac{l}{4} = \frac{1,5}{4}$, где размерность единичного момента (от единичной силы) – 1 · м.

$$\sigma_{\min} = \frac{M_z^{\min}}{W_z} = \frac{F^{\min} m_1}{W_z} = \frac{0,32 \cdot 10^3 \cdot 1,5/4}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = 2,4 \text{ МПа}$$

Переменный цикл напряжений имеет следующий вид



Характеристики переменного цикла:

амплитудное значение

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{27,6 - 2,4}{2} = 12,6 \text{ МПа,}$$

среднее значение

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{27,6 + 2,4}{2} = 15 \text{ МПа}$$

и коэффициент асимметрии цикла

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{2,4}{27,6} = 0,087,$$

по которым производится расчет на усталостную прочность.

NB! Для сравнения приведем значения максимального напряжения для первого варианта, когда швеллер был №12

$$F^{\max} = G + \beta F = 2 + 18,2 \cdot 3,9 = 73 \text{ кН}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F^{\max} m_1}{W_z} = \frac{73 \cdot 10^3 \cdot 1,5/4}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = 547 \text{ МПа},$$

что значительно превышает предел прочности для материала, из которого изготовлен швеллер.

Влияние сил сопротивления

Предыдущие расчеты производились без учета сил сопротивления. Рассмотрим каково их влияние на основные динамические характеристики системы.

1) частота собственных колебаний с учетом затухания определяется по формуле

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2},$$

где ω - частота собственных колебаний без учета сил сопротивления:

n - коэффициент сопротивления.

Если принять $\frac{2n}{\omega} = 0,4$, что характеризует достаточно большое сопротивление, то

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - (0,2\omega)^2} = 0,98\omega$$

Величина ω_1 мало отличается от частоты собственных колебаний без затухания ω , поэтому частоты собственных колебаний в подавляющем большинстве случаев определяются без учета сил сопротивления.

2) коэффициент нарастания колебаний μ с учетом затухания определяется по формуле

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2 p^2}{\omega^4}}}$$

проведем сравнительный анализ результатов с учетом и без учета сил сопротивления

а) в случае поперечного сечения из двух швеллеров №12, $\omega = 305,7 \text{ с}^{-1}$.

С учетом затухания, где $\frac{2n}{\omega} = 0,4$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{314^2}{305,7^2}\right)^2 + \frac{0,4^2 \cdot 314^2}{305,7^2}}} = 2,44$$

если $\frac{2n}{\omega} = 0,1$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{314^2}{305,7^2}\right)^2 + \frac{0,1^2 \cdot 314^2}{305,7^2}}} = 8,6$$

В то время как без учета затухания $\mu = 18,2$.

Вывод: вблизи резонанса коэффициент динамичности надо определять с учетом сил сопротивления, поскольку даже малое сопротивление резко уменьшает рост амплитуд резонансных колебаний по сравнению с ростом амплитуд без учета сил сопротивления, которые при равенстве частот $\omega = p$ стремятся к бесконечности, что в реальности (действительности) не имеет места (не может быть).

б) в случае поперечного сечения из двух швеллеров №8, $\omega = 172,7 \text{ с}^{-1}$.

С учетом затухания, при $\frac{2n}{\omega} = 0,1$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{314^2}{172,7^2}\right)^2 + \frac{0,1^2 \cdot 314^2}{172,7^2}}} = 0,43$$

Результаты вычислений с учетом и без учета затухания практически совпадают.

Поэтому вдали от резонанса при вычислении коэффициента динамичности μ коэффициент затухания n значения не имеет и его можно принять равным нулю, что идет в запас прочности и формула примет вид

$$\mu = \pm \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \quad \text{или} \quad = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \right|,$$

т.е. оперируем в расчетах абсолютной величиной μ .

Учет распределенной массы балки

Принятая ранее расчетная схема гн учитывала распределенную массу балки. Рассмотрим как повлияет эта неучтенная масса на результаты расчета. Для системы с одной степенью свободы приведенную массу балки должны сосредотачиваться в одной точке. Логично, что этой точкой является место нахождения двигателя.

В нашем случае распределенная масса сосредотачивается в середине пролета (рис18в).

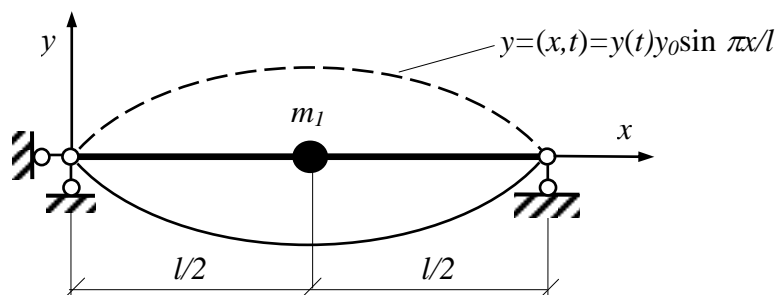


Рис.18в

Величину сосредоточенной массы m_1 определим из равенства кинетических энергий системы с распределенной массой и системы с одной степенью свободы.

Если приближенно принять уравнение изогнутой оси балки с шарнирными опорами в виду синусоиды

$$y(x,t) = y(t)y_0 \sin \frac{\pi x}{l},$$

то скорость будет

$$\dot{y}(x,t) = \dot{y}(t)y_0 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Пусть элементарная масса $dm = \rho A dx$, тогда кинетическая энергия системы с распределенной массой

$$E_k = \int_0^l \frac{\dot{y}^2(x,t)}{2} dm = \frac{y_0^2}{2} \rho A \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx,$$

а кинетическая энергия системы с одной степенью свободы (при $x = \frac{l}{2}$, где сосредоточена масса)

$$E_k = \frac{m_1 \dot{y}^2\left(\frac{l}{2}, t\right)}{2} = \frac{m_1 y_0^2}{2} \sin^2 \frac{\pi l}{2} = \frac{m_1 y_0^2}{2},$$

где m_1 - искомое значение сосредоточенной массы.

Приравняв выражения кинетической энергии и интегрируя, получим

$$\frac{y_0^2}{2} \rho A \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{m_1 y_0^2}{2} \Rightarrow \rho A \int_0^l \frac{1 - \cos \frac{2\pi x}{l}}{2} dx = m_1 \Rightarrow \rho A \frac{1}{2} \left(1 - \sin \frac{2\pi x}{l} \cdot \frac{l}{2\pi} \right) \Big|_0^l = m_1$$

$$\Rightarrow \rho A(l - 0) = m_1 \Rightarrow m_1 = \frac{\rho A l}{2} = \frac{\bar{m} l}{2}$$

где \bar{m} - погонная масса балки (масса одного метра).

Точное решение дает значение сосредоточенной массы

$m_1 = \frac{17}{35} \bar{m}l = 0,4857 \bar{m}l$, что мало отличается от приближенного решения, где $m_1 = 0,5 \bar{m}l$.

Определим частоту собственных колебаний с учетом распределенной массы балки.

В случае сечения из двух швеллеров N°8 с $\bar{m} = 7,78$ кг/м при $l = 1,5$ м, значения сосредоточенной массы

$$m_1 = 2 \frac{\bar{m}l}{2} = 2 \cdot \frac{7,78 \cdot 1,5}{2} = 11,7 \text{ кг.}$$

Добавив это значение к массе двигателя, получим общую массу

$$m = 200 + 11,7 = 211,7 \text{ кг.}$$

Тогда

$$\omega = \sqrt{\frac{48EI_z}{ml^3}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 99,9 \cdot 10^{-8}}{211,7 \cdot 1,5^3}} = 167,9 \text{ с}^{-1}.$$

Это значение достаточно незначительно отличается от значения без учета массы балки $\omega = 172,7 \text{ с}^{-1}$, менее чем на 5%. Тем самым вполне правомерно не учитывать распределенную массу балки, если она мала по сравнению с массой груза.

Расчет криволинейного бруса

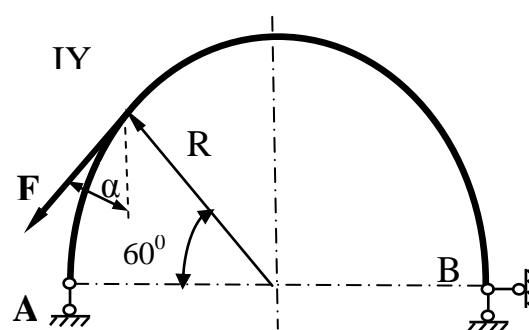
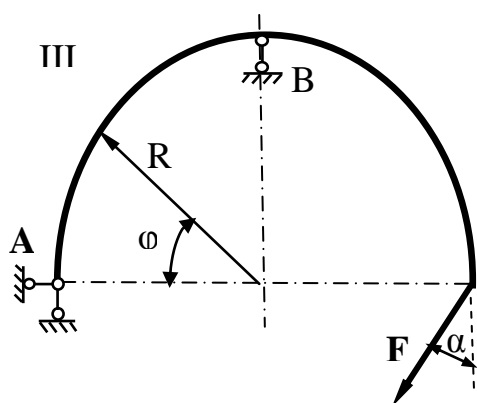
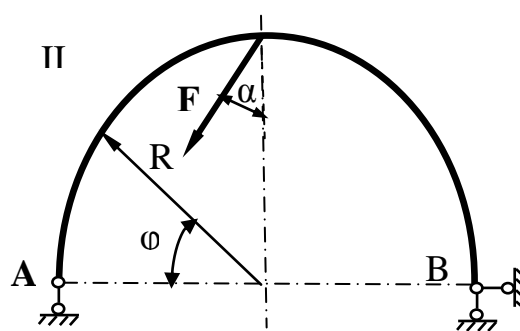
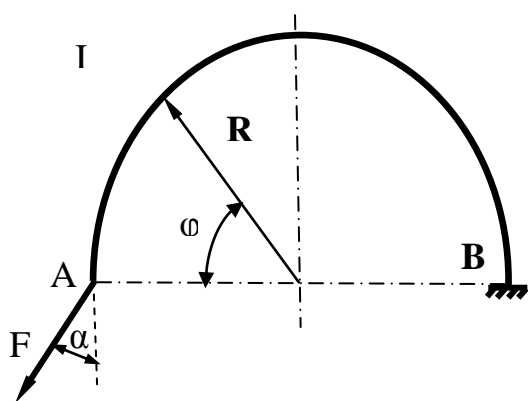
Работа 19

Построить эпюры внутренних сил M , N и Q и найти значения нормальных напряжений в опасном сечении криволинейного бруса (рис.19).

Данные взять из табл.19

Пояснения.

- 1) Силу F следует разложить на вертикальную и горизонтальную составляющие.
- 2) Найти опорные реакции.
- 3) Написать выражения M , N и Q для произвольного сечения в функции от полярного угла φ . Давая различные значения φ через 30° построить эпюры по точкам.
- 4) Для проверки вычислений значение y_0 можно определить по приближенной формуле $y_0 = I_1 / RA$, где I_1 - момент инерции поперечного сечения относительно центральной оси, R - радиус кривизны оси бруса, A - площадь поперечного сечения.



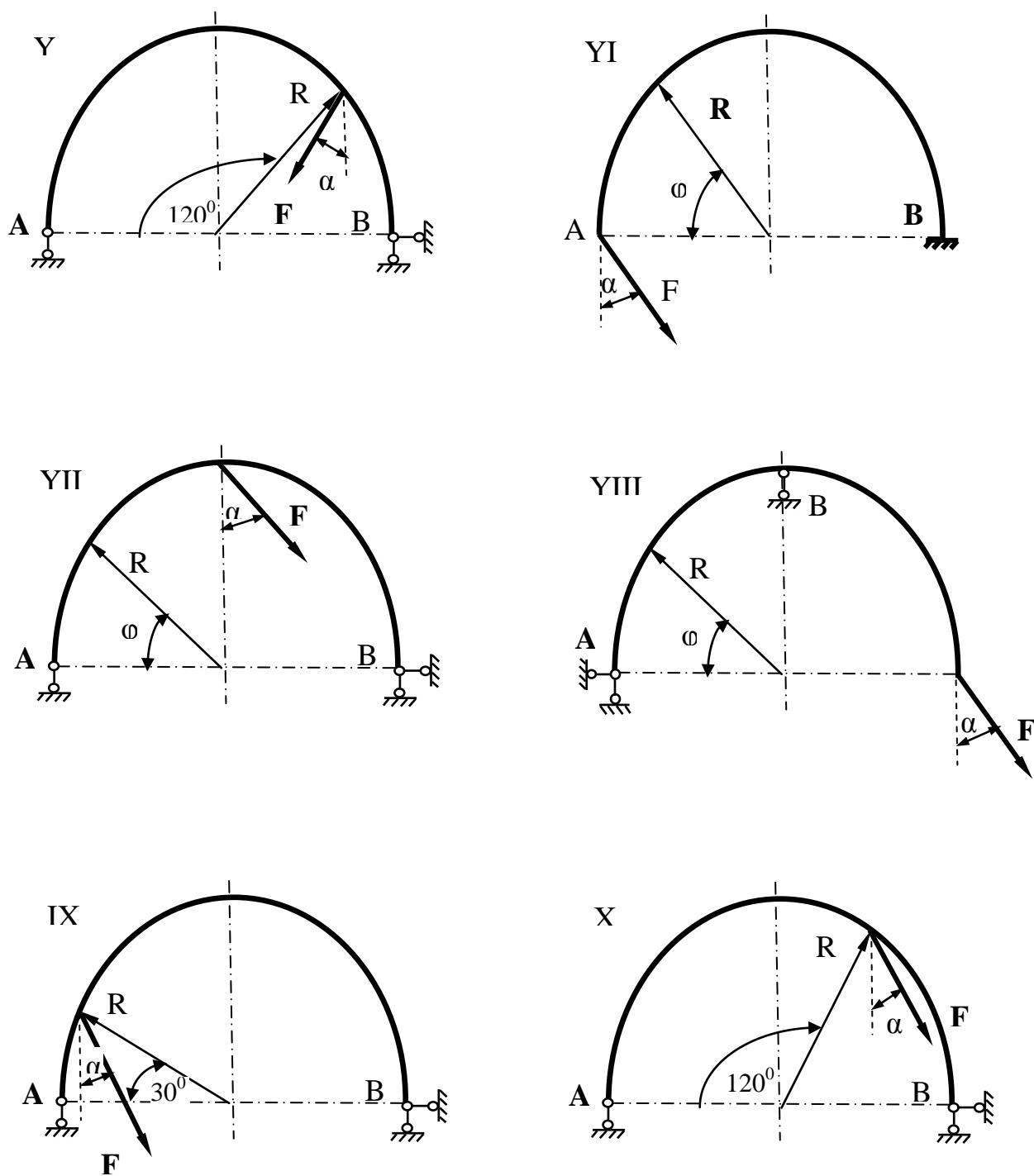
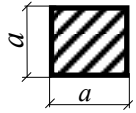
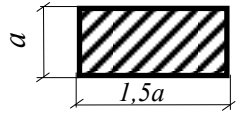
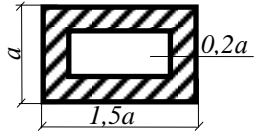
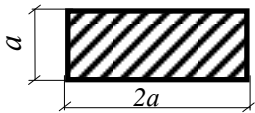
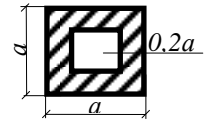
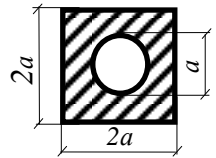
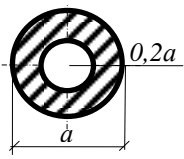
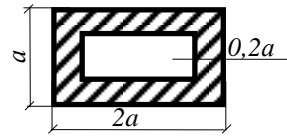
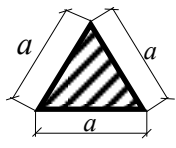
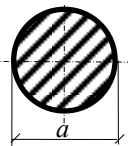
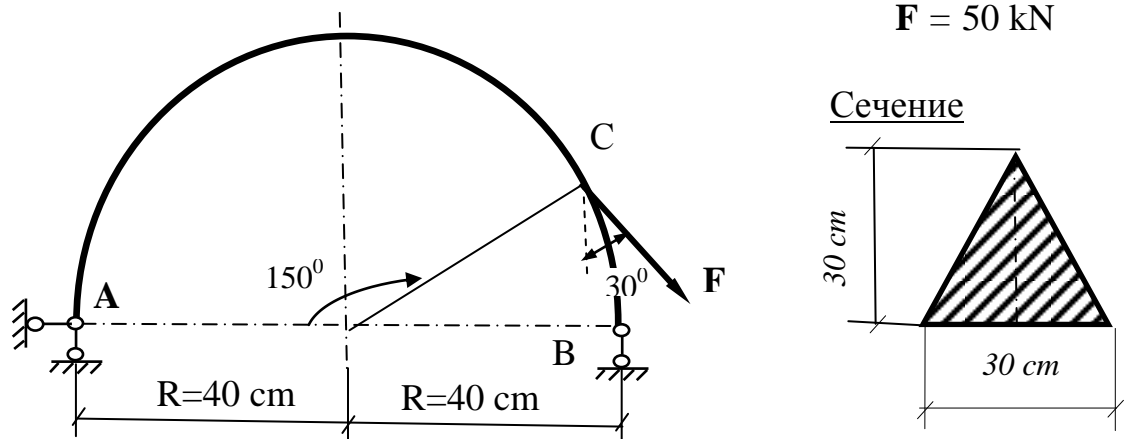


Рис.19

Таблица 19

Схема по последней цифре матрикула	Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	α^0	F, N	$R, ст$	$a, см$	Форма сечения бруса
I	1	10	1100	21	4,1	
II	2	20	1200	22	4,2	
III	3	30	1300	23	4,3	
IV	4	40	1400	24	4,4	
V	5	50	1500	25	4,5	
VI	6	60	1600	26	4,6	
VII	7	70	1700	17	4,7	
VIII	8	80	1800	18	4,8	
IX	9	90	1900	19	4,9	
X	0	0	2000	20	5,0	

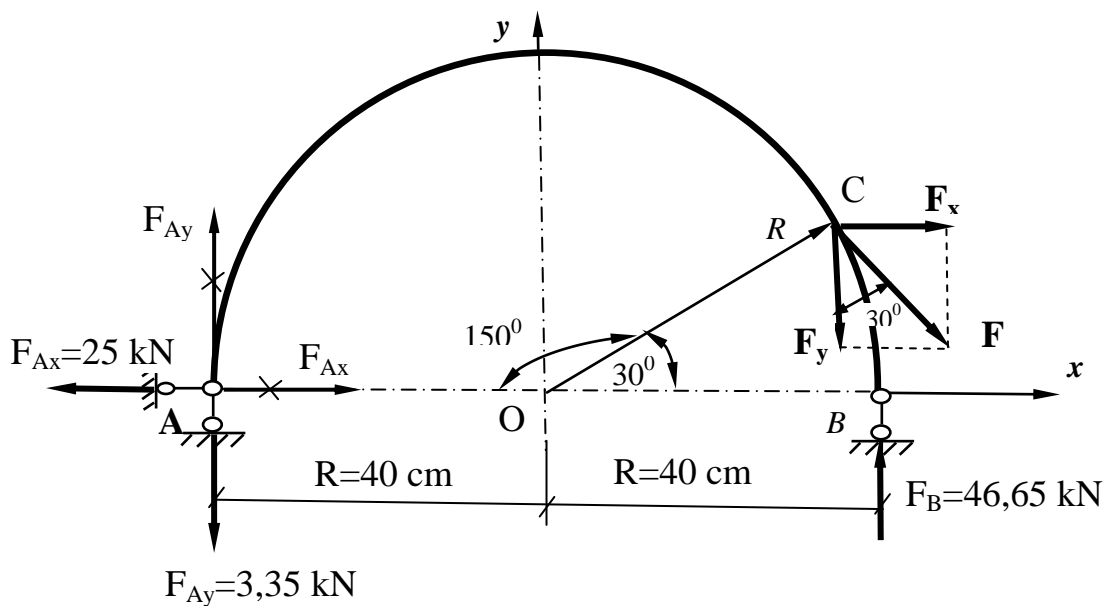
Пример расчета



Решение

1. Определение реакций опор.

Компоненты силы F соответственно: $F_x = F \sin 30^\circ$, $F_y = F \cos 30^\circ$.



Составляем уравнения равновесия для плоской системы сил:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad F_B \cdot 80 - F_y (40 + 40 \cdot \cos 30^\circ) - F_x \cdot 40 \sin 30^\circ &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow F_B = \frac{F \cos 30^\circ (40 + 40 \cos 30^\circ) + F \sin 30^\circ \cdot 40 \sin 30^\circ}{80} = \\ = \frac{50 \cdot 0,866 (40 + 40 \cdot 0,866) + 50 \cdot 0,5 \cdot 40 \cdot 0,5}{80} &= 46,65 \text{ kN}, \end{aligned}$$

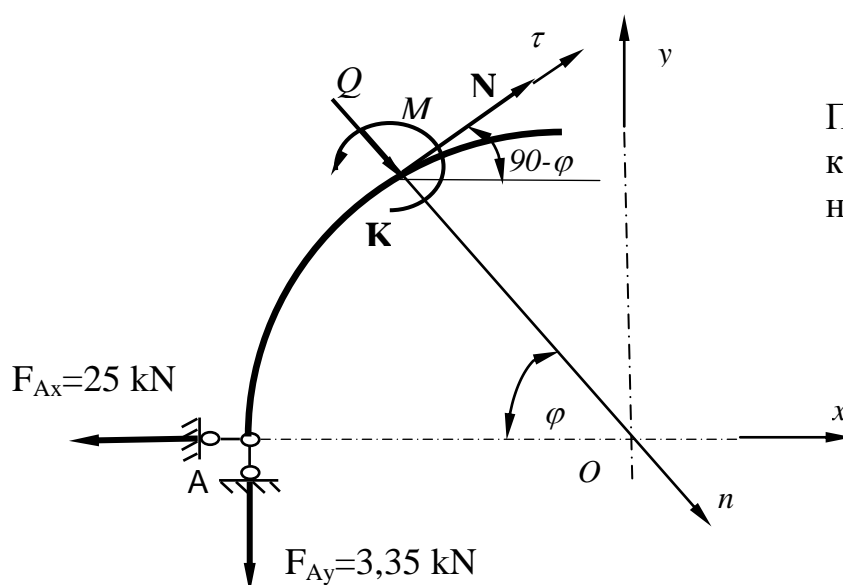
$$\begin{aligned} \sum F_{kx} = 0; \quad F_{Ax} + F_x = 0 \Rightarrow F_{Ax} = -F_x = -50 \cdot 0,5 = -25 \text{ kN}, \\ \sum F_{ky} = 0; \quad F_{Ay} + F_B - F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} = F_y - F_B = 50 \cdot 0,866 - 46,65 = -3,35 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0; \quad & -F_{Ay} \cdot 80 - F_x 40 \sin 30^\circ - F_y (40 - 40 \cos 30^\circ) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & -(-3,35) \cdot 80 - 50 \cdot 0,5 \cdot 0,5 - 50 \cdot 0,866(40 - 40 \cdot 0,866) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & 0 = 0!\end{aligned}$$

2. Определение внутренних сил

Для определения внутренних сил используем метод сечений. Рассмотрим равновесие левой части бруса относительно произвольного сечения



Пусть φ - полярный угол, который можно менять от нуля до 180° .

Введем подвижные оси координат τ и n , связанные с рассматриваемым сечением. Проецируя силы на эти оси, получим

$$\begin{aligned}\sum F_{kn} = 0; \quad & Q_y + F_{Ay} \sin \varphi - F_{Ax} \cos \varphi = 0 \Rightarrow Q_y = F_{Ax} \cos \varphi - F_{Ay} \sin \varphi \Rightarrow \\ \Rightarrow & Q_y = 25 \cos \varphi - 3,35 \sin \varphi,\end{aligned}$$

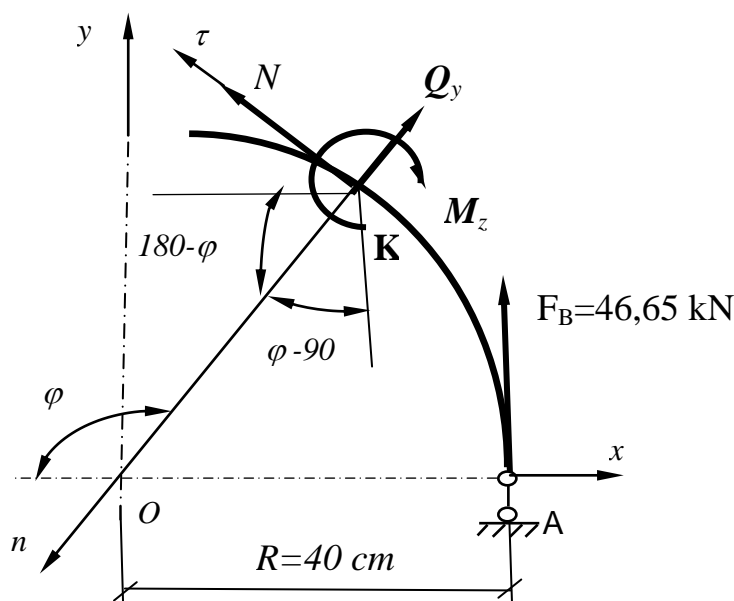
$$\begin{aligned}\sum F_{k\tau} = 0; \quad & N - F_{Ay} \cos \varphi - F_{Ax} \sin \varphi = 0 \Rightarrow N = F_{Ay} \cos \varphi + F_{Ax} \sin \varphi \Rightarrow \\ \Rightarrow & N = 3,35 \cos \varphi + 25 \sin \varphi.\end{aligned}$$

Составим уравнение моментов сил относительно рассматриваемого сечения

$$\begin{aligned}\sum M_K = 0; \quad & M_z + F_{Ay} \cdot (R - R \cos \varphi) - F_{Ax} \cdot R \sin \varphi = 0 \Rightarrow \\ M_z = F_{Ax} \cdot R \sin \varphi - F_{Ay} \cdot (R - R \cos \varphi) = & 25 \cdot 40 \sin \varphi - 3,35 \cdot 40 \cdot (1 - \cos \varphi) \Rightarrow \\ \Rightarrow M_z = & 1000 \sin \varphi - 134 \cdot (1 - \cos \varphi).\end{aligned}$$

Полученные формулы для внутренних сил справедливы для $0 \leq \varphi < 150^\circ$.

При $\varphi \geq 150^\circ$ рассмотрим равновесие части бруса справа от точки приложения внешней силы F



Составленные аналогичным образом, уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{kn} = 0; \quad -Q_y - F_B \cos(\varphi - 90^\circ) = 0 \Rightarrow Q_y = -F_B \cos(\varphi - 90^\circ) \Rightarrow -F_B \sin \varphi \Rightarrow$$

$$Q_y = -46,65 \sin \varphi,$$

$$\sum F_{k\tau} = 0; \quad N + F_B \sin(\varphi - 90^\circ) = 0 \Rightarrow N = -F_B \sin(\varphi - 90^\circ) \Rightarrow F_B \cos \varphi \Rightarrow$$

$$N = 46,65 \cos \varphi,$$

$$\sum M_K = 0; \quad -M_z - F_B \cdot [(R - R \cos(180^\circ - \varphi))] = 0 \Rightarrow M_z = -F_B \cdot R(1 + \cos \varphi) \Rightarrow$$

$$M_z = 46,65 \cdot 40(1 + \cos \varphi) = 1866(1 + \cos \varphi).$$

Окончательно имеем:

$$\text{при } 0 \leq \varphi < 150^\circ$$

$$Q_y = 25 \cos \varphi - 3,35 \sin \varphi$$

$$N = 3,35 \cos \varphi + 25 \sin \varphi$$

$$M_z = 1000 \sin \varphi - 134 \cdot (1 - \cos \varphi)$$

$$\text{при } \varphi \geq 150^\circ$$

$$Q_y = -46,65 \sin \varphi$$

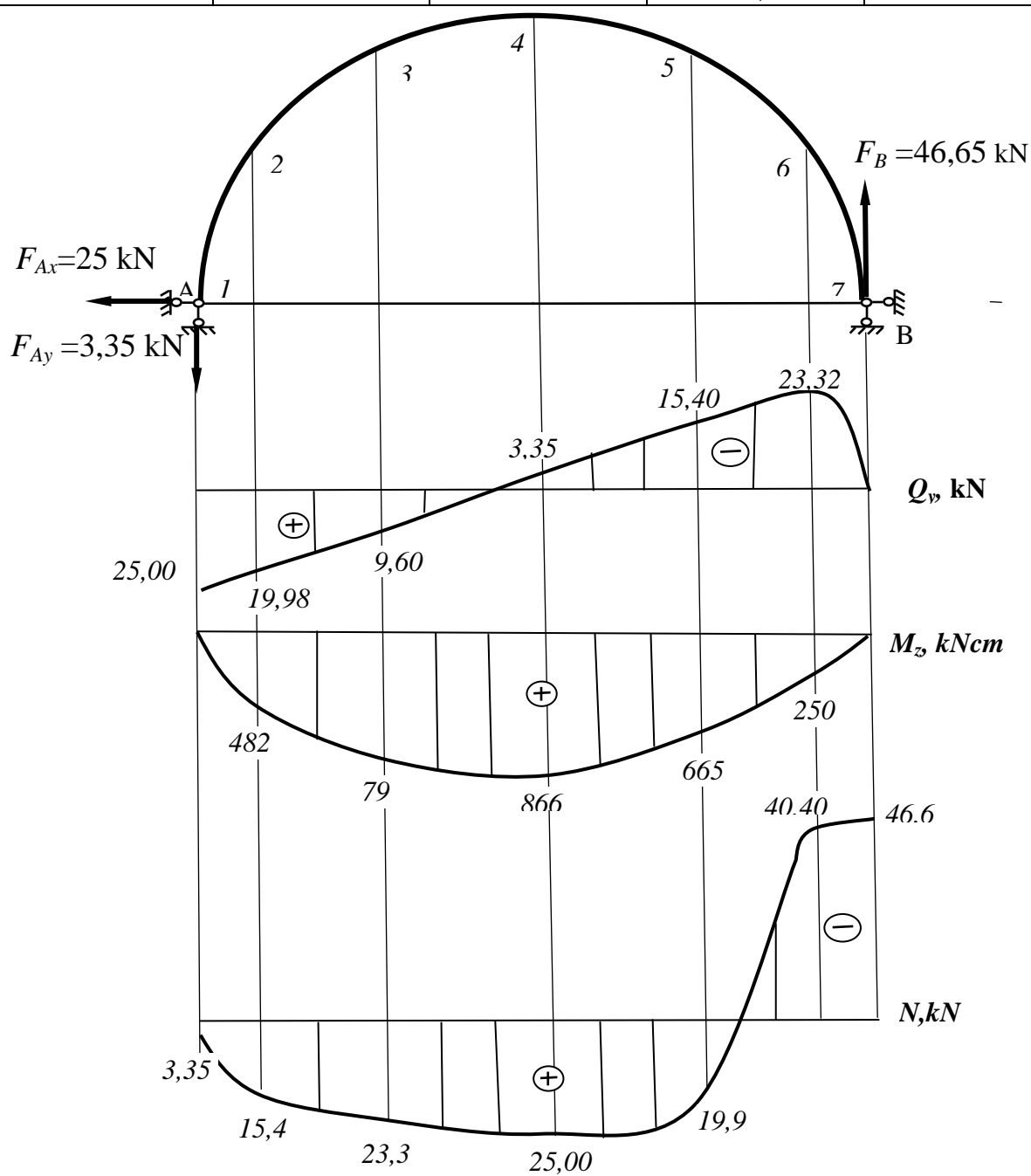
$$N = 46,65 \cos \varphi$$

$$M_z = 1866(1 + \cos \varphi).$$

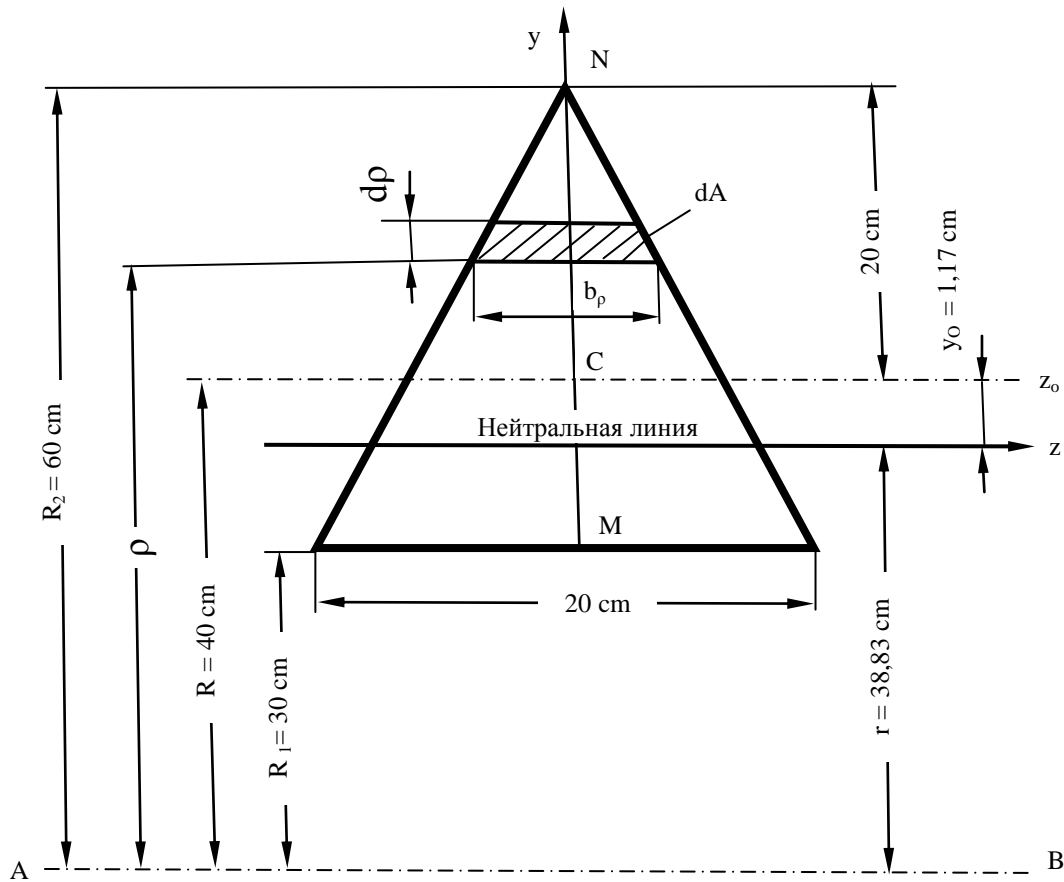
Вычисляем по найденным формулам N , Q_y и M_z , давая различные значения φ через 30° . Результаты вычислений представлены в таблице 19.1.

Таблица 19.1

N сечения	φ^0	Q_y , kN	N, kN	M_z , kN
1	0	25,00	3,35	0
2	30	19,98	15,40	482
3	60	9,60	23,32	799
4	90	-3,35	25,00	866
5	120	-15,40	19,98	665
6	150	-23,32	-40,40	250
7	180	0	-46,65	0



3. Определение радиуса кривизны r нейтрального слоя



Элементарная площадь поперечного сечения бруса

$$dA = b_{\rho} d\rho,$$

где ширину b_{ρ} находим из подобия треугольников

$$\frac{b_{\rho}}{20} = \frac{60 - \rho}{30} \Rightarrow b_{\rho} = (60 - \rho) \frac{20}{30} = \frac{2}{3}(60 - \rho),$$

(если $\rho=60$ то $b_{\rho}=0$, при $\rho=30$ имеем $b_{\rho} = \frac{2}{3}(60 - 30) = 20$ см).

Радиус кривизны определяем из уравнения

$$r = A / \int_{(A)} \frac{dA}{\rho},$$

учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_{(A)} \frac{dA}{\rho} &= \int_{(A)} \frac{b_{\rho} d\rho}{\rho} = \int_{30}^{60} \frac{(60 - \rho)}{\rho} d\rho = \frac{2}{3} \left[\int_{30}^{60} \frac{60}{\rho} d\rho - \int_{30}^{60} d\rho \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2}{3} [60 \cdot \ln \rho - \rho]_{30}^{60} = \frac{2}{3} [(60 \cdot \ln 60 - 60) - (60 \cdot \ln 30 - 30)] = 7,72 \end{aligned}$$

получим

$$r = A / 7,72 = 300 / 7,72 = \mathbf{38,83 \text{ см}},$$

где $A = \frac{1}{2} 20 \cdot 30 = 300 \text{ cm}^2$.

Координаты крайних точек поперечного сечения бруса

$$y_N = 60 - r = 60 - 38,83 = 21,17 \text{ cm}$$

$$y_M = 30 - r = 30 - 38,83 = -8,83 \text{ cm}.$$

Статический момент площади поперечного сечения бруса относительно нейтральной оси z

$$S_z = A \cdot y_o = 300 \cdot 1,17 = 351 \text{ cm}^3,$$

где

$$y_o = R - r = 40 - 38,83 = 1,17 \text{ cm}.$$

Вычисленное значение расстояния y_o от центра тяжести поперечного сечения (от центральной оси z_o) до нейтральной оси z можно оценить по приближенной формуле

$$y_o = \frac{I_{z_o}}{R \cdot A} = \frac{15000}{40 \cdot 300} = 1,25 \text{ cm}, \text{ что согласуется } y_o = 1,17 \text{ cm},$$

где $I_{z_o} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 15000 \text{ cm}^4$ – момент инерции поперечного сечения бруса относительно центральной оси z_o .

4. Определение нормальных напряжений

Из эпюры изгибающих моментов M_z видно, что нижние волокна кривого бруса растянуты, поэтому от изгиба в нижней точке поперечного сечения M будут положительные растягивающие нормальные напряжения, а в верхней точке N – отрицательные сжимающие напряжения

$$\sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{S_z} \cdot \frac{|y_M|}{r + y_M},$$

$$\sigma_N = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{S_z} \cdot \frac{|y_N|}{r + y_N},$$

при этом $r + y_M = R_1$, а $r + y_N = R_2$, где $y_M = -8,83 \text{ cm}$ и $y_N = 21,17 \text{ cm}$.

Сначала вычислим нормальные напряжения только от изгиба

$$\sigma_M = \frac{M_z}{S_z} \cdot \frac{|y_M|}{r + y_M} = \frac{M_z}{351} \cdot \frac{|-8,83|}{38,83 - 8,83} = 8,39 \cdot 10^{-4} M_z,$$

$$\sigma_N = -\frac{M_z}{S_z} \cdot \frac{|y_N|}{r + y_N} = -\frac{M_z}{351} \cdot \frac{|21,17|}{38,83 + 21,17} = -10,05 \cdot 10^{-4} M_z.$$

Суммарные напряжения от продольной силы N и изгибающего момента M_z в разных поперечных сечениях кривого бруса

Номер попереч. сечения бруса	Значен. прод. силы N	Напряж. от прод. силы	Значение изгиб. момента M_z	Напряжение от изгиба в $[N/cm^2]$		Суммарное напряжение в $[N/cm^2]$	
	в $[kN]$	в $[N/cm^2]$	в $[kNcm]$	Точка M	Точка N	Точка M	Точка N
2	15,40	51,3	482	404,4	-482,0	455,3	-430,7
3	23,32	77,3	799	670,4	-799,0	747,7	-721,7
4	25,00	83,3	866	726,6	-866,0	809,9	-782,7
5	19,98	66,6	665	558,0	-665,0	624,6	-598,4
6	-40,40	-134,7	250	209,8	-250,0	75,1	-384,7

Наиболее опасное поперечное сечение в точке 4, т.е в середине кривого бруса

$$\sigma_M = 809,9 \frac{N}{cm^2} - 809,9 \cdot 10^4 \frac{N}{m^2} = 8,1 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} = 8,1 MPa,$$

$$\sigma_N = -782,7 \frac{N}{cm^2} = -782,7 \cdot 10^4 \frac{N}{m^2} = -7,8 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} = -7,8 MPa.$$

Теоретические основы расчета криволинейных брусов

1. Дифференциальные зависимости между внутренними силами и нагрузкой в криволинейном брусе

Выделим из криволинейного бруса (Рис.1) бесконечно малый элемент (Рис.2), при этом нагрузку на брус разложим на радиальную интенсивностью p и касательную t составляющие.

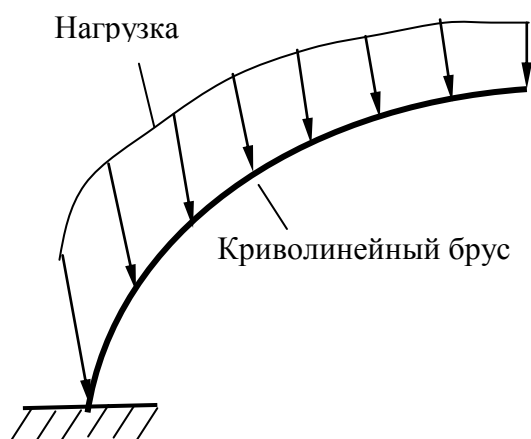


Рис.1

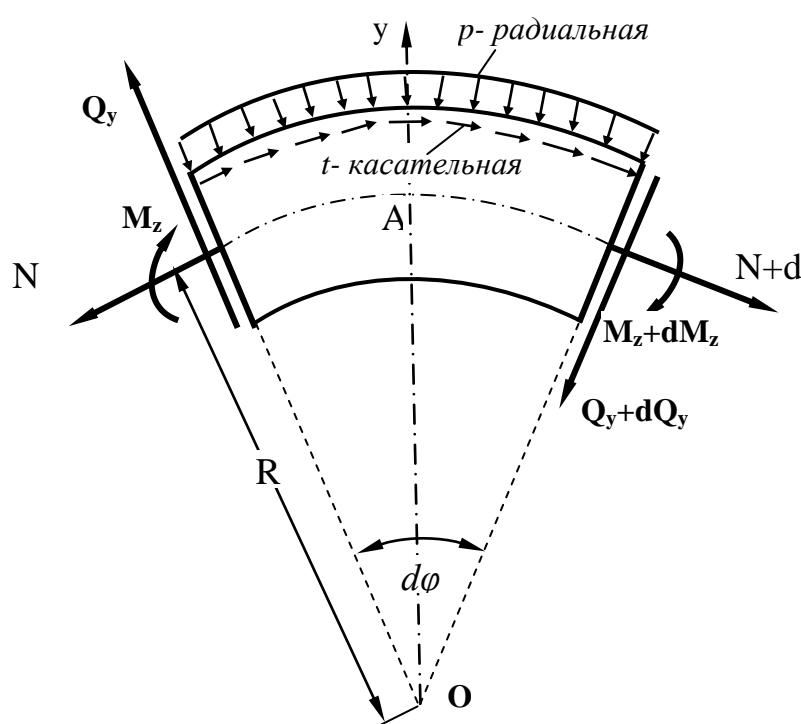


Рис.2

Составим уравнения равновесия элемента:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum M_O = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0; \quad Q_y \cdot R \cdot \operatorname{tg} \frac{d\varphi}{2} - M_z - (Q_y + dQ_y) \cdot R \cdot \operatorname{tg} \frac{d\varphi}{2} + (M_z + dM_z) = 0. \quad (2)$$

В виду малости угла $d\varphi$ $\operatorname{tg} \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$, а также отбрасывая слагаемое второго порядка малости $dQ_y \cdot R \cdot \operatorname{tg} \frac{d\varphi}{2}$, получим из (2)

$$2Q_y \cdot R \cdot \frac{d\varphi}{2} + dM_z = 0 \Rightarrow \frac{dM_z}{d\varphi} = -Q_y R$$

или

$$\frac{dM_z}{ds} = -Q_y, \quad (3)$$

где $ds = R \cdot d\varphi$ - длина элемента дуги (Рис.2).

Второе уравнение равновесия согласно (1) будет

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$-p \cdot ds + Q_y \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} - M_z - (Q_y + dQ_y) \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} - N \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} - (N + dN) \sin \frac{d\varphi}{2} = 0 \quad (4)$$

Ввиду малости аргумента выражения $\cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1$, $\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$, и отбрасывая слагаемые второго порядка малости $dN \cdot \sin \frac{d\varphi}{2}$, из (4)

получим

$$-pds - dQ_y - N \cdot d\varphi = 0.$$

Разделив на $d\varphi$, получим

$$-p \frac{ds}{d\varphi} + \frac{dQ_y}{d\varphi} + N = 0 \Rightarrow p \cdot R + \frac{dQ_y}{d\varphi} + N = 0$$

или

$$p + \frac{dQ_y}{ds} + \frac{N}{R} = 0, \quad (5)$$

где $ds = R \cdot d\varphi$.

Третье уравнение согласно (1) выглядит

$$\sum M_O = 0; \quad -t \cdot ds \cdot R - M_z + N \cdot R - (N + dN) \cdot R + (M_z + dM_z) = 0,$$

которое после упрощения будет

$$t - \frac{1}{R} \cdot \frac{dM_z}{ds} + \frac{dN}{ds} = 0. \quad (6)$$

Если в уравнениях (3, 5 и 6) положить $R = \infty$, $ds = dx$, то

$$\frac{dM_z}{ds} = Q_y, \quad \frac{dQ_y}{dx} = -p, \quad \frac{dN}{ds} = -t. \quad (7)$$

Первые два уравнения совпадают с уравнениями для прямого бруса, а третье уравнение выражает зависимость между интенсивностью продольной нагрузки t и внутренней продольной силой N .

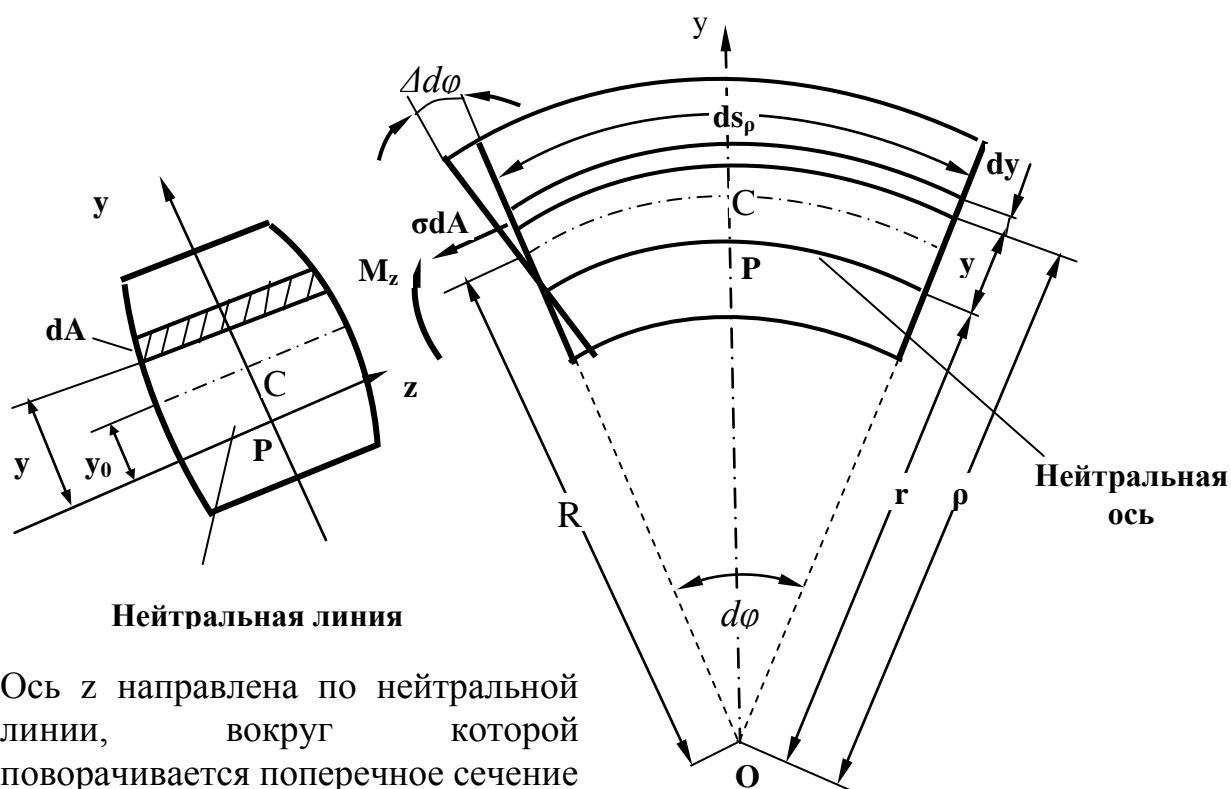
Заметим, что дифференциальная зависимость между M_z и Q_y для криволинейных брусков по виду остается такой же, как и для прямых брусков, тогда как зависимость между Q_y и p вливанием нормальной продольной силы N .

2. Определение напряжений в криволинейном бруске

В отличие от прямого бруса продольная нормальная сила вызывает в криволинейном бруске еще и изгибающие моменты.

Рассмотрим чистый изгиб, когда поперечные силы $Q_y=0$ и справедлива гипотеза плоских сечений.

Рассмотрим элемент бруса длиной ds



Ось z направлена по нейтральной линии, вокруг которой поворачивается поперечное сечение

Относительное удлинение волокна, находящегося на расстоянии y от нейтральной линии (Рис.3)

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta ds_\rho}{ds_\rho} = \frac{y \cdot \Delta d\varphi}{\rho \cdot d\varphi}, \quad (8)$$

где

$\Delta d\varphi$ - изменение угла $d\varphi$ при повороте сечения относительно нейтральной линии,
 $ds_\rho = \rho \cdot d\varphi$ - длина волокна кривого бруса, которая меняется по высоте сечения до деформации в отличие от прямого бруса, где она $=\text{const}$ до деформации (Рис.3).

Учитывая, что $\rho = r + y$ (Рис.3) получим

$$\varepsilon_\rho = \frac{y \cdot \Delta d\varphi}{(r + y) \cdot d\varphi}. \quad (9)$$

Нормальные напряжения с учетом формулы (9) определяются по формуле

$$\sigma = E\varepsilon_\rho = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r + y}. \quad (10)$$

Учитывая, что при чистом изгибе нормальная сила $N=0$, можно записать (Рис.3)

$$N = \int_{(A)} \sigma \cdot dA = 0 \quad (11)$$

или, учитывая формулу (9) для нормальный напряжений, имеем

$$N = \int_{(A)} E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r + y} dA = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_{(A)} \frac{y}{r + y} dA = 0 \Rightarrow \text{откуда}$$

$$\int_{(A)} \frac{y}{r + y} dA = 0. \quad (12)$$

Из последнего равенства (12) видно, что нейтральная ось (линия) не проходит через центр тяжести, как это имеет место в случае прямого бруса.

Согласно уравнению равновесия моментов относительно точки Р на нейтральной оси момент распределенных нормальных сил $\sigma \cdot dA$ должен уравновесится изгибающим моментом M_z (Рис.3), действующим в этом сечении

$$M_z = \int_{(A)} y \cdot \sigma dA = \int_{(A)} y \cdot E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r + y} dA = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_{(A)} \frac{y^2}{r + y} dA. \quad (13)$$

Последний интеграл в выражении (13) можно представить, учитывая выражение (12), в виде

$$\int_{(A)} \frac{y^2}{r + y} dA = \int_{(A)} y dA - r \int_{(A)} \frac{y}{r + y} dA = \int_{(A)} y dA = S_z = A \cdot y_0, \quad (14)$$

где S_z – статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной линии (y_0 – расстояние от центра тяжести поперечного сечения до нейтральной линии).

Тогда уравнение (13) с учетом (14)

$$M_z = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} S_z \Rightarrow$$

$$\text{и} \Rightarrow \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M_z}{S_z}. \quad (15)$$

Окончательно нормальные напряжения по формуле (10) с учетом (15) равны

$$\sigma = \frac{M_z}{S_z} \cdot \frac{y}{r+y} = \frac{M_z}{S_z} \cdot \frac{y}{\rho}, \quad (16)$$

где (Рис.3)

$$\rho = r + y. \quad (17)$$

Формула (16) для нормальных напряжений в криволинейном бруске значительно отличается от аналогичной формулы в случае прямого бруса.

Эпюра нормальных напряжений (Рис.4) для криволинейного бруса изменяется по гиперболическому закону (тогда как для прямого бруса – по линейному закону)

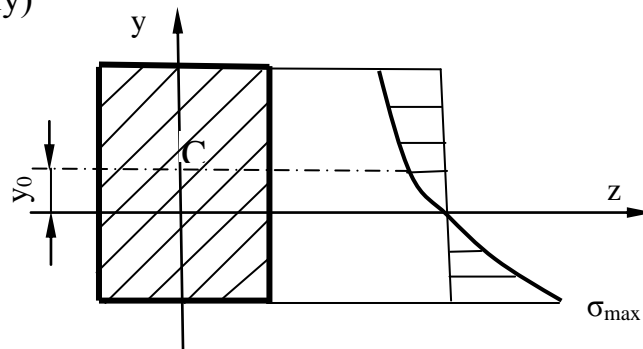


Рис.4

3. Определение положения нейтральной линии (оси)

Преобразуем выражение (12), определяющее положение нейтральной линии (оси) (Рис.5)

$$\int_{(A)} \frac{y}{r+y} dA = \int_{(A)} \frac{\rho-r}{r+y} dA = \int_{(A)} \frac{\rho-r}{\rho} dA = \int_{(A)} dA - \int_{(A)} \frac{r}{\rho} dA = 0$$

откуда

$$r = \frac{\int_{(A)} dA}{\int_{(A)} \frac{dA}{\rho}} = \frac{A}{\int_{(A)} \frac{dA}{\rho}}. \quad (18)$$

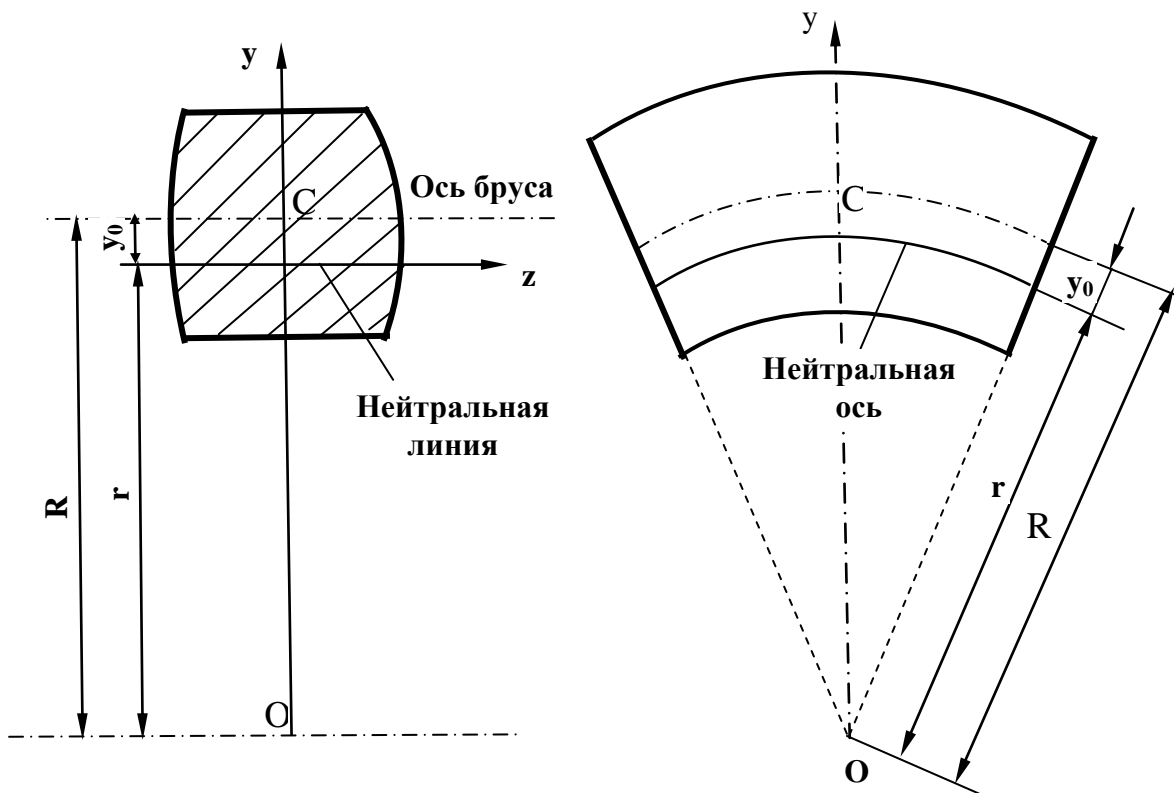


Рис.5

3.1 В случае прямоугольного поперечного сечения (Рис.6)

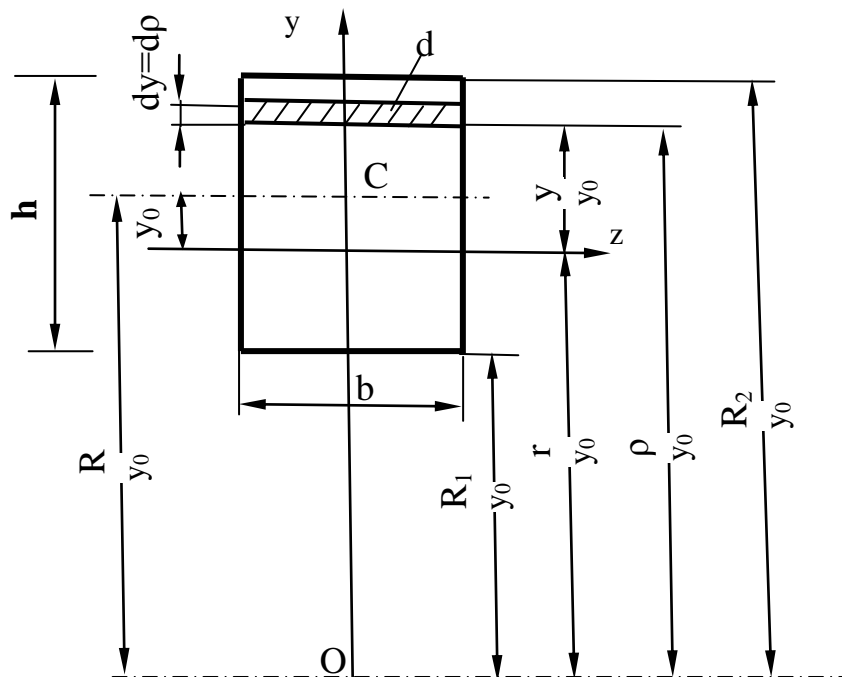
$$dA = b \cdot dy = b \cdot d\rho, \quad A = b \cdot h,$$

Решение интеграла в формуле (18) будет

$$\int_{(A)} \frac{dA}{\rho} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{b \cdot d\rho}{\rho} = b \cdot \ln \rho \Big|_{R_1}^{R_2} = b \cdot (\ln R_1 - \ln R_2) = b \cdot \ln \frac{R_1}{R_2}$$

и окончательно

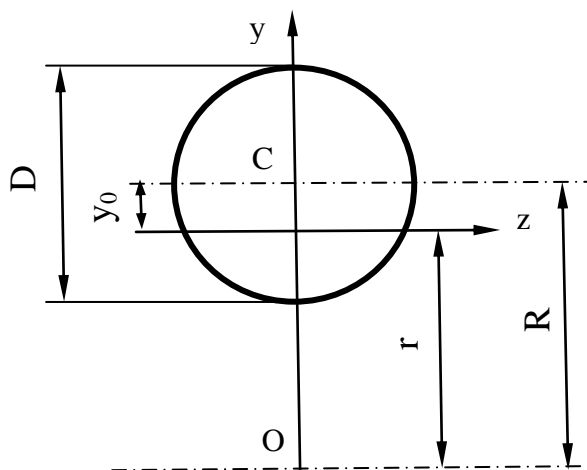
$$r = \frac{b \cdot h}{b \cdot \ln \frac{R_1}{R_2}} = \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$$



$y_0 = R - r$, где R – радиус кривизны

Рис.6

3.2 В случае круглого поперечного сечения (Рис.7)

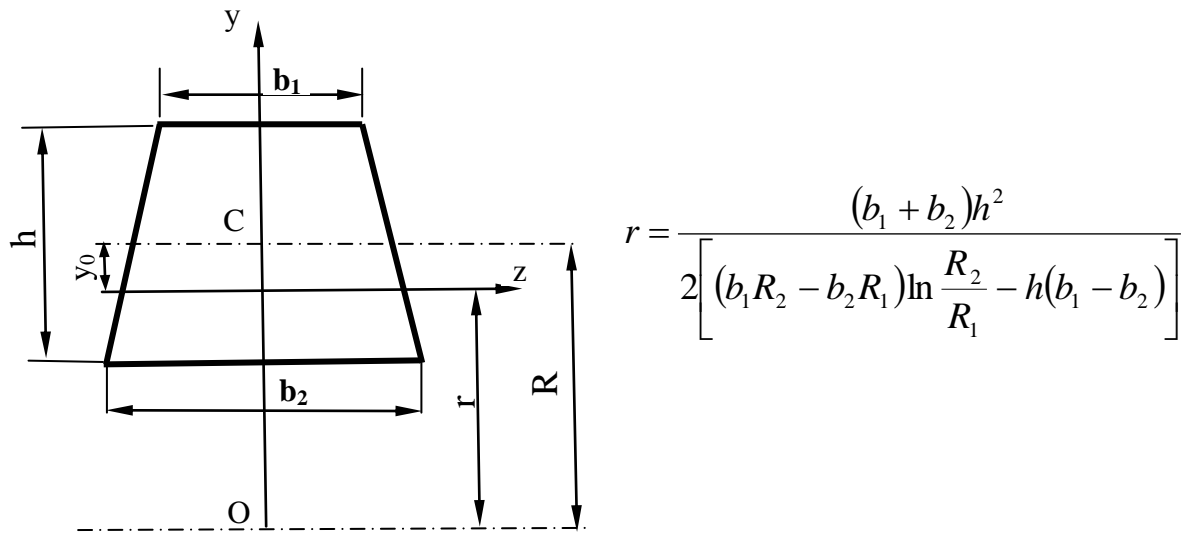


$$r = \frac{D^2}{8 \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{D^2}{4}} \right)}$$

$y_0 = R - r$, где R – радиус кривизны

Рис.7

3.2 В случае трапецевидного поперечного сечения (Рис.8)



$$r = \frac{(b_1 + b_2)h^2}{2 \left[(b_1 R_2 - b_2 R_1) \ln \frac{R_2}{R_1} - h(b_1 - b_2) \right]}$$

$y_0 = R - r$, где R – радиус кривизны

Рис.8

Если одновременно действуют изгибающий момент M_z и продольная сила N , то нормальные напряжения будут определяться как сумма

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{S_z} \cdot \frac{y}{r + y} \quad (19)$$

3. Пример расчета

Рассмотрим численный пример расчета крюка (Рис.9). Поперечное сечение можно рассматривать как трапецию с размерами:

$b_1 = 4 \text{ cm}$, $b_2 = 1 \text{ cm}$, $h = 9 \text{ cm}$, $R_1 = 3 \text{ cm}$, $R_2 = R_1 + h = 3 + 9 = 12 \text{ cm}$.

Усилие на крюке $F = 25 \text{ kN}$.

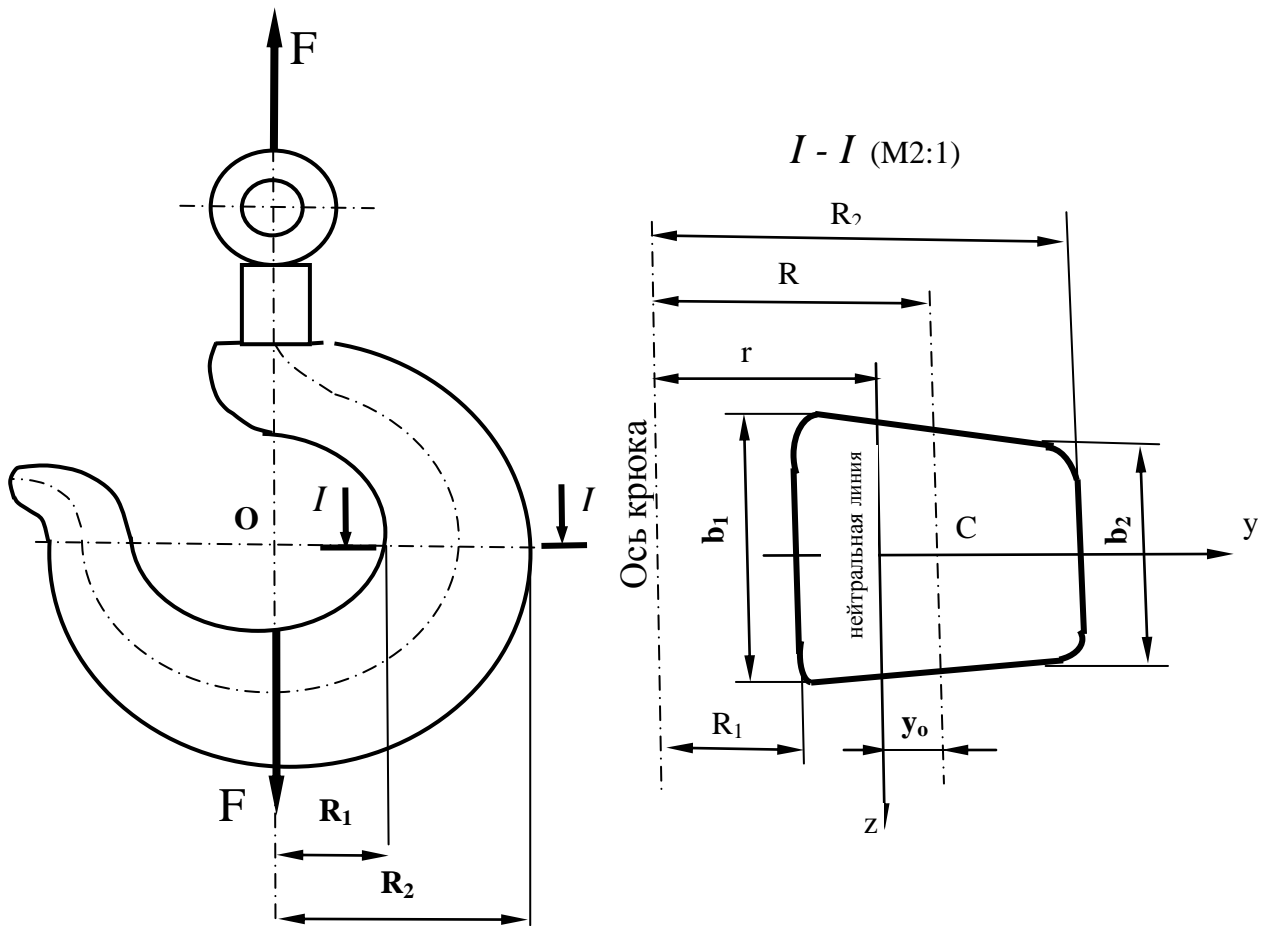


Рис.9

Наибольший изгибающий момент будет действовать в сечении I - I и равен $M_z = F \cdot R$,

где радиус кривизны бруса R (Рис.9) равен

$$R = R_1 + y_C = R_1 + \frac{(b_1 + 2b_2) \cdot h}{(b_1 + b_2) \cdot 3} = 3 + \frac{(4 + 2 \cdot 1) \cdot 9}{(4 + 1) \cdot 3} = 3 + 3,6 = 6,6 \text{ cm}$$

где y_C - координата центра тяжести трапеции относительно нижнего основания (Рис.10).

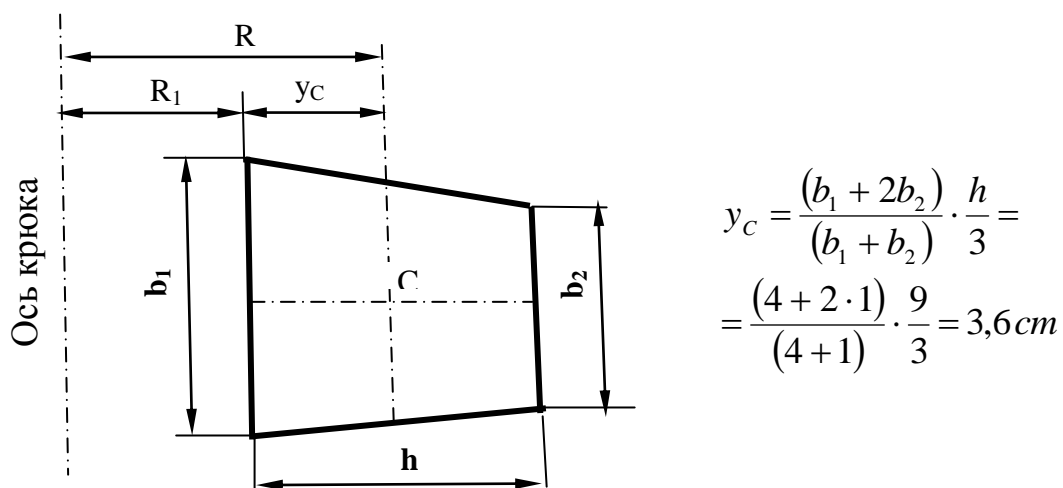


Рис.10

Радиус кривизны нейтрального слоя (см. 3.2, Рис.8)

$$r = \frac{(b_1 + b_2)h^2}{2 \left[(b_1 R_2 - b_2 R_1) \ln \frac{R_2}{R_1} - h(b_1 - b_2) \right]} = \frac{(4 + 1) \cdot 9^2}{2 \left[(4 \cdot 12 - 1 \cdot 3) \ln \frac{12}{3} - 9 \cdot (4 - 1) \right]} = 5,72$$

см.

Величина смещения нейтрального слоя относительно центра тяжести (Рис.9)

$$y_0 = R - r = 6,60 - 5,72 = 0,88 \text{ см.}$$

Площадь поперечного сечения

$$A = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2} = \frac{(4 + 1) \cdot 9}{2} = 22,5 \text{ cm}^2.$$

Статический момент поперечного сечения относительно нейтральной линии

$$S_z = A \cdot y_0 = 22,5 \cdot 0,88 = 19,8 \text{ cm}^3.$$

Координаты крайних точек поперечного сечения (Рис.11)

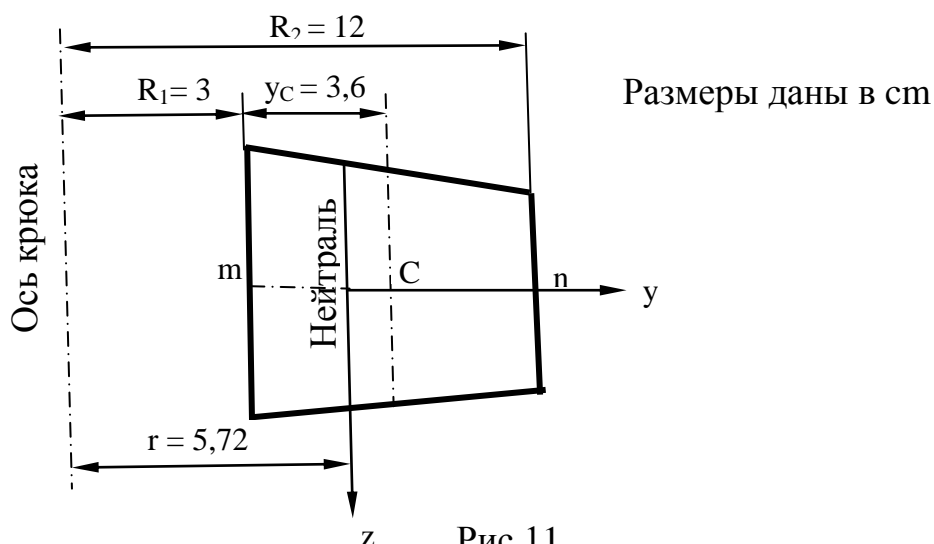


Рис.11

$$y_n = R_2 - r = 12,00 - 5,72 = \mathbf{6,28 \text{ cm}},$$

$$y_m = R_1 - r = 3,00 - 5,72 = \mathbf{-2,72 \text{ cm}}.$$

Внутренние силы в поперечном сечении $I - I$:

нормальная сила - $N = F = \mathbf{25 \text{ kN}},$

изгибающий момент - $M_z = F \cdot R = 25 \cdot 6,6 = \mathbf{165 \text{ kN} \cdot \text{cm}} .$

Находим нормальные напряжения в крайних точках поперечного сечения (фибрах) по формуле (19)

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{N}{A} - \frac{M_z}{S_z} \cdot \frac{y_m}{(r + y_m)} = \frac{25 \cdot 10^3}{22,5} - \frac{165 \cdot 10^3}{19,8} \cdot \frac{-2,72}{(5,72 + 2,72)} = \\ &= 1110 + 7560 = 8670 \text{ N/cm}^2 = 8670 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 = \mathbf{86,7 \text{ Мпа}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{N}{A} - \frac{M_z}{S_z} \cdot \frac{y_n}{(r + y_n)} = \frac{25 \cdot 10^3}{22,5} - \frac{165 \cdot 10^3}{19,8} \cdot \frac{6,28}{(5,72 + 6,28)} = \\ &= 1110 - 4360 = - \mathbf{3250 \text{ N/cm}^2} = - 3250 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 = - \mathbf{32,5 \text{ Мпа}}. \end{aligned}$$

NB! Знак изгибающего момента определится из физических соображений. В данном случае в крайней точке m – растягивающие напряжения, а в точке n – сжимающие напряжения. Поэтому минус перед величиной M_z означает, что при заданном направлении M_z и $y > 0$ формула должна давать отрицательное значение нормального напряжения в точке n от изгиба (сжатие верхних волокон бруса).

Криволинейные брусья разделяют на две группы: брусья малой кривизны

$\frac{R}{h} > 5$ и брусья большой кривизны $\frac{R}{h} < 5$. В данном случае

$$\frac{R}{h} = \frac{6,6}{9} = 0,73 < 5$$

Литература

1. Винокуров, А.И. *Сборник задач по сопротивлению материалов*. М., Высшая школа, 1990, 383 стр.
2. Дарков, А.В. *Сопротивление материалов*. М., Высшая школа, 1996, 741 стр.
3. Снитко, Н.К. *Сопротивление материалов*. М., Высшая школа, 1980, 431 стр.
4. Биргер, И.А., Мавлютов, Р.Р. *Сопротивление материалов*. М., Наука, 1986, 642 стр.
5. Феодосьев, В.И. *Сопротивление материалов*. М., Высшая школа, 1984, 543 стр.
6. Тимошенко, С.П. *Сопротивление материалов*. М., Высшая школа, 1986, 423 стр.
7. P.Stepin. *Tugevusõpetus*. Tln., Valgus, 1987.
8. A.Jürgenson. *Tugevusõpetus*. Tln., Valgus, 1985.
9. Ollik, O.Roos. *Tugevusõpetus*. Tln., Valgus, 1965.
10. Shanley, F.R., *Strength of materials*, New York, McGraw-Hill Book Company 1957.
11. Timoshenko, S., Young, D.H., *Elements of strength of materials*, Princeton, D. van Nostrand Company, Inc. 1962.
12. Metsaveer, J., Raukas, U., *Varda tugevusarvutus*, Tallinn, TPI 1987;
13. Metsaveer, J., Raukas, U., *Varda sisejõud ja pinged*, Tallinn, TPI 1987;
14. Metsaveer, J., Raukas, U., *Varda deformatsioonid ja siirded*, Tallinn, TPI 1988;
15. Metsaveer, J., Raukas, U., *Varda mittelineaarsed ülesanded ja dünaamika*, Tallinn, TPI 1988;

TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL
Virumaa Kolledž

Kodutöö nr.
õppaines **TEHNILINE MEHAANIKA**

Autor:

Matrikli nr:

Rühm:

Juhendaja: G.Arjassov

õ.a 2007/2008

TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL
Virumaa Kolledž

Kodutöö nr.
õppaines **RAKENDUSMEHAANIKA**

Autor:

Matrikli nr:

Rühm:

Juhendaja: G.Arjassov

õ.a 2007/2008