Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный архитектурно-строительный
университет»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Методические указания
к расчетно-графической работе

Составители Е.В.Евтюшкин, В.Г. Симоненко

Томск 2014

Принцип Даламбера: методические указания к расчетно-графической работе / Сост. Е.В.Евтюшкин, В.Г. Симоненко. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2014. − 45 с.

Рецензент к.ф.-м.н. М.В. Геттингер
Редактор к.т.н. В.Г. Симоненко

Методические указания к расчетно-графической работе по дисциплине Б2.Б.7, С2.Б.6 «Теоретическая механика» для студентов обучающихся по направлению подготовки 270000 «Строительство» очной формы обучения.

Печатаются по решению методического семинара кафедры теоретической механики № 2 от 19 октября 2013 г.

Срок действия
с 01.09.2014
по 01.09.2019

Оригинал-макет подготовлен авторами

Подписано в печать 08.05.2014 г.
Формат 60×90/16. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 2,37. Тираж 40 экз. Заказ №

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одной из математических наук, и в том, что не имеет связи с математикой.

Леонардо да Винчи

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены в помощь студентам (специалистам и бакалаврам), обучающимся по направлениям 270000 «Строительство», «Строительство уникальных зданий и сооружений», 190100 «Наземные транспортно-технологические комплексы», 190600 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» к изучению темы «Принцип Даламбера (метод кинетостатики)».

В данных методических указаниях излагается необходимая теория, приводится пример решения задач и задания к выполнению расчётно-графической работы (РГР).

В процессе выполнения РГР формируются следующие общекультурные и профессиональные компетенции, предусмотренные Федеральным государственным общеобразовательным стандартом (ФГОС-3):

ОК-1 – владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения;

ОК-8 – осознание социальной значимости своей будущей профессии, обладание высокой мотивацией к выполнению профессиональной деятельности;

ПК-1 – способность использовать законы и методы математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении профессиональных задач.

Работа над РГР способствует приобретению студентом

− **знаний** основных законов движения материальных тел и механических систем, основных видов механизмов, способов математического описания движения материальных тел и механических систем, методов расчёта кинематических характеристик механизмов;

− **умений** ставить и решать задачи о движении материальных тел, использовать математические методы в технических приложениях, применять законы и методы теоретической механики для расчётов механизмов, пользоваться литературой по направлению своей профессии;

− **навыков** публичной речи, аргументации, ведения дискуссии и полемики, практического анализа различного рода рассуждений; использовании методов построения математической модели типовых профессиональных задач и содержательной интерпретации полученных результатов; владения основными методами исследования элементов конструкций при сложном движении; использования инженерной терминологии.

Приведённые в указаниях контрольные вопросы позволят студенту самостоятельно оценить степень своего понимания темы и свою готовность к защите расчетно-графической работы.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1.1. Сила инерции материальной точки

Пусть тело I действует на точку M с силой «$\overline{F}$» (рис.1). Согласно второму закону Ньютона

$$\overline{F} = m\overline{a}\,.$$

По принципу равенства сил действия и противодействия (третий закон Ньютона) точка M будет действовать на тело с силой «$-\overline{F}$» (рис.1). Обозначим

$$\overline{\Phi} = -\overline{F}\ .$$

Силой инерции материальной точки (Даламберовой силой инерции) ***называется вектор***

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a}\ ,$$

(1)т.е. ***вектор, равный по модулю произведению массы точки на её ускорение и направленный в сторону, противоположную ускорению этой точки***. Сила инерции $\overline{\Phi}$ материальной точки M приложена как реальная сила к телу I, которое сообщает ей ускорение.

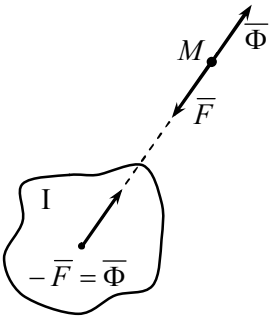

Рис. 1

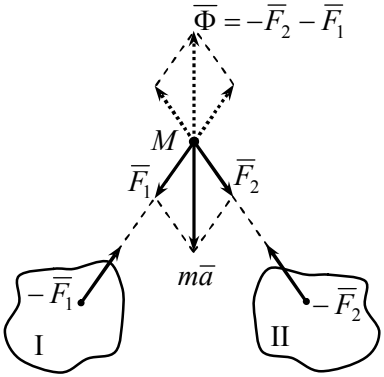

Рис. 2

Пусть теперь на точку M действуют тела I и II (рис.2), следовательно:

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a} = -\overline{F}_1 - \overline{F}_2\,,$$

так как

$$m\overline{a} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2\,.$$

В этом случае сила инерции $\overline{\Phi}$ точки является геометрической суммой двух реальных сил «$-\overline{F}_1$» и «$-\overline{F}_2$», с которыми наша точка действует на тела I и II. Очевидно, что операция сложения

двух сил «$-\overline{F}_1$» и «$-\overline{F}_2$», приложенных к различным телам I и II может иметь только геометрический смысл.

Итак, сила инерции материальной точки при приложении её к данной точке *M* фиктивна, она равна геометрической сумме нескольких реальных сил, приложенных к телам, действующим на эту точку и вызывающих или изменяющих ускорение этой точки.

В таком смысле термин «сила инерции» был впервые введен Иоганном Кеплером как «присущая всякому телу сила сопротивления всему, что стремится изменить состояние его движения». Так понимал силу инерции и Ньютон и дальнейшие исследователи: Жан Виктор Понселе (1826 г.) и Жан-Мари Дюамель (1845 г.), также определяющий силу инерции как противодействие ускоряемого тела, приложенное к ускоряющему.

Шарль-Эжен Делоне, впервые предложивший прикладывать силу инерции данной точки к этой же точке, подчеркивал, что эта операция носит условный характер.

Итак, силы инерции реальны, если они приложены к телам, вызывающим или изменяющим движение данной точки *M*, если же сила инерции будет приложена к точке *M*, а не к этим телам, то в этом случае она будет фиктивна. Если бы сила инерции на самом деле реально была приложена к точке *M*, она бы уравновесила все прочие силы, действующие на точку, и привела бы точку *M* в равновесие, в результате чего эта точка находилась бы в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения относительно выбранной инерциальной системы отсчета.

1.2. Принцип Даламбера для материальной точки

Дифференциальное уравнение движения материальной точки под действием приложенных к точке активных и реактивных сил имеет вид

$$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{R}\,, \qquad (2)$$

где $\overline{F}$ − равнодействующая всех активных сил,

$\overline{R}$ − равнодействующая сил реакции.

Если перенести все слагаемые (2) в правую часть и учесть (1) получим:

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi} = 0\,. \qquad (3)$$

Уравнение (3) выражает принцип Даламбера для точки: ***если в каждый момент времени к действующим на движущуюся точку активным силам и силам реакции добавить силу инерции точки, то полученная система сил будет уравновешенной системой сил.***

Принцип Даламбера позволяет решать динамические задачи с помощью уравнений статики.

Так как $\{\overline{F}, \overline{R}, \overline{\Phi}\}$ является системой сходящихся сил, то уравнение (3) в проекциях на оси декартовой системы координат примет вид:

$$\begin{aligned} F_x + R_x + \Phi_x &= 0\,, \\ F_y + R_y + \Phi_y &= 0\,, \\ F_z + R_z + \Phi_z &= 0\,. \end{aligned} \qquad (4)$$

Ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета можно разложить на составляющие по осям декартовой системы координат, а также на касательное и нормальное ускорения в естественной системе координат, и, в случае сложного движения, состоящего из относительного и переносного движений, на относительное ускорение, переносное ускорение и ускорение Кориолиса. Соответственно силу инерции $\overline{\Phi}$ можно разложить на составляющие:

$$\overline{\Phi} = \Phi_x \overline{i} + \Phi_y \overline{j} + \Phi_z \overline{k},$$
$$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_\tau + \overline{\Phi}_n, \qquad (5)$$
$$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_r + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_c.$$

Касательная и нормальная составляющие силы инерции:

$$\overline{\Phi}_\tau = -m\overline{a}_\tau,$$
$$a_\tau = \frac{dV}{dt},$$
$$\overline{\Phi}_n = -m\overline{a}_n,$$
$$a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

Переносная и относительные силы инерции, а также сила инерции Кориолиса через ускорения выражаются соответственно:

$$\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e,$$
$$\overline{\Phi}_r = -m\overline{a}_r,$$
$$\overline{\Phi}_c = -m\overline{a}_c.$$

1.3. Принцип Даламбера для механической системы

Рассмотрим движущуюся систему n материальных точек. Обозначим через m_k массу k-й точки M_k, её ускорение через $\overline{a}_k$. К каждой точке системы в общем случае приложены равнодействующая $\overline{F}_k$ всех активных сил и равнодействующая $\overline{R}_k$ реакций связи. Применяя принцип Даламбера к этой точке, т.е. формально прикладывая к ней силу инерции $\overline{\Phi}_k$, получим

$$\overline{F}_k + \overline{R}_k + \overline{\Phi}_k = 0, \qquad (6)$$

где $\overline{\Phi}_k = -m\overline{a}_k$ – сила инерции k-й точки.

Сложим почленно все уравнения (6) для всех точек системы

$$\sum \overline{F}_k + \sum \overline{R}_k + \sum \overline{\Phi}_k = 0 . \qquad (7)$$

В уравнении (7):

$\sum \overline{F}_k = \overline{F}$ – главный вектор всех внешних активных сил, приложенных к системе (сумма всех внутренних сил по их свойству равна нулю);

$\sum \overline{R}_k = \overline{R}$ – главный вектор реакций связей;

$\sum \overline{\Phi}_k = \overline{\Phi}$ – главный вектор сил инерции.

Учитывая эти обозначения, формула (7) примет вид

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi} = 0 . \qquad (8)$$

Выражение (8) представляет собой принцип Даламбера для механической системы: ***в каждый момент времени сумма главных векторов активных сил, сил реакций и сил инерций движущейся механической системы эквивалента нулю.***

Возьмем произвольную точку O пространства как центр приведения. Проведем из него к точке M_k радиус-вектор $\overline{r}_k$. Умножая каждое из уравнений (6) векторно на соответствующий радиус-вектор $\overline{r}_k$ и складывая их, получим

$$\sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k + \sum \overline{r}_k \times \overline{R}_k + \sum \overline{r}_k \times \overline{\Phi}_k = 0 . \qquad (9)$$

В полученной формуле обозначим:

$\sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k = \overline{M}_O^F$ – главный момент всех активных сил, приложенных к системе;

$\sum \overline{r}_k \times \overline{R}_k = \overline{M}_O^R$ – главный момент всех сил реакций;

$\sum \overline{r}_k \times \overline{\Phi}_k = \overline{M}_O^\Phi$ – главный момент всех сил инерции.

Учитывая эти обозначения, формула (9) примет вид

$$\overline{M}_O^F + \overline{M}_O^R + \overline{M}_O^\Phi = 0 . \qquad (10)$$

Таким образом, ***в каждый момент времени сумма главных моментов активных сил, реакций связей и сил инерции движущейся механической системы эквивалентна нулю.***

В декартовой системе координат выражения (9), (10) примут вид

$$\left.\begin{aligned} &F_x + R_x + \Phi_x = 0, \\ &F_y + R_y + \Phi_y = 0, \\ &F_z + R_z + \Phi_z = 0, \\ &M_{Ox}^F + M_{Ox}^R + M_{Ox}^\Phi = 0, \\ &M_{Oy}^F + M_{Oy}^R + M_{Oy}^\Phi = 0, \\ &M_{Oz}^F + M_{Oz}^R + M_{Oz}^\Phi = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Движение твердого тела вполне определяется этими шестью уравнениями (11). Если система состоит из нескольких тел, то для каждого из них составляется соответствующая система уравнений (11).

1.4. Приведение сил инерции точек твердого тела к простейшему виду

Систему сил инерции точек твердого тела согласно теореме Пуансо можно привести к некоторому центру приведения. Обычно в динамике за центр приведения выбирают центр масс тела, хотя им может быть любая точка пространства. Выберем за центр приведения точку C (центр масс тела). Тогда в результате приведения получится главный вектор сил инерции $\overline{\Phi}$

$$\overline{\Phi} = \sum \overline{\Phi}_k = -\sum m_k \overline{a}_k \qquad (12)$$

и пара сил инерции с моментом $\overline{M}_C^\Phi$, равным главному моменту сил инерции относительно центра масс

$$\overline{M}_C^\Phi = -\sum \overline{r}_k \times m_k \overline{a}_k, \qquad (13)$$

где $\overline{r}_k$ – радиус-векторы, соединяющие все точки тела с центром масс.

Из статики известно, что главный вектор сил, в том числе и сил инерции, не зависит от выбора центра приведения. Определим его. Количество движения механической системы по определению:

$$\sum m_k V_k = M\overline{V}_C .$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\sum m_k \frac{d\overline{V}_k}{dt} = M\frac{d\overline{V}_C}{dt}$$

или

$$\sum m_k \overline{a}_k = M\overline{a}_C .$$

Подставляя полученную формулу в (12), получим главный вектор сил инерции твердого тела при любом виде движения этого тела

$$\overline{\Phi} = -M\overline{a}_C .$$

Главный момент сил инерции твердого тела зависит и от центра приведения и от вида движения этого тела. Рассмотрим, как определяется главный момент сил инерции при различных видах движения твердого тела.

1.4.1. Поступательное движение твердого тела

Если тело движется поступательно, то согласно теореме о поступательном движении твердого тела, ускорения всех его точек равны между собой как векторы и, следовательно, равны ускорению его центра масс. Отсюда следует, что силы инерции всех точек представляют систему параллельных сил, направленных в одну сторону. Такая система сил приводится к одной равнодействующей силе, равной главному вектору

$$\overline{\Phi} = -M\overline{a}_C .$$

Главный момент инерции в этом случае будет равным нулю. И действительно, запишем выражение (13):

$$\overline{M}_C^{\Phi} = -\sum \overline{r}_k \times m_k \overline{a}_k = -\sum \overline{r}_k \times m_k \overline{a}_C =$$

$$= -\sum \bar{r}_k m_k \times \bar{a}_C = -M\bar{r}_C \times \bar{a}_C = 0\,,$$

т.к. радиус-вектор

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M}$$

относительно центра масс равен нулю.

Окончательно, при поступательном движении все силы инерции приводятся к виду:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Phi} &= -M\bar{a}_C\,, \\ \bar{M}_C^{\Phi} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

1.4.2. Вращение твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг неподвижной оси, перпендикулярной к этой плоскости

Пусть такое тело вращается вокруг нецентральной оси z (рис. 3). Вследствие симметрии относительно этой плоскости каждой точке M_k' будет соответствовать точка M_k''. Из кинематики известно, что ускорения всех точек, лежащих на одной прямой параллельной оси вращения, геометрически равны, поэтому силы инерции точек M_k' и M_k'':

$$\bar{\Phi}_k' = -m_k'\bar{a}_k' \quad \text{и} \quad \bar{\Phi}_k'' = -m_k''\bar{a}_k''$$

равны, и их равнодействующая приложена в точке M_k, лежащей в плоскости симметрии.

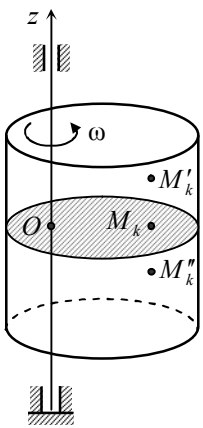

Рис. 3

Отсюда следует, что в точке M_k приложена равнодействующая сил инерции всех точек тела, лежащих на перпендикуляре к плоскости симметрии, проведенном через точку M_k. Таким образом сложение сил инерции всех точек тела сводится к сложению сил инерции точек плоской фигуры

(заштрихованной), имеющей массу данного тела и тот же момент инерции относительно оси z.

Приведем силы инерции точек заштрихованной фигуры к центру O её вращения. При приведении получим главный вектор $\overline{\Phi}$ сил инерции, приложенный в точку O и пару сил, лежащую в плоскости фигуры, момент которой равен главному моменту сил инерции относительно центра приведения.

Т. о. главный вектор сил инерции: $\overline{\Phi} = -M\overline{a}_C$.

Для определения главного момента разложим силу инерции каждой точки фигуры на нормальную и касательную составляющие, направленные противоположно нормальной и касательной составляющих ускорения точки M_k (рис. 4). Их модули равны соответственно

$$\Phi_k^{\tau} = m\varepsilon r_k ,$$

$$\Phi_k^{n} = m\omega^2 r_k .$$

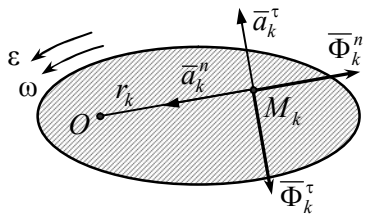

Рис. 4

Так как линии действия $\overline{\Phi}_k^{n}$ проходят через точку O, то главный момент сил инерции будет равен только сумме моментов касательных составляющих сил инерции $\overline{\Phi}_k^{\tau}$ относительно центра O, т.е.:

$$M_O^{\Phi} = -\sum \Phi_k^{\tau} r_k = -\sum m_k \varepsilon r_k^2 = -\varepsilon \sum m_k r_k^2 .$$

В последней формуле $\sum m_k r_k^2 = J_z$ – момент инерции фигуры относительно оси z, равный моменту инерции тела относительно этой оси. Таким образом:

$$M_O^{\Phi} = -J_z \varepsilon,$$

где M_O^{Φ} – алгебраическая величина момента пары, J_z – момент инерции тела относительно оси вращения, ε – алгебраическая величина углового ускорения. В векторном виде $\overline{M}_O^{\Phi} = -J_z \overline{\varepsilon}$. Учитывая вышеизложенное, уравнения для сил инерции в этом случае придут к виду:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi} &= -M\overline{a}_C, \\ \overline{M}_O^{\Phi} &= -J_z \overline{\varepsilon}. \end{aligned} \qquad (15)$$

1.4.3. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс

В этом случае $\overline{\Phi} = 0$, так как центр масс является неподвижной точкой, и, следовательно, ускорение $\overline{a}_C$ его равно нулю. Вследствие этого, учитывая (15) все силы инерции приводятся к виду:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\Phi} &= 0, \\ \overline{M}_C^{\Phi} &= -J_{Cz} \overline{\varepsilon}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

1.4.4. Вращение однородного стержня, закрепленного на валу

Не умаляя общности, пусть стержень OA, длиной l, закреплен на валу жестко (закрепление может быть шарнирным). Вал вращается ускоренно, т.е. $\omega \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$. Масса его равна m, α – угол наклона стержня к валу.

Разобьем весь стержень на элементарные участки. Ускорение середин каждого участка

$$\overline{a}_k = \overline{a}_k^n + \overline{a}_k^\tau ,$$

модули которых

$$a_k^n = \omega^2 r_k , \quad a_k^\tau = \varepsilon r_k ,$$

где r_k – расстояние от середины участка до оси вращения.

Силы инерции каждого такого участка $\overline{\Phi}_k = -(m_k \overline{a}_k^n + m_k \overline{a}_k^\tau)$ направлены в сторону противоположную соответствующим ускорениям.

Рассмотрим подробнее нормальные составляющие сил инерции (рис. 5). Ускорения $\overline{a}_k^n$ середин участков всего стержня распределены по линейному закону, т.к. $a_k^n = \omega^2 r_k$. Соответствующие силы инерции распределятся по всему стержню тоже по линейному закону, т.к. $\Phi_k^n = -m_k \omega^2 r_k$, образуют систему параллельных сил в виде треугольника. Такую систему сил можно заменить одной, равнодействующей силой $\overline{\Phi}^n$, линия действия которой проходит через центр тяжести *B* треугольника и делящую стержень *OA=l* на части *OD* $=\frac{2}{3}l$ или *DA*=$\frac{1}{3}l$.

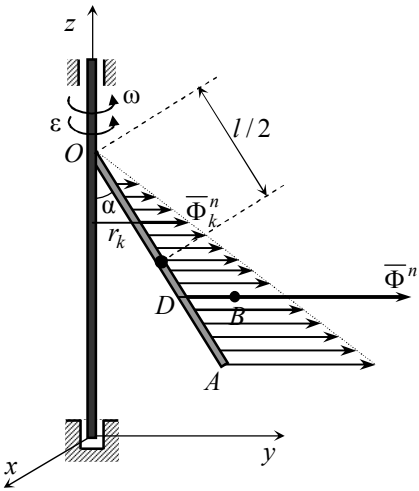

Рис. 5

Аналогичные рассуждения для касательной составляющей сил инерции. Равнодействующая сила инерции, согласно (13)

$$\overline{\Phi} = -M\overline{a}_C = -M\left(\overline{a}_C^n + \overline{a}_C^\tau\right) = \overline{\Phi}^n + \overline{\Phi}^\tau . \qquad (17)$$

Здесь

$$\Phi^n = M\omega^2 \frac{l}{2} \sin\alpha ,$$

$$\Phi^\tau = m\varepsilon \frac{l}{2} \sin\alpha .$$

Если вал, на котором закреплен стержень, вращается равномерно, т.е $\omega = \text{const}$, тогда $\varepsilon = 0$, следовательно $\Phi^\tau = 0$ и из (17) получится

$$\overline{\Phi} = -M\overline{a}_C = \overline{\Phi}^n . \qquad (18)$$

1.4.5. Определение динамических реакций, возникающих в опорах, при вращательном движении твердого тела

Как выше было сказано, силы инерции реально приложены не к данному телу, а окружающим взаимодействующим с ним телам, среди которых могут быть тела, являющиеся для него связями. Из чего следует, что эти силы необходимо реально учитывать при определении сил, действующих на связи системы. Силы инерции изменяют реакции связей и в телах, осуществляющих связь, производят такие же явления, как и прочие известные силы, вызывая как деформации, так и разрушение связей.

Реакции связей, вызванные силами инерции, называются динамическими реакциями.

Учитывая вышесказанное, выведем формулы для подсчета динамических реакций связей.

При движении твердого тела его реакции связей $\overline{R}_k$ будут складываться из статических $\overline{R}_k^{\text{ст}}$ и добавочных динамических $\overline{R}_k^{\text{д}}$ реакций, т.е.

$$\overline{R}_k = \overline{R}_k^{\text{ст}} + \overline{R}_k^{\text{д}} .$$

Аналогично

$$\overline{M}_{Ok} = \overline{M}_{Ok}^{\text{ст}} + \overline{M}_{Ok}^{\text{д}} .$$

Отсюда главные вектора и главные моменты реакций связей будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}&\overline{R}=\overline{R}^{\text{ст}}+\overline{R}^{\text{д}},\\&\overline{M}_O\left(\overline{R}_k\right)=\overline{M}_O^{\text{ст}}\left(\overline{R}_k\right)+\overline{M}_O^{\text{д}}\left(\overline{R}_k\right)=\overline{M}_O^{\text{ст}}+\overline{M}_O^{\text{д}}.\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

Статические составляющие реакций вызываются действием на тело только активных сил $\overline{F}_k$. Поэтому они должны удовлетворять шести уравнениям статики:

$$\left.\begin{aligned}&F_x+R_x^{\text{ст}}=0,\quad F_y+R_y^{\text{ст}}=0,\quad F_z+R_z^{\text{ст}}=0,\\&M_x+M_x^{R_{\text{СТ}}},\quad M_y+M_y^{R_{\text{СТ}}},\quad M_z+M_z^{R_{\text{СТ}}}.\end{aligned}\right\}\qquad(20).$$

Подставим в уравнения (11) значения проекций главного вектора $\overline{R}$ и главного момента $\overline{M}_O^R$ из (19):

$$\left.\begin{aligned}&F_x+R_x^{\text{ст}}+R_x^{\text{д}}+\Phi_x=0,\\&F_y+R_y^{\text{ст}}+R_y^{\text{д}}+\Phi_y=0,\\&F_z+R_z^{\text{ст}}+R_z^{\text{д}}+\Phi_z=0,\\&M_{Ox}^F+M_{Ox}^{R\text{ст}}+M_{Ox}^{R\text{д}}+M_{Ox}^{\Phi}=0,\\&M_{Oy}^F+M_{Oy}^{R\text{ст}}+M_{Oy}^{R\text{д}}+M_{Oy}^{\Phi}=0,\\&M_{Oz}^F+M_{Oz}^{R\text{ст}}+M_{Oz}^{R\text{д}}+M_{Oz}^{\Phi}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

Далее, учитывая равенства (20), которым удовлетворяют статические реакции, из системы (21) получим уравнения для определения динамических реакций опор вращающегося твердого тела

$$\left.\begin{aligned}&R_x^{\text{д}}+\Phi_x=0,\qquad R_y^{\text{д}}+\Phi_y=0,\qquad R_z^{\text{д}}+\Phi_z=0,\\&M_{Ox}^{R_{\text{Д}}}+M_{Ox}^{\Phi}=0,\quad M_{Oy}^{R_{\text{д}}}+M_{Oy}^{\Phi}=0,\quad M_{Oz}^{R_{\text{д}}}+M_{Oz}^{\Phi}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

Учитывая все вышесказанное, принцип Даламбера для механической системы, имеющий в общем случае вид (8) при определении динамических реакций примет вид

$$\overline{R}^{\text{д}}+\overline{\Phi}=0.\qquad(23)$$

Для устранения динамических реакций необходимо, чтобы главный вектор динамических реакций был равен нулю, вследствие чего (23) примет вид

$$\overline{\Phi} = 0. \qquad (24)$$

В этом случае формулы (22) примут вид

$$\Phi_x = 0, \quad \Phi_y = 0, \quad \Phi_z = 0, \quad M_{Ox}^{\Phi} = 0, \quad M_{Oy}^{\Phi} = 0, \quad M_{Oz}^{\Phi} = 0. \qquad (25)$$

2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

2.1. Задача 1

На конструкции установлены один или несколько двигателей массой m, к каждому из которых прикреплены один или два груза массой m_1 и m_2, двигающихся с ускорением (рис. 6). Даны размеры конструкции (табл. 1), массы и радиусы барабанов двигателей (рис. 6, *а*), массы и ускорения грузов, направления ускорений показаны на чертеже. При определении моментов инерции барабанов двигателей, считать их однородными телами. Определить полные реакции опор конструкции.

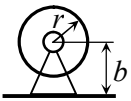

Рис. 6, а

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7	8
m_1, кг	50	30	15	15	60	30	40	30
m_2, кг	20	50	20	45	50	45	60	15
m, кг	8	5	7	9	1	10	6	4
a_1, м/с^2	6	7	6	8	5	9	5	9
a_2, м/с^2	7	6	9	6	8	6	9	9
h, м	1,5	1,5	2	1	1,5	1	2	2,5
l, м	2,5	2,5	1,5	1	2,5	3	2	1
b, см	32	36	28	30	30	26	24	22
r, см	24	30	18	24	22	22	14	18
α, град	30	60	60	30	60	60	30	30

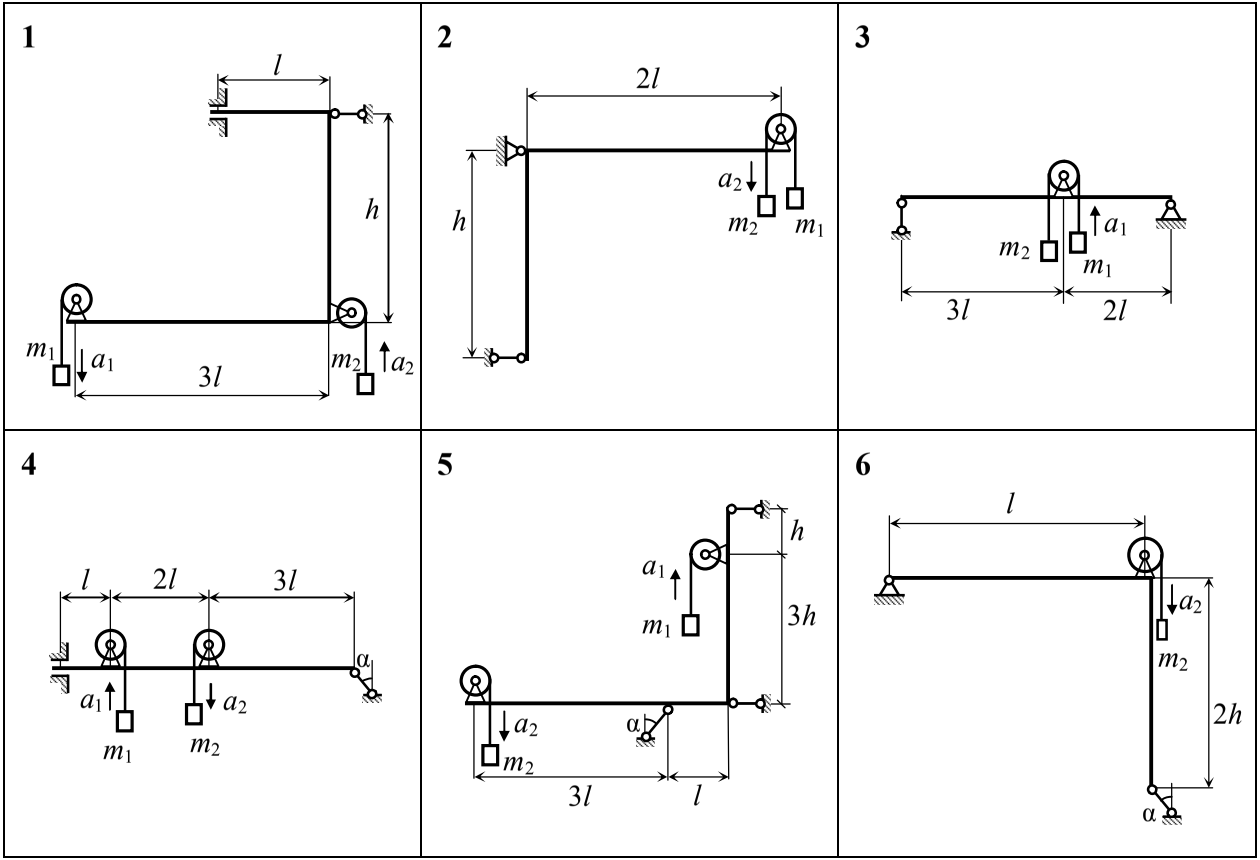
1
l
h
m1
a1
3l
m2
a2
2
2l
h
a2
m2
m1
3
a1
m2
m1
3l
2l
4
l
2l
3l
α
a1
a2
m1
m2
5
h
a1
m1
3h
a2
α
m2
3l
l
6
l
a2
m2
2h
α

Рис. 6

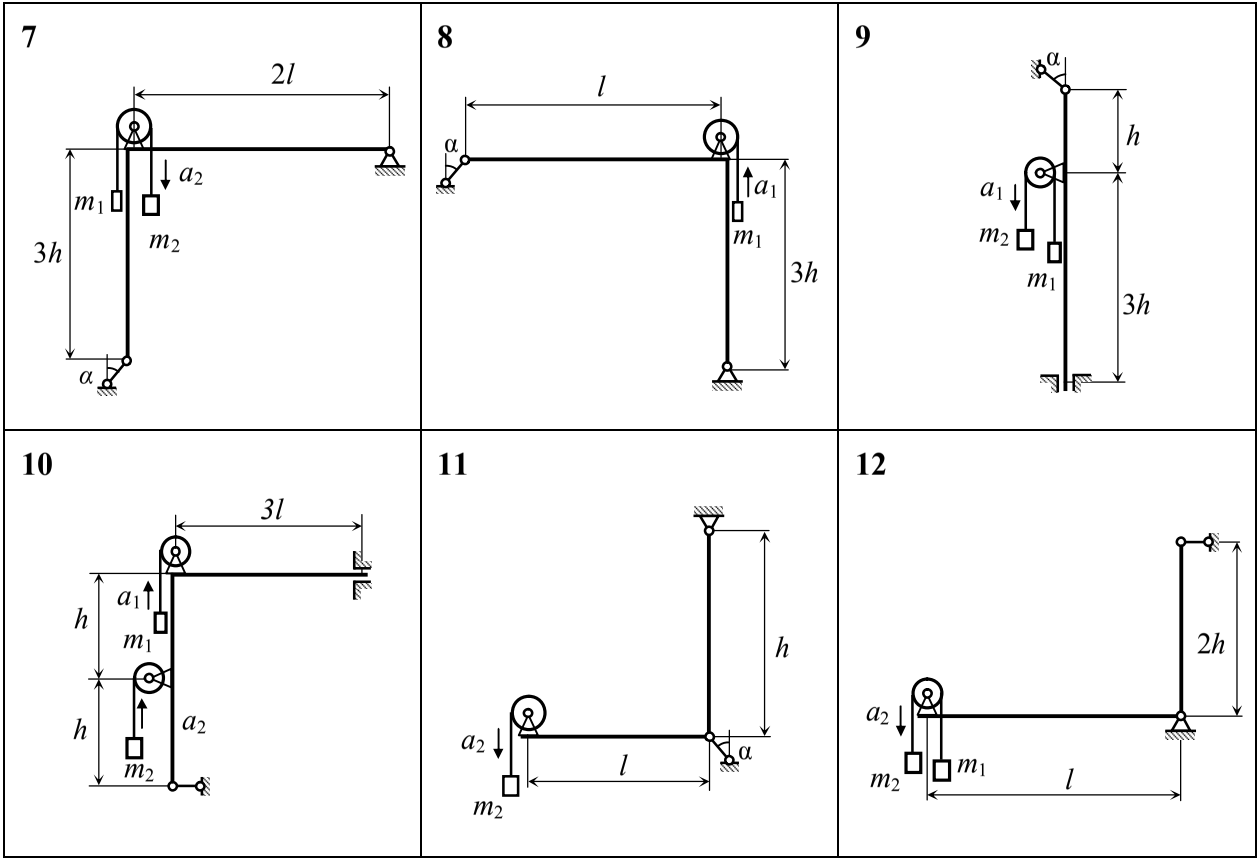

Рис. 6, продолжение

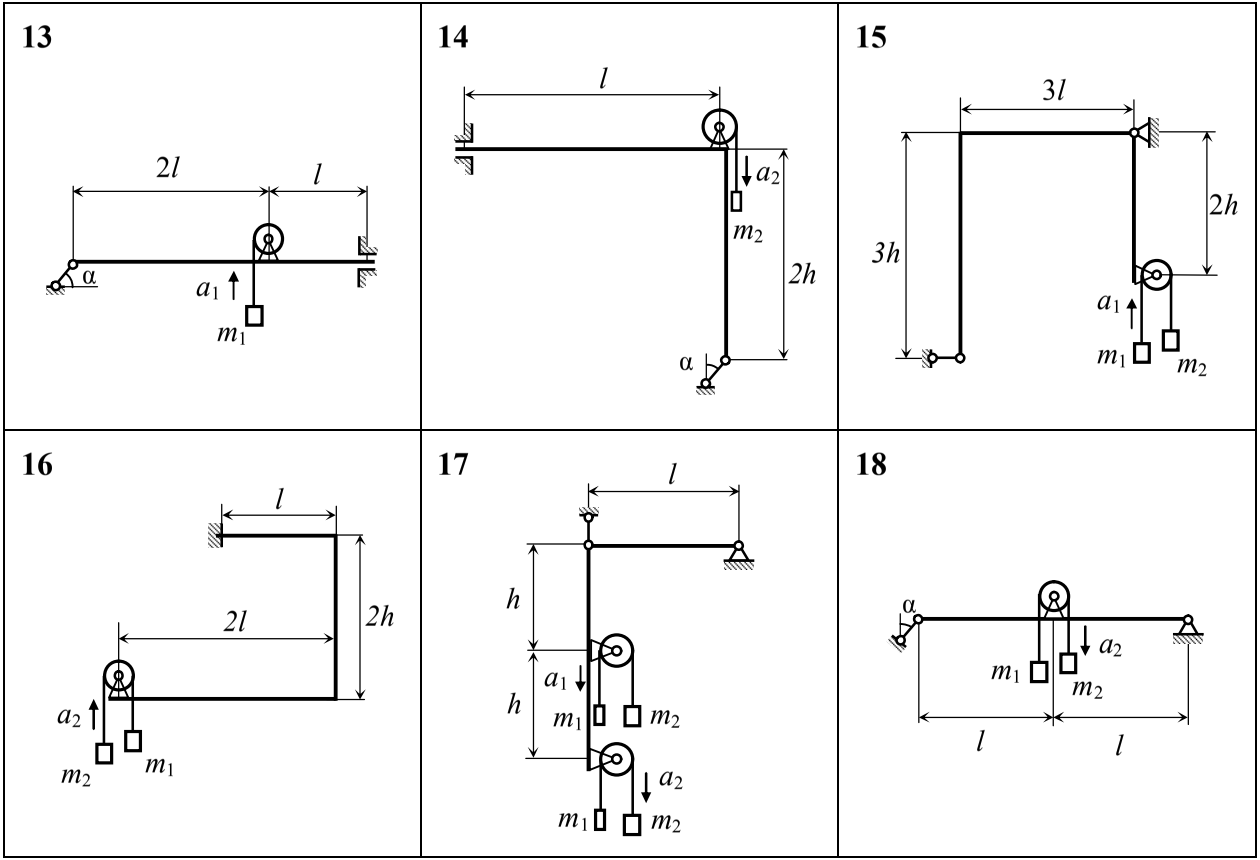

Рис. 6, продолжение

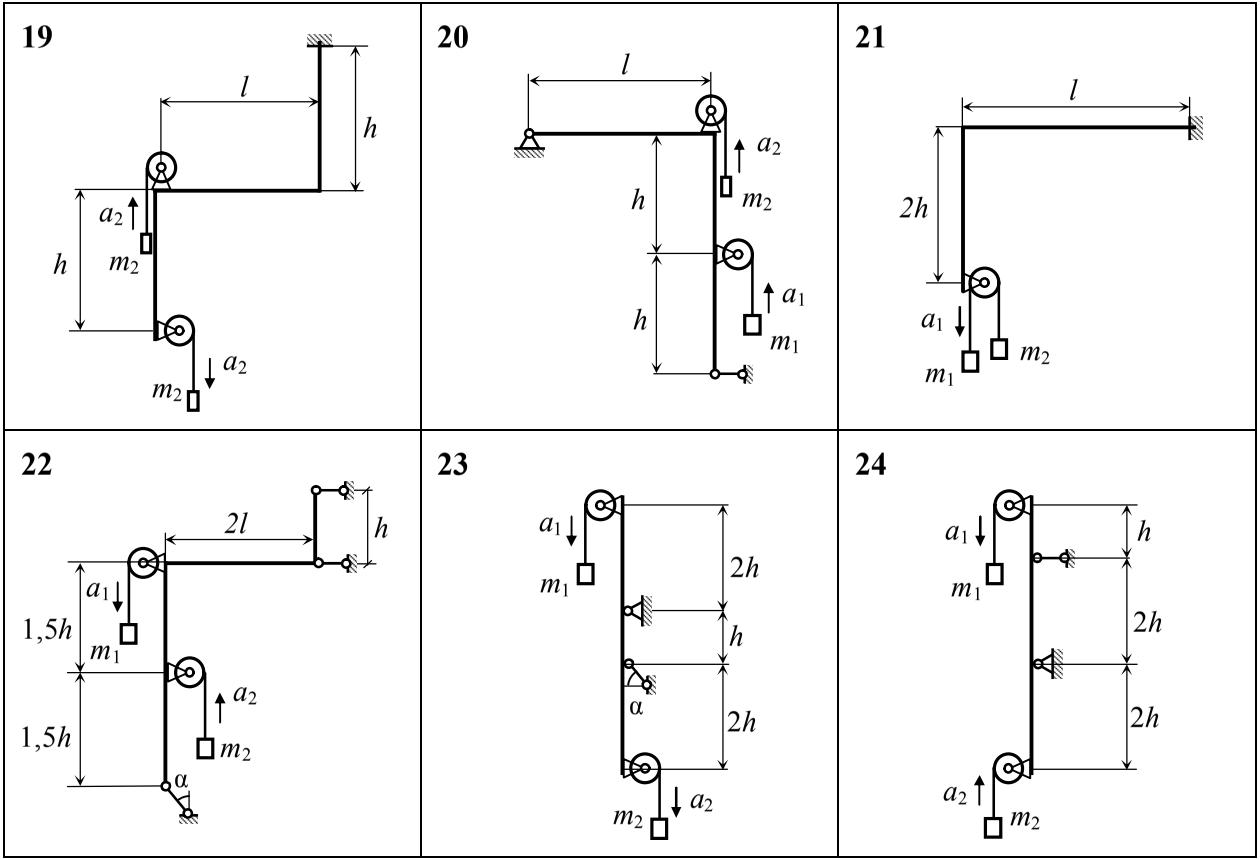

Рис. 6, продолжение

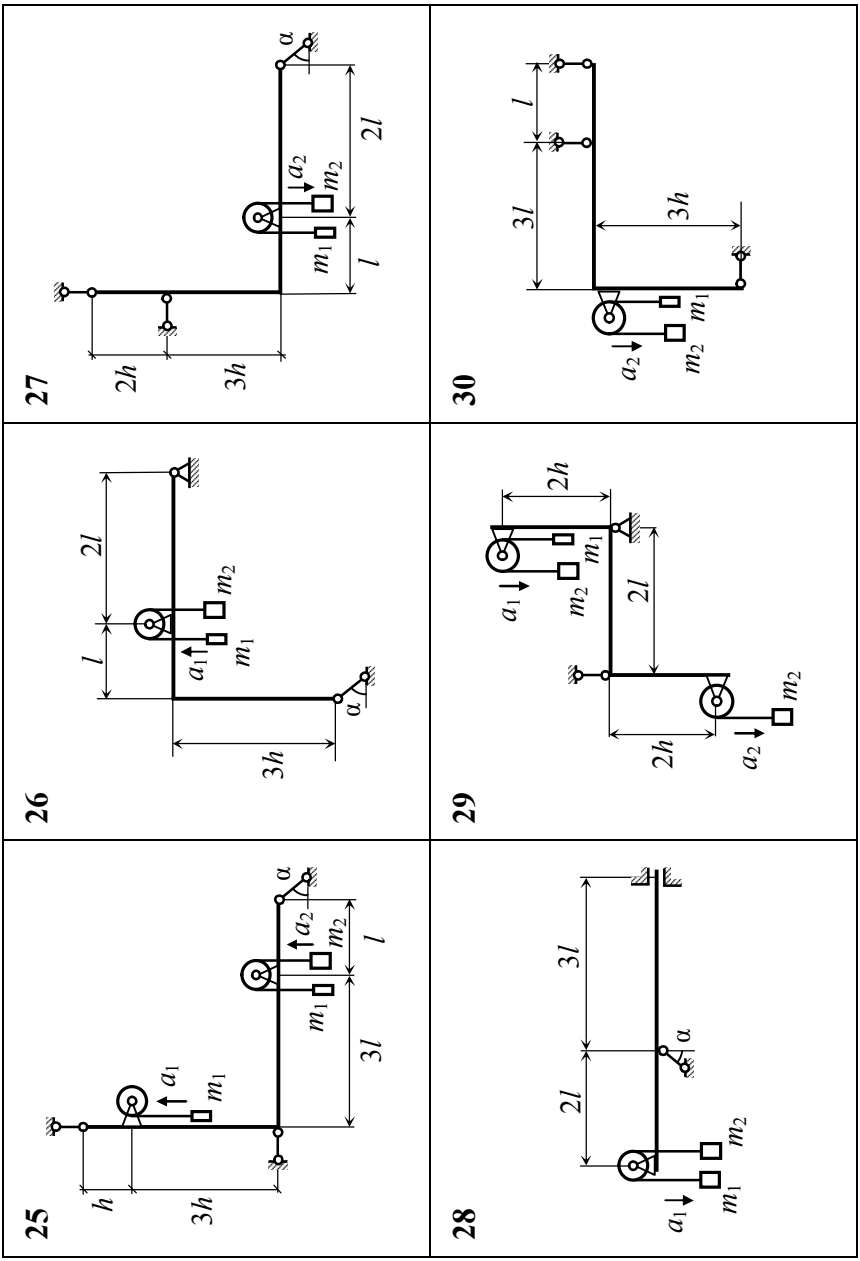

Рис. 6, окончание

2.2. Задача 2

Вал AB совершает равномерное вращательное движение с угловой скоростью ω. К валу при помощи невесомых стержней прикреплены точечные массы (шары) и однородные пластины различной формы (рис. 7). Точечные массы m_d (варианты 1–10 и 21–30) или m_{d1} и m_{d2} (варианты 11–20) присоединяются к механизму для динамического уравновешивания. Заданы геометрические параметры механизма, его угловая скорость и массы пластин и шаров (табл. 2); в вариантах 1–10 также известна величина точечной массы, присоединенной для динамического уравновешивания. Определить:

1. Динамические и полные реакции опор A и B (без учета точечных масс m_d).

2. Варианты 1–10: расстояния x и y, определяющие положение точечной массы m_d.

3. Варианты 11–20: значения точечных масс m_{d1} и m_{d2}.

4. Варианты 21–30: значение точечной массы m_d и расстояние x.

Таблица 2

	1	2	3	4	5	6	7	8
m_1, кг	8	15	12	16	5	16	9	6
m_2, кг	20	6	13	7	15	10	7	11
m_3, кг	11	7	17	10	9	19	17	11
m_{d1}, кг	15	11	20	11	15	10	10	9
m_{d2}, кг	10	18	7	18	20	15	11	18
l, см	90	70	80	90	45	70	100	40
b, см	24	14	16	20	24	14	40	38
c, см	40	36	40	38	24	22	38	30
d, см	40	18	40	18	24	12	20	24
ω, $с^{-1}$	4	3	5,5	5,5	4,5	2	4,5	4

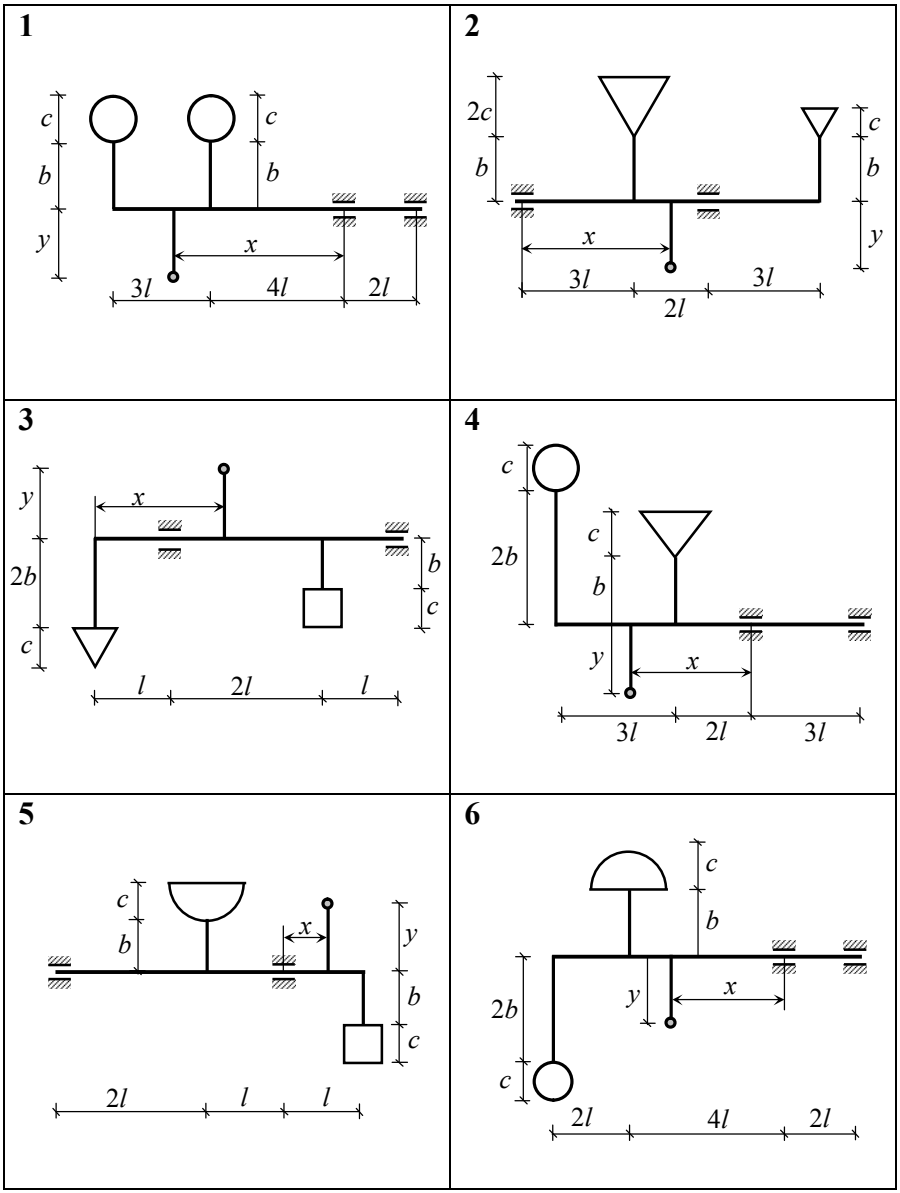
1
c
b
y
c
b
x
3l
4l
2l
2
2c
b
c
b
y
x
3l
3l
2l
3
y
2b
c
x
b
c
l
2l
l
4
c
2b
c
b
y
x
3l
2l
3l
5
c
b
x
y
b
c
2l
l
l
6
c
b
2b
y
x
c
2l
4l
2l

Рис. 7

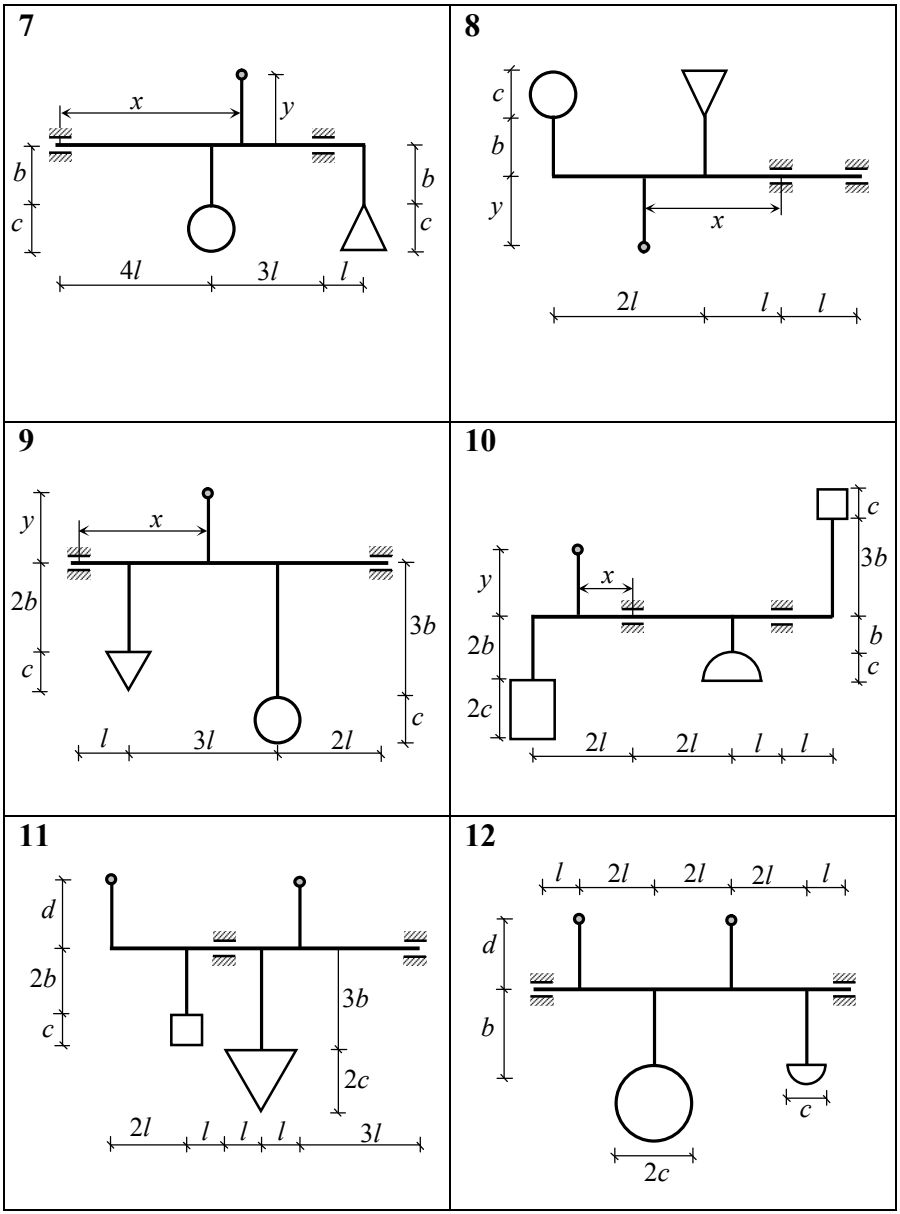

Рис. 7, продолжение

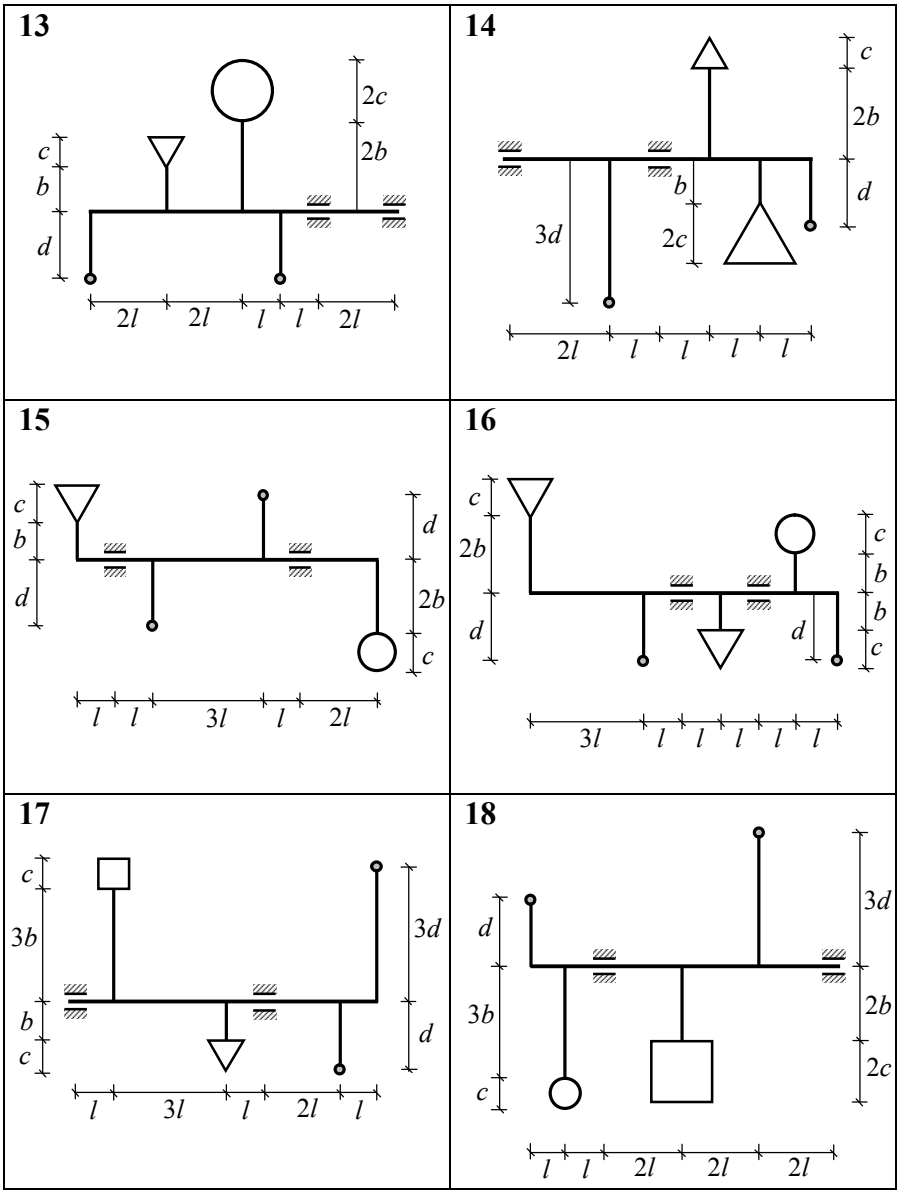

Рис. 7, продолжение

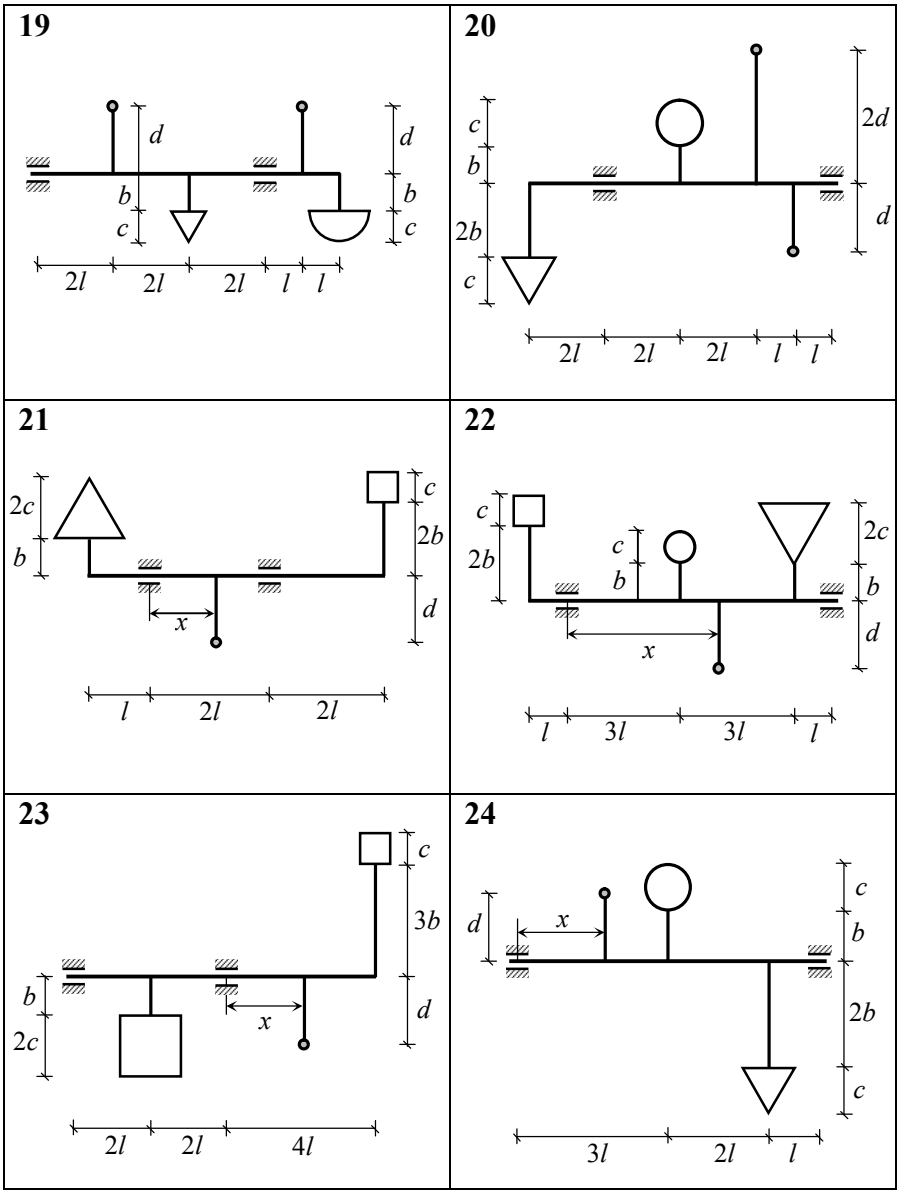

Рис. 7, продолжение

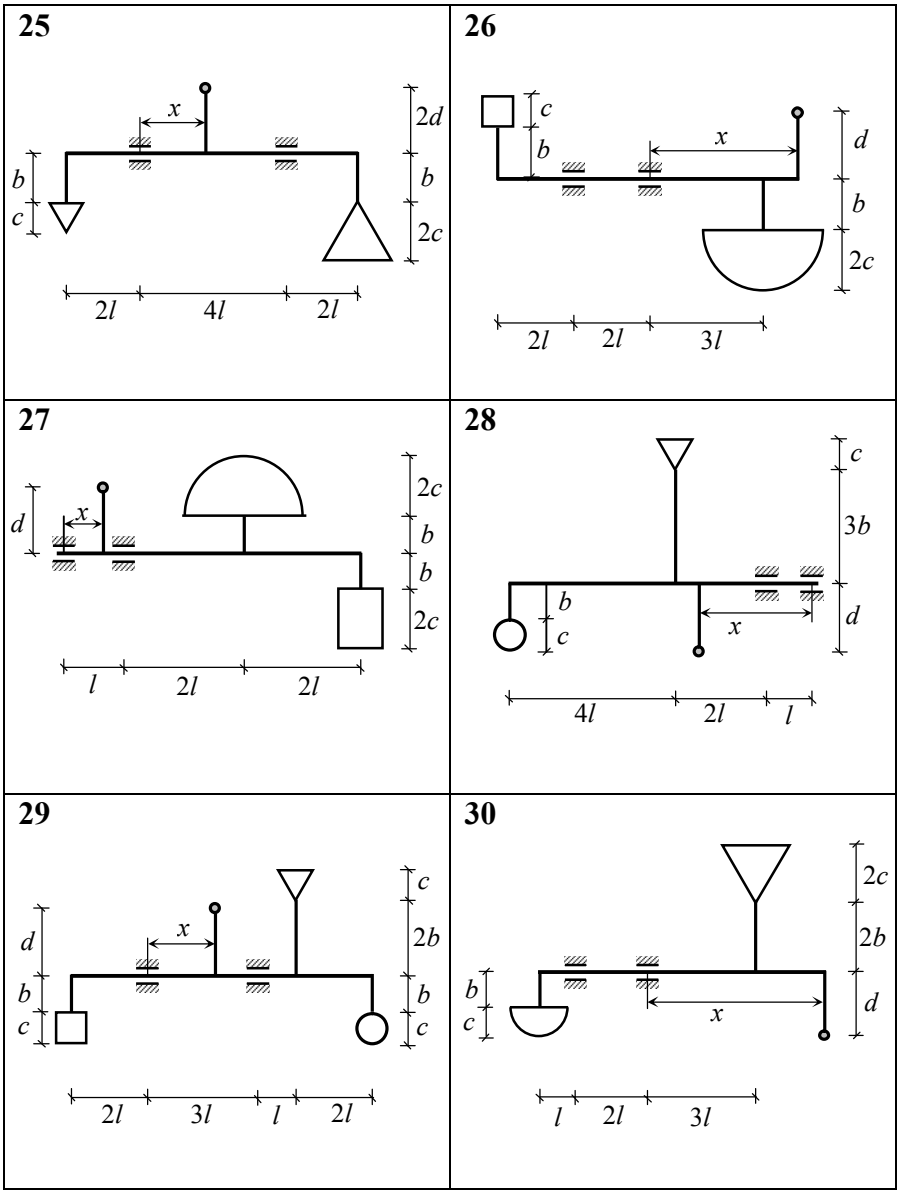

Рис. 7, окончание

2.3. Задача 3

Один, два или три груза прикреплены к тросу (тросам), намотанному на вращающийся блок (рис. 8), массы блоков – m_1, m_2, m_3. Для блока заданны (табл. 3) его масса – m, радиусы его частей – r_1, r_2, r_3, и радиус инерции: i_1 – если блок состоит из двух частей, i_2 – если блок состоит из трех частей (если блок состоит из одной части, то его радиус инерции определяется самостоятельно как для однородного тела). Также заданны углы наклона поверхностей – α и β, по которым скользят грузы и коэффициент трения грузов по этим поверхностям – f.

Определить:

1. Ускорения грузов.
2. Силы натяжения каждой из частей троса.
3. Реакцию оси блока.

Таблица 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8
m_1, кг	1	9	3	7	8	10	8	3
m_2, кг	8	4	1	8	9	7	7	6
m_3, кг	7	6	2	9	10	9	1	9
r_1, см	15	15	10	15	10	20	10	5
r_2, см	30	25	20	20	15	35	20	10
r_3, см	50	30	25	25	30	45	30	15
i_1, см	28	17	16	18	12	26	18	6
i_2, см	26	23	15	19	18	40	16	7
α, град	60	15	75	75	60	30	75	15
β, град	60	75	60	75	75	45	30	30
f	0,35	0,15	0,35	0,15	0,3	0,25	0,2	0,15
m, кг	2,6	2,3	1,5	1,9	1,8	4	1,6	0,7

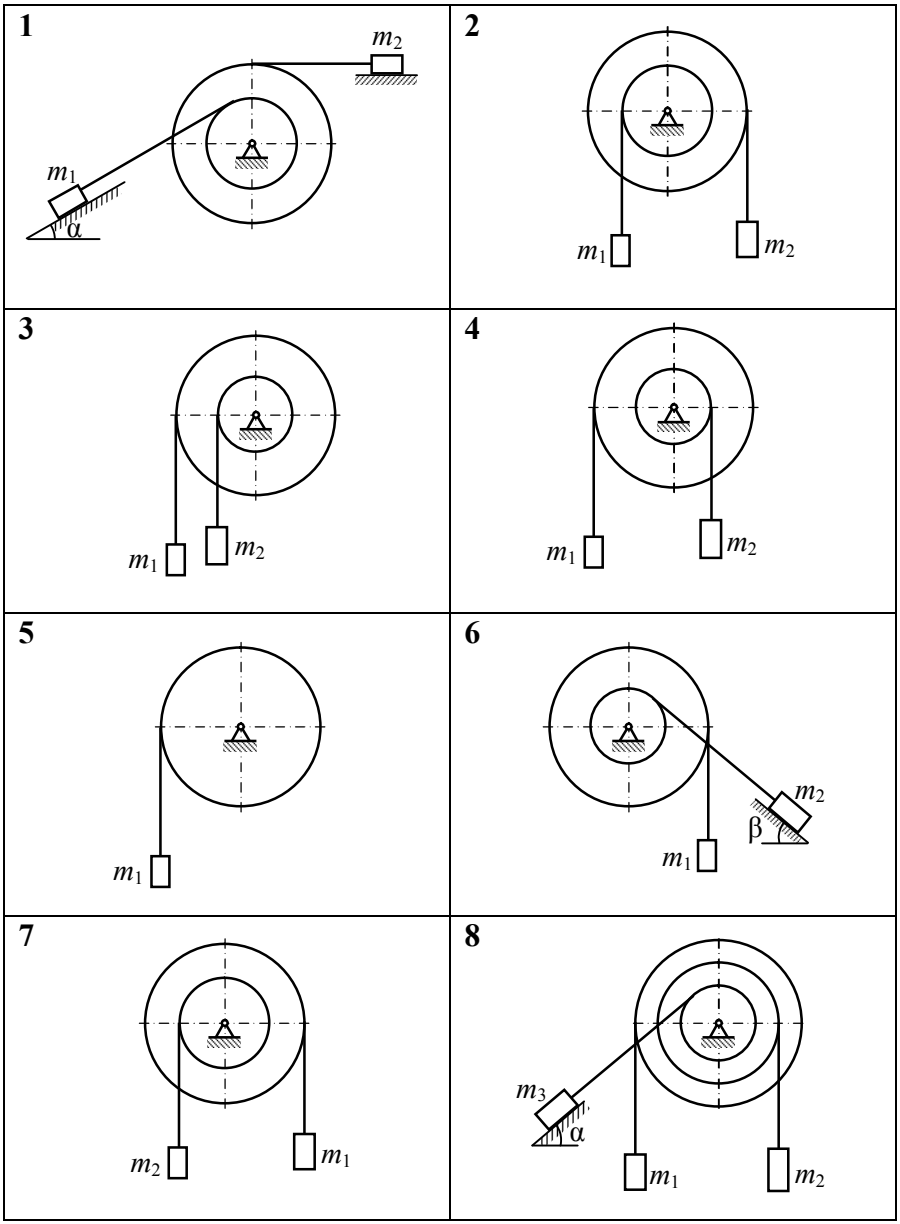

Рис. 8

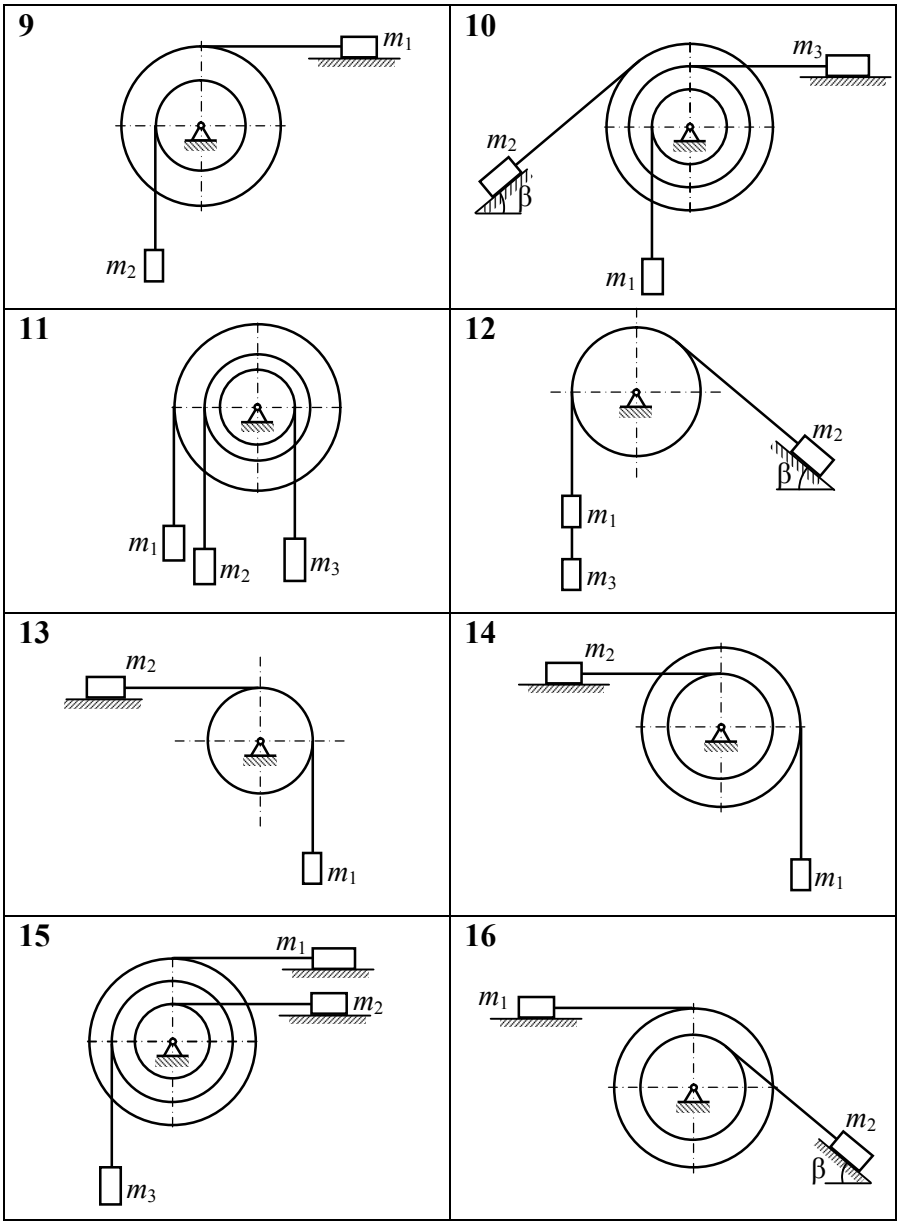

Рис. 8, продолжение

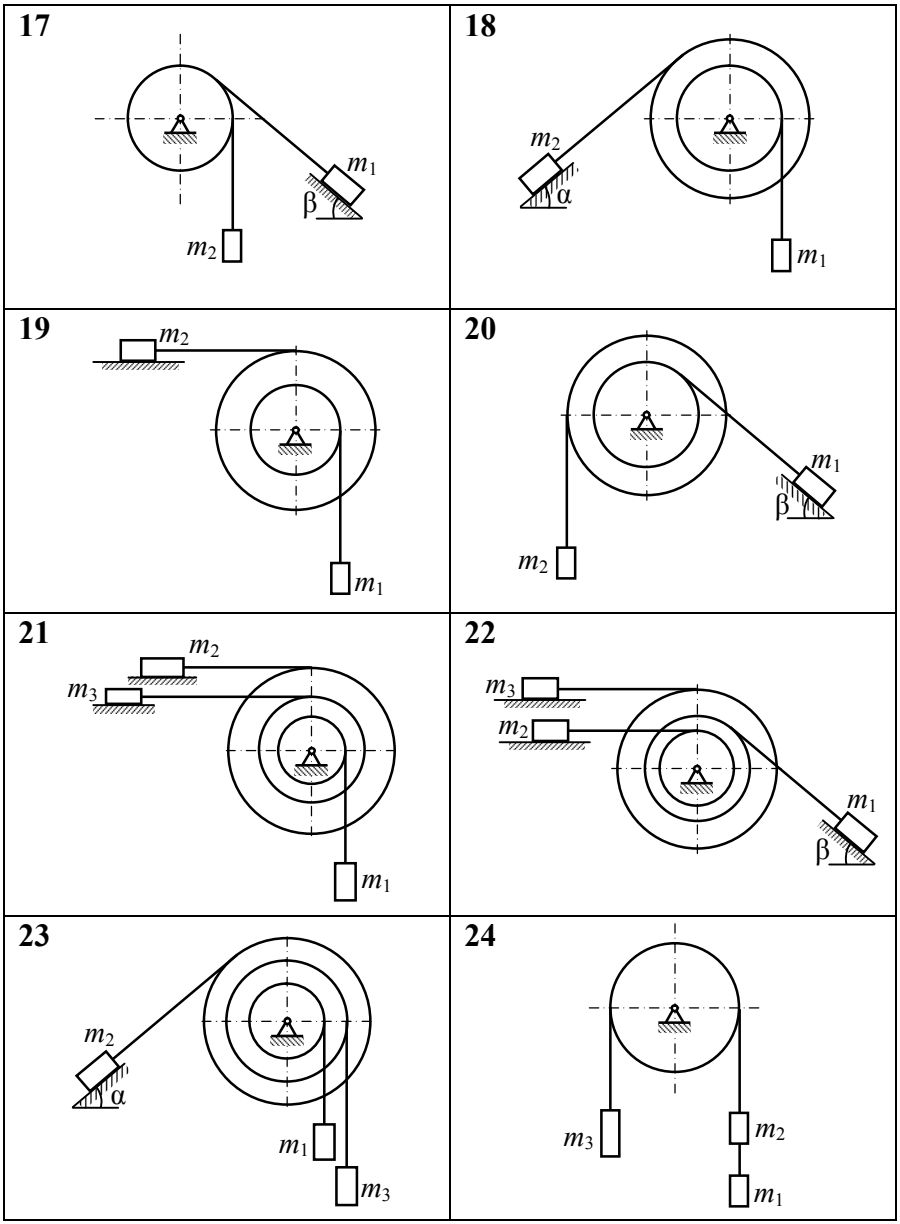

Рис. 8, продолжение

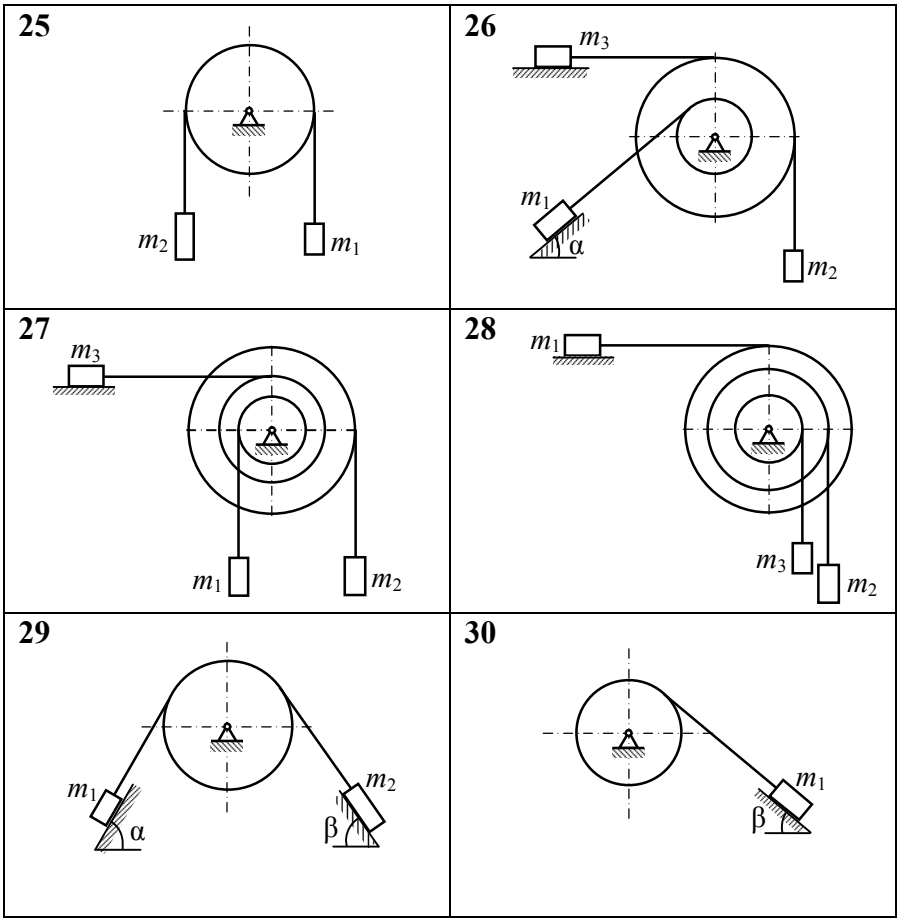

Рис. 8, окончание

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

3.1. Пример 1

На конструкции установлены два двигателя массой $m = 2$ кг, к каждому из которых прикреплены грузы массой $m_1 = 20$ кг и $m_2 = 30$ кг, двигающиеся с ускорениями $\overline{a}_1 = 6$ м/с^2 и $\overline{a}_2 = 5$ м/с^2 соответственно (рис. 9). Размеры конструкции и двигателя: $l = h = 2$ м, $b = 0{,}2$ м, $r = 0{,}15$ м. Угол наклона опорного стержня $\alpha = 60^{\circ}$. При определении моментов инерции барабанов, считать их однородными телами. Определить полные реакции опор конструкции.

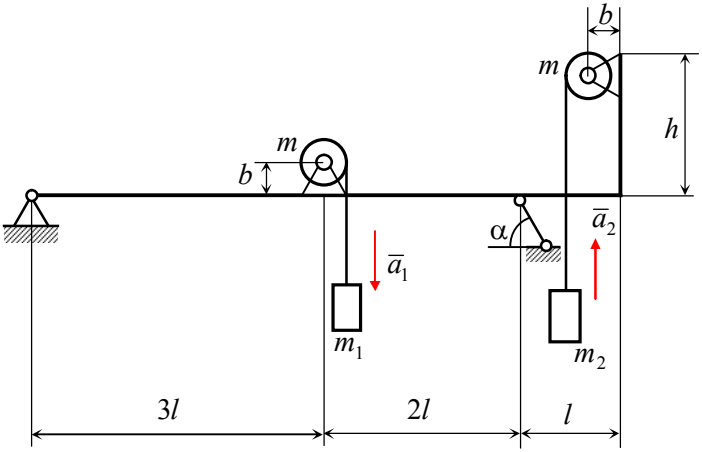

Рис. 9

Решение. На систему действуют силы тяжести, силы инерции и инерционные моменты. Определим значения сил тяжести:

$$P_i = m_i\, g\,.$$

$$P_1 = 200 \text{ Н}, \quad P_2 = 300 \text{ Н}, \quad P_3 = 20 \text{ Н}, \quad P_4 = 20 \text{ Н}.$$

Определим значения сил инерции: $\Phi_i = m_i\, a_i$.

$\Phi_1 = 120$ Н, $\Phi_2 = 150$ Н.

Определим значения инерциальных моментов:

$$M_i^{\Phi} = J\varepsilon = m i^2 \frac{a}{r}.$$

$M_3^{\Phi} = 0{,}9$ Н·м, $M_4^{\Phi} = 0{,}75$ Н·м.

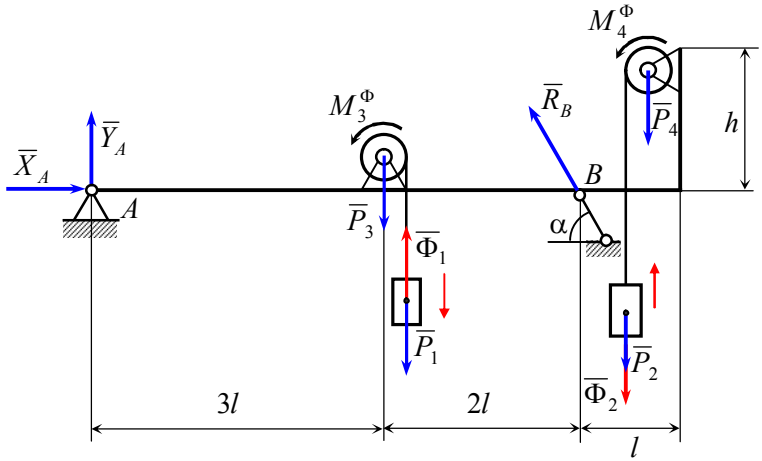

Рис. 10

Запишем уравнения равновесия (рис. 10):

$$\Sigma X = 0; \quad X_A - R_B \cos\alpha = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad Y_A + R_B \sin\alpha - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 + \Phi_1 - \Phi_2 = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad R_B \sin\alpha \cdot 5l - P_1(3l + r) - P_2(6l - r - b) - P_3 \cdot 2l -$$

$$- P_4 \cdot (6l - b) + \Phi_1(3l + r) - \Phi_2(6l - r - b) + M_3^{\Phi} + M_4^{\Phi} = 0.$$

Подставим значения и определим реакции:

$X_A = 351{,}5$ Н,

$Y_A = -38{,}9$ Н,

$R_B = 703{,}1$ Н.

3.2. Пример 2

Три груза прикреплены к тросам, намотанным на вращающийся блок (рис. 11), массы грузов – $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 4$ кг, $m_3 = 2$ кг. Масса блока – $m = 1{,}5$ кг, радиусы его частей – $r_1 = 10$ см, $r_2 = 15$ см, радиус инерции – $i = 12$ см. Угол наклона поверхности – $\alpha = 30^{\circ}$, коэффициент трения груза *3* – $f = 0{,}2$.

Определить ускорения грузов, силы натяжения каждой из частей троса и реакцию оси блока.

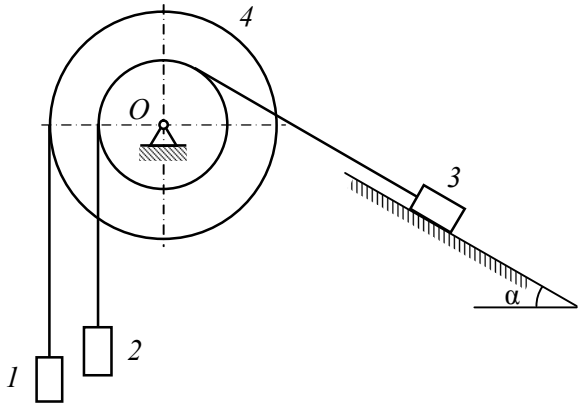

Рис. 11

Решение. Рассмотрим отдельно равновесие каждого из четырех тел, из которых состоит система. На тела действуют силы тяжести P, силы инерции Φ, силы натяжения нити T, нормальная реакция поверхности N, сила трения $F_{\text{тр}}$ и реакции шарнира X_O и Y_O.

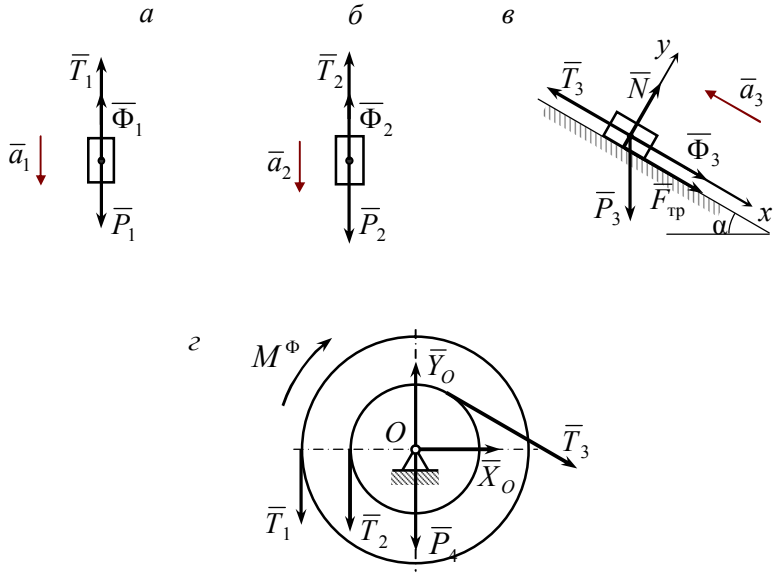

Рис. 12

На тела *1* и *2* действуют системы сил направленных вдоль одной оси (рис. 12, *а,б*). Запишем по одному уравнению равновесия для этих тел:

$$\Sigma Y = 0; \quad T_1 - P_1 + \Phi_1 = 0; \tag{1}$$

$$\Sigma Y = 0; \quad T_2 - P_2 + \Phi_2 = 0; \tag{2}$$

На тело *3* действует сходящаяся система сил (рис. 12, *в*). Запишем два уравнения проекций на оси, одна из которых направлена вдоль поверхности, а другая ей перпендикулярна:

$$\Sigma X = 0; \quad T_3 - P_3 \sin\alpha - \Phi_3 - F_{тр} = 0; \tag{3}$$

$$\Sigma Y = 0; \quad N - P_3 \cos\alpha = 0; \tag{4}$$

На тело *4* действует произвольная плоская система сил (рис. 12, *г*). Запишем два уравнения проекций на вертикальную

и горизонтальную оси и уравнение моментов относительно центра блока:

$$\Sigma X = 0; \quad X_O + T_3 \cos\alpha = 0; \tag{5}$$

$$\Sigma Y = 0; \quad Y_O - T_1 - T_2 - T_3 \sin\alpha - P_4 = 0; \tag{6}$$

$$\Sigma M_O = 0; \quad T_1 r_2 + T_2 r_1 - T_3 r_1 - M^{\Phi} = 0. \tag{7}$$

Силы тяжести определяются по формуле: $P_i = m_i\, g$. (8)

Силы инерции: $\Phi_i = m_i\, a_i$. (9)

Подставим (8) и (9) в (1), (2), (3) и (4) и выразим силы натяжения нитей:

$$T_1 = m_1 (g - a_1); \tag{10}$$

$$T_2 = m_2 (g - a_2); \tag{11}$$

$$T_3 = m_3 [a_3 + g(\sin\alpha + f \cos\alpha)]. \tag{12}$$

Запишем соотношение ускорений тел *1*, *2*, и *3* и углового ускорения тела *4*:

$$\varepsilon = \frac{a_1}{r_1} = \frac{a_2}{r_2} = \frac{a_3}{r_1}. \tag{13}$$

Обозначим: $a_2 = a_3 = a$. (14)

Тогда с учетом (13):

$$a_1 = a\,\frac{r_2}{r_1} \tag{15}$$

$$\varepsilon = \frac{a}{r_1}. \tag{16}$$

Инерциальный момент определяется по формуле:

$$M^{\Phi} = J\varepsilon, \tag{17}$$

где J – момент инерции относительно оси вращения,

$$J = m \cdot i^2. \tag{18}$$

Подставим (16) и (18) в (17):

$$M^{\Phi} = m\,a\,\frac{i^2}{r_1}. \qquad (19)$$

Подставим (10), (11), (12) и (19) в (7) и выразим ускорение a :

$$a = \frac{m_1 \dfrac{r_2}{r_1} + m_2 - m_3(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{m_1\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2 + m_2 + m_3 + m_4\left(\dfrac{i}{r_1}\right)^2} g = 3{,}907\ \text{м/с}^2.$$

По формулам (10), (11) и (12) силы натяжения нитей:

$$T_1 = 3{,}9\ \text{Н}, \quad T_2 = 23{,}6\ \text{Н}, \quad T_3 = 21{,}0\ \text{Н}.$$

Из уравнений (5) и (6) выразим составляющие реакции шарнира:

$$X_O = -18{,}2\ \text{Н}, \quad Y_O = 38\ \text{Н}.$$

Реакция шарнира:

$$R_O = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2} = 42{,}1\ \text{Н}.$$

Дополнительные указания:

1) Если при расчете значение ускорения груза принимает отрицательное значение, значит, возможно, направления движений грузов выбраны неверно. Необходимо задать движениям грузов противоположенные направления и повторить расчет.

2) Если в результате повторного расчета ускорение вновь приобретает отрицательное значение, значит, система находится в равновесии. Следовательно, ускорения всех тел равны нулю. Определение реакций необходимо выполнить методами статики.

3.3. Пример 3

Вал AB совершает равномерное вращательное движение с угловой скоростью $\omega = 4\ \text{с}^{-1}$. К валу при помощи невесомых стержней прикреплены однородные пластины массой $m_1 = 5$ кг и

$m_2 = 3$ кг (рис. 13). Точечные массы m_{d1} и m_{d2} присоединяются к механизму для динамического уравновешивания. Размер $b = 0{,}2$ м.

Определить:

1. Динамические и полные реакции опор *A* и *B* (без учета точечных масс m_d).
2. Величину точечных масс m_{d1} и m_{d2}.

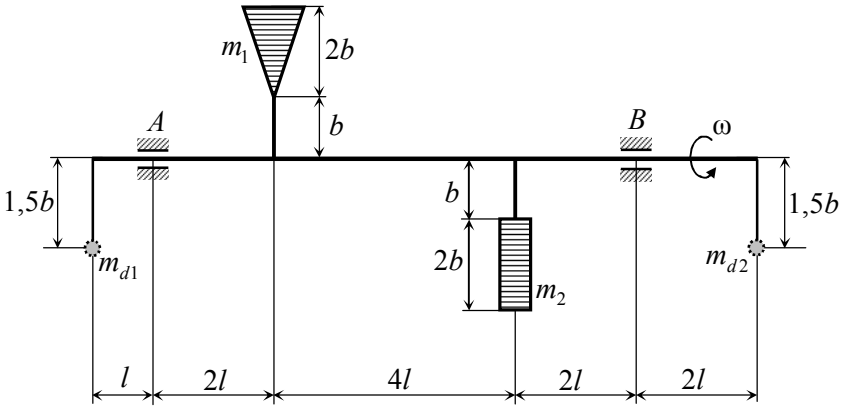

Рис. 13

Решение. 1. Определим динамические реакции подшипников *A* и *B* (без учёта точечных масс m_d). Присоединим к пластинам силы инерции (рис. 14):

$$\Phi_1 = m_1 a_{c1} = m_1 \omega^2 l_{c1} = 37{,}33 \text{ Н},$$

$$\Phi_2 = m_2 a_{c2} = m_2 \omega^2 l_{c2} = 19{,}2 \text{ Н}.$$

Здесь $l_{c1} = b + \frac{2}{3}2b = \frac{7}{3}b$, $l_{c2} = b + \frac{2b}{2} = 2b$ – расстояния от оси вращения, до центров масс пластин.

Составим уравнения равновесия.

$$\Sigma M_A = 0; \quad R_B^{д} \cdot 8l - \Phi_2 \cdot 6l + \Phi_1 \cdot 2l = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \qquad R_A^{д} + R_B^{д} + \Phi_1 - \Phi_2 = 0.$$

Решив уравнения получим:

$$R_B^{д} = \frac{\Phi_2 \cdot 6l - \Phi_1 \cdot 2l}{8l} = 5{,}07 \text{ Н}, \quad R_A^{д} = -R_B^{д} - \Phi_1 + \Phi_2 = -23{,}2 \text{ Н}.$$

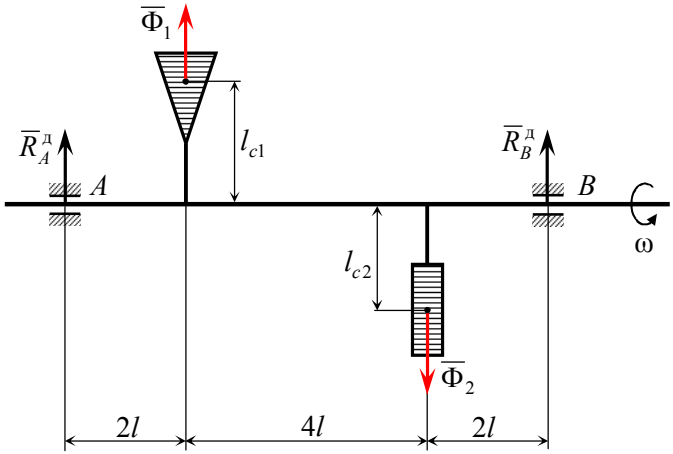

Рис. 14

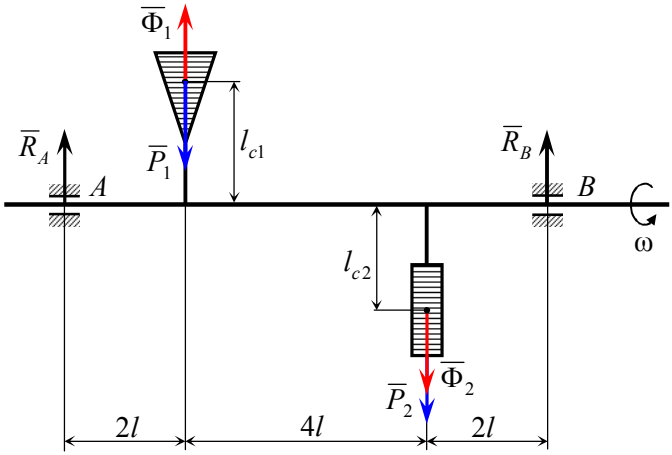

Рис. 15

2. Определим полные реакции опор A и B (без учёта точечных масс m_d), для этого добавим силы тяжести пластин (рис. 15):

$$P_1 = m_1 \cdot g = 49 \text{ Н}, \qquad P_2 = m_2 \cdot g = 29{,}4 \text{ Н}.$$

Составим уравнения равновесия для определения полных реакций:

$$\Sigma M_A = 0; \quad R_B \cdot 8l - \Phi_2 \cdot 6l - P_2 \cdot 6l - P_1 \cdot 2l + \Phi_1 \cdot 2l = 0,$$

$$\Sigma Y = 0; \quad R_A + R_B + \Phi_1 - \Phi_2 - P_1 - P_2 = 0.$$

$$R_A = 15{,}28 \text{ Н},$$

$$R_B = 44{,}99 \text{ Н}.$$

3. Устраним динамические давления на подшипники путём присоединения точечных грузов и определим их массы.

Силы инерции присоединённых грузов (рис. 16):

$$\Phi_{d1} = m_{d1} \cdot \omega^2 \cdot 1{,}5b; \qquad \Phi_{d2} = m_{d2} \cdot \omega^2 \cdot 1{,}5b.$$

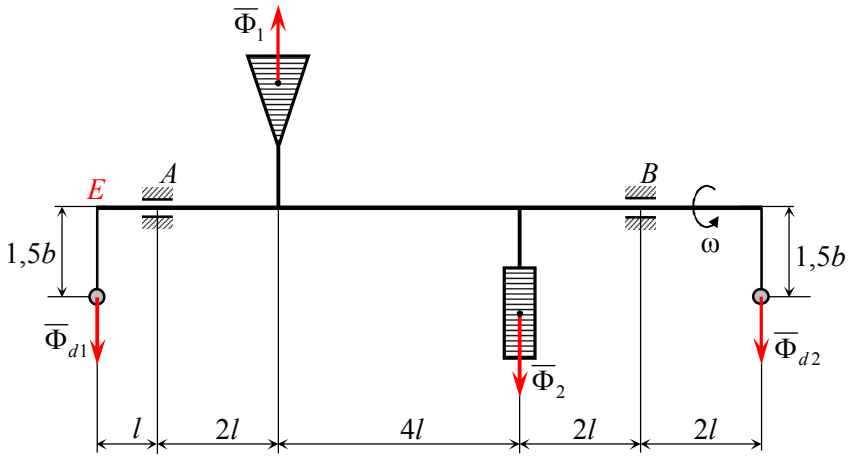

Рис. 16

Составим уравнения равновесия и вычислим силы инерции присоединённых грузов.

$$\Sigma M_E = 0; \quad -\Phi_{d2} \cdot 11l - \Phi_2 \cdot 7l + \Phi_1 \cdot 3l = 0,$$

$$\Sigma Y = 0; \quad -\Phi_{d1} - \Phi_{d2} + \Phi_1 - \Phi_2 = 0.$$

$$\Phi_{d1} = 20{,}17 \text{ Н},$$

$$\Phi_{d2} = -2{,}04 \text{ Н}.$$

Определим необходимые для динамического уравновешивания массы:

$$m_{d1} = \frac{\Phi_{d1}}{\omega^2 \cdot 1{,}5b} = 4{,}2 \text{ кг},$$

$$m_{d2} = \frac{\Phi_{d2}}{\omega^2 \cdot 1{,}5b} = -0{,}42 \text{ кг}.$$

Отрицательное значение второй уравновешивающей массы указывает на то, что присоединяющий ее стержень необходимо направить противоположно указанному на рисунке положению.

Указание: в случае наличия одной уравновешивающей массы, удобнее записать одно уравнение суммы проекций и одно суммы моментов. Из уравнения проекций можно определить величину уравновешивающей силы инерции, а далее, либо величину уравновешивающей массы, расстояние от массы до оси вращения. Из уравнения моментов определяется место крепления массы к оси (расстояние x).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте понятие силы инерции.
2. Какой вектор мы называем даламберовой силой инерции?

3. Запишите составляющие силы инерции материальной точки при её криволинейном движении.
4. Сформулируйте принцип Даламбера для свободной материальной точки, для несвободной материальной точки, для свободной и несвободной механической системы.
5. Каковы модуль и направление главного вектора сил инерции механической системы.
6. К чему приводятся силы инерции точек твёрдого тела при его поступательном движении, при вращении тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг оси, перпендикулярной к этой плоскости.
7. В чем заключается принцип кинетостатики?
8. Каково число и вид уравнений кинетостатики для несвободной механической системы.
9. При каких условиях достигается динамическое уравновешивание тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Павлов, В.Е.* Теоретическая механика: учебное пособие для вузов по строит. направлениям / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: ТрансЛит, 2010. – 313 с.

2. *Бать, М.И.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. Динамика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – СПб.: лань, 2010. – 668 с.

3. *Еньшина, Н.А.* Курс лекций по динамике: учебное пособие / Н.А. Еньшина. – Томск. Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. – 288 с.