

ТЕМА 6. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

6.1. Переходные процессы в электрических цепях.

Законы коммутации

Режим работы цепи, при котором токи и напряжения ветвей являются периодическими функциями времени или сохраняют неизменные значения, называется **установившимся**. Если токи и напряжения изменяются не по периодическому закону, то режим работы цепи называется **неустановившимся**.

Частным случаем этого режима являются **переходные процессы**, которые возникают при переходе от одного установившегося режима к другому. Причинами переходных процессов могут быть включение сигнала в цепь, изменение параметров сигнала или цепи и т.д. Переходной процесс в цепи обусловлен наличием в ней реактивных элементов (индуктивности, емкости), в которых накапливается энергия магнитного и электрического полей. При изменении установившегося режима изменяется энергетический режим работы цепи. Эти изменения не могут осуществляться мгновенно в силу непрерывности изменения энергии магнитного и электрического полей, что и приводит к возникновению переходных процессов.

В основе методов расчета переходных процессов лежат **законы коммутации**. **Коммутацией** принято считать любое изменение установившегося режима или состояния цепи. Принято считать, что коммутация совершается мгновенно. Если считать, что коммутация осуществляется в момент $t = 0$, то момент времени до коммутации обозначают $t = 0_-$, момент непосредственно после коммутации – $t = 0_+$. Различают два закона коммутации.

Первый закон коммутации связан с непрерывностью изменения магнитного поля индуктивности $W_L = L \cdot i_L^2 / 2$ и гласит:

в начальный момент $t = 0_+$ ток в индуктивности имеет тоже значение, что и в момент $t = 0_-$ до коммутации, а затем плавно изменяется

$$i_L(0_+) = i_L(0_-).$$

В отличие от тока i_L напряжение на индуктивности $u_L(t)$ может изменяться скачком.

Второй закон коммутации связан с непрерывностью изменения электрического поля емкости $W_C = C \cdot u_C^2 / 2$ и гласит:

в начальный момент $t = 0_+$ напряжение в емкости имеет тоже значение, что и в момент $t = 0_-$ до коммутации, а затем плавно изменяется

$$u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

В отличие от напряжения u_C ток через емкости $i_C(t)$ может изменяться скачком.

Значения токов $i_L(0_+)$ и напряжений $u_C(0_+)$ в момент коммутации образуют **начальные условия** задачи по расчету переходных процессов. Если эти величины равны нулю $i_L(0_-) = 0$, $u_C(0_-) = 0$, то такие начальные условия называются **нулевыми**. Если $i_L(0_-) \neq 0$, $u_C(0_-) \neq 0$, то эти начальные условия называются **ненулевыми**. Начальные условия являются *независимыми* величинами.

7.2. Переходные характеристики линейных цепей

Переходной характеристикой $h(t)$ цепи называют отклик $y(t)$ цепи на воздействие $x(t)$ в форме **единичной ступенчатой функции $x(t) = 1(t)$** .

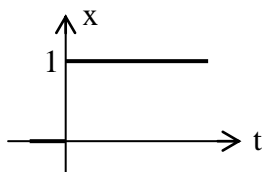


Рис.7.1

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0, \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Единичная ступенчатая функция изображена на рис. 7.1. Если ступенчатая функция имеет амплитуду X_0 , не равную единице, то переходная характеристика определяется так: $h(t) = y(t)/X_0$. Переходная характеристика $h(t)$ и отклик $x(t)$ обязательно обладают соответствующей размерностью.

Переходная характеристика тока или напряжения характеризует переходной процесс в цепи при нулевых начальных условиях, вызванный включением в момент $t = 0$ воздействия (напряжения или тока) в виде скачка (7.1).

Расчет переходных процессов сводится к задаче определения отклика $y(t)$ при включении заданного воздействия $x(t)$, при изменении параметров воздействия или параметров цепи при заданных начальных условий. Эти задачи могут быть решены *классическим методом* путем решения дифференциальных уравнений относительно независимой переменной i_L или u_C . Однако, значительно проще эти задачи решаются *операторным методом*.

7.3. Операторный метод анализа переходных процессов

В основе операторного метода лежит преобразование Лапласа, которое позволяет перенести решение из области функции $f(t)$ действительного переменного t в область функции $F(p)$ комплексного переменного $p = \alpha + j\omega$. Функция $f(t)$ называется **оригиналом**, а $F(p)$ – **изображением**. Сокращенная запись преобразования имеет символику, например,

$$\boxed{f(t) \div F(p); f(t) \leftrightarrow F(p).}$$

Изображение $F(p)$ может быть вычислено по *прямому преобразованию Лапласа*

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Обратное преобразование Лапласа позволяет вычислить оригинал $f(t)$ по известному изображению $F(p)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt} dp.$$

Операторные передаточные функции

Операторной передаточной функцией $T(p)$ называется отношение изображения отклика $y(p)$ к изображению входного воздействия $x(p)$ при нулевых начальных условиях

$$\boxed{T(p) = \frac{y(p)}{x(p)}}. \quad (7.2)$$

Передаточные функции имеют разные названия и разный физический смысл в зависимости от вида воздействия и отклика.

Например, если $y(p) = U_2(p)$ – выходное напряжение, $x(p) = U_1(p)$ – входное напряжение, тогда передаточная функция $T(p)$ является **операторным коэффициентом передачи по напряжению** и обозначается так

$$T_U(p) = K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}.$$

Другой пример: $T_Z(p) = Z(p) = \frac{U_2(p)}{I_1(p)}$ – **передаточное сопротивление** и

т.д.

Операторную передаточную функцию можно определить, не прибегая к прямому преобразованию Лапласа. Для этого в соответствующей

комплексной передаточной функции $T(j\omega)$ нужно заменить мнимую частоту $j\omega$ на комплексную переменную $p = \alpha + j\omega$:

$$T(j\omega) \big|_{j\omega=p} = T(p).$$

Операторная передаточная функция позволяет определить операторное изображение отклика, если известно изображение произвольного воздействия $x(p)$:

$$y(p) = T(p) \cdot x(p). \quad (7.3)$$

Например, если известен коэффициент передачи по напряжению $K_U(p)$ и входное напряжение $U_1(p)$, то можно определить операторное выходное напряжение $U_2(p)$:

$$U_2(p) = K_U(p) \cdot U_1(p).$$

С помощью операторной передаточной функции можно получить операторное выражение переходной характеристики $h(p) = y(p)$ – операторный отклик. Для этого нужно взять в качестве воздействия $x(p)$ операторное изображение единичного скачка, равное

$$1(t) \div 1(p) = 1/p. \quad (7.4)$$

Таким образом, операторное изображение переходной характеристики определяется формулой

$$h(p) = T(p) \cdot 1(p) = \frac{T(p)}{p}. \quad (7.5)$$

7.4. Вычисление оригинала по заданному операторному изображению

Операторное изображение функции $y(p)$ линейной цепи имеет, как правило, вид рациональной дроби

$$y(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (7.6)$$

где a_m, a_{m-1}, \dots, a_0 ; b_n, b_{n-1}, \dots, b_0 – вещественные коэффициенты.

Оригинал $y(t)$ можно вычислить с помощью обратного преобразования Лапласа. Для этого нужно разложить $y(p)$ на простые дроби

$$\frac{M(p)}{N(p)} = y_0 \cdot \left[\frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n} \right], \quad (7.7)$$

где $y_0 = a_m/b_n$ – масштабный коэффициент, A_1, A_2, \dots, A_n – коэффициенты простых дробей, p_1, p_2, \dots, p_n – корни уравнения знаменателя

$N(p) = p^n + \frac{b_{n-1}}{b_n} p^{n-1} + \dots + \frac{b_1}{b_n} p + \frac{b_0}{b_n} = 0$, их называют **полюсы функции** $y(p)$.

Для нахождения оригинала простых дробей с целью упрощения решения задачи целесообразно воспользоваться таблицами оригиналов и изображений известных функций, приведенных в специальных справочниках. В табл. 7.1 даны оригиналы и изображения некоторых функций, встречающихся в теории цепей.

Таблица 7.1.

| № п/п | Изображение $y(p)$ | Оригинал $y(t)$ |
|--|---|--|
| 1 | A/p | $A = \text{const}$ |
| 2 | A | $\delta(t)$ |
| 3 | $1/p^2$ | t |
| Полюсы изображения $y(p)$. $p_k = -\alpha_k$ – действительное число | | |
| 4 | $1/(p + \alpha)$ | $e^{-\alpha t}$ |
| 5 | $p/(p + \alpha)$ | $- \alpha \cdot e^{-\alpha t}$ |
| 6 | $1/[p(p + \alpha)]$ | $(1 - e^{-\alpha t})/\alpha$ |
| 7 | $1/[p^2 \cdot (p + \alpha)]$ | $(e^{-\alpha t} + \alpha \cdot t - 1)/\alpha^2$ |
| 8 | $1/(p + \alpha)^2$ | $t \cdot e^{-\alpha t}$ |
| 9 | $p/(p + \alpha)^2$ | $(1 - \alpha t)e^{-\alpha t}$ |
| 10 | $1/[p(p + \alpha)^2]$ | $[1 - e^{-\alpha t} \cdot (1 + \alpha t)]/\alpha^2$ |
| 11 | $1/[(p + \alpha_1)(p + \alpha_2)]$ | $(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t})/(\alpha_2 - \alpha_1)$ |
| 12 | $1/[p(p + \alpha_1)(p + \alpha_2)]$ | $\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left(\frac{e^{-\alpha_1 t}}{\alpha_1} - \frac{e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_2} \right)$ |
| 13 | $p/[(p + \alpha_1)(p + \alpha_2)]$ | $(\alpha_1 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{-\alpha_2 t})/(\alpha_1 - \alpha_2)$ |
| $p_{k,k+1} = -\alpha \pm j\beta$ – комплексно-сопряженные полюсы. | | |
| 14 | $(p + \alpha)/[(p + \alpha)^2 + \beta^2]$ | $e^{-\alpha t} \cos(\beta t)$ |
| 15 | $\beta/[(p + \alpha)^2 + \beta^2]$ | $e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$ |
| 16 | $p/(p + \alpha)^2 + \beta^2$ | $\left(\cos \alpha \cdot t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \cdot t \right) \cdot e^{-\alpha t}$ |
| 17 | $1/p^2 + \alpha^2$ | $\frac{1}{\alpha} \cdot \sin \alpha \cdot t$ |
| 18 | $p/p^2 + \alpha^2$ | $\cos \alpha \cdot t$ |

Чтобы воспользоваться этой таблицей, нужно рассчитать коэффициенты A_k простых дробей (7.7). В математике это делают методом сравнения коэффициентов полиномов. Однако в теории цепей для упрощения

расчетов при определении коэффициентов дробей и оригинала применяют *теорему разложения*.

Теорема разложения

Если изображение $y(p)$ представлено в виде рациональной дроби вида (7.6), то оригинал $y(t)$ можно определить по формулам теоремы разложения. В зависимости от вида полюсов изображения $y(p)$ существует несколько формул разложения, которые приводятся ниже.

1. Случай *простых*, не кратных полюсов.

Если функция $y(p) = M(p)/N(p)$ имеет n простых полюсов, действительных и отрицательных $-p_1 = -\alpha_1, p_2 = -\alpha_2, \dots, p_n = -\alpha_n$, то оригинал $y(t)$ определяется по формуле:

$$y(t) = A_1 e^{-\alpha_1 \cdot t} + A_2 e^{-\alpha_2 \cdot t} + \dots + A_n e^{-\alpha_n \cdot t} = \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{dN(p)/dp \Big|_{p=p_k}} e^{p_k \cdot t}. \quad (7.8)$$

2. Среди n полюсов имеется один *нулевой полюс*, например, $p_1 = 0, p_2 = -\alpha_2, \dots, p_n = -\alpha_n$, т.е. $N(p) = p N_1(p)$.

Формула (7.8) примет вид

$$y(p) = \frac{M(p)}{p N_1(p)} \div y(t) = A_1 + A_2 e^{-\alpha_2 t} + \dots + A_n e^{-\alpha_n t} = \frac{M(0)}{N_1(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{M(p_k)}{p_k dN_1(p)/dp \Big|_{p=p_k}} e^{p_k t}. \quad (7.9)$$

3. Среди n полюсов есть *пара комплексно-сопряженных*, например, $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$.

В оригинале двум членам суммы (7.7) с этими полюсами соответствует функция в виде затухающего гармонического колебания:

$$\frac{M(p_1) \cdot e^{p_1 t}}{p_{*1} dN(p)/dp \Big|_{p=p_1}} + \frac{M(p_2) \cdot e^{p_2 t}}{p_2 dN(p)/dp \Big|_{p=p_2}} = 2 \cdot [A \cos(\omega \cdot t) + B \sin(\omega \cdot t)] \cdot e^{-\alpha t} \cdot 1(t), \quad (7.10)$$

где A и B – коэффициенты, определяемые по формуле

$$A + jB = \frac{M(p_2)}{dN(p)/dp \Big|_{p=p_2}}. \quad (7.11)$$

4. Случай *кратных полюсов*.

Если изображение $y(p)$ наряду с n простыми полюсами p_1, p_2, \dots, p_n имеет, например, еще один полюс кратности m в точке p_{n+1} , т.е.

$$y(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{M(p)}{N_1(p) \cdot (p - p_{n+1})^m}, \quad (7.12)$$

то оригинал следует определять по формуле

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k) e^{p_k t}}{\frac{d}{dp} [N_1(p) \cdot (p - p_{n+1})^m]_{p=p_k}} + \frac{1}{(s-1)!} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} \left[\frac{M(p) e^{p_{n+1} t}}{N_1(p)} \right]_{p=p_{n+1}}. \quad (7.13)$$

7.5. Методика расчета переходных характеристик

Процедуру расчета переходных процессов, в т.ч. и переходных характеристик, можно разбить на четыре этапа:

- а) вывод формул операторной передаточной функции цепи $T(p)$ и операторной переходной характеристики отклика $h(p)$;
- б) получение численного выражения и значений полюсов операторной функции $h(p)$;
- в) вывод аналитического выражения переходной характеристики как функции времени $h(t)$;
- г) вычисление, построение и анализ переходной характеристики.

Рассмотрим все этапы расчета на конкретных примерах.

Пример 7.1. Получить аналитическое выражение операторной переходной характеристики напряжения на конденсаторе $h_{U_C}(p) = u_C(p)$ в схеме, изображенной на рис. 7.2. На входе цепи включен источник ЭДС ступенчатого напряжения $e(t) = u(t) = 1(t)$ В.

Этот пример охватывает первый этап расчета переходной характеристики – вывод формулы операторной передаточной функции цепи $T(p)$ и операторной переходной характеристики отклика $h(p)$.

Решение. В соответствии с формулой (7.5) требуется рассчитать передаточную функцию $T(p)$ – операторный коэффициент передачи по напряжению на емкости $K_{U_C}(p)$. В примере 6.2 по теме 6 для этой схемы было получено выражение этого параметра в операторной форме (см. ф. (6.8))

$$K_{U_C}(p) = \frac{G_1(pL + R_2)}{p^2 LC + p[L(G_1 + G_3) + R_2 C] + 1 + R_2(G_1 + G_3)}.$$

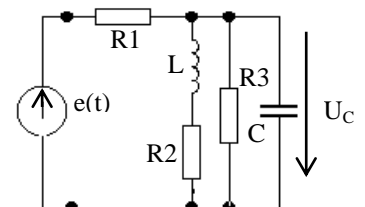


Рис. 7.2.

На основании (7.5) операторное изображение переходной характеристики будет иметь вид

$$h_{Uc}(p) = K_{Uc}(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{G_1(pL+R_2)}{p[p^2LC + p[L(G_1+G_3)+R_2C]+1+R_2(G_1+G_3)]}. \quad (7.14)$$

Полученное выражение можно представить в общем виде

$$h_{Uc}(p) = \frac{M(p)}{pN_1(p)} = H_0 \cdot \frac{p+\bar{a}_0}{p[p^2+\bar{b}_1p+\bar{b}_0]} = \frac{H_0(p+\bar{a}_0)}{p(p-p_2)(p-p_3)},$$

где

$$H_0 = \frac{1}{R_1C}; \bar{a}_0 = \frac{R_2}{L}; \bar{b}_1 = \frac{(R_1+R_3)}{R_1R_3C} + \frac{R_2}{L}; \bar{b}_0 = \frac{1}{LC} + \frac{R_2(R_1+R_3)}{LCR_1R_3}; \quad (7.15)$$

p_2, p_3 - полюсы $h_{Uc}(p)$.

Получим формулы полюсов путем решения уравнения

$$N(p) = p(p^2 + \bar{b}_1p + \bar{b}_0) = 0$$

$$p_1=0; \quad p_{2,3} = -\frac{\bar{b}_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{b}_1}{2}\right)^2 - \bar{b}_0}. \quad (7.16)$$

Прежде чем воспользоваться формулами теоремы разложения для нахождения оригинала необходимо получить численное выражение операторной функции $h_{Uc}(p)$.

Пример 7.2. Получить численное выражение $h_{Uc}(p) = u_c(p)$ и значения полюсов функции (7.14) для трех вариантов параметров элементов:

вариант 1) $R1 = 10$ кОм, $R2 = 10$ Ом, $R3 = 1$ кОм, $L = 1$ мГн, $C = 10$ пФ;

2) $R1 = 10$ кОм, $R2 = 10$ Ом, $R3 = 10$ кОм, $L = 1$ мГн, $C = 10$ пФ;

3) $R1 = 10$ кОм, $R2 = 10$ Ом, $R3 = 100$ кОм, $L = 1$ мГн, $C = 10$ пФ.

Этот пример охватывает второй этап расчета переходной характеристики – получение численного выражения и значений полюсов операторной функции $h(p)$.

Решение. Подставим значения параметров элементов цепи в формулы коэффициентов (7.15) и полюсов (7.16) операторной функции (7.14). Получим численное выражение переходной характеристики и значения полюсов.

Каждый вариант отличается от другого значением сопротивления резистора R_3 . Как видно из (7.15) и (7.16) сопротивление R_3 влияет на значение полюсов.

Вариант № 1. $R_1 = 10 \text{ кОм}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 1 \text{ кОм}$, $L = 1 \text{ мГн}$, $C = 10 \text{ пФ}$.

$$H_0 = 10^7, \bar{a}_0 = 10^4, \bar{b}_1 = 1.001 \cdot 10^8, \bar{b}_0 = 1.011 \cdot 10^{14}.$$

$$h_{Uc}(p) = 10^7 \cdot \frac{p + 10^4}{p[p^2 + 1.001 \cdot 10^8 p + 1.011 \cdot 10^{14}]} = \frac{10^7(p + 10^4)}{p(p + 1.02 \cdot 10^6)(p + 9.91 \cdot 10^7)}.$$

Полюсы: $p_1 = 0$ – нулевой; $p_2 = -1.02 \cdot 10^6$, $p_3 = -9.91 \cdot 10^7$ – действительные и отрицательные.

Вариант № 2. $R_1 = 10 \text{ кОм}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 9990 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ мГн}$, $C = 10 \text{ пФ}$.

$$H_0 = 10^7, \bar{a}_0 = 10^4, \bar{b}_1 = 2 \cdot 10^7, \bar{b}_0 = 1 \cdot 10^{14}.$$

$$h_{Uc}(p) = 10^7 \cdot \frac{p + 10^4}{p[p^2 + 2 \cdot 10^7 p + 1 \cdot 10^{14}]} = \frac{10^7(p + 10^4)}{p(p + 10^7)^2}.$$

Полюсы: $p_1 = 0$ – нулевой; $p_{2,3} = -1 \cdot 10^7$ – действительные, отрицательные и одинаковые (кратные).

Вариант № 3. $R_1 = 10 \text{ кОм}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 100 \text{ кОм}$, $L = 1 \text{ мГн}$, $C = 10 \text{ пФ}$.

$$H_0 = 10^7, \bar{a}_0 = 10^4, \bar{b}_1 = 1.101 \cdot 10^7, \bar{b}_0 = 1 \cdot 10^{14}.$$

$$h_{Uc}(p) = 10^7 \cdot \frac{p + 10^4}{p[p^2 + 1.101 \cdot 10^7 p + 10^{14}]} = \frac{10^7(p + 10^4)}{p(p + 5.505 \cdot 10^6 - j8.35 \cdot 10^6)(p + 5.505 \cdot 10^6 + j8.35 \cdot 10^6)}.$$

Полюсы: $p_1 = 0$ – нулевой; $p_{2,3} = -5.505 \cdot 10^6 \pm j8.35 \cdot 10^6$ – комплексно-сопряженные.

В трех вариантах задачи получены функции третьего порядка (в знаменателе полином третьей степени). Характер полюсов меняется при изменении величины сопротивления R_3 . Вид переходной характеристики, т.е. выражение $h_{Uc}(t)$, будет зависеть от характера полюсов.

Пример 7.3. Получить аналитическое выражение переходной характеристики $h_{Uc}(t)$ напряжения на конденсаторе для трех вариантов параметров элементов, рассмотренных в примере 7.2.

Этот пример охватывает третий этап расчета переходной характеристики – вывод аналитического выражения переходной характеристики $h_{Uc}(t)$.

Решение. Рассчитаем переходную характеристику по теореме разложения. Функция (7.14) имеет три полюса, причем один – нулевой $p_1 = 0$. Для каждого варианта задачи нужно применять разные формулы разложения (7.8) – (7.13).

Вариант № 1.

$h_{Uc}(p) = 10^7 \cdot \frac{p + 10^4}{p[p^2 + 1.001 \cdot 10^8 p + 1.011 \cdot 10^{14}]} \cdot$ Полюсы: $p_1 = 0$ – нулевой;
 $p_2 = -1.02 \cdot 10^6$; $p_3 = -9.91 \cdot 10^7$ – действительные, отрицательные и различные. Следовательно, оригинал $h_{Uc}(t)$ можно определять по формуле (7.9).

$H_0 = 10^7$; $M(p) = p + 10^4$; $N(p) = p^2 + 1.001 \cdot 10^8 p + 1.011 \cdot 10^{14}$; $M(0) = 10^4$; $N(0) = 1.011 \cdot 10^{14}$; $N'(p) = 2p + 1.001 \cdot 10^8$.

$$h_{Uc}(t) = 10^7 \left[\frac{10^4}{1.011 \cdot 10^{14}} + \frac{p_2 + 10^4}{p_2(2p_2 + 1.001 \cdot 10^8)} e^{p_2 t} + \frac{p_3 + 10^4}{p_3(2p_3 + 1.001 \cdot 10^8)} e^{p_3 t} \right] \cdot 1(t).$$

После подстановки значений p_2 и p_3 и вычислений получим окончательное выражение переходной характеристики по варианту № 1.

$$h_{Uc}(t) = \left[0.001 + 0.101 \cdot e^{-1.02 \cdot 10^6 t} - 0.102 \cdot e^{-9.91 \cdot 10^7 t} \right] \cdot 1(t). \quad (7.17)$$

Вариант № 2.

$$h_{Uc}(p) = 10^7 \cdot \frac{p + 10^4}{p[p^2 + 2 \cdot 10^7 p + 10^{14}]} = \frac{10^7(p + 10^4)}{p(p + 10^7)^2}.$$

Полюсы: $p_1 = 0$ – нулевой; $p_{2,3} = -10^7$ – два одинаковых (кратных, $m = 2$), действительных и отрицательных. Функция $h_{Uc}(p)$ имеет вид формулы (7.12), поэтому оригинал $h_{Uc}(t)$ нужно определять по формуле (7.13).

$H_0 = 10^7$; $M(p) = p + 10^4$; $N(p) = p(p + 10^7)^2$; $m = 2$; $(m - 1) = 1$; $M(0) = 10^4$; $N'(p) = 3p^2 + 4 \cdot 10^7 p + 10^{14}$; $N'(0) = 10^{14}$; $N_1(p) = p$;
 $[M(p) \cdot e^{p \cdot t} / p] = [(-10^4/p^2) + (1 + (10^4/p)) \cdot t] \cdot e^{p \cdot t}$

$$h_{Uc}(t) = \left\{ 10^7 \left[\frac{(p_1 + 10^4) e^{p_1 t}}{3p_1^2 + 4 \cdot 10^7 p_1 + 10^{14}} \right]_{p_1=0} + 10^7 \left[-\frac{10^4}{p_2^2} + \left(1 + \frac{10^4}{p_2}\right) \cdot t \right] e^{p_2 t} \right\} \cdot 1(t).$$

После подстановки значения $p_2 = -10^7$ и вычислений получим окончательное выражение переходной характеристики по варианту № 2.

$$h_{Uc}(t) = \left[10^{-3} + (-10^{-3} + 10^7 \cdot t) \cdot e^{-10^7 t} \right] \cdot 1(t). \quad (7.18)$$

Вариант № 3.

$$h_{Uc}(p) = 10^7 \cdot \frac{p + 10^4}{p[p^2 + 1.101 \cdot 10^7 p + 10^{14}]} = \frac{10^7 p + 10^{11}}{p^3 + 1.101 \cdot 10^7 p^2 + 10^{14} p}.$$

Полюсы: $p_1 = 0$ – нулевой; $p_{2,3} = -5,505 \cdot 10^6 \pm j8.35 \cdot 10^6$ – комплексно-сопряженные. Функция $h_{Uc}(p)$ имеет вид формулы (7.9). Так как два полюса комплексно-сопряженные, то оригинал следует искать по формулам (7.9) - (7.11) в виде

$$\begin{aligned} h_{Uc}(t) &= \{A_1 + 2 \cdot [A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)] e^{-\alpha t}\} \cdot 1(t). \\ M(p) &= 10^7 p + 10^{11}; N(p) = p^3 + 1.101 \cdot 10^7 p^2 + 10^{14} p; \\ N_1(p) &= p^2 + 1.101 \cdot 10^7 p + 10^{14}; M(0) = 10^{11}; N_1(0) = 10^{14}; \\ N'(p) &= 3p^2 + 2.202 \cdot 10^7 p + 10^{14}; p_3 = -5,505 \cdot 10^6 - j8.35 \cdot 10^6; \\ A_1 &= 0,001; \alpha = 5.505 \cdot 10^6; \omega = 8.35 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + jB &= \frac{M(p_3)}{dN(p)/dp \Big|_{p=p_3}} = \frac{p_3 + 10^4}{3p_3^2 + 2 \cdot 1.001 \cdot 10^7 p_3 + 10^{14}} = \\ &= \frac{-5.495 \cdot 10^{13} - j8.348 \cdot 10^{13}}{-1.394 \cdot 10^{14} + j9.191 \cdot 10^{13}} = -5 \cdot 10^{-4} + j0.6. \end{aligned}$$

Таким образом, формула переходной характеристики имеет вид

$$h_{Uc}(t) = U_C(t) = \left[0.001 + (-0.001 \cos(8.35 \cdot 10^6 t) + 1.2 \sin(8.35 \cdot 10^6 t)) \cdot e^{-5.5 \cdot 10^6 t} \right] \cdot 1(t). \quad (7.19)$$

7.6. Вычисление, построение и анализ переходной характеристики

Заключительный этап расчета переходных характеристик заключается в вычислении и построении временной функции $h(t)$. Для этого нужно определить временной интервал и шаг аргумента.

Любая переходная характеристика представляется суммой временных функций

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) + \dots + h_n(t).$$

Чаще всего в составе суммы встречаются следующие функции (см. (7.8) – (7.10)):

- а) скачок – ступенчатая функция – $h_1(t) = A_1 \cdot 1(t)$ (рис. 7.3 а);
- б) убывающая экспонента – $h_2(t) = A_2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$ (рис. 7.3 б);
- в) колебательный процесс с убывающей амплитудой (рис. 7.3 в);

$$h_3(t) = [A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)] e^{-\alpha t} 1(t).$$

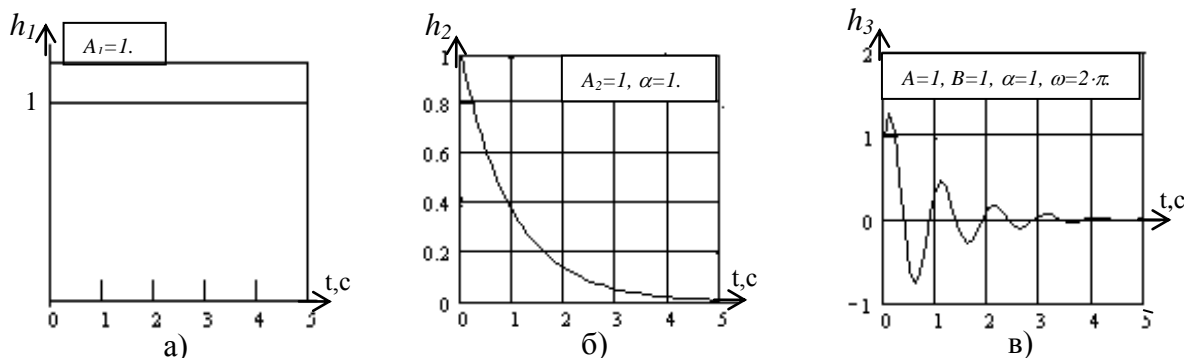


Рис. 7.3

Функции $h_2(t)$ и $h_3(t)$ уменьшаются по амплитуде по закону $e^{-\alpha t}$. Эти функции при $t = 3/\alpha$ достигают 95% своего установившегося значения, а при $t = 5/\alpha$ – более 99%. В цепях первого порядка величину $\tau = 1/|\alpha|$ называют **постоянная времени цепи**. На практике принято считать переходной процесс законченным при $t = (3 \div 5) \tau$ (см. рис. 7.3 б, в).

Вычисление функции проводят в определенном временном интервале от t_1 до t_2 . Переходная характеристика, как правило, вычисляется начиная с $t_1 = 0$ (в момент включения скачка). Вторая граница интервала $t_2 = t_{max}$ для функций, изображенных на рис. 7.3, на практике принимается

$$t_{max} = (3 \div 5) / |\alpha_{min}|, \quad (7.20)$$

где $|\alpha_{min}|$ – минимальное по модулю значение коэффициента в показателе экспонент, входящих в состав формулы $h(t)$ переходной характеристики.

Шаг Δt аргумента t можно определить по значению t_{max} , если задать 10 ÷ 20 точек на кривую

$$\Delta t = t_{max} / (10 \dots 20). \quad (7.21)$$

Если в составе переходной характеристики имеется функция колебательного процесса (рис. 7.3 в), то шаг аргумента можно определить по угловой частоте $\omega = 2\pi/T$

$$\Delta t = T/8 = 2 \cdot \pi / 8 \cdot \omega = \pi / 4 \cdot \omega. \quad (7.22)$$

Результаты численных расчетов функции принято представлять в виде таблицы 7.2

Таблица 7.2

| № пп | t, c | $h(t)$ |
|------|--------|--------|
| 1 | 0 | --- |
| 2 | --- | --- |
| --- | --- | --- |

| | | |
|---|----------|-----|
| m | ∞ | --- |
|---|----------|-----|

Пример 7.4. Определить временной интервал и шаг аргумента для расчета переходных характеристик $h_{Uc}(t)$ напряжения на конденсаторе, полученных в примере 7.3 (для трех вариантов параметров элементов, рассмотренных в примере 7.2). провести расчет функций и их построение.

Этот пример охватывает четвертый этап расчета переходной характеристики – вычисление, построение и анализ переходной характеристики.

Вариант № 1.

$$h_{Uc}(t) = \left[0.001 + 0.101 \cdot e^{-1.02 \cdot 10^6 t} - 0.102 \cdot e^{-9.91 \cdot 10^7 t} \right] \cdot 1(t).$$

Переходную характеристику можно рассмотреть в виде суммы трех функций: $h_{Uc}(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)$, где $h_1(t) = 0.001 \cdot 1(t)$ – скачек;

$h_2(t) = 0.101 \cdot e^{-1.02 \cdot 10^6 t} \cdot 1(t)$ и $h_3(t) = -0.102 \cdot e^{-9.91 \cdot 10^7 t} \cdot 1(t)$ – две экспоненты с разными показателями степени.

Рассчитаем максимальный временной интервал. Один из двух полюсов имеет минимальное значение $|p_1| = p_{min} = 1.02 \cdot 10^6$. Следовательно,

$$t_{max} = 5/1.02 \cdot 10^6 \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

Выберем 10 точек на кривую. Тогда временной интервал (шаг) равен

$$\Delta t = t_{max}/10 = 5 \cdot 10^{-6}/10 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ с.}$$

Перед численным расчетом полезно провести качественный анализ характеристики. Для этого сначала оценивают значение функции при $t = 0$ и $t \rightarrow \infty$:

$$u_C(0) = 0.001 + 0.101 - 0.102 = 0; \quad u_C(\infty) = 0.001.$$

Одна экспонента $h_2(t)$, имеющая меньший коэффициент $\alpha_1 = 1.02 \cdot 10^6$, убывает медленнее по сравнению со второй экспонентой $h_3(t)$. Это хорошо видно на рис. 7.5. Так как $h_2(t)$ положительная, а быстрая экспонента – отрицательная, то в сумме они дадут положительную функцию. Сначала сумма будет расти, а затем уменьшаться и стремиться к нулю.

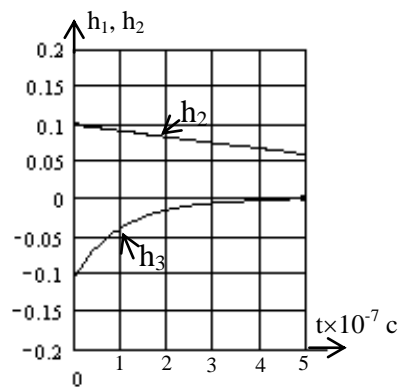


Рис. 7.5

Таким образом, при $t \rightarrow 0$ переходная характеристика (напряжение на емкости колебательного контура) при действительных и отрицательных полюсах плавно изменяется от 0 до величины $u_C(\infty) = 0.001$ В, т.е. она имеет *апериодический характер*.

Проведем численный расчет переходной характеристики. Для этого можно воспользоваться известными вычислительными программами, например, «Mathcad». Кроме того, на кафедре ТРЭ КГТУ им. А.Н. Туполева разработан и применяется «Пакет контролирующих и вычислительных программ для курсовой работы по Основам теории цепей», позволяющий рассчитать переходные характеристики линейных цепей.

В таблице 7.3 приведены результаты расчета, а на рис. 7.6 а) изображена характеристика, построенная по точкам. Как видно, начальный участок характеристики рассчитан очень грубо. Требуется уменьшить шаг, т.е. увеличить количество точек.

На рис. 7.6 б) показана характеристика, рассчитанная при шаге в 10 раз меньшем, т.е. при $\Delta t = 5 \times 10^{-8}$ с. Видно, что эта характеристика значительно отличается от предыдущей.

Таблица 7.3

| № | $t \times 10^{-6}$ с | $h_U(t)$ |
|----|----------------------|----------|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0,5 | 0.062 |
| 3 | 1 | 0.037 |
| 4 | 1,5 | 0.023 |
| 5 | 2 | 0.014 |
| 6 | 2,5 | 0.0089 |
| 7 | 3 | 0.0057 |
| 8 | 3,5 | 0.0038 |
| 9 | 4 | 0.0027 |
| 10 | 4,5 | 0.0020 |
| 11 | 5 | 0.0016 |

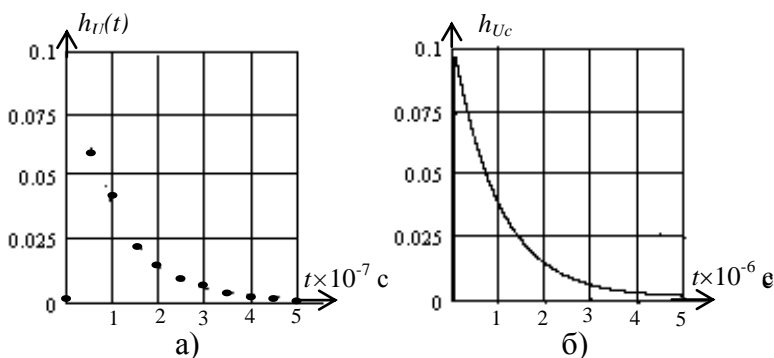


Рис. 7.6

Теперь, чтобы исследовать начальный участок характеристики, следует уменьшить временной интервал, например, в десять раз – $t_2 = 5 \times 10^{-7}$ с. и, соответственно, уменьшить шаг – $\Delta t = 5 \times 10^{-9}$ с. На рис. 7.7 показана эта характеристика.

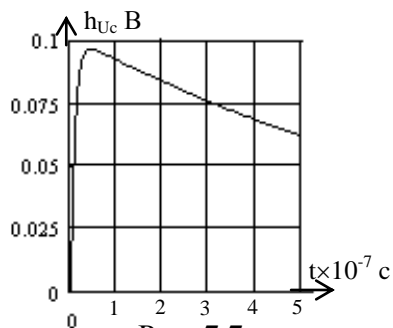


Рис. 7.7

В результате проведенных расчетов можно сделать вывод:

- 1) ограниченное число точек может исказить форму кривой;
- 2) может потребоваться подробное исследование кривой в начале характеристики.

Рассмотренный вариант №1 примера позволяет сделать важный вывод о характере переходных характеристик:

если полюсы переходной характеристики действительные и отрицательные, то переходная характеристика имеет апериодический характер.

Вариант № 2.

$$h_{Uc}(t) = \left[10^{-3} + (-10^{-3} + 10^7 \cdot t) \cdot e^{-10^7 t} \right] \cdot 1(t).$$

При анализе формулы переходной характеристики ее можно представить в виде

$$h_{Uc}(t) = h_1(t) + h_2(t) \cdot h_3(t),$$

где $h_1(t) = 10^{-3} \cdot 1(t)$ – скачок; $h_2(t) = e^{-10^7 t} \cdot 1(t)$ – убывающая экспонента;
 $h_3(t) = (-10^{-3} + 10^7 \cdot t) \cdot 1(t)$ – линейно–растущая функция.

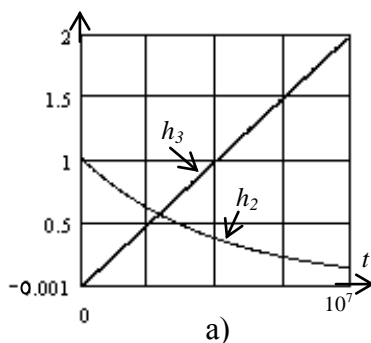
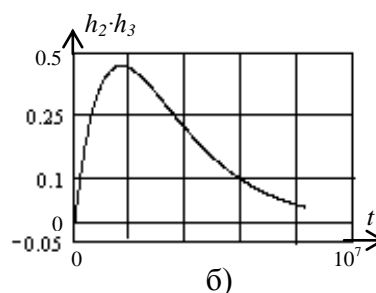


Рис. 7.8



б)

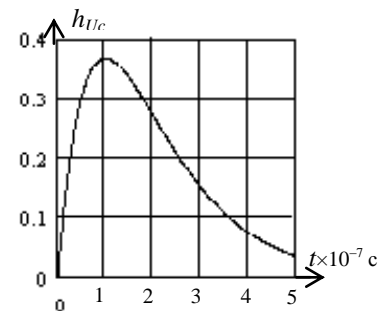


Рис. 7.9

На рис. 7.8 а) изображены две функции h_2 и h_3 , а на рис. 7.8 б) – их произведение. Интересно отметить, что при $t \rightarrow \infty$ линейная функция стремится к бесконечности, экспонента стремится к нулю, а их произведение стремится тоже к нулю. Это объясняется тем, что экспонента убывает быстрее, чем растет линейная функция.

Теперь нужно рассчитать временной интервал, т.е. t_2 по показателю экспоненты $|p| = 10^7$. $t_2 = 5/|p| = 5 \cdot 10^{-7}$ с.

На рис 7.9 изображена переходная характеристика, рассчитанная по варианту № 2 примера. По форме она относится к апериодическим функциям. Это подтверждает вывод, сделанный после решения задачи по первому варианту.

Вариант № 3.

$$h_{U_c}(t) = U_C(t) = \left[0.001 + \left[-0.001 \cdot \cos(8.35 \cdot 10^6 \cdot t) + 1.2 \cdot \sin(8.35 \cdot 10^6 \cdot t) \right] \cdot e^{-5.5 \cdot 10^6 \cdot t} \right] \cdot 1(t).$$

Формулу переходной характеристики можно представить в том же виде, что и в примере №2 $h_{U_c}(t) = h_1(t) + h_2(t) \cdot h_3(t)$,

где $h_1(t) = 10^{-3} \cdot 1(t)$ – скачок;

$h_2(t) = \left[-0.001 \cdot \cos(8.35 \cdot 10^6 \cdot t) + 1.2 \cdot \sin(8.35 \cdot 10^6 \cdot t) \right] \cdot 1(t)$ – гармоническая функция с частотой $\omega = 8.35 \cdot 10^6$ рад/с; $h_3(t) = e^{-5.5 \cdot 10^6 \cdot t} \cdot 1(t)$ – убывающая экспонента.

Максимальное время т.е. временной интервал расчета характеристики определим по формуле (7.20)

$$t_2 = 5/(5.5 \cdot 10^6) \approx 10^{-6} \text{ с.}$$

Максимальный интервал расчета, т.е. шаг можно определить по угловой частоте гармонических функций $\omega = 8.35 \cdot 10^6$ рад/с по формуле (7.22)

$$\Delta t = \pi/4 \cdot \omega = 9.4 \cdot 10^{-8} \text{ с.}$$

На рис. 7.10 а) изображены две функции h_2 и h_3 , а на рис. 7.10 б) – переходная характеристика $h_{U_c}(t)$.

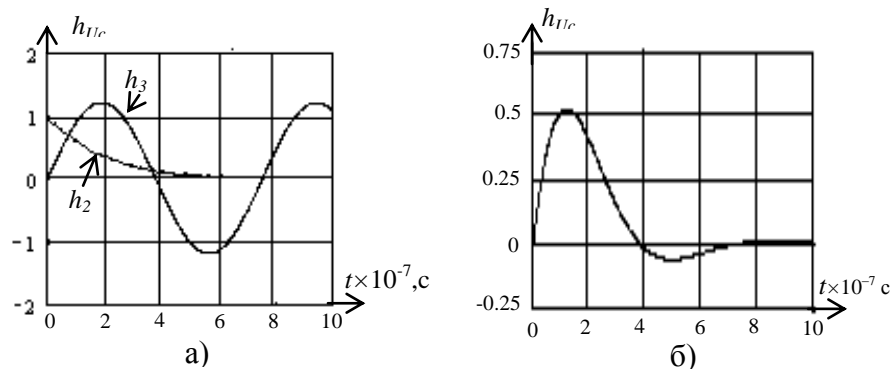


Рис. 7.10

В этом примере переходная характеристика напряжения на емкости имеет колебательный характер, т.к. в формуле имеется гармоническая функция $h_3(t)$. Колебательный процесс со временем затухает по закону экспоненты $-e^{-5.5 \cdot 10^6 \cdot t}$. Эта электрическая цепь при заданных параметрах элементов обладает значительным затуханием – за время переходного процесса совершается практически только один период колебательного процесса.

Рассмотренный вариант № 3 примера позволяет сделать другой важный вывод о характере переходных характеристик:

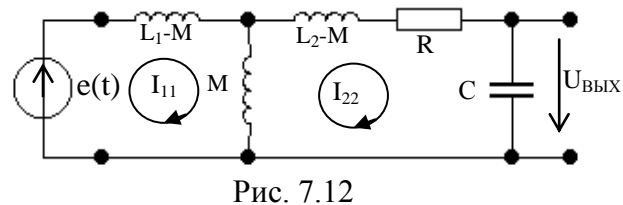
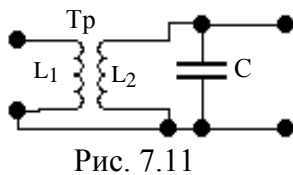
если два полюса операторной функции комплексно-сопряженные, то двум слагаемым соответствует

гармоническая функция с убывающей по экспоненте амплитудой, т.е. процесс имеет колебательный характер.

В рассмотренных вариантах примера расчета переходных характеристик видно как меняется характер переходного процесса при изменении вида полюсов операторной передаточной функции.

В заключении темы рассмотрим применение изложенной методики к решению конкретной задачи.

Пример 7.5. Рассчитать и построить переходную характеристику выходного напряжения $h_{u_{\text{вых}}}(t) = U_{\text{ВЫХ}}(t)$ колебательного контура, выполненного на основе трансформатора. Принципиальная схема и схема замещения контура изображены на рис. 7.11 и 7.12 соответственно. $L_1 = L_2 = 10^{-3}$ Гн, $M = 10^{-4}$ Гн, $C = 10^{-8}$ Ф, $R = 100$ Ом, $e(t) = 1(t)$ В.



Решение. Выведем формулу операторной переходной характеристики методом контурных токов. В схеме замещения два независимых контура. Они показаны стрелками. В качестве воздействия возьмем источник единичной ступенчатой ЭДС $e(t) \div E(p) = 1/p$. Выходное напряжение пропорционально контурному току I_{22} и сопротивлению емкости: $U_{\text{ВЫХ}}(p) = I_{22}/pC$. Составим систему контурных уравнений

$$\begin{bmatrix} (p(L_1 - M) + pM) & -pM \\ -pM & (R + p(L_2 - M) + pM + 1/pC) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/p \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В результате решения системы уравнений получим аналитические выражения контурного тока I_{22} и выходного напряжения $U_{\text{ВЫХ}}(p)$ – операторной переходной характеристики

$$h_U(p) = \frac{M}{p \left[C(L_1 L_2 - M^2) p^2 + L_1 C R p + L_1 \right]}.$$

Подставим значения параметров элементов. Получим численное выражение переходной характеристики напряжения

$$h_U(p) = \frac{10^{10}}{p(p^2 + 10^5 p + 10^{11})} = \frac{M(p)}{pN_1(p)}. \quad (7.23)$$

Знаменатель выражения (7.23) $N(p) = pN_1(p) = p(p^2 + 10^5 p + 10^{11})$ является полиномом третьей степени. Следовательно, функция $h_{U_{\text{ВЫХ}}}(p)$ имеет

три полюса, из них один – нулевой $p_{1*} = 0$ и два – комплексно-сопряженных $p_{2,3*} = -50000 \pm j312250$. Поэтому оригинал переходной характеристики нужно определять по формуле (7.9).

$M(p) = 10^{11}$; $N_I(p) = p^2 + 10^5 p + 10^{11}$; $M(0) = 10^{11}$; $N_I(0) = 10^{12}$; $dN_I(p)/dp = 2p + 10^5$. После подстановки численных значений полюсов и численных преобразований в формулах получим выражение переходной характеристики.

$$h_{U_{вв}} = 0.1 - \left[0.1 \cdot \cos(312250 \cdot t) + 1.6 \cdot 10^{-2} \cdot \sin(312250 \cdot t) \right] \cdot e^{-50000 \cdot t} \cdot 1(t).$$

Максимальное время для численного расчета характеристики равно $t_{max} = 5 / 50000 = 10^{-4}$ сек. Шаг счета определим по формуле (7.22) $\Delta t = 2\pi / (8 \cdot \omega) = \pi / (4 \cdot 312250) \approx 2.5 \cdot 10^{-6}$ с.

По результатам численного расчета переходная характеристика представлена на рис. 7.13. В этом примере переходная характеристика напряжения на емкости имеет колебательный характер. Колебательный процесс со временем затухает по закону экспоненты – $e^{-5 \cdot 10^5 \cdot t}$.

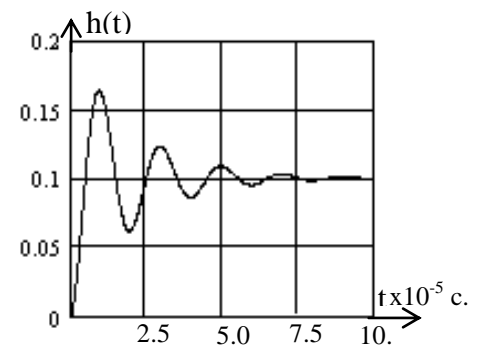


Рис. 7.13

