Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МОРСКОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ ПО РАЗДЕЛУ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Санкт-Петербург
2012

Типовой расчет

«Теория функций комплексной переменной»

Вариант расчета (образец)

1. Изобразить число $5-5\sqrt{3}\,i$ на комплексной плоскости, найти его модуль и аргумент и записать в тригонометрической и экспоненциальной формах.

2. Найти а) $\dfrac{5+7i}{2-3i}$, б) $\operatorname{Re} 2e^{-\frac{7\pi}{4}i}$.

3. Вычислить $i^{128}-6i^{79}+3i^{11}+i^{5}$.

4. Вычислить $\dfrac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i\right)^{11}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^{7}}$.

5. Вычислить и изобразить на комплексной плоскости $\sqrt[5]{-1+i}$.

6. Найти все значения функций:

а) $\operatorname{sh}(2+3i)$, б) $\operatorname{Arcsin}\sqrt{3}$, в) $(-3i)^{2+i}$.

7. Нарисовать линии или области, заданные равенствами или неравенствами:

а) $z=1+e^{it}, t\in[0;\pi]$,

б) $\operatorname{Im} z^{2}>2$,

в) $|z-1+3i|\le \operatorname{Re}(4+5i), -\dfrac{\pi}{2}\le \arg z\le 0$.

8. Восстановить аналитическую функцию по ее вещественной части

$$u(x,y)=e^{y}\cos x+xy,\qquad w(0)=1+2i.$$

9. Найти образ линии $x+y=2$ при следующих отображениях:

а) $w=1-2iz$, б) $w=\dfrac{1}{z}$.

10. Исследовать конечные особые точки функции и найти в них вычеты

а) $f(z)=\dfrac{e^{z}}{(z-1)^{3}(z+2)}$, б) $f(z)=\dfrac{e^{z}-1}{z^{3}}$, в) $f(z)=e^{\frac{5}{z-3}}$.

11. Вычислить интеграл $\oint\limits_{L}\dfrac{zdz}{(z-1)^{2}\left(z^{2}+1\right)}$, где L:

а) $|z-i|=1$, б) $|z|=2$, в) $|z|=\dfrac{1}{2}$.

12. Вычислить несобственные интегралы, используя вычеты

а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^{2}+4\right)\left(x^{2}+1\right)^{2}}$, б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos 2x\,dx}{\left(x^{2}-2x+2\right)^{2}}$.

Справочный материал

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — любые действительные числа, i — мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$.

Запись $z = x + iy$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Действительные числа x и y называются соответственно *действительной* (или вещественной) и *мнимой* частью комплексного числа $z = x + iy$ и обозначаются

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* числу $z = x + iy$.

Комплексное число $z = x + iy$ можно изображать на плоскости OXY вектором $\vec{r}$ с началом в точке $(0,0)$ и концом в точке (x, y). Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной* (или *вещественной*) *осью*, а ось ординат — *мнимой* (рис. 1).

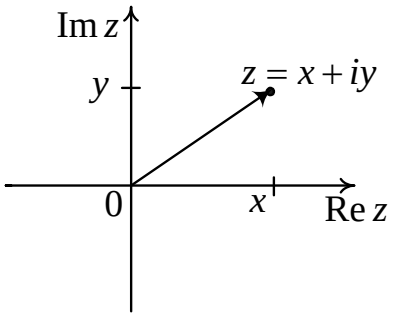

Рис. 1.

Длина вектора $\vec{r} = \{x, y\}$ называется *модулем комплексного числа* z и обозначается $r = |z|$. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$ называется *аргументом числа* z: $\varphi = \arg z$. Положительным направлением изменения угла φ считается направление против часовой стрелки. Модуль и аргумент комплексного числа z определяются из формул

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

При нахождении аргумента следует учитывать, что для каждого числа $z \neq 0$ его аргумент имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π (аргумент числа $z = 0$ не определён, а его модуль равен нулю). В качестве *главного значения* аргумента обычно выбирают значение $\varphi = \arg z$ из промежутка $(-\pi, \pi]$. Всё множество значений аргумента обозначают $\operatorname{Arg} z$. Таким образом,

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Если $-\pi < \arg z \leq \pi$,то из формулы $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ получаем

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{для внутренних точек I и IV четвертей, то есть при } x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi & \text{для внутренних точек II четверти, то есть при } x < 0,\ y > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi & \text{для внутренних точек III четверти, то есть } x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Выделим четыре частных случая. Если *z*:

а) действительное положительное число, то $\arg z = 0$;

б) действительное отрицательное число, то $\arg z = \pi$;

в) чисто мнимое с положительной мнимой частью, то $\arg z = \frac{\pi}{2}$;

г) чисто мнимое с отрицательной мнимой частью, то $\arg z = -\frac{\pi}{2}$.

Любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в *тригонометрической форме*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

В силу периодичности функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ для перехода к тригонометрической форме достаточно найти главное значение аргумента и считать, что $\varphi = A\mathrm{rg}\, z$.

С помощью формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

можно перейти от тригонометрической формы записи комплексного числа к *экспоненциальной* (показательной)

$$z = re^{i\varphi},$$

в которой по уже указанным причинам будем считать, что $\varphi = A\mathrm{rg}\, z$.

Задача 1

Изобразить число $5 - 5\sqrt{3}\, i$ на комплексной плоскости, найти его модуль и аргумент и записать в тригонометрической и экспоненциальной формах.

Решение задачи

Число $5 - 5\sqrt{3}\, i$ изобразим на комплексной плоскости вектором с координатами $\left(5, -5\sqrt{3}\right)$ (рис. 2).

Найдем модуль заданного числа:

$$|z| = \sqrt{5^2 + \left(-5\sqrt{3}\right)^2} = 10.$$

Так как вектор $\left(5, -5\sqrt{3}\right)$ лежит в четвертой четверти, то

$$\arg z = \mathrm{arctg}\left(\frac{-5\sqrt{3}}{5}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

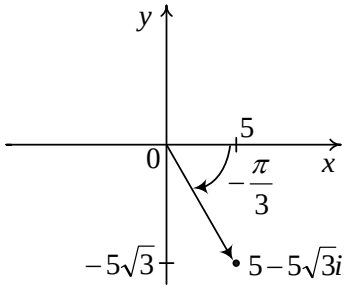

Рис. 2.

Тригонометрическая форма имеет вид

$$z = 10\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right),$$

а экспоненциальная

$$z = 10\, e^{-\frac{\pi}{3}i}.$$

Справочный материал

При делении комплексных чисел удобно домножить числитель и знаменатель дроби, полученной при записи действия, на комплексное число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}==\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Задача 2

Найти а) $\frac{5+7i}{2-3i}$, б) $\operatorname{Re}2e^{-\frac{7\pi}{4}i}$.

Решение задачи 2а

$$\frac{5+7i}{2-3i}=\frac{(5+7i)}{(2-3i)}\frac{(2+3i)}{(2+3i)}=\frac{10+15i+14i+21i^2}{2^2-9i^2}==\frac{-11+29i}{13}=-\frac{11}{13}+\frac{29}{13}i.$$

Решение задачи 2б

Представим $2e^{-\frac{7\pi}{4}i}$ в тригонометрической форме и найдем его действительную часть:

$$\operatorname{Re}2e^{-\frac{7\pi}{4}i}=\operatorname{Re}2\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)==2\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

Задача 3

Вычислить $i^{128}-6i^{79}+3i^{11}+i^5$.

Решение задачи

Учитывая, что $i^2=-1$, и $(-1)^{2n}=1,\ \ (-1)^{2n+1}=-1$, получаем

$$i^{128}-6i^{79}+3i^{11}+i^5=\left(i^2\right)^{64}-6i\left(i^2\right)^{39}+3i\left(i^2\right)^5+i\left(i^2\right)^2=$$
$$=1+6i-3i+i=1+4i.$$

Задача 4

Вычислить $\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i\right)^{11}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^7}$.

Решение задачи

Представим числа $\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i$ и $\sqrt{3}+i$ в показательной форме:

$$\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i=\sqrt{8}\,e^{-\frac{\pi}{3}i};$$

$$\sqrt{3}+i=2e^{\frac{\pi}{6}i},$$

и возведем их в степени:

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i\right)^{11}=\left(\sqrt{8}e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^{11}=2^{16}\sqrt{2}e^{-\frac{11\pi}{3}i},$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^7=\left(2e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^7=2^7e^{\frac{7\pi}{6}i}.$$

Тогда

$$\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i\right)^{11}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^{7}}=\frac{2^{16}\sqrt{2}e^{-\frac{11\pi}{3}i}}{2^{7}e^{\frac{7\pi}{6}i}}=2^{9}\sqrt{2}e^{-\frac{29\pi}{6}i}.$$

Так как

$$e^{-\frac{29\pi}{6}i}=\cos\left(-\frac{29\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{29\pi}{6}\right)=\cos\left(5\pi-\frac{\pi}{6}\right)-$$

$$-i\sin\left(5\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2},$$

получаем

$$\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i\right)^{11}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^{7}}=2^{9}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-2^{8}\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+i\right).$$

Справочный материал

Извлечь корень натуральной степени n из числа ***z*** - значит найти такое число $w=\sqrt[n]{z}$, n - я степень которого равна ***z***.

Если $z=re^{i\varphi}$, то, учитывая, что $e^{i\varphi}=e^{i(\varphi+2\pi k)}$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{re^{i\varphi}}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}=$$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,\ldots,n-1.$$

Все n различных значений $\sqrt[n]{z}$ имеют один и тот же модуль, равный $\sqrt[n]{r}$. Аргументы значений w_k и w_{k+1} отличаются один от другого на $\frac{2\pi}{n}$. Поэтому точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n - угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат.

Задача 5

Вычислить и изобразить на комплексной плоскости $\sqrt[5]{-1+i}$.

Решение задачи

Найдем модуль и аргумент числа $z=-1+i$:

$$r=|z|=\sqrt{(-1)^2+1}=\sqrt{2}\ ,$$

$$\varphi=\arg z=\operatorname{arctg}\frac{1}{-1}+\pi=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$\sqrt[5]{-1+i}=\sqrt[5]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{5}\right).$$

Полагая $k=0,1,2,3,4$, найдем пять различных значений корня:

$$k=0\qquad w_0=\sqrt[5]{-1+i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{20}+i\sin\frac{3\pi}{20}\right),$$

$$k=1\qquad w_1=\sqrt[5]{-1+i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{20}+i\sin\frac{11\pi}{20}\right),$$

$$k=2 \qquad w_2=\sqrt[5]{-1+i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{20}+i\sin\frac{19\pi}{20}\right),$$

$$k=3 \qquad w_3=\sqrt[5]{-1+i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{27\pi}{20}+i\sin\frac{27\pi}{20}\right),$$

$$k=4 \qquad w_4=\sqrt[5]{-1+i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{35\pi}{20}+i\sin\frac{35\pi}{20}\right).$$

Изобразим полученные значения на комплексной плоскости (рис. 3).

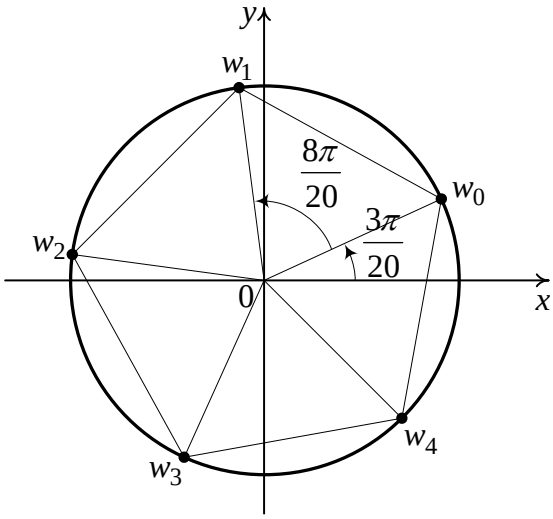

Рис. 3.

Справочный материал

Пусть даны два множества D и E, принадлежащих расширенной комплексной плоскости.

Если каждому числу z из множества D поставлено в соответствие одно число w из множества E, то говорят, что на множестве D определена *однозначная функция комплексной переменной* $w=f(z)$, отображающая множество D во множество E.

Множество E_1 всех значений w, которые $f(z)$ принимает на E, называется *множеством значений* функции $f(z)$.

Если каждому значению z из множества D ставится в соответствие несколько значений w из множества E, то функция $w=f(z)$ называется *многозначной*.

Представим каждое из комплексных чисел z и w в виде $z=x+iy$, $w=u+iv$. Тогда

$$w=f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y).$$

Таким образом, задание функции комплексной переменной $w=f(z)$ равносильно заданию двух действительных функций $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$.

Перечислим *основные элементарные функции комплексной переменной.*

Показательная функция $w=e^z$ определяется с помощью равенства

$$w=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Показательная функция является периодической с периодом $2\pi i$, т. е. $e^{z+2\pi i}=e^z$.

Тригонометрические функции определяются равенствами

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Гиперболические функции задаются как

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Логарифмическая функция

Число w — логарифм числа z ($z \neq 0$), если $e^w = z$.

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k) \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Ввиду многозначности величины $\operatorname{Arg} z$ логарифм является многозначной функцией.

Главным значением логарифма называется то значение, которое соответствует главному значению аргумента числа z

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Общая степенная функция $w = z^\alpha$

Если α — любое комплексное число, то

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}.$$

Эта функция многозначная, так как многозначна логарифмическая функция.

Общая показательная функция $w = \alpha^z$

Если α — любое комплексное число, отличное от нуля, то

$$w = \alpha^z = e^{z \operatorname{Ln} \alpha}.$$

Эта функция также является многозначной.

Обратные тригонометрические функции

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z} \ (z \neq \pm i),$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z} \ (z \neq \pm i).$$

Задача 6

Найти все значения функций:

а) $\operatorname{sh}(2 + 3i)$, б) $\operatorname{Arcsin} \sqrt{3}$, в) $(-3i)^{2+i}$.

Решение задачи

а) Подставляя в формулу $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ значение $z = 2 + 3i$, получаем

$$\operatorname{sh}(2+3i)=\frac{e^{2+3i}-e^{-(2+3i)}}{2}=\frac{e^2e^{3i}-e^{-2}e^{-3i}}{2}=$$

$$=\frac{e^2(\cos 3+i\sin 3)-e^{-2}(\cos 3-i\sin 3)}{2}=\cos 3\frac{e^2-e^{-2}}{2}+$$

$$+i\sin 3\frac{e^2+e^{-2}}{2}=\cos 3\operatorname{sh}2+i\sin 3\operatorname{ch}2.$$

б) Полагая в формуле $\operatorname{Arcsin}z=-i\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$ значение $z=\sqrt{3}$, запишем

$$\operatorname{Arcsin}\sqrt{3}=-i\operatorname{Ln}\left(i\sqrt{3}+\sqrt{1-\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)=-i\operatorname{Ln}\left(i\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)\right).$$

Так как $\left|i\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)\right|=\sqrt{3}\pm\sqrt{2},\quad \arg i\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{Ln}\left(i\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)\right)=\ln\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\quad k\in\mathbf{Z}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Arcsin}\sqrt{3}=-i\left(\ln\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)==\frac{\pi}{2}-i\ln\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)+2\pi k,\quad k\in\mathrm{Z}.$$

Замечая, что $\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, запишем

$$\ln\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)=\pm\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right).$$

Окончательно,

$$\operatorname{Arcsin}\sqrt{3}=\frac{\pi}{2}\pm i\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+2\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

в) Воспользуемся представлением показательно-степенной функции в виде суперпозиции общих показательной и степенной функций, т. е.

$$(-3i)^{2+i}=e^{\operatorname{Ln}(-3i)^{2+i}}=e^{(2+i)\operatorname{Ln}(-3i)}.$$

Так как

$$|-3i|=3,$$

$$\arg(-3i)=-\frac{\pi}{2},$$

то имеем

$$\operatorname{Ln}(-3i)=\ln 3+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\quad k\in\mathbf{Z}.$$

Подставляя полученное выражение, запишем

$$(-3i)^{2+i}=e^{(2+i)\left(\ln 3+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)}=e^{2\ln 3+\frac{\pi}{2}+2\pi k+i(\ln 3-\pi+4\pi k)}=$$

$$=9e^{\frac{\pi}{2}+2\pi k}\left(\cos(\ln 3-\pi+4\pi k)+i\sin(\ln 3-\pi+4\pi k)\right)=$$

$$=-9e^{\frac{\pi}{2}+2\pi k}\left(\cos\ln 3+i\sin\ln 3\right).$$

Справочный материал

Совокупность точек z, таких что $|z-z_0|=r$, образует окружность с центром в точке z_0 радиуса r. Неравенство $|z-z_0|<r$ определяет множество точек, лежащих внутри этой окружности (внутренность круга), а неравенство $|z-z_0|>r$ — множество точек, лежащих вне окружности (внешность круга).

Совокупность точек z, удовлетворяющих уравнению $\arg(z-z_0)=\varphi$, образует луч, выходящий из точки z_0 и составляющий угол φ с положительным направлением оси Ox.

Задача 7

Нарисовать линии или области, заданные равенствами или неравенствами:

а) $z=1+e^{it}, t\in[0;\pi]$,

б) $\operatorname{Im} z^2>2$,

в) $|z-1+3i|\le \operatorname{Re}(4+5i), -\dfrac{\pi}{2}\le \arg z\le 0$.

Решение задачи

а) Из формулы Эйлера $e^{it}=\cos t+i\sin t$ получаем

$$z=x+iy=1+(\cos t+i\sin t)=(1+\cos t)+i\sin t.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-1=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}.$$

Возведя обе части уравнений последней системы в квадраты и сложив, получим уравнение

$$(x-1)^2+y^2=1.$$

Так как параметр t изменяется от 0 до π, то искомая линия представляет собой верхнюю половину окружности с центром в точке $(1;0)$ единичного радиуса (рис. 4).

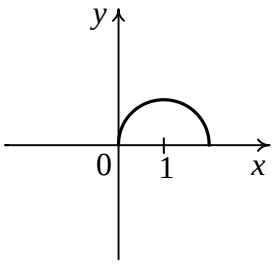

Рис. 4.

б) Пусть $z=x+iy$. Тогда $z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i2xy$. Следовательно, $\operatorname{Im} z^2=2xy$.

Так как по условию $\operatorname{Im} z^2>2$, получаем $2xy>2$ или $xy>1$. Последнее неравенство определяет множество точек в первой и третьей четвертях, соответственно над и под гиперболой $xy=1$ (рис. 5).

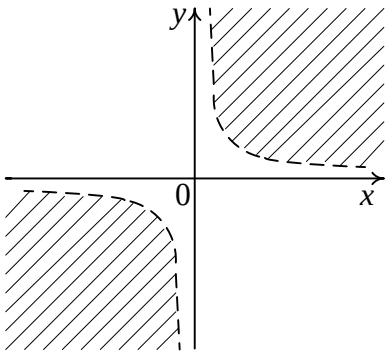

Рис. 5.

в) Так как $\mathrm{Re}(4+5i)=4$,то неравенство

$$|z-1+3i| \le \mathrm{Re}(4+5i)$$

задает множество точек внутри и на окружности радиуса, равного 4, с центром в точке $(1;-3)$.

Система $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le 0$ описывает точки, лежащие внутри и на границах области, образованной лучами, выходящими из начала координат под углами 0 и $-\frac{\pi}{2}$ к оси Ox (рис. 6).

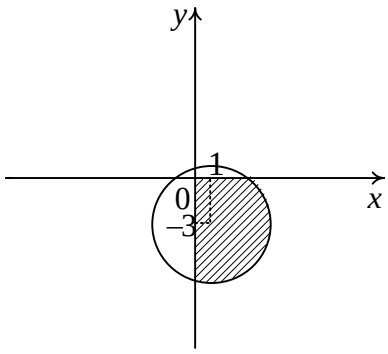

Рис. 6.

Справочный материал

Пусть функция $w=f(z)$ определена на области *D*. Зафиксируем точку $z=z_0 \in D$ (соответственно функция примет значение $f(z_0)$). Пусть переменная *z* получит приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, то есть $z = z_0 + \Delta z$ (при этом Δz должно быть настолько мало, чтобы точка *z* оставалась внутри области *D*). Тогда значение функции тоже получит приращение

$$\Delta f(z_0) = f(z_0+\Delta z) - f(z_0).$$

Производной функции $w=f(z)$ *в точке* z_0 называется предел

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0),$$

при условии, что он существует.

Функция *дифференцируема в точке* z_0 тогда и только тогда, когда существует конечная производная $f'(z_0)$.

Функция, дифференцируемая в каждой точке области, называется *дифференцируемой в этой области*.

Пусть функция $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0=x_0+i\,y_0$, где $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в этой точке. Тогда для того, чтобы функция $w=f(z)$ была дифференцируема в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись равенства

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

Эти равенства называются *условиями Коши - Римана* или *условиями Эйлера - Даламбера*.

Однозначная функция $w=f(z)$, дифференцируемая в какой-либо точке и некоторой ее окрестности, называется *аналитической в этой точке*.

Если функция $w=f(z)$ является аналитической в каждой точке области *D*, то она называется *аналитической в этой области*.

Функция является аналитической в области тогда и только тогда, когда в каждой точке этой области выполняются условия Коши-Римана.

Если $w=f(z)$ аналитическая в некоторой области, то её вещественная и мнимая части $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$, то есть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Решения уравнения Лапласа называются *гармоническими функциями.*

Задача 8

Восстановить аналитическую функцию по ее вещественной части

$$u(x,y)=e^y\cos x+xy,$$

если

$$w(0)=1+2i$$

Решение задачи

1) Проверим, является ли функция гармонической.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-e^y\sin x+y;\ \frac{\partial u}{\partial y}=e^y\cos x+x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-e^y\cos x;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^y\cos x;$$

Поскольку $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^y\cos x+e^y\cos x=0$, требование гармоничности выполнено.

2) Для отыскания функции $v(x,y)$ воспользуемся условиями Коши - Римана.

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-e^y\sin x+y$, то из первого условия Коши - Римана получаем

$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-e^y\sin x+y$, откуда

$$v(x,y)=\int\left(-e^{y}\sin x+y\right)dy=-e^{y}\sin x+\frac{y^{2}}{2}+c(x). \qquad (1)$$

По второму условию Коши - Римана $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$, то есть

$$\left(-e^{y}\sin x+\frac{y^{2}}{2}+c(x)\right)'_{x}=-\left(e^{y}\cos x+x\right), \text{ или}$$

$$-e^{y}\cos x+c'(x)=-e^{y}\cos x-x \text{ ,откуда}$$

$$c'(x)=-x.$$

Интегрируя, найдем $c(x)=\int(-x)dx=-\frac{x^{2}}{2}+c_{1}$, и подставим последнее выражение в формулу (1):

$$v(x,y)=-e^{y}\sin x+\frac{y^{2}}{2}-\frac{x^{2}}{2}+c_{1}.$$

Таким образом, аналитическая функция имеет вид

$$w(x+iy)=e^{y}\cos x+xy+i\left(-e^{y}\sin x+\frac{y^{2}}{2}-\frac{x^{2}}{2}+c_{1}\right).$$

Полагая в этом равенстве $x=z,\ y=0$, получаем

$$w(z)=\cos z+i\left(-\sin z-\frac{z^{2}}{2}+c_{1}\right).$$

Таким образом, мы восстановили аналитическую функцию по ее вещественной части с точностью до постоянной величины.

Учитывая заданные начальные условия, находим c_{1}:

$$w(0)=1+ic_{1}=1+2i\Rightarrow c_{1}=2.$$

Тогда

$$w(z)=\cos z+i\left(2-\sin z-\frac{z^{2}}{2}\right).$$

Задача 9

Найти образ линии $x+y=2$ при следующих отображениях:

а) $w=1-2iz$, б) $w=\frac{1}{z}$.

Решение задачи

а) Обозначив $z=x+iy$ и $w=u+iv$, запишем

$$w=1-2iz=1-2i(x+iy)=1+2y-2ix=u+iv \text{ ,т.е. } \begin{cases} u=1+2y \\ v=-2x \end{cases}$$

Выразим из последних соотношений x и y:

$$\begin{cases} x=-\frac{v}{2} \\ y=\frac{u-1}{2} \end{cases}.$$

Подставив их в уравнение заданной линии, получим уравнение прямой $-\frac{v}{2}+\frac{u-1}{2}=2$, или $u-v=5$ (рис. 7).

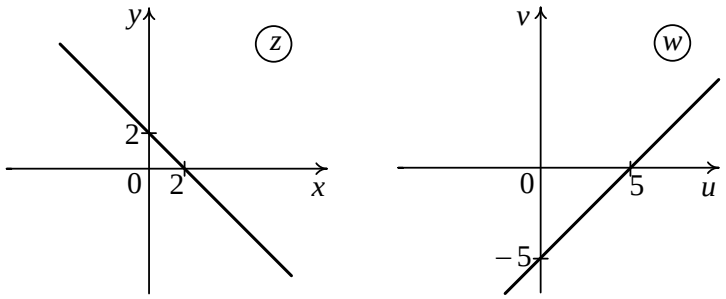

Рис. 7.

б) Из выражения $w=\dfrac{1}{z}$ имеем $z=\dfrac{1}{w}$ или, обозначив $z=x+iy$ и $w=u+iv$,

$$x+iy=\frac{1}{u+iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}.$$

Тогда

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},\ y=\frac{-v}{u^2+v^2}.$$

Подставив x и y в уравнение исходной линии, получим $\dfrac{u}{u^2+v^2}+\dfrac{v}{u^2+v^2}=2$, откуда $2(u^2+v^2)-u-v=0$, или

$$\left(u-\frac{1}{4}\right)^2+\left(v-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}.$$

Последнее уравнение определяет окружность радиуса $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ с центром в точке $O_1\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$ (рис.8).

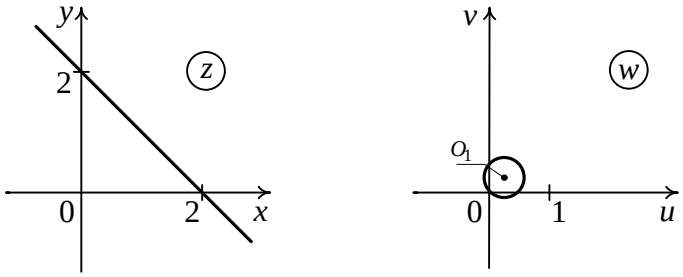

Рис. 8.

Справочный материал

Ряды Тейлора и Лорана

Функция $f(z)$, однозначная и аналитичная в точке $z=z_0$, раскладывается в окрестности этой точки в степенной *ряд Тейлора*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\ (n=0,1,2,...),$$

где L — окружность с центром в точке z_0, лежащая в указанной окрестности.

Приведём разложения некоторых основных элементарных функций в ряд Тейлора по степеням z (т. е. в окрестности точки $z=0$).

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ |z|<\infty,$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ |z|<\infty,$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ |z|<\infty,$$

Точка z_0 называется *нулём функции* $f(z)$ *порядка (кратности)* n, если в разложении $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности z_0 коэффициенты $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$, а $c_n \neq 0$.

Функция $f(z)$, однозначная и аналитичная в кольце $r<|z-z_0|<R$ ($0 \le r \le R \le \infty$), раскладывается в этом кольце в *ряд Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), L — любая окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри кольца.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ называется *правильной частью ряда Лорана* (она сходится внутри круга $|z-z_0|<R$), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ — *главная часть ряда Лорана* (сходится вне круга $|z-z_0|>r$).

Классификация особых точек

Точка z_0 называется *особой точкой функции* $f(z)$, если функция в этой точке не является аналитической.

Точка z_0 называется *правильной точкой функции* $f(z)$, если функция в этой точке и некоторой её окрестности является аналитической.

Особая точка z_0 функции $f(z)$ называется *изолированной особой точкой*, если существует проколотая окрестность этой точки $\overset{\circ}{U}(z_0)$, не содержащая особых точек функции.

Изолированная особая точка z_0 называется *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$.

Изолированная точка z_0 называется *полюсом*, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Если точка z_0 — ноль функции $\dfrac{1}{f(z)}$ ($f(z) \not\equiv 0$), то она является полюсом функции $f(z)$.

Если $z = z_0$ — ноль порядка m для функции $\dfrac{1}{f(z)}$, то назовём её *полюсом порядка* m для функции $f(z)$. При $m=1$ полюс называется *простым*.

Изолированная особая точка называется *существенно особой*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Очевидно, что если $f(z)$ — несократимая дробно-рациональная функция, то её конечными изолированными особыми точками являются корни знаменателя. Они могут быть только полюсами.

Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитична в некоторой окрестности точки z_0 за исключением, может быть, самой точки z_0. *Вычетом* функции *в* точке z_0 называется число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz$, где L — любой замкнутый контур, лежащий в указанной окрестности и окружающий точку z_0, причём обход происходит в таком направлении, чтобы z_0 оставалась слева, т. е.

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz .$$

Если точка z_0 является конечной изолированной особой точкой функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=c_{-1}.$$

Правила нахождения вычетов

1. Если z_0 — правильная или устранимая особая точка, то
$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=0 .$$
2. Если z_0 — полюс первого порядка, то
$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0).$$

Замечание. Если $f(z)$ может быть представлена в виде частного $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} .$$

3. Если z_0 — полюс m - го порядка функции $f(z)$, то
$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[f(z)(z-z_0)^m\right].$$
4. Если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для вычисления вычета функции в этой точке обычно определяют коэффициент c_{-1} ряда Лорана непосредственно.

Задача 10

Исследовать конечные особые точки функции и найти в них вычеты

а) $f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^3(z+2)}$, б) $f(z)=\frac{e^z-1}{z^3}$, в) $f(z)=e^{\frac{5}{z-3}}$.

Решение задачи

а) Конечные особые точки функции $\frac{e^z}{(z-1)^3(z+2)}$ – нули ее знаменателя. При этом, $z_1=1$ - ноль третьего порядка, а $z_2=-2$ – ноль первого порядка. Следовательно, точки $z_1=1$ и $z_2=-2$ – полюсы третьего и первого порядков соответственно. Тогда

$$\operatorname*{res}_{z_1=1}\frac{e^z}{(z-1)^3(z+2)}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to1}\left(\frac{(z-1)^3e^z}{(z-1)^3(z+2)}\right)''_z=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left(\frac{e^z}{(z+2)}\right)''_z=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left(\frac{e^z(z+1)}{(z+2)^2}\right)'=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\frac{e^z\left(z^2+2z+2\right)}{(z+2)^3}=\frac{1}{2}\frac{5e}{3^3}=\frac{5e}{54},$$

$$\operatorname*{res}_{z_2=-2}\frac{e^z}{(z-1)^3(z+2)}=\lim_{z\to-2}\frac{(z+2)e^z}{(z-1)^3(z+2)}=-\frac{e^{-2}}{27}.$$

б) Конечная особая точка функции $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3}$ – точка $z_0=0$ – полюс второго порядка, так как

$$\frac{e^z-1}{z^3}\underset{z\to0}{\sim}\frac{z}{z^3}=\frac{1}{z^2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z_0=0}\frac{e^z-1}{z^3}=\lim_{z\to0}\left(\frac{z^2\left(e^z-1\right)}{z^3}\right)'_z=\lim_{z\to0}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{e^zz-\left(e^z-1\right)}{z^2}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Для вычисления этого предела воспользуемся правилом Лопиталя, т. е.

$$\operatorname*{res}_{z_0=0}\frac{e^z-1}{z^3}=\lim_{z\to0}\frac{\left(e^zz-e^z+1\right)'_z}{\left(z^2\right)'_z}=\lim_{z\to0}\frac{e^zz+e^z-e^z}{2z}==\lim_{z\to0}\frac{e^zz}{2z}=\lim_{z\to0}\frac{e^z}{2}=\frac{1}{2}.$$

в) Точка $z=3$- существенно особая точка функции $f(z)=e^{\frac{5}{z-3}}$, так как не существует $\lim\limits_{z\to3}e^{\frac{5}{z-3}}$.

Для определения вычета найдем коэффициент c_{-1} разложения $e^{\frac{5}{z-3}}$ в ряд Лорана по степеням $z-3$. Так как $e^{\frac{5}{z-3}}=1+\dfrac{5}{z-3}+\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{5}{z-3}\right)^2+\ldots\quad,0<|z-3|<\infty$, то

$$\operatorname*{res}_{z=3}e^{\frac{5}{z-3}}=c_{-1}=5.$$

Справочный материал

Теорема Коши

Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области *D*, ограниченной замкнутым контуром L, а также в точках этого контура, то $\oint\limits_L f(z)dz=0$.

Основная теорема о вычетах

Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром L, за исключением конечного числа n изолированных особых точек $z_1,z_2,\ldots,z_n$, лежащих внутри L, то

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Задача 11

Вычислить интеграл $\oint_L \frac{zdz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, где L:

а) $|z-i|=1$, б) $|z|=2$, в) $|z|=\frac{1}{2}$.

Решение задачи

Конечными особыми точками функции $\frac{z}{(z-1)^2(z^2+1)}$ являются нули ее знаменателя, т. е. точки $z=1,\ z=\pm i$. При этом, $z=1$ – полюс второго порядка, а $z=+i$ и $z=-i$ – полюсы первого порядка, т. к. $(z-1)^2(z^2+1)=(z-1)^2(z+i)(z-i)$.

а) Контур $|z-i|=1$ представляет собой окружность единичного радиуса с центром в точке $(0,1)$ (рис. 9). Внутри этой окружности находится только полюс первого порядка $z=i$.

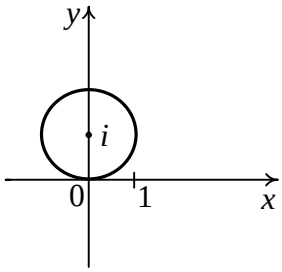

Рис. 9.

Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=i} \frac{z}{(z-1)^2(z^2+1)} = \lim_{z\to i} \frac{z(z-i)}{(z-1)^2(z-i)(z+i)} = \frac{i}{(i-1)^2 2i} =$$

$$= \frac{(i+1)^2}{2(i-1)^2(i+1)^2} = \frac{-1+2i+1}{2(-1-1)^2} = \frac{2i}{2\cdot 4} = \frac{i}{4}.$$

Тогда $\oint_L \frac{zdz}{(z-1)^2(z^2+1)} = 2\pi i \frac{i}{4} = -\frac{\pi}{2}$.

б) Внутри контура $|z|=2$, представляющего собой окружность радиуса 2 с центром в начале координат, находятся точки $z_1=1$ - полюс второго порядка, $z_2=i$ и $z_3=-i$ - полюсы первого порядка (рис. 10).

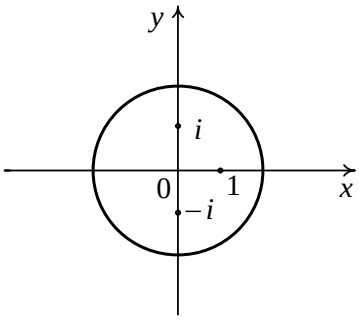

Рис. 10.

В пункте (а) был найден вычет в полюсе $z=i$ $\operatorname{res}\limits_{z=i}\dfrac{z}{(z-1)^2(z^2+1)}=\dfrac{i}{4}$.Вычислим вычеты в остальных полюсах:

$$\operatorname{res}_{z=-i}\frac{z}{(z-1)^2(z^2+1)}=\lim_{z\to -i}\frac{z(z+i)}{(z-1)^2(z-i)(z+i)}=\frac{-i}{(-i-1)^2(-2i)}=$$

$$=\frac{(i-1)^2}{2(i+1)^2(i-1)^2}=\frac{-1-2i+1}{2(-1-1)^2}=\frac{-2i}{2\cdot 4}=-\frac{i}{4},$$

$$\operatorname{res}_{z=1}\frac{z}{(z-1)^2(z^2+1)}=\lim_{z\to 1}\left(\frac{z(z-1)^2}{(z-1)^2(z^2+1)}\right)'=\lim_{z\to 1}\frac{z^2+1-z\cdot 2\cdot z}{(z^2+1)^2}=$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{1-z^2}{(z^2+1)^2}=0.$$

Окончательно получаем $\oint\limits_L\dfrac{zdz}{(z-1)^2(z^2+1)}=2\pi i\left(\dfrac{i}{4}-\dfrac{i}{4}+0\right)=0$.

в) Внутри окружности $|z|=\dfrac{1}{2}$ нет особых точек (рис. 11), и тогда по теореме Коши $\oint\limits_L\dfrac{zdz}{(z-1)^2(z^2+1)}=0$.

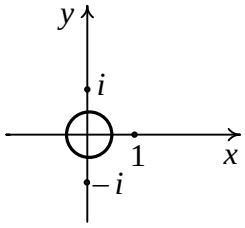

Рис. 11.

Справочный материал

Несобственный интеграл I рода $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$

а) Пусть функция $f(z)$ аналитическая в верхней полуплоскости, включая действительную ось, за исключением конечного числа особых точек $z_1,\ldots,z_n$, лежащих в верхней полуплоскости.

Пусть, кроме того, $|f(z)|\le\dfrac{M}{|z|^m}$ при $|z|\ge R$, $m\ge 2$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}_{z=z_k}f(z).$$

б) Пусть функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=e^{i\alpha z}F(z)$, где $\alpha>0$, а $F(z)$ аналитическая в верхней полуплоскости, включая действительную ось, за исключением конечного числа особых точек $z_1,\ldots,z_n$, лежащих в верхней полуплоскости и $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ \operatorname{Im}z\ge 0}}F(z)=0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}F(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}_{z=z_k}f(z).$$

При нахождении интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\sin\alpha x dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos\alpha x dx$$

следует сначала получить значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha i x} F(x) dx$, а затем выделить его мнимую и вещественную части.

Задача 12

Вычислить несобственные интегралы, используя вычеты

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)^2}$, б) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{(x^2-2x+2)^2}$.

Решение задачи

а). Введем функцию $f(z)=\frac{1}{(z^2+4)(z^2+1)^2}$. В верхней полуплоскости $f(z)$ имеет один полюс первого порядка в точке $z_1=2i$ и один полюс второго порядка в точке $z_2=i$. Найдем вычеты в этих точках:

$$\operatorname*{res}_{z_1=2i} f(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{z-2i}{(z^2+4)(z^2+1)^2}=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{z-2i}{(z+2i)(z-2i)(z^2+1)^2}=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{(z+2i)(z^2+1)^2}=-\frac{i}{36}.$$

$$\operatorname*{res}_{z_2=i} f(z)=\lim_{z\to i}\left(\frac{(z-i)^2}{(z^2+4)(z^2+1)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to i}\left(\frac{(z-i)^2}{(z^2+4)(z+i)^2(z-i)^2}\right)'_z=\lim_{z\to i}\left((z^2+4)^{-1}(z+i)^{-2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to i}\left(-2(z+i)^{-3}(z^2+4)^{-1}-(z+i)^{-2}(z^2+4)^{-2}2z\right)=$$

$$=-\frac{2}{3(2i)^3}-\frac{2i}{9(2i)^2}=\frac{1}{12i}+\frac{i}{18}=-\frac{i}{12}+\frac{i}{18}=-\frac{i}{36}.$$

Окончательно, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)^2}=2\pi i\left(-\frac{i}{36}-\frac{i}{36}\right)=\frac{\pi}{9}$.

б) Так как подынтегральная функция $\frac{\cos 2x}{(x^2-2x+2)^2}$ четная, то

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos 2x dx}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x dx}{(x^2-2x+2)^2}.$$

Подынтегральную функцию можно представить в виде $f(x)=\frac{\cos 2x}{(x^2-2x+2)^2}=\operatorname{Re}\frac{e^{2ix}}{(x^2-2x+2)^2}$, поэтому искомый интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{\left(x^2-2x+2\right)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{\left(x^2-2x+2\right)^2}dx .$$

Функция $F(z)=\dfrac{1}{\left(z^2-2z+2\right)^2}$ имеет в верхней полуплоскости полюс второго порядка в точке $z_0=1+i$. Найдем вычет в z_0:

$$\operatorname*{res}_{z_0=1+i} \frac{e^{2iz}}{\left(z^2-2z+2\right)^2} = \lim_{z\to 1+i}\left(\frac{e^{2iz}\left(z-(1+i)\right)^2}{\left(z^2-2z+2\right)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 1+i}\left(\frac{e^{2iz}}{\left(z-(1-i)\right)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 1+i}\frac{2ie^{2iz}\left(z-(1-i)\right)^2-2e^{2iz}\left(z-(1-i)\right)}{\left(z-(1-i)\right)^4} =$$

$$= \lim_{z\to 1+i}\frac{2e^{2iz}\left(i(z-1+i)-1\right)}{\left(z-1+i\right)^3} = -\frac{3i}{4}e^{-2}e^{2i} =$$

$$= -\frac{3i}{4}e^{-2}\left(\cos 2+i\sin 2\right) = \frac{3}{4}e^{-2}\left(\sin 2-i\cos 2\right).$$

Так как

$$\operatorname{Re}\left(2\pi i\frac{3}{4}e^{-2}\left(\sin 2-i\cos 2\right)\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{3}{2}\pi e^{-2}\cos 2+\frac{3}{2}\pi i e^{-2}\sin 2\right) = \frac{3}{2}\pi e^{-2}\cos 2 ,$$

то окончательно получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{\left(x^2-2x+2\right)^2} = \frac{3}{4}\pi e^{-2}\cos 2 .$$