ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗАНЯТИЯ

1. Амплитудная модуляция

Изменение амплитуды носителя по закону передаваемого сообщения называется амплитудной модуляцией (АМ).

Задача 1. Амплитудно-модулированный сигнал описывается функцией $S_M(t) = 7(1 + 0{,}3\cos 1500 \cdot t)\sin 2\pi 10^5 t,$ В. Определить: глубину модуляции, частоту модулирующего сигнал, несущую частоту, максимальную величину мгновенного значения амплитуды модулированного сигнала.

Решение

Представим выражение для амплитудно-модулированного сигнала:

$$S_M(t) = S_H(1 + \frac{S_M}{S_H}\cos\omega_M t)\sin\varpi_H t,$$

Из приведенного выражения видно, что глубина модуляции $m_{AM} = 0{,}3$

Угловая частота модулирующего сигнала $\omega_M = 1500\, рад/с$. Отсюда частота модулирующего сигнала

$$f_M = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1500}{2\pi} = 239\,\text{Гц}$$

Угловая частота несущего сигнала $\omega_H = 2\pi 10^5\, рад/с$. Отсюда частота несущего сигнала определяется как

$$f_H = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi 10^5}{2\pi} = 100\,\text{кГц}.$$

Теперь необходимо для определения максимальной величины мгновенного значения амплитуды модулированного сигнала, которое равно сумме $S_M + S_H$, найти амплитуду модулирующего сигнала и несущего колебания. Амплитуда несущего колебания определяется из исходного выражения и равна $S_H = 7$В. Определим амплитуду модулирующего сигнала. Поскольку глубина модуляции m_{AM} равна

$$m_{AM} = \frac{S_M}{S_H},\ \text{то}\ S_M = m_{AM} S_H = 0{,}3 \cdot 7 = 2{,}1\ \text{В}$$

Максимальное значение амплитуды модулированного сигнала равно

$S_M + S_H = 2{,}1 + 7 = 9{,}1$ В

Задача 2.Амплитудно-модулированный сигнал описывается функцией $S_M(t) = 9(1 + 0{,}2\cos 2160 \cdot t)\sin 2\pi 10^3 t$, В. Определить: глубину модуляции, частоту модулирующего сигнал, несущую частоту, максимальную величину мгновенного значения амплитуды модулированного сигнала.

Решение

Представим выражение для амплитудно-модулированного сигнала:

$$S_M(t) = S_H(1 + \frac{S_M}{S_H}\cos\omega_M t)\sin\varpi_H t,$$

Из приведенного выражения видно, что глубина модуляции $m_{AM} = 0{,}2$

Угловая частота модулирующего сигнала $\omega_M = 1500\, рад/с$. Отсюда частота модулирующего сигнала

$$f_M = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2160}{2\pi} = 344 \text{ Гц}$$

Угловая частота несущего сигнала $\omega_H = 2\pi 10^3\ рад/с$. Отсюда частота несущего сигнала определяется как

$$f_H = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi 10^3}{2\pi} = 1 \text{ кГц}.$$

Теперь необходимо для определения максимальной величины мгновенного значения амплитуды модулированного сигнала, которое равно сумме $S_M + S_H$, найти амплитуду модулирующего сигнала и несущего колебания. Амплитуда несущего колебания определяется из исходного выражения и равна $S_H = 9$В. Определим амплитуду модулирующего сигнала. Поскольку глубина модуляции m_{AM} равна

$$m_{AM} = \frac{S_M}{S_H}, \text{ то } S_M = m_{AM} S_H = 0{,}2 \cdot 9 = 1{,}8 \text{ В}$$

Максимальное значение амплитуды модулированного сигнала равно

$S_M + S_H = 9 + 1{,}8 = 10{,}8$ В

Варианты для самостоятельного решения (по последней цифре шифра)

1) $S_M(t) = 8(1+0{,}4\cos 1200\cdot t)\sin 2\pi 10^5 t,$

2) $S_M(t) = 2(1+\cos 1800\cdot t)\sin 8\pi 10^3 t,$

3) $S_M(t) = 8(1+0{,}6\cos 2160\cdot t)\sin 2\pi 10^3 t,$

4) $S_M(t) = 9(1+0{,}2\cos 2100\cdot t)\sin 2\pi 10^4 t,$

5) $S_M(t) = 10(1+0{,}9\cos 1700\cdot t)\sin 4\pi 10^5 t,$

6) $S_M(t) = 5(1+0{,}7\cos 1500\cdot t)\sin 2\pi 10^3 t,$

7) $S_M(t) = 4(1+0{,}8\cos 2180\cdot t)\sin 6\pi 10^4 t,$

8) $S_M(t) = 12(1+0{,}5\cos 1950\cdot t)\sin 2\pi 10^3 t,$

9) $S_M(t) = 3(1+0{,}4\cos 2160\cdot t)\sin 4\pi 10^3 t,$

10) $S_M(t) = 5(1+0{,}1\cos 2050\cdot t)\sin 2\pi 10^3 t,$

2. Частотная модуляция

При частотной модуляции по закону модулирующего (передаваемого) сигнала изменяется мгновенное значение частоты носителя.

Задача 1 Частотно-модулированный сигнал описывается функцией $S_M(t) = 7\cos(2\pi 10^5 t + 5\sin 1800t)$ В. Определить: индекс частотной модуляции, частоту модулирующего сигнал, несущую частоту, девиацию частоты практическую ширину спектра ЧМ сигнала

Решение

Представим выражение для частотно-модулированного сигнала:

$$S_M(t) = S_H \cos(\omega_H t + \frac{K_{ЧМ} S_M}{\omega_M}\sin \varpi_M t),$$

Из приведенного выражения видно, что индекс частотной модуляции $m_{ЧМ} = 5$

Угловая частота модулирующего сигнала $\omega_M = 1800\, рад/с$. Отсюда частота модулирующего сигнала

$$f_M = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1800}{2\pi} = 289\,\text{Гц}$$

Угловая частота несущего сигнала $\omega_H = 2\pi 10^5\ рад/с$. Отсюда частота несущего сигнала определяется как

$$f_H = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi 10^5}{2\pi} = 100\,\text{кГц}.$$

Теперь необходимо определить девиацию частоты, которая определяется по формуле $w_g = K_{ЧМ} S_M$, при этом индекс частотной модуляции определяется как $m_{ЧМ} = \frac{K_{ЧМ} S_M}{\omega_M}$, тогда девиация частоты равна $w_g = \omega_M m_{ЧМ}$ или $\Delta F = f_M m_{ЧМ}$, получаем $w_g = \omega_M m_{ЧМ} = 1800 \cdot 5 = 9000$, или $\Delta F = 289 \cdot 5 = 1445$ Гц или 1,45 кГц

Девиация частоты показывает, что максимальное отклонение от несущей частоты равной 100 кГц составляет 1,45кГц. Практическая ширина спектра сигнала определяется по формуле

$$\Delta w = 2m_{чм}\omega_м = 2 \cdot 5 \cdot 1800 = 18000\, рад/с \text{ или } \Delta F = 2m_{чм} f_м = 2 \cdot 5 \cdot 289 = 2{,}9\,\text{кГц}$$

Задача2. Домашняя стереофоническая радиосистема с частотной модуляцией имеет девиацию частоты 80 кГц, а максимальная модулирующая частота равна 20 кГц. Определить индекс модуляции данной системы.

Решение

Подставляем значение в выражение индекса модуляции

$$m_{ЧМ} = \frac{\Delta F}{f_M} = \frac{80}{20} = 4$$

Варианты для самостоятельного решения

1. $750(t) = 3cos\,(2\pi 10^5 t + 6sin1300t)$
2. $600(t) = 6cos\,(4\pi 10^5 t + 10sin1650t)$
3. $450(t) = 5cos\,(8\pi 10^5 t + 9sin1500t)$
4. $500(t) = 4cos\,(2\pi 10^4 t + 7sin1700t)$
5. $350(t) = 3cos\,(4\pi 10^4 t + 4sin1950t)$
6. $500(t) = 8cos\,(8\pi 10^4 t + 5sin1750t)$
7. $800(t) = 9cos\,(2\pi 10^3 t + 0{,}4sin1800t)$
8. $1000(t) = 10cos\,(4\pi 10^3 t + 2sin1900t)$
9. $600(t) = 11cos\,(8\pi 10^3 t + 10sin2000t)$

10. $1000(t) = 12cos\ (2\pi 10^5 t + 2sin2460t)$

3. Фазовая модуляция

При фазовой модуляции по закону модулирующего сигнала изменяется начальная фаза

Задача 1. Фазомодулированный сигнал описывается функцией

$S_M(t) = 9\cos(2\pi 10^3 t + 4\cos 1600t)$ В. Определить: индекс фазовой модуляции, частоту модулирующего сигнал, несущую частоту, девиацию частоты колебаний, практическую ширину спектра.

Решение

Представим выражение для фаза-модулированного сигнала:

$S_M(t) = S_H \cos(\omega_H t + K_{ФМ} S_M \cos \varpi_M t),$

Из приведенного выражения видно, что индекс фазовой модуляции $m_{фМ} = 4$.

Угловая частота модулирующего сигнала $\omega_M = 1600\, рад/с$. Отсюда частота модулирующего сигнала

$$f_M = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1600}{2\pi} = 255\,\text{Гц}$$

Угловая частота несущего сигнала $\omega_H = 2\pi 10^3\, рад/с$. Отсюда частота несущего сигнала определяется как

$$f_H = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi 10^3}{2\pi} = 1\,\text{кГц}.$$

Теперь необходимо определить девиацию частоты колебаний, которая определяется по формуле $w_g = \omega_M m_{ЧМ} = 1600 \cdot 4 = 6400\, рад/с$, или $\Delta F = f_M m_{ЧМ} = 255 \cdot 4 = 1020$ Гц или 1,02 кГц.

Практическая ширина спектра сигнала определяется по формуле

$\Delta w = 2m_{ФМ}\omega_м = 2 \cdot 4 \cdot 1600 = 12800\, рад/с$ или $\Delta F = 2m_{фм} f_м = 2 \cdot 4 \cdot 255 = 2{,}04$ кГц

Задача 2.

Фазомодулированный сигнал описывается функцией

$S_M(t) = 6\cos(2\pi 10^4 t + 4{,}5\cos 2100t)$ В. Определить: индекс фазовой модуляции, частоту модулирующего сигнал, несущую частоту, девиацию частоты колебаний, практическую ширину спектра.

Решение

Представим выражение для фазомодулированного сигнала:

$S_M(t) = S_H \cos(\omega_H t + K_{ФМ} S_M \cos \varpi_M t),$

Из приведенного выражения видно, что индекс фазовой модуляции $m_{фM} = 4{,}5$

Угловая частота модулирующего сигнала $\omega_M = 2100\, рад/с$. Отсюда частота модулирующего сигнала

$$f_M = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2100}{2\pi} = 334\ \text{Гц}$$

Угловая частота несущего сигнала $\omega_H = 2\pi 10^4\ рад/с$. Отсюда частота несущего сигнала определяется как

$$f_H = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi 10^4}{2\pi} = 10\ \text{кГц}.$$

Теперь необходимо определить девиацию частоты колебаний, которая определяется по формуле $w_g = \omega_M m_{ЧМ} = 2100 \cdot 4{,}5 = 9450\, рад/с$, или $\Delta F = f_M m_{ЧМ} = 334 \cdot 4{,}5 = 1503$ Гц или 1,5 кГц.

Практическая ширина спектра сигнала определяется по формуле

$\Delta w = 2m_{ФМ}\omega_м = 2 \cdot 4{,}5 \cdot 2100 = 18900\, рад/с$ или $\Delta F = 2m_{фм} f_м = 2 \cdot 4.5 \cdot 334 = 3$ кГц

Варианты для самостоятельного решения

1) $S_M(t) = 7\cos(2\pi 10^3 t + 6\cos 1500 \cdot t)$

2) $S_M(t) = 6\cos(2\pi 10^4 t + 4{,}5\cos 2100 \cdot t)$

3) $S_M(t) = 5\cos(8\pi 10^5 t + 9\sin 1500 \cdot t)$

4) $S_M(t) = 4\cos(2\pi 10^4 t + 7\sin 1700 \cdot t)$

5) $S_M(t) = 3\cos(4\pi 10^4 t + 4\sin 1950 \cdot t)$

6) $S_M(t) = 8\cos(8\pi 10^4 t + 5\sin 1750 \cdot t)$

7) $S_M(t) = 9\cos(2\pi 10^3 t + 0{,}4\sin 1800 \cdot t)$

8) $S_M(t) = 10\cos(4\pi 103t + \sin 1900 \cdot t)$

9) $S_M(t) = 11\cos(8\pi 10^3 t + 10\sin 2000 \cdot t)$

10) $S_M(t) = 12\cos(2\pi 10^5 t + 2\sin 2160 \cdot t)$

4. Амплитудно-импульсная модуляция

При амплитудно-импульсной модуляции амплитуда импульсов изменяется по закону модулирующего сигнала.

Задача 1. Определить коэффициент глубины АИМ модуляции, если амплитуда модулирующего сообщения равна $S_M = 2$В, амплитуда импульсной несущей $S_H = 5$В, а коэффициент пропорциональности между амплитудой и изменением амплитуды импульсов импульсной несущей $k = 2$

Решение

Представим выражение для АИМ модулированного сигнала:

$$S_M(t) = S_H(1 + m\sin w_M t)(\frac{1}{Q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin\frac{k\pi}{Q} \cos kw_H t)$$

где m - коэффициент глубины модуляции

Определим коэффициент глубины модуляции по формуле

$$m = k\frac{S_M}{S_H} = 2\frac{2}{5} = 0{,}8$$

Задача 2. АИМ модулированный сигнал описывается функцией

$$S_M(t) = 5(1 + 0{,}8\sin 1500t)(0{,}5 + 0{,}6\sin 1{,}57\cos 2\pi 10^3 t + 0{,}3\sin\pi\cos 4\pi 10^3 t) \text{ В}.$$

Определить: коэффициент глубины модуляции, частоту модулирующего сигнала, частоту импульсов несущей, период следования импульсов, скважность импульсов, амплитуду импульсной несущей.

Решение

Представим выражение для амплитудно-модулированного сигнала:

$$S_M(t) = S_H(1 + m\sin w_M t)(\frac{1}{Q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin\frac{k\pi}{Q} \cos kw_H t)$$

Из приведенного выражения видно, что коэффициент глубины модуляции $m = 0{,}8$, коэффициент пропорциональности между амплитудой и изменением амплитуды импульсов импульсной несущей $k = 2$

Угловая частота модулирующего сигнала $\omega_M = 1500\, рад/с$. Отсюда частота модулирующего сигнала

$$f_M = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2160}{2\pi} = 344\,\text{Гц}$$

Угловая частота импульсов несущей $\omega_H = 2\pi 10^3\, рад/с$. Отсюда частота несущего сигнала определяется как

$$f_H = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi 10^3}{2\pi} = 1\,\text{кГц}.$$

Период следования импульсов также определяется из угловой частоты импульсов несущей и определяется как

$$T = \frac{2\pi}{w_H} = \frac{2\pi}{2\pi 10^3} = 10^{-3}\ \text{с}$$

Из исходного выражения $\frac{1}{Q} = 0{,}5$ отсюда скважность импульсов

$$Q = \frac{1}{0{,}5} = 2$$

Определим амплитуду импульсной несущей из формулы $m = k\frac{S_M}{S_H}$,

отсюда $S_H = k\frac{S_M}{m} = 2\frac{2}{0{,}8} = 5B$

Варианты для самостоятельного решения

1) $S_M(t) = 3(1 + 0{,}7\sin 1900 \cdot t)(0{,}4 + 0{,}6\sin 1{,}79\cos 2\pi 10^3 t + 0{,}6\sin\pi\cos 4\pi 10^3 t)$

2) $S_M(t) = 7(1 + \sin 1680t)(0{,}5 + \sum_{k=1}^{2}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\cos 6k\pi 10^4 t))$

3) $S_M(t) = 5(1 + \sin 1600t)(0{,}25 + \sum_{k=1}^{3}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{4}\cos 4k\pi 10^3 t)$

4) $S_M(t) = 6(1 + \sin 1750t)(0{,}2 + \sum_{k=1}^{2}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{5}\cos 8k\pi 10^3 t)$

5) $S_M(t) = 8(1 + \sin 2160t)(0{,}5 + \sum_{k=1}^{4}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\cos k\pi 10^4 t)$

6) $S_M(t) = 5(1+\sin 2050t)(0{,}25+\sum_{k=1}^{3}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{4}\cos 2k\pi 10^4 t)$

7) $S_M(t) = 6(1+\sin 1950t)(0{,}2+\sum_{k=1}^{2}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{5}\cos 8k\pi 10^4 t)$

8) $S_M(t) = 4(1+\sin 1550t)(0{,}2+\sum_{k=1}^{2}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{5}\cos 4k\pi 10^4 t)$

9) $S_M(t) = 7(1+\sin 1600t)(0{,}5+\sum_{k=1}^{2}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\cos k\pi 10^5 t)$

10) $S_M(t) = 6(1+\sin 1850t)(0{,}25+\sum_{k=1}^{4}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{4}\cos 4k\pi 10^5 t)$

5. Частотно-импульсная модуляция

При частотно-импульсной модуляции частота импульсов изменяется по закону модулирующего сигнала

Задача 1. Определить индекс ЧИМ сигнала, если амплитуда модулирующего сообщения равна $S_M = 10$ В, частота импульсной несущей $f_H = 50$ Гц, а крутизна характеристики модулятора $k = 4\cdot 10^{-3}$ с/В

Решение

Индекс ЧИМ сигнала определяется по формуле

$m_{ЧИМ} = \Delta T/T$

где ΔT - максимальное приращение периода следования импульсов, определяется по формуле

$\Delta T = kS_M = 4\cdot 10^{-3}\cdot 10 = 4\cdot 10^{-2}$ с

Период следования импульсов определяется по формуле

$T = 1/f_H = 1/50 = 2\cdot 10^{-2} c$

Определив все необходимы значения, находим индекс ЧИМ сигнала

$m_{ЧИМ} = 4\cdot 10^{-2}/2\cdot 10^{-2} = 2$

Задача 2. Определить частоту импульсной несущей и длительность импульса, если индекс ЧИМ сигнала равен $m_{ЧИМ} = 0{,}8$, амплитуда модулирующего сообщения равна $S_M = 5$В , скважность импульсов $Q = 5$, а крутизна характеристики модулятора $k = 8 \cdot 10^{-5}$ с/В

Решение

Максимальное приращение периода следования импульсов, определяется по формуле

$\Delta T = kS_M = 8 \cdot 10^{-5} \cdot 5 = 4 \cdot 10^{-4}$ с

Период следования импульсов определим из формулы

$m_{ЧИМ} = \Delta T / T$, где $T = \Delta T / m_{ЧИМ} = 4 \cdot 10^{-4} / 0{,}8 = 5 \cdot 10^{-4}\, c$

Длительность импульсов можно определить из формулы

$Q = T/\tau$, где $\tau = \dfrac{T}{Q} = \dfrac{5 \cdot 10^{-4}}{5} = 10^{-4}\, c$

Определив все необходимы значения, находим частоту импульсной несущей

$f_H = 1/T = 1/5 \cdot 10^{-4} = 2\text{кГц}$

Варианты для самостоятельного решения

1) $m_{чим}$= 0,7, S_M = 4В, Q =6, k =$4 \cdot 10^{-5}$ с/В;

2) $m_{чим}$= 0,9, S_M = 7В, Q =3, k =$6 \cdot 10^{-5}$ с/В;

3) $m_{чим}$= 0,3, S_M = 5В, Q =4, k =$3 \cdot 10^{-5}$ с/В;

4) $m_{чим}$= 0,8, S_M = 4В, Q =6, k =$7 \cdot 10^{-5}$ с/В;

5) $m_{чим}$= 0,9, S_M = 5В, Q =3, k =$5 \cdot 10^{-5}$ с/В;

6) $m_{чим}$= 0,5, S_M = 9В, Q =5, k =$9 \cdot 10^{-5}$ с/В;

7) $m_{чим}$= 0,8, S_M = 4В, Q =6, k =$4 \cdot 10^{-5}$ с/В;

8) $m_{чим}$= 0,7, S_M = 6В, Q =5, k =$9 \cdot 10^{-5}$ с/В;

9) $m_{чим}$= 0,2, S_M = 3В, Q =6, k =$7 \cdot 10^{-5}$ с/В;

10) $m_{чим}$= 0,6, S_M = 5В, Q =7, k =$5 \cdot 10^{-5}$ с/В.

6. Фазоимпульсная модуляция

При фазоимпульсной модуляции по закону изменения модулирующего сигнала изменяется величина временного сдвига относительно тактовых точек

Задача 1. Определить индекс ФИМ сигнала, если амплитуда модулирующего сообщения равна $S_M = 1$В, частота импульсной несущей $f_H = 10$ Гц, крутизна характеристики модулятора $k = 4 \cdot 10^{-2}$ с/В

Решение

Индекс ФИМ сигнала определяется по формуле

$$m_{\phi ИМ} = \Delta\tau \cdot w_H$$

где $\Delta\tau$ - наибольшее смещение фронта, определяется по формуле

$$\Delta\tau = kS_M = 4 \cdot 10^{-2} \cdot 1 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ с}$$

Угловая частота импульсной несущей определяется по формуле

$$w_H = 2\pi f_H = 2\pi \cdot 10 = 62{,}8\, рад/с$$

Определим индекс ФИМ сигнала

$$m_{\phi ИМ} = \Delta\tau \cdot w_H = 4 \cdot 10^{-2} \cdot 62{,}8 = 2{,}5$$

Задача 2. Определить амплитуда модулирующего сообщения и период длительности импульсов, если индекс ФИМ сигнала равен $m_{\phi ИМ} = 3$, частота импульсной несущей $f_H = 30$ Гц, крутизна характеристики модулятора $k = 16 \cdot 10^{-3}$ с/В

Решение

Угловая частота импульсной несущей определяется по формуле

$$w_H = 2\pi f_H = 2\pi \cdot 30 = 188{,}4\, рад/с$$

Период длительности импульсов определяется по формуле

$$T = 1/f_H = 1/188{,}4 = 5{,}3 \cdot 10^{-3}\, c$$

Индекс ФИМ сигнала определяется по формуле

$$m_{\phi ИМ} = \Delta\tau \cdot w_H$$

отсюда находится $\Delta\tau$ - наибольшее смещение фронта,

$$\Delta\tau = \frac{m_{ФИМ}}{w_H} = \frac{3}{188{,}4} = 1{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ с}$$

Определив необходимые значения, найдем амплитуду модулирующего сигнала из формулы

$\Delta\tau = kS_M$, где $S_M = \Delta\tau/k = 1{,}6\cdot10^{-2}/16\cdot10^{-3} = 1B$

$$S_M(t) = S_H\frac{\tau}{T} - 2S_H\frac{\Delta\tau}{T}\sin\frac{w_M\tau}{2}\cos w_M(t-\frac{\tau}{2}) +$$
$$+\frac{S_H}{k\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(\sin kw_H(t+\frac{\tau}{2}-\Delta\tau\sin w_M t) - \sin kw_H(t-\frac{\tau}{2}-\Delta\tau\sin w_M(t-\tau))$$

Варианты для самостоятельного решения

1)

$$S_M(t) = 200 - 8\sin6\cos1500(t-4\cdot10^{-3}) + \frac{10}{k\pi}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{2}(\sin0{,}5\pi\kappa10^2(t+4\cdot10^{-3}-1{,}6\cdot10^{-2}\sin1500\cdot t) - \sin0{,}5\pi\kappa10^2(t-4\cdot10^{-3}-1{,}6\cdot10^{-2}\sin1500(t-8\cdot10^{-3}))$$

2)

$$S_M(t) = 180 - 18\sin3{,}3\cos1650(t-2\cdot10^{-3}) + \frac{9}{k\pi}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{2}(\sin\pi\kappa10^2(t+2\cdot10^{-3}-2\cdot10^{-2}\sin1650\cdot t) - \sin\pi\kappa10^2(t-2\cdot10^{-3}-2\cdot10^{-2}\sin1650(t-4\cdot10^{-3}))$$

3)

$$S_M(t) = 100 - 5\sin5{,}85\cos1950(t-3\cdot10^{-3}) + \frac{5}{k\pi}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{2}(\sin\frac{2\pi}{3}\kappa10^2(t+3\cdot10^{-3}-1{,}5\cdot10^{-2}\sin1950\cdot t) - \sin\frac{2\pi}{3}\kappa10^2(t-3\cdot10^{-3}-1{,}5\cdot10^{-2}\sin1950(t-6\cdot10^{-3}))$$

4)

$$S_M(t) = 1{,}2 - 9{,}6\sin10{,}8\cos2160(t-5\cdot10^{-3}) + \frac{6}{k\pi}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{2}(\sin\frac{2\pi}{5}\kappa10^2(t+5\cdot10^{-3}-4\cdot10^{-2}\sin2160\cdot t) - \sin\frac{2\pi}{5}\kappa10^2(t-5\cdot10^{-3}-4\cdot10^{-2}\sin2160(t-10^{-2}))$$

5)

$$S_M(t) = 2 - 16\sin 8{,}75\cos 1750(t - 5\cdot 10^{-3}) + \frac{4}{k\pi}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{2}(\sin\pi\kappa 10^2(t + 5\cdot 10^{-3} - 4\cdot 10^{-2}\sin 175\cdot t)0 - \sin\pi\kappa 10^2(t - 5\cdot 10^{-3} - 4\cdot 10^{-2}\sin 1750(t - 10^{-2}))$$

6)

$$S_M(t) = 4{,}8 - 6\sin 16{,}4\cos 2050(t - 0{,}8\cdot 10^{-2}) + \frac{12}{k\pi}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{2}(\sin 0{,}5\pi\kappa 10^2(t + 0{,}8\cdot 10^{-2} - 10^{-2}\sin 2050\cdot t) - \sin 0{,}5\pi\kappa 10^2(t - 0{,}8\cdot 10^{-2} - 10^{-2}\sin 2050(t - 1{,}6\cdot 10^{-2}))$$

7)

$$S_M(t) = 300 - 54\sin 7{,}1\cos 1780(t - 4\cdot 10^{-3}) + \frac{7{,}5}{k\pi}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{2}(\sin\pi\kappa 10^2(t + 4\cdot 10^{-3} - 1{,}8\cdot 10^{-2}\sin 1780\cdot t) - \sin\pi\kappa 10^2(t - 4\cdot 10^{-3} - 1{,}8\cdot 10^{-2}\sin 178 - (t - 8\cdot 10^{-3}))$$

8)

$$S_M(t) = 8 - 8\sin 30{,}6\cos 1530(t - 2\cdot 10^{-2}) + \frac{2}{k\pi}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{2}(\sin 2\pi\kappa 10^2(t + 2\cdot 10^{-2} - 2\cdot 10^{-2}\sin 1530\cdot t) - \sin 2\pi\kappa 10^2(t - 8\cdot 10^{-2} - 2\cdot 10^{-2}\sin 1530(t - 4\cdot 10^{-2}))$$

9)

$$S_M(t) = 7{,}5 - 15\sin 37{,}6\cos 1880(t - 2\cdot 10^{-2}) + \frac{15}{k\pi}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{2}(\sin 0{,}25\pi\kappa 10^2(t + 2\cdot 10^{-2} - 4\cdot 10^{-2}\sin 1880\cdot t) - \sin 0{,}25\pi\kappa 10^2(t - 2\cdot 10^{-2} - 4\cdot 10^{-2}\sin 1880(t - 4\cdot 10^{-2}))$$

10)

$$S_M(t) = 2 - 4\sin 11{,}34 \cos 1620(t - 7\cdot 10^{-3}) + \frac{10}{k\pi}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{2}(\sin\frac{2}{7}\pi k 10^2(t + 7\cdot 10^{-3} - 1{,}4\cdot 10^{-2}\sin 1620\cdot t) - \sin\frac{2}{7}\pi k 10^2(t - 4\cdot 10^{-3} - 1{,}4\cdot 10^{-2}\sin 1620(t - 1{,}4\cdot 10^{-2}))$$

7. Широтно-импульсная модуляция

При широтно-импульсной модуляции длительность импульсов изменяется пропорционально модулирующему сигналу, а их амплитуда остается одинаковой

Задача 1. Определить индекс ШИМ сигнала, если амплитуда модулирующего сообщения равна $S_M = 10$ В, частота импульсной несущей $f_H = 100$ Гц, скважность импульсов $Q = 5$, а крутизна характеристики модулятора $k = 8\cdot 10^{-5}$ с/В

Решение

Индекс ШИМ сигнала определяется по формуле

$m_{ШИМ} = \Delta\tau/\tau$

где $\Delta\tau$ - максимальное приращение ширины импульса, определяется по формуле

$\Delta\tau = kS_M = 8\cdot 10^{-5}\cdot 10 = 8\cdot 10^{-4}$ с

Длительность импульса можно определить из формулы

$Q = T/\tau$

Период следования импульсов определяется по формуле

$T = 1/f_H = 1/100 = 10^{-2}\,c$

Находим длительность импульса

$\tau = T/Q = 0{,}01/5 = 2\cdot 10^{-3}\,c$

Определив все необходимы значения, находим индекс ШИМ сигнала

$m_{ШИМ} = 8\cdot 10^{-4}/2\cdot 10^{-3} = 0{,}4$

Задача 2. Определить частоту импульсной несущей и период следования импульсов, если индекс ШИМ сигнала равен $m_{ШИМ} = 0{,}4$, амплитуда модулирующего сообщения равна $S_M = 8$ В, , скважность импульсов $Q = 5$, а крутизна характеристики модулятора $k = 4 \cdot 10^{-5}$ с/В

Решение

Максимальное приращение ширины импульса, определяется по формуле

$$\Delta\tau = kS_M = 4 \cdot 10^{-5} \cdot 8 = 3{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ с}$$

Длительность импульсов определим из формулы

$m_{ШИМ} = \Delta\tau/\tau$, где $\tau = \Delta\tau/m_{ШИМ} = 3{,}2 \cdot 10^{-4}/0{,}4 = 8 \cdot 10^{-3}\, c$

Период следования импульсов можно определить из формулы

$Q = T/\tau$, где $T = \tau Q = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 5 = 4 \cdot 10^{-2}\, c$

Определив все необходимы значения, находим частоту импульсной несущей

$$f_H = 1/T = 1/4 \cdot 10^{-2} = 25\,Гц$$

$$S_M(t) = S_H\left(\frac{\tau + \Delta\tau \sin w_M t}{T} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(k\pi\frac{\tau + \Delta\tau \sin w_M t}{T}\cos kw_H t\right)$$

Варианты для самостоятельного решения

1)

$$S_M(t) = 10\left(\frac{8 \cdot 10^{-3} + 3{,}2 \cdot 10^{-4}\sin 1500t}{4 \cdot 10^{-2}} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\sin(k\pi\frac{8 \cdot 10^{-3} + 3{,}2 \cdot 10^{-4}\sin 1500t}{4 \cdot 10^{-2}}\cos 0{,}5\pi k 10^2 t\right)$$

2)

$$S_M(t) = 9\left(\frac{4 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}\sin 1650t}{2 \cdot 10^{-2}} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\sin(k\pi\frac{4 \cdot 10^{-3} + 3{,}2 \cdot 10^{-4}\sin 1650t}{2 \cdot 10^{-2}}\cos \pi k 10^2 t\right)$$

3)

$$S_M(t) = 5\left(\frac{6 \cdot 10^{-3} + 4{,}8 \cdot 10^{-4}\sin 1950t}{3 \cdot 10^{-2}} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\sin(k\pi\frac{6 \cdot 10^{-3} + 4{,}8 \cdot 10^{-4}\sin 1950t}{3 \cdot 10^{-2}}\cos \frac{2\pi}{3} k 10^2 t\right)$$

4)

$$S_M(t) = 6\left(\frac{10^{-2} + 5{,}2 \cdot 10^{-4}\sin 2160t}{5 \cdot 10^{-2}} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\sin(k\pi 1\frac{10^{-2} + 5{,}2 \cdot 10^{-4}\sin 2160t}{5 \cdot 10^{-2}}\cos \frac{2\pi}{5} k 10^2 t\right)$$

5)

$$S_M(t) = 4(\frac{10^{-2} + 3{,}2 \cdot 10^{-4} \sin 1750t}{2 \cdot 10^{-2}} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\sin(k\pi \frac{10^{-2} + 3{,}2 \cdot 10^{-4} \sin 1750t}{2 \cdot 10^{-2}} \cos \pi k 10^2 t)$$

6)

$$S_M(t) = 12(\frac{1{,}6 \cdot 10^{-2} + 7{,}8 \cdot 10^{-4} \sin 2050t}{4 \cdot 10^{-2}} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\sin(k\pi \frac{1{,}6 \cdot 10^{-2} + 7{,}8 \cdot 10^{-4} \sin 2050t}{4 \cdot 10^{-2}} \cos 0{,}5\pi k 10^2 t)$$

7)

$$S_M(t) = 7{,}5(\frac{8 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4} \sin 1780t}{2 \cdot 10^{-2}} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\sin(k\pi \frac{8 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4} \sin 1780t}{2 \cdot 10^{-2}} \cos \pi k 10^2 t)$$

8)

$$S_M(t) = 2(\frac{4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} \sin 1530t}{10^{-2}} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\sin(k\pi \frac{4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} \sin 1530t}{10^{-2}} \cos 2\pi k 10^2 t)$$

9)

$$S_M(t) = 15(\frac{4 \cdot 10^{-2} + 3{,}2 \cdot 10^{-4} \sin 1880t}{8 \cdot 10^{-2}} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k}\sin(k\pi \frac{4 \cdot 10^{-2} + 3{,}2 \cdot 10^{-4} \sin 1880t}{8 \cdot 10^{-2}} \cos 0{,}25\pi k 10^2 t)$$

10)

$$S_M(t) = 3(\frac{1{,}4 \cdot 10^{-2} + 5{,}8 \cdot 10^{-4} \sin 1620t}{7 \cdot 10^{-2}} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\sin(k\pi \frac{1{,}4 \cdot 10^{-2} + 5{,}8 \cdot 10^{-4} \sin 1620t}{7 \cdot 10^{-2}} \cos \frac{2\pi}{7} k 10^2 t)$$

8. Разложение в ряд Фурье

Задача 1.

Разложить функцию в ряд Фурье:

1.1

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -l \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le l \end{cases}, \; l = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -l < x \le 0 \\ x, & 0 < x < l \end{cases}, \; l = 3$$

1.2

$$f(x)=\begin{cases}0, & -l<x\le 0\\ -x, & 0<x<l\end{cases},\ l=2$$

1.3

$$f(x)=\begin{cases}1, & -l<x\le 0\\ x, & 0<x<l\end{cases},\ l=1$$

1.4

$$f(x)=\begin{cases}0, & -l<x\le 0\\ x+1, & 0<x<l\end{cases},\ l=3$$

1.5

$$f(x)=\begin{cases}1, & -l<x\le 0\\ -x, & 0<x<l\end{cases},\ l=2$$

1.6

$$f(x)=\begin{cases}0, & -l<x\le 0\\ 1-x, & 0<x<l\end{cases},\ l=1$$

1.7

$$f(x)=\begin{cases}x, & -l<x\le 0\\ 0, & 0<x<l\end{cases},\ l=3$$

1.8

$$f(x)=\begin{cases}x, & -l<x\le 0\\ 0, & 0<x<l\end{cases},\ l=2$$

1.9

$$f(x)=\begin{cases}x, & -l<x\le 0\\ 0, & 0<x<l\end{cases},\ l=1$$

1.10

$$f(x)=\begin{cases}x, & -l<x\le 0\\ 1, & 0<x<l\end{cases},\ l=1$$

Решение для:

$$f(x)=\begin{cases}0, & -l<x\le 0\\ x, & 0<x<l\end{cases},\ l=3$$

Ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Здесь коэффициенты

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

В нашем случае *l*=3.

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}0dx+\frac{1}{3}\int_{0}^{3}xdx=0+\frac{1}{3}\frac{x^2}{2}|_0^3=\frac{9}{6}-0=\frac{3}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}0\cdot\cos\left(\frac{\pi nx}{3}\right)dx+\frac{1}{3}\int_{0}^{3}\mathrm{x}\cos\left(\frac{\pi nx}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{0}^{3}x\cos(\frac{\pi nx}{3})dx$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin(\pi nx)dx=$$

$$\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}0\cdot\sin(\frac{\pi nx}{3})dx+\frac{1}{3}\int_{0}^{3}x\sin(\frac{\pi nx}{3})dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{0}^{3}x\sin(\frac{\pi nx}{3})dx$$

Учтем, что

$$\int sinax\,dx=\int\frac{1}{a}sinax\,d(ax)=-\frac{1}{a}cosax$$

$$\int cosax\,dx=\int\frac{1}{a}cosax\,d(ax)=\frac{1}{a}sinax$$

$$\int x\cdot sinax\cdot dx=\left(u=x,dv=sinaxdx,du=dx,v=-\frac{1}{a}cosax\right)=$$

$$=-\frac{x}{a}cosax-\int-\frac{1}{a}cosax\,dx=-\frac{x}{a}cosax+\frac{1}{a^2}sinax$$

$$\int x\cdot cosax\,dx=\left(u=x,dv=cosaxdx,du=dx,v=\frac{1}{a}sinax\right)=$$

$$=\frac{x}{a}sinax-\int\frac{1}{a}sinax\cdot dx=\frac{x}{a}sinax+\frac{1}{a^2}cosax$$

Тогда

$$a_n=\frac{1}{3}\int_0^3 x\cos\left(\frac{\pi nx}{3}\right)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi nx}{3}\right)|_0^3+\frac{9}{(\pi n)^2}\cos\left(\frac{\pi nx}{3}\right)|_0^3\right)=$$

$$=\frac{1}{3}(0-0+\frac{9}{(\pi n)^2}((\cos(\pi n)-1)=\frac{3}{(\pi n)^2}((-1)^n-1)$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}0\cdot\sin(\frac{\pi nx}{3})dx+\frac{1}{3}\int_0^3 x\sin\left(\frac{\pi nx}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}0-\frac{1}{3}\frac{3x}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi nx}{3}\right)|_0^3+\frac{1}{3}\frac{9}{(\pi n)^2}\sin\left(\frac{\pi nx}{3}\right)|_0^3=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}(3\cdot\cos(\pi n)\text{-}0\cdot\cos(0))+\frac{3}{(\pi n)^2}((\sin(\pi n)-\sin(0))=$$

$$=-\frac{3}{\pi n}(-1)^n+\frac{3}{(\pi n)^2}(0-0)=-\frac{3}{\pi n}(-1)^n=\frac{3}{\pi n}(-1)^{n+1}$$

Тогда $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi nx}{3}\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi nx}{3}\right)=$

$$=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{(\pi n)^2}((-1)^n-1)\right)\cos\left(\frac{\pi nx}{3}\right)+\left(\frac{3}{\pi n}(-1)^{n+1}\right)\sin\left(\frac{\pi nx}{3}\right)$$

Задача 2.

Продолжая функцию *f(x)* четным или нечетным образом, разложить ее в ряд Фурье в № 1-5 по косинусам, №6-10 – по синусам

2.1

$$f(t)=\begin{cases}1,\ \textit{если}\ 0\le t<1\\ t^2-2t,\ \textit{если}\ 1\le t\le 2\end{cases}$$

2.2

$$f(t)=\begin{cases}1, \textit{если } 0\le t<1\\ t^2+2t, \textit{если } 1\le t\le 2\end{cases}$$

2.3

$$f(t)=\begin{cases}1, \textit{если } 0\le t<1\\ -t^2-2t, \textit{если } 1\le t\le 2\end{cases}$$

2.4

$$f(t)=\begin{cases}t^2, \textit{если } 0\le t<1\\ 2, \textit{если } 1\le t\le 2\end{cases}$$

2.5

$$f(t)=\begin{cases}2, \textit{если } 0\le t<1\\ 1+t^2, \textit{если } 1\le t\le 2\end{cases}$$

2.6

$$f(t)=\begin{cases}2, \textit{если } 0\le t<1\\ 2-t, \textit{если } 1\le t\le 2\end{cases}$$

2.7

$$f(t)=\begin{cases}1, \textit{если } 0\le t<1\\ t, \textit{если } 1\le t\le 2\end{cases}$$

2.8

$$f(t)=\begin{cases}1, \textit{если } 0\le t<1\\ t+1, \textit{если } 1\le t\le 2\end{cases}$$

2.9

$$f(t)=\begin{cases}2, \textit{если } 0\le t<2\\ t+1, \textit{если } 2\le t\le 4\end{cases}$$

2.10

$$f(t)=\begin{cases}t, \textit{если } 0\le t<2\\ 1, \textit{если } 2\le t\le 4\end{cases}$$

Решим для:

$$f(t)=\begin{cases}1, \textit{если } 0\le t<1\\ -t^2+2t, \textit{если } 1\le t\le 2\end{cases}$$

Ряд Фурье по синусам имеет место для нечетной функции, по косинусам – для четной функции. Таким образом, доопределяем функцию f(t):

четная функция (f(-t)=f(t)).

$$= 1,\ \text{если} - 1 < t \leq 0, \qquad -t^2 - 2t, -2 \leq t \leq -1$$

Действительно,

$$f(-t) = -(-t)^2 - 2*(-t) = -t^2 + 2*t = f(t)$$

имеем следующий вид ряда Фурье по косинусам:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{L}\right)$$

Где

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt\,, a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt$$

В нашем случае *L=2*.

Получаем:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt = \big(\text{вследствие четности функции } f(t)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}*2\int_{0}^{2} f(t)dt = \int_{0}^{1} 1*dt + \int_{1}^{2}(-t^2 + 2*t)dt = t\Big|_0^1 + \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{2t^2}{2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= 1 + \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 1^2\right) = 5/3$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt =$$

$$= \left(\text{вследствие четности функции } f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\right) = \frac{2}{L}*\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt =$$

$$= \int_0^1 1 * \cos\frac{n\pi t}{2} dt + \int_1^2 (-t^2 + 2 * t) \cos\frac{n\pi t}{2} dt$$

$$= \int_0^1 \cos\frac{n\pi t}{2} dt - \int_1^2 t^2 * \cos\frac{n\pi t}{2} dt +$$

$$+2 \int_1^2 t * \cos\frac{n\pi t}{2} dt$$

учтем, что

$$\int x \cdot cosax \cdot dx = \left(u = x, dv = cosaxdx, du = dx, v = \frac{1}{a} sinax\right) =$$

$$= \frac{x}{a} sinax - \int \frac{1}{a} sinax \cdot dx = \frac{x}{a} sinax + \frac{1}{a^2} cosax$$

$$\int x^2 \cdot cosax\ dx = \left(u = x^2, dv = cosaxdx, du = 2xdx, v = \frac{1}{a} sinax\right) =$$

$$= \frac{x^2}{a} sinax - \int \frac{1}{a} sinax \cdot 2x\ dx = \frac{x^2}{a} sinax - \frac{2}{a} \int x \cdot sinax\ dx =>$$

$$=> (\text{с учетом предыдущего}) =>$$

$$=> \int x^2 \cdot cosax\ dx = \frac{x^2}{a} sinax - \frac{2}{a} \int xsinax\ dx =$$

$$= \frac{x^2}{a} sinax - \frac{2}{a}\left(-\frac{x}{a} cosax + \frac{1}{a^2} sinax\right) =$$

$$= \frac{x^2}{a} sinax + \frac{2x}{a^2} cosax - \frac{2}{a^3} sinax$$

Тогда

$$a_n = \int_0^1 \cos\frac{n\pi t}{2} dt - \int_1^2 t^2 * \cos\frac{n\pi t}{2} dt + 2 \int_1^2 t * \cos\frac{n\pi t}{2} dt =$$

$$= \left(\frac{2}{n\pi} * \sin\frac{n\pi t}{2}\right)\Big|_0^1 - \left(\frac{t^2}{\frac{n\pi}{2}} sin\frac{n\pi t}{2} + \frac{2t}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} cos\frac{n\pi t}{2} - \frac{2}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^3} sin\frac{n\pi t}{2}\right)\Big|_1^2 +$$

$$+2*\left(\frac{t}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)}sin\frac{n\pi t}{2}+\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}cos\frac{n\pi t}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{2}{n\pi}*\sin\frac{n\pi}{2}-\left(\frac{4}{\frac{n\pi}{2}}sinn\pi+\frac{4}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}cosn\pi-\frac{2}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^3}sinn\pi\right)$$

$$+\left(\frac{1}{\frac{n\pi}{2}}sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}cos\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^3}sin\frac{n\pi}{2}\right)+$$

$$+2*\left(\frac{2}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)}sinn\pi+\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}cosn\pi\right)-2*\left(\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)}sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}cos\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{2}{n\pi}*\sin\frac{n\pi}{2}-\left(0+\frac{4}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}*(-1)^n-0\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{\frac{n\pi}{2}}sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}cos\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^3}sin\frac{n\pi}{2}\right)+$$

$$+2*\left(0+\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}*(-1)^n\right)-2*\left(\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)}sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}cos\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$=\sin\frac{n\pi}{2}*\left(\frac{2}{n\pi}+\frac{2}{n\pi}-\frac{16}{(n\pi)^3}-\frac{4}{n\pi}\right)+\cos\frac{n\pi}{2}*\left(\frac{8}{(n\pi)^2}-\frac{8}{(n\pi)^2}\right)+$$

$$+(-1)^n*\left(-\frac{16}{(n\pi)^2}+\frac{8}{(n\pi)^2}\right)=-\frac{16}{(n\pi)^3}*\sin\frac{n\pi}{2}-(-1)^n*\frac{8}{(n\pi)^2}$$

В итоге имеем:

$$f(t)=\frac{5}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{16}{(n\pi)^3}*\sin\frac{n\pi}{2}-(-1)^n*\frac{8}{(n\pi)^2}\right)*\cos\frac{n\pi t}{2}$$

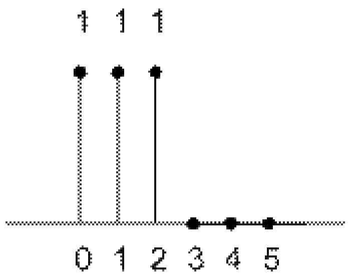
9. Дискретное и быстрое преобразование Фурье

Задача 1 (дискретное преобразование Фурье)

Пусть дискретный сигнал задан шестью равноотстоящими отсчетами $x_k = \{1,1,1,0,0,0\}, k = 0, \dots, N-1,\ N = 6$

Здесь k – номер отсчета.

Найти коэффициенты дискретного преобразования Фурье (ДПФ) этого сигнала.



Решение:

Находим гармоники $C_n, n = 0, \dots, 5$

1) $C_0 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k = \frac{1}{6}(1+1+1+0+0+0) = 0.5$

2) $C_1 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\cdot 2\pi\cdot 1\cdot k/N} = \frac{1}{6}\left(1\cdot e^{-j2\pi\cdot 0/6} + 1\cdot e^{-j2\pi\cdot 1/6} + 1\cdot e^{-j2\pi\cdot 2/6}\right) = \frac{1}{6}\left(1 + \cos\frac{\pi}{3} - j\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} - j\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{6}(1 - j\sqrt{3})$

3) $C_2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\cdot 2\pi\cdot 2\cdot k/N} = \frac{1}{6}\left(1\cdot e^{-j2\pi\cdot 2\cdot 0/6} + 1\cdot e^{-j2\pi\cdot 2\cdot 1/6} + 1\cdot e^{-j2\pi\cdot 2\cdot 2/6}\right) = \frac{1}{6}\left(1 + \cos\frac{2\pi}{3} - j\sin\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} - j\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 0$

4) $C_3 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\cdot 2\pi\cdot 3\cdot k/N} = \frac{1}{6}\left(1\cdot e^{-j2\pi\cdot 3\cdot 0/6} + 1\cdot e^{-j2\pi\cdot 3\cdot 1/6} + 1\cdot e^{-j2\pi\cdot 3\cdot 2/6}\right) = \frac{1}{6}(1 + \cos\pi - j\sin\pi + \cos 2\pi - j\sin 2\pi) = \frac{1}{6}$

5) $C_4 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\cdot 2\pi\cdot 4\cdot k/N} = \frac{1}{6}\left(1\cdot e^{-j2\pi\cdot 4\cdot 0/6} + 1\cdot e^{-j2\pi\cdot 4\cdot 1/6} + 1\cdot e^{-j2\pi\cdot 4\cdot 2/6}\right) = \frac{1}{6}\left(1 + \cos\frac{4\pi}{3} - j\sin\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{8\pi}{3} - j\sin\frac{8\pi}{3}\right) = 0$

6) $C_5 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\cdot 2\pi\cdot 5\cdot k/N} = \frac{1}{6}\left(1\cdot e^{-j2\pi\cdot 5\cdot 0/6} + 1\cdot e^{-j2\pi\cdot 5\cdot 1/6} + 1\cdot e^{-j2\pi\cdot 5\cdot 2/6}\right) = \frac{1}{6}\left(1 + \cos\frac{5\pi}{3} - j\sin\frac{5\pi}{3} + \cos\frac{10\pi}{3} - j\sin\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{1}{6}(1 - j\sqrt{3})$

Для построения АЧХ найдем амплитуду для каждого значения частоты как: $A_n = \sqrt{(Re\ C_n)^2 + (Im\ C_n)^2}$.

$A_0 = \sqrt{(0.5)^2 + (0)^2} = 0.5$,

$$A_1 = \sqrt{(1/6)^2 + (-\sqrt{3}/6)^2} = \sqrt{4/36} = 1/3 \cong 0.33,$$

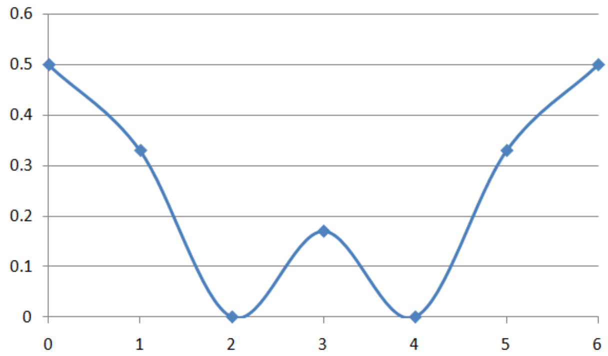
$$A_2 = 0,$$

$$A_3 = 1/6 \cong 0.17,$$

$$A_4 = 0,$$

$$A_5 = \sqrt{(1/6)^2 + (-\sqrt{3}/6)^2} = \sqrt{4/36} = 1/3 \cong 0.33,$$

$$A_6 = A_0.$$



Для построения ФЧХ найдем фазу для каждого значения частоты как:

$$F_n = arctg(Im\,C_n \;/\; Re\,C_n).$$

$$F_0 = arctg(0 \;/\; 0.5) = 0;$$

$$F_1 = arctg((-\sqrt{3}/6) \;/\; (1/6)) \cong -arctg(1.732) = -1.05 \cong -\pi/3;$$

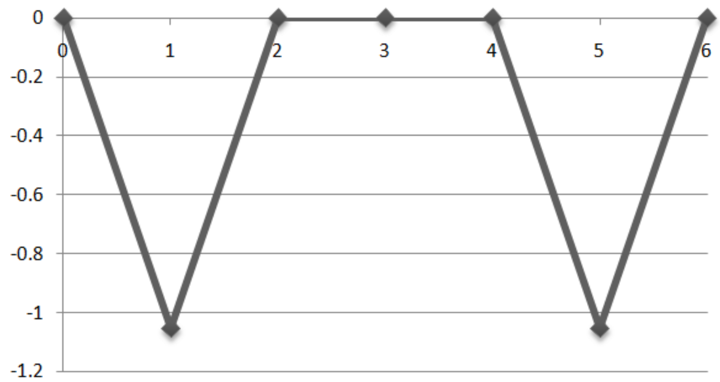
$$F_2 = 0;$$

$$F_3 = arctg((0) \;/\; (1/6)) = 0;$$

$$F_4 = 0;$$

$$F_5 = arctg((-\sqrt{3}/6) \;/\; (1/6)) \cong -arctg(1.732) = -1.05 \cong -\pi/3;$$

$$F_6 = F_0.$$



Варианты для самостоятельного решения

Пусть дискретный сигнал задан N равноотстоящими отсчетами. Найти коэффициенты дискретного преобразования Фурье (ДПФ) этого сигнала. Постройте АЧХ и ФЧХ (по последней цифре шифра).

1. $x_k = \{1,0,1,0,1,0\}, k = 0, \dots, N-1,\ N = 6$
2. $x_k = \{0,0,0,1,1,1\}, k = 0, \dots, N-1,\ N = 6$
3. $x_k = \{1,1,1,0,0,0,1\}, k = 0, \dots, N-1,\ N = 7$
4. $x_k = \{1,0,1,0,1,0,1\}, k = 0, \dots, N-1,\ N = 7$
5. $x_k = \{1,1,1,1,1,1,1\}, k = 0, \dots, N-1,\ N = 7$
6. $x_k = \{1,1,1,0,0\}, k = 0, \dots, N-1,\ N = 5$
7. $x_k = \{1,0,1,0,0\}, k = 0, \dots, N-1,\ N = 5$
8. $x_k = \{1,1,1,0,0,0,1,1\}, k = 0, \dots, N-1,\ N = 8$
9. $x_k = \{0,0,1,0,1,1,1,0\}, k = 0, \dots, N-1,\ N = 8$
10. $x_k = \{1,0,1,0,1\}, k = 0, \dots, N-1,\ N = 5$

Задача 2 (быстрое преобразование Фурье)

Найти быстрое преобразование Фурье (БПФ) сигнала и постройте АЧХ также как в лабораторной работе (по последней цифре шифра).

1. $x_k = \{1,1,0,1\},\ N = 4$
2. $x_k = \{0,1,1,1\},\ N = 4$
3. $x_k = \{0,1,0,1\},\ N = 4$
4. $x_k = \{1,1,0,1,1,1,0,0\},\ N = 8$
5. $x_k = \{0,1,0,1,0,1,0,0\},\ N = 8$
6. $x_k = \{1,0,0,1,1,0,0,0\},\ N = 8$
7. $x_k = \{1,1,1,1,0,1,0,1\},\ N = 8$
8. $x_k = \{0,1,0,1,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0\},\ N = 16$
9. $x_k = \{1,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0\},\ N = 16$
10. $x_k = \{1,0,0,1,1,0,0,0,1,0,1,1,0,0,0,1\},\ N = 16$