3 ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ И ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ

3.1 Общие понятия

Показателями качества измерения являются: погрешность (точность), правильность, сходимость и воспроизводимость измерений.

Правильность отражает близость к нулю систематических погрешностей в их результатах.

Сходимость отражает близость друг к другу результатов измерений, выполняемых в одинаковых условиях.

Воспроизводимость отражает близость друг к другу результатов измерений, выполняемых в различных условиях(в разное время, в различных местах, разными методами и средствами измерения).

Точность измерения используется для качественного сравнения измерительной операции. Для количественной оценки результатов измерений используется понятие погрешность измерений.

При измерениях важно оценить их точность. Термин «точность измерения», т.е. степень приближения результатов к некоторому действительному значению $x_Д$ не имеет строгого определения и используется для качественного сравнения измерительных операций. Для количественной оценки используется понятие «погрешность измерения». Любой результат измерения является случайным и для оценки его достоверности две её характеристики: Математическое ожидание $M(\theta) = \hat{x}$ – среднее значение, вокруг которого группируются все случайные результаты измерения $x_1 - x_n$ и дисперсию $D(\theta)$ – степень разбросанности результатов относительного математического ожидания.

Понятие «точность» и «погрешность» можно пояснить на примере стрельбы по мишени из артиллерийского орудия. Центр мишени (точка наводки орудия на цель) – истинное значение или математическое ожидание, причём $M(\theta) = 0$. Точки попадания снарядов в мишень – это результаты измерения (случайные величины), т.к. на полёт снаряда действуют случайные факторы: ветер, неравномерно-распределённая масса и сама масса снарядов, водные преграды (притягивают снаряды при их полёте) и т.д. Точность стрельбы h тем выше, чем кучнее – ближе к цели (центру мишени) ложатся снаряды. Отклонение же снарядов от центра мишени характеризуются погрешностью стрельбы δ и чем ближе к цели попадают снаряды, тем меньше погрешность стрельбы и выше точность. Следовательно, точность и погрешность обратно пропорциональны.

Погрешность измерения – это отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины

$$\Delta = x - \hat{x}, \qquad (3.1)$$

где Δ – погрешность;

x – результата измерения;

$\hat{x}$ – истинное значение результата,

т.е. результат измерения является функцией двух величин $x = f(\hat{x}, \Delta)$.

Точность измерения – это близость результата измерения к истинному значению измеряемой величины. Она обратно – пропорциональна погрешности

$$h = \frac{1}{|\delta|}.$$

В общем виде погрешность измерения имеет следующие составляющие:

$$\Delta = \Delta(x) + \Delta_{наб} + \Delta_{м} + \Delta_{обр} + \Delta_{си}, \qquad (3.2)$$

где $\Delta(x)$ - погрешность от нестабильности измеряемой величины x;

$\Delta_{наб}$ - погрешность наблюдателя;

$\Delta_{м}$ - погрешность метода измерения;

$\Delta_{обр}$ - погрешность метода обработки результата;

$\Delta_{си}$ -погрешность применяемого средства измерения.

Первые 4 составляющие могут быть уменьшены или даже сведены к нулю. Последняя же составляющая - погрешность $\Delta_{си}$ является неустранимой погрешностью.

Рассмотрим классификацию погрешности средств измерения $\Delta_{си}$.

А. По режиму измерения – статическая (Δ_{st}) и динамическая (Δ_{dyn}) погрешности

Абсолютная погрешность СИ в статическом режиме равна

$$\Delta_{st} = \Delta(x) = x - \hat{x}.$$

Абсолютная погрешность СИ в динамическом режиме равна

$$\Delta[x(t)] = x(t) - \hat{x}(t).$$

Абсолютная динамическая погрешность равна

$$\Delta_{dyn} = \Delta[x(t)] - \Delta_{st}.$$

Б. По внешним условиям применения - основная (Δ_o) и дополнительная (Δ_c) погрешности

Кроме измеряемой величины на СИ оказывают влияние различные влияющие факторы (внутренние и внешние) φ_i, которые не несут информацию об измеряемой величине, но искажают ее результат. Следовательно, результат измерения является функцией следующих величин:

$$x = f(\hat{x}, \Delta, \varphi_1, ...\varphi_e).$$

Для каждого средства измерения в нормативно–технической документации (НТД) указывают значения (нормы) влияющих факторов, которые для данных СИ являются нормальными (φ_{ref}). Если в условиях эксплуатации СИ влияющие факторы имеют нормальные значения или находятся в пределах нормальной области этих значений ($\varphi_i = \varphi_{ref}$), то такие условия применения (эксплуатации) называются нормальными и погрешность СИ, формируемая в этих условиях, называется основной. Результат, полученный в нормальных условиях эксплуатации, равен $x_0 = f(\hat{x}, \Delta_0)$, а сама основная абсолютная погрешность $\Delta_0 = x_0 - \hat{x}$.

Если влияющие величины не равны нормам $\varphi_i \neq \varphi_{ref}$, то образуется погрешность в рабочих условиях эксплуатации $x_p = f(x, \Delta_p)$. Абсолютная погрешность в рабочих условиях эксплуатации равна $\Delta_p = x_p - \hat{x}$.

Дополнительная погрешность по фактору φ_i – равна $\Delta_{ci} = \Delta_{pi} - \Delta_0$, а суммарная дополнительная погрешность имеет вид

$$\Delta_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{l} \Delta_{ci}^2},$$

где l – число влияющих факторов.

Следует отметить, что в НТД на СИ указываются рабочие области влияющих величин φ_i и дополнительные погрешности на них.

В. По размерности – абсолютная (Δ), относительная (δ) и приведенная (γ) погрешности

Абсолютная погрешность – это разность между результатом и истинным значением измеряемой величины (характеризует количественную сторону результата измерения)

$$\Delta = x - \widehat{x}. \qquad (3.3)$$

Относительная погрешность – это отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины (характеризует качество результата измерения)

$$\delta = \pm \frac{\Delta}{\widehat{x}}. \qquad (3.4)$$

Приведённая погрешность – это отношение абсолютной погрешности к базовому значению, которое является постоянной величиной

$$\gamma = \pm \frac{\Delta}{N}, \qquad (3.5)$$

где $N = const$ - базовое значение, за которое в измерительных приборах принят предел измерения;

$N = (x_в - x_н)$;

$x_в$ – верхнее предельное значение измеряемой величины;

$x_н$ – нижнее предельное значение измеряемой величины.

В связи с тем, что в вышеприведённых формулах присутствует истинное значение $\widehat{x}$ измеряемой величины, на практике применяются следующие формулы для расчёта погрешностей

$$\Delta = x - x_{Д};\qquad (3.6)$$

$$\delta = \pm\frac{\Delta}{x}\times 100\%;\qquad (3.7)$$

$$\gamma = \pm\frac{\Delta}{N}\times 100\%.\qquad (3.8)$$

Г. По характеру появления – систематическая (Δ_s), случайная ($\overset{\circ}{\Delta}$) погрешности и вариация (Н)

Систематическая – это погрешность, остающаяся постоянной или изменяющаяся по определенному закону от измерения к измерению.

Случайной называют составляющую погрешности, которая изменяется случайным образом при повторных измерениях одного и того же истинного значения измеряемой величины. Исключить ее из результата невозможно, но оценить необходимо. Для этого используется теория вероятностей и математическая статистика.

Вариация – разность между результатами измерений, полученными со стороны больших значений до данного значения и со стороны меньших значений до данного значения.

Для стрелочных приборов – это разность, полученная при прямом и обратном ходах стрелки измерительного механизма при измерении одного и того же истинного значения ФВ

$$H = |x' - x''|,\qquad (3.9)$$

где x' – результат, полученный при прямом ходе;

x'' – результат, полученный при обратном ходе.

Д. По характеру связи между величиной погрешности и уровнем измеряемой величины:

а) аддитивная – постоянная по величине, не зависящая от уровня измеряемой величины: $\Delta_a(x_i) = \pm a$.

б) мультипликативная – зависимость пропорциональна измеряемой величине: $\Delta_м(x_i) = \pm bx_i$.

в) степенная: $\Delta(x_i) = \pm cx_i^n$, где $n = 2,3,...$

г) периодическая – изменяется в зависимости от измеряемой величины по какому - то периодическому закону её изменения: $\Delta(x_i) = A \cdot Sinkx_i$;

д) комбинированная – любая комбинация из рассмотренных предыдущих: $\Delta(x_i) = a + bx_i + cx_i^2$.

4 НОРМИРОВАНИЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ КЛАССАМИ ТОЧНОСТИ

4.1 Общие сведения

При технических измерениях каждому СИ присваивается определенный класс точности. Класс точности – обобщенная метрологическая характеристика, определяющая различные свойства СИ и включающая в себя систематическую и случайную составляющую погрешности.

Класс точности нормируется предельными значениями основной погрешности в виде абсолютной, относительной или приведенной.

1. Абсолютная Δ_{op}:

а) для СИ, у которых преобладает аддитивная составляющая погрешности: $\Delta_a(x)$

$$\Delta_{op} = \Delta_a(x) = \pm a, \qquad (4.1)$$

б) для СИ, у которых аддитивная $\Delta_a(x)$ и мультипликативная $\Delta_м(x)$ составляющие погрешности соизмеримы:

$$\Delta_{op} = \Delta_a(x) + \Delta_м(x) = \pm(a + bx). \qquad (4.2)$$

Класс точности обозначается или в виде римской цифры или прописной буквы латинского алфавита, причем, чем больше цифра или дальше буква от начала алфавита, тем больше погрешность.

2. Относительная δ_{op}:

а) для СИ, у которых преобладает мультипликативная составляющая погрешности:

$$\delta_{op} = \pm \frac{\Delta_{op} \cdot 100\%}{x} = \pm A,\% \quad , \qquad (4.3)$$

где x – результат измерения.

Обозначается на СИ в виде цифр, заключенных в окружность или квадрат

1,5 $\boxed{2,5}$

б) для СИ, у которых аддитивная $\Delta_a(x)$ и мультипликативная $\Delta_м(x)$ составляющие погрешности соизмеримы:

$$\delta_{op} = \pm[c + d(\frac{|x_B|}{x} - 1)],\% \quad , \qquad (4.4)$$

где x_B – верхний предел измерения СИ.

Обозначается на СИ отношением *c/d* , но не буквами, а цифрами 0,02/0,01 ($c = 0{,}02\%; d = 0{,}01\%$).

3. Приведенная γ_{op}:

а) $$\gamma_{op} = \pm \frac{\Delta_{op} \cdot 100\%}{x_N} = \pm A,\% \quad , \qquad (4.5)$$

где x_N - длина шкалы или ее части.

Обозначение на СИ 1,5 (цифра с галочкой внизу);

б) $$\gamma_{op} = \pm \frac{\Delta_{op} \cdot 100\%}{N} = \pm A,\% \quad , \qquad (4.6)$$

где $N = x_B - x_H$ - предел измерения СИ;

x_B и x_H – соответственно верхний и нижний пределы измерения СИ.

На СИ обозначаются в виде цифр 2.0.

Отвлеченные положительные числа A, c, d в формулах (4.3÷4.6) выбираются из следующего ряда:

(1,0; 1,5; (1,6); 2,0; 2,5; (3,0); 4,0;5 0; 6,0)* 10^n,

где n = -2; -1; 0; 1.

Эти цифры и называются классами точности. В круглых скобках указаны классы точности для глубинных СИ.

СИ может иметь 2 и более классов точности. Например, при наличии у него 2-х и более диапазонов измерений одной и той же физической величины (многопредельные измерительные приборы). При измерении одним СИ нескольких физических величин (разные классы точности для каждой измеряемой величины).

–

7 ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

7.1 Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения открыт Муавром в 1733г., затем развит и протабулирован Гауссом и Лапласом, поэтому и назван законом Гаусса-Лапласа.

Функция нормального распределения $F(x)$ для случайной величины θ имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2} dx \quad . \qquad (7.1)$$

Для функции (8.1) составлены таблицы (см. таблицу 2 приложения).

Плотность распределения нормального закона распределения равна

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2} dx \quad . \qquad (7.2)$$

В формулах (7.1) и (7.2) «a» и «σ» параметры нормального закона распределения, соответственно генеральное среднее и генеральный стандарт.

Решать интегралы вида (8.1) затруднительно. Можно составить таблицы этих интегралов для ($-\infty \le x \le +\infty$), но такие таблицы необходимы для каждых конкретных «a» и «σ». Этих трудностей можно избежать, если приравнять $a = 0$, а $\sigma = 1$ и располагать одной таблицей для функции стандартного нормального распределения $F_0(x')$ для нормированной случайной величины $\theta_0 = \dfrac{\theta - a}{\sigma}$,

$$F_0(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x'} e^{-\frac{1}{2}(x')^2} dx \quad , \qquad (7.3)$$

где $x' = \dfrac{x-a}{\sigma}$ – нормированное допускаемое значение.

Функцию стандартного нормального распределения можно выразить в виде

$$F_0(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x'} e^{-\frac{1}{2}(x')^2} dx \quad . \qquad (7.4)$$

Рассмотрим вероятность неравенства

$$p(\theta_0 \le x') = F_0(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x'} e^{-\frac{1}{2}(x')^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}(x')^2} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x'} e^{-\frac{1}{2}(x')^2} dx =$$

$$= F_0(0) + \Phi(x') = 0{,}5 + \Phi(x'),$$

где $\Phi(x') = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{0}^{x'} e^{-\frac{1}{2}(x')^2} dx$ – функция (интеграл) Лапласа.

Свойство функции Лапласа: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Благодаря этому свойству составлены таблицы интегралов Лапласа (см. таблицу 1 приложения) для $0 \le x \le \infty$ и $0 \le \Phi(x) \le 0 < 0{,}5$.

7.2 Свойства нормального распределения

Рассмотрим свойства нормального распределения.

1. Выражение вероятности попадания нормированной случайной величины θ_0 в любой заданный интервал через функцию Лапласа

$$p(x_1' \le \theta_0 \le x_2') = F_0(x_2') - F_0(x_1') = (\Phi(x_2') + 0{,}5) - (\Phi(x_1') + 0{,}5) =$$
$$= \Phi(x_2') - \Phi(x_1'), \qquad (7.5)$$

где $x' = \dfrac{x-a}{\sigma}$.

Для одностороннего неравенства

$$p(\theta \le x') = \Phi(x') + 0{,}5. \qquad (7.6)$$

2. Выражение вероятности попадания случайной величины θ с параметрами распределения $a \neq 0$, $\sigma \neq 1$ в любой заданный интервал через функцию Лапласа

$$p(x_1 \le \theta \le x_2) = p(x_1 \le (\theta_0\sigma + a) \le x_2 = p(\frac{x_1 - a}{\sigma} \le \theta_0 \le \frac{x_2 - a}{\sigma}) =$$
$$= \Phi(\frac{x_2 - a}{\sigma}) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right), \qquad (7.7)$$

для одностороннего неравенства

$$P(\theta \le x) = \Phi(\frac{x - a}{\sigma}) + 0{,}5 \quad . \qquad (7.8)$$

Третье и четвертое свойства рассматриваются при симметричном рассеянии случайной величины относительного математического ожидания.

Вероятность попадания случайной величины в симметричный интервал равна

$$P(x_1 \le \theta \le x_2) = P[M(\theta) - \varepsilon) \le \theta \le (M(\theta) + \varepsilon)] =$$
$$= P(-\varepsilon \le \theta - M(\theta) \le +\varepsilon) = P(-\varepsilon \le \Delta\theta \le +\varepsilon) \quad , \qquad (7.9)$$

где $\Delta\theta = \theta - M(\theta)$ – абсолютное отклонение;

$M(\theta) = a$.

Сформулируем задачу об абсолютном отклонении.

Найти вероятность того, что абсолютное отклонение $\Delta\theta$ не превысит некоторого заданного числа ε, т.е. $\Delta\theta \le |\varepsilon|$.

$$P(\Delta\theta \le |\varepsilon|) = P(-\varepsilon \le \Delta\theta \le +\varepsilon) = P(-\varepsilon \le \theta - a \le +\varepsilon) =$$
$$= P(a - \varepsilon \le \theta \le a + \varepsilon) = P(a - \varepsilon \le (\theta_0\sigma + a) \le a + \varepsilon) =$$
$$= P(-\varepsilon \le \theta_0\sigma \le +\varepsilon) = P(-\frac{\varepsilon}{\sigma} \le \theta_0 \le +\frac{\varepsilon}{\sigma}) = \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) - \Phi(-\frac{\varepsilon}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}).$$

Из (7.9) можно сформулировать третье свойство нормального распределения.

3. Выражение вероятности абсолютного отклонения случайной величины $\Delta\theta$ (нормированной случайной величины $\Delta\theta_0$), не превышающей заданного числа ε, через функцию Лапласа этого числа и стандарт σ (через функцию Лапласа этого числа ε):

$$P(\Delta\theta \le |\varepsilon|) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}); P(\Delta\theta_0 \le |\varepsilon|) = 2\Phi(\varepsilon), \qquad (7.10)$$

т.к. $\sigma = 1$ при стандартном нормальном распределении.

Если заданное число ε выразить через стандарт σ, т.е. $\varepsilon = t\sigma$,

$$p(\Delta\theta \le |\varepsilon| = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{t\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(t)$$

$$p(\Delta\theta \le |\varepsilon| = 2\Phi(\varepsilon) = 2\Phi(t\sigma) = 2\Phi(t),$$

т.к. $\sigma = 1$. Отсюда формулируется четвёртое свойство нормального распределения.

4. Вероятность того, что абсолютное отклонение нормально – распределенной случайной величины не превысит некоторого предела ε зависит только от того, во сколько раз t этот предел ε больше стандарта σ рассматриваемой случайной величины, т.е.

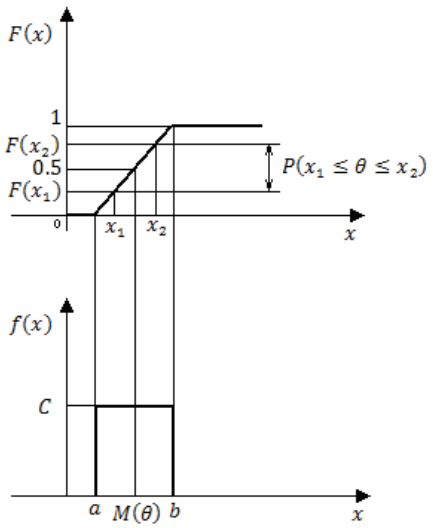
$$P(\Delta\theta \le |\varepsilon|) = P(\Delta\theta_0 \le |\varepsilon|) = 2\Phi(t), \qquad (7.11)$$

отсюда и происхождение названия «стандарт» σ – это величина, с которой сравниваются все отклонения.

7.3 Равномерный закон распределения (закон ровной плотности)

Если непрерывная случайная величина θ принимает значение лишь в пределах некоторого конечного интервала $a \le x \le b$ с постоянной плотностью распределения $f(x) = c = const$, то такой закон распределения называется равномерным

$$f(x) = \begin{cases} \text{c при } a \le x \le b \\ 0 \text{при } x < a; x > b \end{cases}, \qquad (7.12)$$



т.к. $\int_a^b f(x)dx = c\int_a^b dx = c(b-a) = 1,$

то $c = f(x) = \dfrac{1}{b-a}$. (7.13)

Вероятность того что $\theta \le x_1$, равна

$$p(\theta \le x_1) = F(x_1) = \int_a^{x_1} f(x)dx = \frac{x_1 - a}{b-a} \qquad (7.14)$$

Найдем тангенс угла наклона функции равномерного закона распределения

$$tg\alpha = \frac{F(x_1)}{x_1 - a} = \frac{1}{b-a} = c = f(x);$$

$$p(x_1 \le \theta \le x_2) = F(x_2) - F(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = c\int_{x_1}^{x_2} dx = c(x_2 - x_1) = \frac{x_2 - x_1}{b-a};$$

$$M(\theta) = \int_a^b xf(x)dx = c\frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2}; \qquad (7.15)$$

$$D(\theta) = \int_a^b (x - M(\theta))^2 f(x)dx = \frac{(b-a)^2}{12}; \qquad (7.16)$$

$$\sigma(\theta) = \sqrt{D(\theta)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

7.4 Распределение Стьюдента

В случае если закон распределения неизвестен, т. е. нет сведений, что случайная величина распределяется по нормальному закону, то используется распределение Стьюдента (псевдоним ученого В.С. Госсета).

Вероятность абсолютного отклонения $\Delta\theta$ имеет вид

$$p(\Delta\theta \le |\varepsilon|) = 2\int_0^{t_p} f(t;k)dt \quad , \qquad (7.17)$$

$$f(t;k) = \frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi k}\left(\frac{k}{2}\right)!}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{\frac{-(k+1)}{2}}$$

где — плотность распределения Стьюдента;

$$\varepsilon = t_p\sigma(\bar{x}); \qquad \tilde{\sigma}(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i. \; ; \; \Delta\theta = \theta - M(\theta) = \bar{x} - \hat{x}.$$

Рассмотрим равенство (7.17)

$$p(\Delta\theta \le |\varepsilon|) = p(-\varepsilon \le (\theta - M(\theta)) \le +\varepsilon) =$$
$$= p(-t_p\sigma(\bar{x}) \le (\bar{x}-\hat{x}) \le t_p\sigma(\bar{x})) =$$
$$= p\left(-t_p \le \frac{\bar{x}-\hat{x}}{\sigma(\bar{x})} \le t_p\right) = p(-t_p \le t \le t_p). \qquad (7.18)$$

Отсюда

$$p(t \le |t_p| = 2\int_0^{t_p} f(t;k)dt \quad , \qquad (7.19)$$

где $t = \dfrac{\bar{x}-\hat{x}}{\sigma(\bar{x})}$ – дробь Стьюдента. (7.20)

Таким образом, равенство (7.18) характеризует вероятность того, что дробь Стьюдента t принимает некоторое значение в интервале $(-t_p;+t_p)$.

Величины t_p вычисляются по формуле (7.17) и приводятся в табл. 4 приложения распределения Стьюдента $t_p = f(q;k)$,

где $q = 1 - p_Д$ – уровень значимости;

$k = n - 1$ число степеней свободы.

9 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ВИДОВ ИЗМЕРЕНИЙ

9.1 Общий случай

1. Записывается уравнение связи (на примере двух аргументов)

$$y = f(x_1, x_2) \quad (9.1)$$

Аргументы x_j представлены в виде результатов многократных прямых видов измерений

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, ..., x_{1n_1}$;

$x_{21}, x_{22}, x_{23}, ..., x_{2n_2}$;

2. Проводится точечная оценка значений $\bar{x}_j$ и $\tilde{\sigma}(\bar{x}_j)$:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2; \text{ и } \tilde{\sigma}(\bar{x}_1), \tilde{\sigma}(\bar{x}_2) \quad (9.2)$$

3. Оценивается среднее искомого результата по уравнению связи

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad (9.3)$$

4. Оценивается дисперсия искомого результата

$$\tilde{\sigma}^2(\bar{y}) = b_1^2 \tilde{\sigma}^2(x_1) + b_2^2 \tilde{\sigma}^2(x_2) + b_1 b_2 r_{12} \tilde{\sigma}(x_1) \tilde{\sigma}(x_2), \quad (9.4)$$

где $b_j = \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}_j}$ – частная производная аргумента x_j, которая называется коэффициентом влияния.

Произведения частных производных уравнения связи на с. к. о. результатов измерения соответствующих аргументов называются *частными погрешностями косвенного измерения*

$$E_j = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}_j}\right) \tilde{\sigma}(\bar{x}_j) \quad (9.5)$$

5. Оценивается коэффициент корреляции между каждой парой аргументов

$$\bar{r}_{kl} = \frac{\sum_{i=1}^{h} (x_{ki} - \bar{x}_k)(x_{lj} - \bar{x}_l)}{(h-1)\tilde{\sigma}(x_k)\tilde{\sigma}(x_l)}, \quad (9.6)$$

где $h = min(n_1; n_2)$ – наименьшее из чисел наблюдений n_1 и n_2 соответственно аргументов.

Если $\tilde{r}_{12} = 0$, то погрешности измерения аргументов x_1 и x_2 некоррелированы (погрешности измеряемых ФВ являются независимыми). В этом случае

$$\tilde{\sigma}^2(\bar{y}) = b_1^2\tilde{\sigma}^2(x_1) + b_2^2\tilde{\sigma}^2(x_2). \qquad (9.7)$$

Корреляция между погрешностями аргументов чаще всего возникает в тех случаях, когда измерения выполняются одновременно и изменения влияющих величин (температуры воздуха, напряжения питания и т.п.), хотя и допустимые сами по себе, оказывают некоторое влияние на результаты наблюдений.

Критерием отсутствия корреляции между рассматриваемой парой аргументов x_k и x_l является выполнение неравенства $K_r < t_p$,

где $K_{\tilde{r}} = \dfrac{\tilde{r}_{kl}\sqrt{h-2}}{\sqrt{1-\tilde{r}_{kl}^2}}$ – показатель корреляции;

$t_p = f(p;(h-2))$ – коэффициент Стьюдента находится по таблице 4 приложения.

6. Оценка погрешности искомого результата:

а) при нормальном законе распределения

$\Delta\bar{y} = \pm t \cdot \tilde{\sigma}(\bar{y})$;

б) при неизвестном законе распределения

$\Delta\bar{y} = \pm t_p \tilde{\sigma}(\bar{y})$.

где $t_p = f(p;\ k_{эф})$ – коэффициент Стьюдента находится по таблице 4 приложения.

Эффективное число степеней свободы $k_{эф}$ определяется по формуле

$$k_{эф} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{m} b_j^2 \cdot \tilde{\sigma}^2(\bar{x}_j)\right)^2}{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j - 1} \cdot b_j^4 \cdot \tilde{\sigma}^4(\bar{x}_j)}, \qquad (9.8)$$

где n_j – число результатов прямых измерений аргумента x_j

Окончательный результат записывается в виде

$y = \bar{y} \pm \Delta\bar{y}$, при $p_Д = ?$ (9.9)

9.2 Частный случай

В уравнениях связи (10.1) значения аргументов заданы в виде

$$x_1 = \bar{x}_1 \pm \Delta x_1;\ x_2 = \bar{x}_2 \pm \Delta x_2; \tag{9.10}$$

т. е. заданы своими доверительными интервалами

$$\Delta x_j = t_{pj} \cdot \tilde{\sigma}(\bar{x}_j),$$

где t_{pj} – коэффициент аргумента $\bar{x}_j$, зависящий от принятого закона распределения результатов измерения этого аргумента и принятой доверительной вероятности $p_Д$.

При отсутствии корреляционной зависимости между погрешностями измерений аргументов (коэффициент корреляции $\tilde{r} = 0$) и при одинаковой доверительной вероятности $p_Д$ всех аргументов $\bar{x}_j$ ($t_{pj} = t_p = const$) уравнения связи, оценка абсолютной погрешности $\Delta\bar{y}$ искомого результата будет иметь вид

$$\Delta\bar{y} = \sqrt{b_1^2 \cdot \Delta x_1^2 + b_2^2 \cdot \Delta x_2^2 + ... + b_m^2 \cdot \Delta x_m^2}. \tag{9.11}$$

Относительная погрешность

$$\delta_{\bar{y}} = \frac{\partial\bar{y}}{\bar{y}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\bar{y}}{\partial x_1}\right)^2\left(\frac{\Delta x_1}{\bar{y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{y}}{\partial x_2}\right)^2\left(\frac{\Delta x_2}{\bar{y}}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial\bar{y}}{\partial x_m}\right)^2\left(\frac{\Delta x_m}{\bar{y}}\right)^2}.$$

Окончательный результат записывается в виде

$y = \bar{y} \pm \Delta\bar{y}$, при $p_Д = ?$ (9.12)

9.3 Погрешности результата косвенного вида измерений для наиболее распространённых уравнений связи

1. $$y = f(x); \bar{y} = f(\bar{x}); \tilde{\sigma}(\bar{y}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \tilde{\sigma}(\bar{x}) \quad . \qquad (9.13)$$

2. $$y = kx^a; \bar{y} = k\bar{x}^a; \tilde{\sigma}(\bar{y}) = \frac{a\bar{y}}{\bar{x}} \tilde{\sigma}(\bar{x}) \quad . \qquad (9.14)$$

3. $$y = k\sqrt[a]{x}; \bar{y} = k\sqrt[a]{\bar{x}}; \tilde{\sigma}(\bar{y}) = \frac{\bar{y}}{a\bar{x}} \tilde{\sigma}(\bar{x}) \quad . \qquad (9.15)$$

4. $$y = \frac{k}{x^a}; \bar{y} = \frac{k}{\bar{x}^a}; \tilde{\sigma}(\bar{y}) = -\frac{a\bar{y}}{\bar{x}} \tilde{\sigma}(\bar{x}) \quad . \qquad (9.16)$$

5. $$y = ax_1 + bx_2 + ...; \bar{y} = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 + ...;$$
$$\sigma(\bar{y}) = \sqrt{a^2 \tilde{\sigma}^2(\bar{x}_1) + b^2 \tilde{\sigma}^2(\bar{x}_2) + ...} \quad . \qquad (9.17)$$

6. $$y = kx_1^a x_2^b ....; \bar{y} = k\bar{x}_1^a \bar{x}_2^b ....;$$
$$\tilde{\sigma}(\bar{y}) = \bar{y}\sqrt{\left[\frac{a}{\bar{x}_1}\tilde{\sigma}(\bar{x}_1)\right]^2 + \left[\frac{b}{\bar{x}_2}\tilde{\sigma}(\bar{x}_2)\right]^2 + ...} \quad . \qquad (9.18)$$

Если в уравнениях связи (9.17) и (9.18) аргументы заданы своими доверительными интервалами (9.10), то уравнения погрешностей (9.17) и (9.18) соответственно примут вид

$$\Delta\bar{y} = \sqrt{a^2 \cdot \Delta\bar{x}_1^2 + b^2 \cdot \Delta\bar{x}_2^2 + ...} \; ; \qquad (9.19)$$

$$\Delta\bar{y} = \bar{y}\sqrt{\left(\frac{a}{\bar{x}_1}\Delta\bar{x}_1\right)^2 + \left(\frac{b}{\bar{x}_2}\Delta\bar{x}_2\right)^2 + ...} \quad . \qquad (9.20)$$

В табл. 9.1 приведены оценки абсолютных и относительных погрешностей при косвенных видах измерений.

Таблица 9.1 – Оценки абсолютных и относительных погрешностей

Функция вида $y = f(x)$	Погрешности	
	Абсолютная Δy	Относительная $\delta = \Delta y/y$
Cx	$C\Delta x$	$\Delta x/x$
x^n	$nx^{(n-1)}\,\Delta x$	$n\Delta x/x$
$\sqrt[n]{x}$	$\sqrt[n]{x\Delta x}\,/\,nx$	$\Delta x/n\,x$
$e^{x/C}$	$\Delta x\, e^{x/C}/C$	$\Delta x/C$
$\ln x$	$\Delta x/x$	$\Delta x/(\ln x)x$
$x/(1\pm x)$	$\Delta x/(1\pm x)^2$	$\Delta x/x(1\pm x)$
$\sin(x/C)$	$\cos(x/C)\,\Delta x/C$	$ctg\,(x/C)\,\Delta x/C$
$\cos(x/C)$	$\sin(x/C)\,\Delta x/C$	$tg(x/C)\,\Delta x/C$
$Bx_1 \pm Cx_2$	$\sqrt{B^2(\Delta x_1)^2 + C^2(\Delta x_2)}$	$\sqrt{\dfrac{B^2(\Delta x_1)^2 + C^2(\Delta x_2)^2}{(Bx_1 \pm Cx_2)^2}}$
Примечание к таблице: C и B – постоянные величины		