

ПРИМЕР РГР №1_2

- 1. Аналитически определить усилия в указанных стержнях фермы, рисунок 1.
- 2. Построить линии влияния в тех же стержнях
- 3. Определить по линиям влияния усилия в указанных стержнях
- 4. Сравнить усилия в стержнях, полученные аналитически и по линиям влияния.

Таблица 1

Цифра варианта	XX
d, м	2,0
F, кН	10

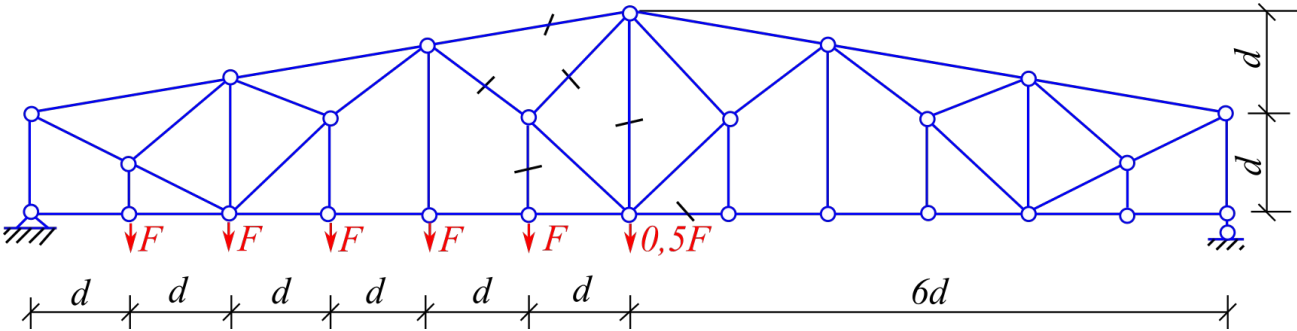


Рисунок 1. Исходная схема

1. Ферма является шпренгельной с двухярусными шпренгелями. Произведем кинематический анализ. Определим степень кинематической свободы W данной конструкции:

$W = 2U - C_\phi - C_{on}$, где $U = 26$ - общее число узлов фермы; $C_\phi = 49$ - число стержней фермы; $C_{on} = 3$ - число опорных стержней.

$W = 2 \cdot 26 - 49 - 3 = 0$. Таким образом необходимое условие геометрической неизменяемости системы удовлетворяется. Дополнительный анализ конструкции однозначно определяет геометрическую неизменяемость системы.

Индексируем узлы исходной схемы, и инициализируем ее элементы, рис. 2.

С учетом индексации, по условию задачи необходимо определить усилия O_{3-4} , $D_{3-5'}$, $D_{5'-4}$, $V_{5'-6'}$, V_{4-10} , $U_{8'-10}$.

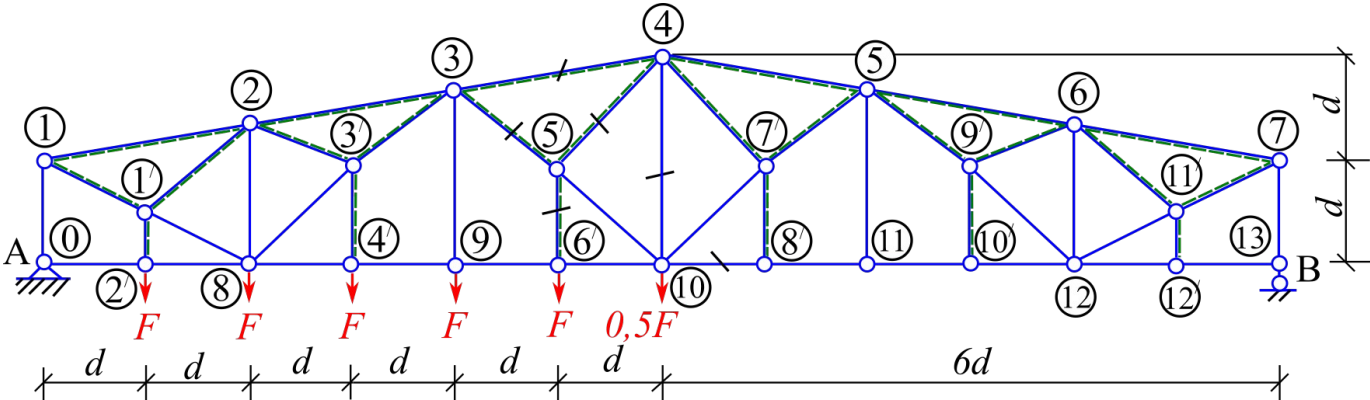


Рисунок 2. Индексация узлов

Установим типы элементов, соответствующих указанным усилиям. Однозначно можно сказать, что стержень с усилием $U_{8'-10}$ является элементом первой категории (относится к основной системе), стержни с усилиями $V_{5'-6'}$ и $D_{5'-4}$ относятся ко 2 категории (принадлежат только шпренгелю). Стержни с усилиями $D_{3-5'}$ и O_{3-4}

относится к 3 категории — одновременно принадлежат как шпренгельной, так и основной части. Стержень с усилием V_{4-10} отнесем к четвертой категории, так как будучи элементом основной системы, его форма линии влияния для езды поверху и понизу различна. Для получения составляющих данных расчета, отбрасывая из исходной схемы шпренгельную часть, получим основную схему, рисунок 3.

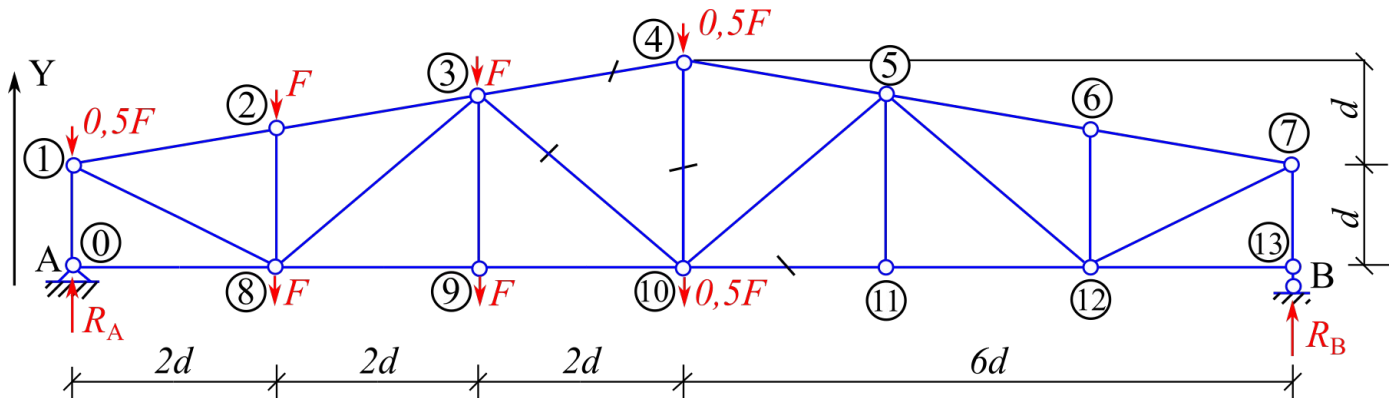


Рисунок 3. Основная схема

Определим опорные реакции в основной схеме. Для этого используем статические уравнения статического равновесия:

$$\sum M_A = 0: 2F \cdot 2d + 2F \cdot 4d + F \cdot 6d - R_B \cdot 12d = 0 \Rightarrow R_B = 1,5F = 1,5 \cdot 10 \Rightarrow R_B = 15 \text{ kH}.$$

$$\sum M_B = 0: (R_A - 0,5F) \cdot 12d - 2F \cdot 10d - 2F \cdot 8d - F \cdot 6d = 0 \Rightarrow$$

$$R_A = 4F = 4 \cdot 10 \Rightarrow R_A = 40 \text{ kH}.$$

Проверка: $\sum Y = 0: R_A + R_B - 5,5F = 0 \Rightarrow 40 + 15 - 55 = 0$ истинно.

Разрежем третью панель рисунок 4 а) и определим аналитически усилия O_{3-4}^o, D_{3-10}^o , рассматривая условия равновесия части фермы, лежащей левее сечения 1-1, рисунок 4 б).

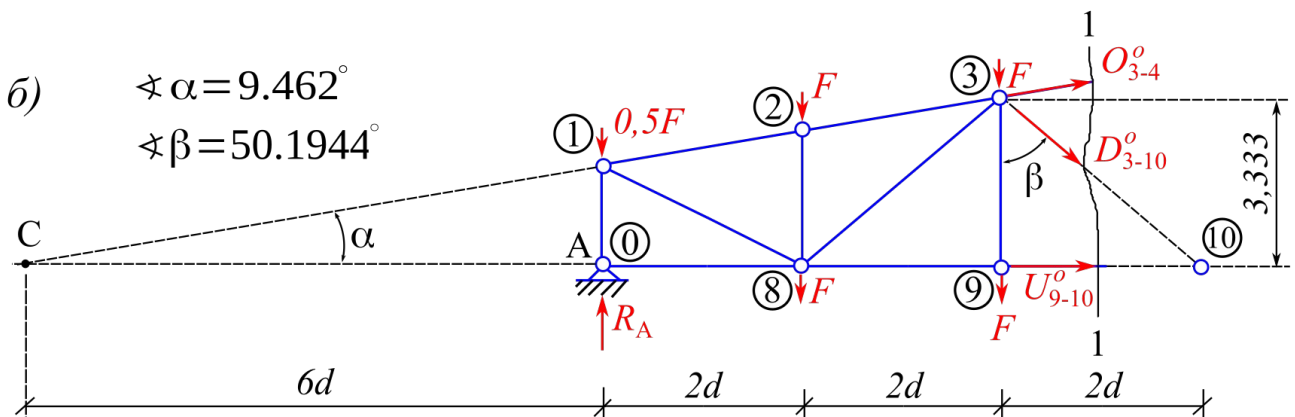
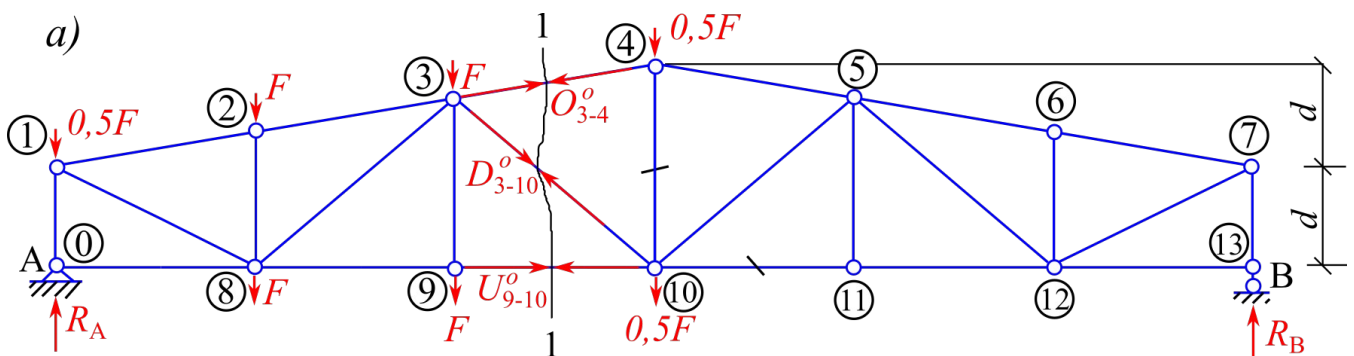


Рисунок 4

$$\begin{aligned} \sum_{\text{слева}} M_C(\vec{F}_i) &= 0: (0,5F - R_A) \cdot 6d + 2F(6d + 2d) + 2F(6d + 4d) + \dots \\ &\dots + D_{3-10}^o (\cos \beta \cdot 10d + \sin \beta \cdot 3,333) = 0 \Rightarrow \\ D_{3-10}^o &= -19,5256 \text{ kH}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\text{слева}} M_{10}(\vec{F}_i) &= 0: (R_A - 0,5F) \cdot 6d - 2F \cdot 4d - 2F \cdot 2d + \dots \\ &\dots + O_{3-4}^o (\cos \alpha \cdot 3,333 + \sin \alpha \cdot 2d) = 0 \Rightarrow \\ O_{3-4}^o &= -45,62 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Разрежем четвертую панель рисунок 5 а) и определим аналитически усилия O_{4-5}^o , U_{10-11}^o , рассматривая условия равновесия части фермы, лежащей правее сечения 2-2, рисунок 5 б).

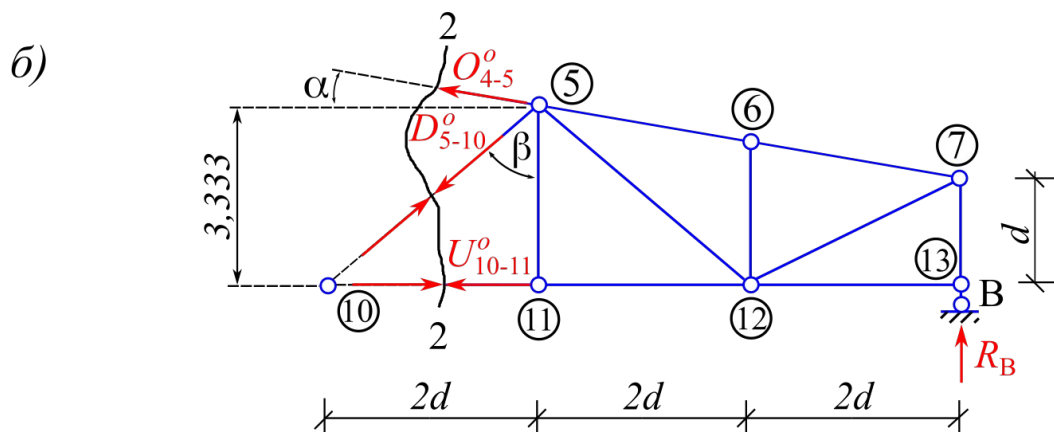
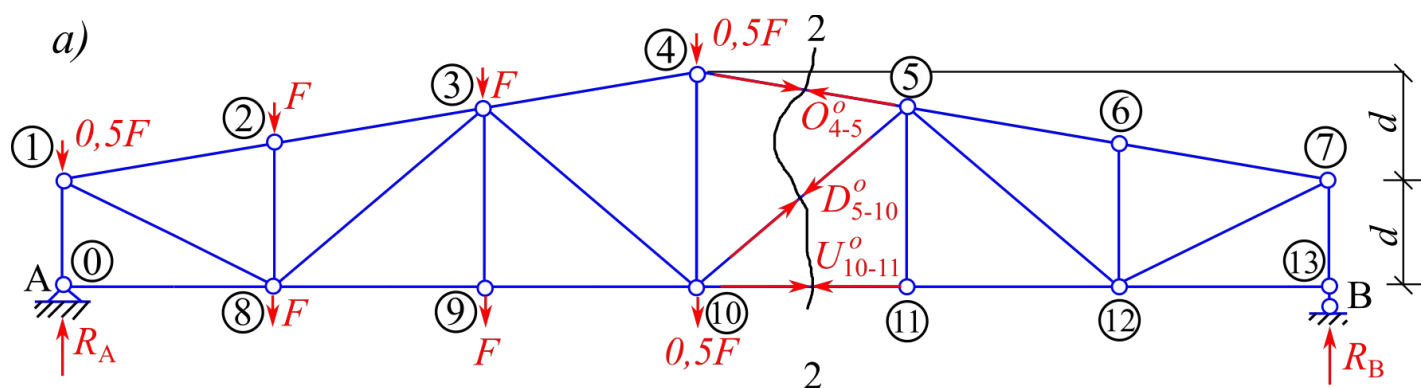
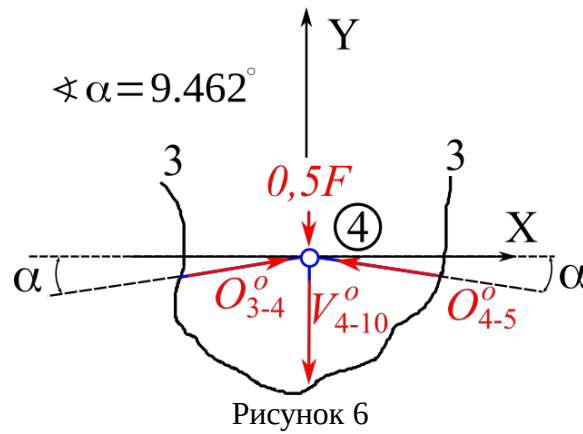


Рисунок 5

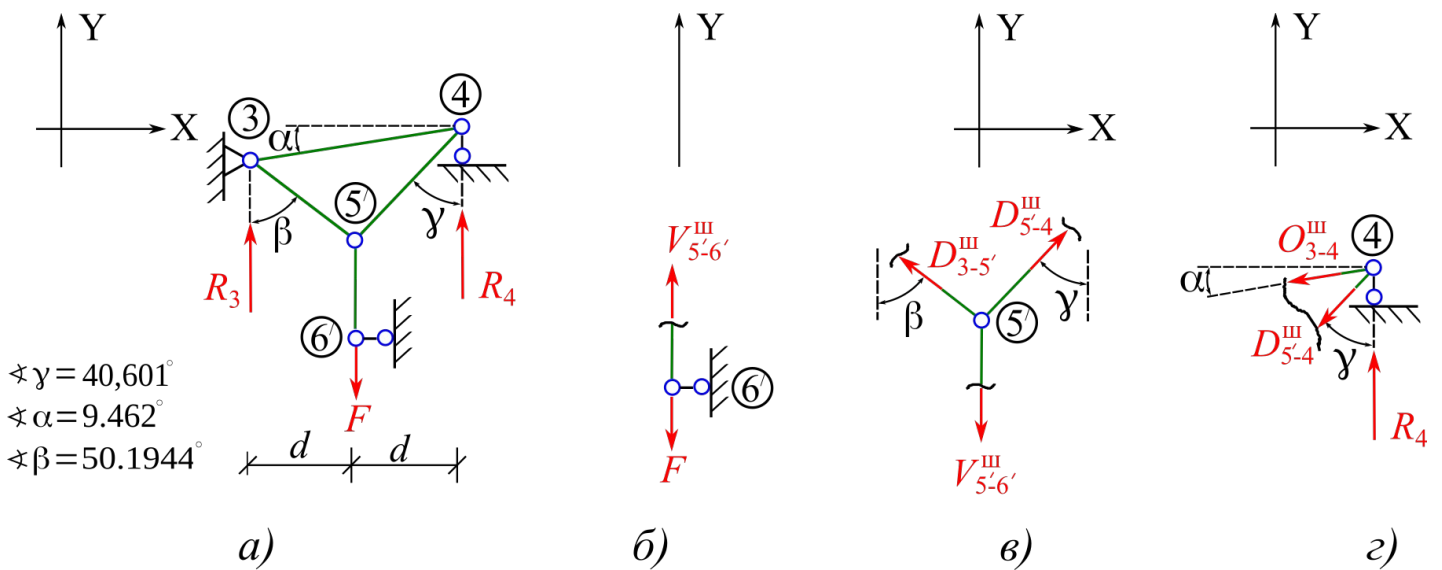
$$\begin{aligned} \sum_{\text{справа}} M_{10}(\vec{F}_i) &= 0: -O_{4-5}^o (\cos \alpha \cdot 3,333 + \sin \alpha \cdot 2d) - R_B \cdot 6d = 0 \Rightarrow O_{4-5}^o = -45,62 \text{ kH}. \\ \sum_{\text{справа}} M_5(\vec{F}_i) &= 0: U_{10-11}^o \cdot \frac{5d}{3} - R_B \cdot 4d = 0 \Rightarrow U_{10-11}^o = 36 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Для определения усилия V_{4-10} в основной системе вырежем узел 4 и рассмотрим условия его равновесия, рис.6.

$$\begin{aligned} \sum X = 0: O_{3-4}^o \cdot \cos \alpha - O_{4-5}^o \cdot \cos \alpha &= 0 \Rightarrow O_{3-4}^o = O_{4-5}^o. \\ \sum Y = 0: O_{3-4}^o \cdot \sin \alpha + O_{4-5}^o \cdot \sin \alpha - V_{4-10}^o - 0,5F &= 0 \Rightarrow V_{4-10}^o = 10 \text{ kH}. \end{aligned}$$



Рассчитаем необходимые усилия в шпренгельной части третьей панели, рисунок 7.



Изображаем расчетную схему шпренгеля, рисунок 7 а).

Составляя для неё уравнение равновесия, определим реакцию R_4 .

$$\sum M_3(\vec{F}_i) = 0: F \cdot d - R_4 \cdot 2d = 0 \Rightarrow R_4 = 0,5 F \Rightarrow R_4 = 5 \text{ kH}.$$

Значение усилия $V_{5'-6'}^{\text{III}}$ определим рассматривая условия равновесия вырезанного узла 6', рисунок 7 б):

$$\sum Y = 0: V_{5'-6'}^{\text{III}} - F = 0 \Rightarrow V_{5'-6'}^{\text{III}} = F \Rightarrow V_{5'-6'}^{\text{III}} = 10 \text{ kH}.$$

Значения усилий $D_{3-5'}^{\text{III}}$, $D_{5'-4}^{\text{III}}$ определим, рассматривая условия равновесия системы трех сходящихся сил, рисунок 7 в):

$$\sum X = 0: -D_{3-5'}^{\text{III}} \cdot \sin \beta + D_{5'-4}^{\text{III}} \cdot \sin \gamma = 0. \quad (*)$$

$$\sum Y = 0: D_{3-5'}^{\text{III}} \cdot \cos \beta + D_{5'-4}^{\text{III}} \cdot \cos \gamma - F = 0. \quad (**)$$

Из (*) уравнения следует $D_{5'-4}^{\text{III}} = \frac{D_{3-5'}^{\text{III}} \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$.

Подставляя его в (**) получим:

$$D_{3-5'}^{\text{III}} = \frac{F}{(\sin \beta \cdot \text{ctg} \gamma + \cos \beta)} = \frac{10}{(0.768216 \cdot 1.16667 + 0.64019)} = 6.5085 \text{ kH}.$$

В таком случае, $D_{5'-4}^{\text{III}} = \frac{D_{3-5'}^{\text{III}} \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{6.5085 \cdot 0.768216}{0.650787} \Rightarrow D_{5'-4}^{\text{III}} = 7.68294 \text{ kH}.$

Значение усилия O_{3-4}^{III} определим рассмотрев условия равновесия вырезанного узла 4, рисунок 7 з).

$$\sum X = 0: -O_{3-4}^{\text{III}} \cdot \cos \alpha - D_{5'-4}^{\text{III}} \cdot \sin \gamma = 0 \Rightarrow O_{3-4}^{\text{III}} = -\frac{D_{5'-4}^{\text{III}} \cdot \sin \gamma}{\cos \alpha} = -\frac{7.68294 \cdot 0.650787}{0.98639} \Rightarrow O_{3-4}^{\text{III}} = -5.06895 \text{ kH}.$$

Для проверки:

$$\sum Y = 0: -O_{3-4}^{\text{III}} \cdot \sin \alpha - D_{5'-4}^{\text{III}} \cdot \cos \gamma + R_4 = 0 \Rightarrow -(-5.06895) \cdot 0.16439 - 7.68294 \cdot 0.75926 + 5 \approx 0.$$

С учетом типа стержней, рассчитаем их усилия в окончательном варианте:

Усилия в исследуемых стержнях 1 и 4 категории (принадлежащие к основной системе) переписываются без изменения, т.е.:

$$U_{8'-10} = 36 \text{ kH}; \quad V_{4-10} = 10 \text{ kH}.$$

Усилия в исследуемых стержнях 2 категории (принадлежащие только к шпренгелям) переписываются также без изменений, т.е:

$$V_{5'-6'} = 10 \text{ kH}; \quad D_{5'-4} = 7.68294 \text{ kH}.$$

Усилия в стержнях 3 категории записываются как алгебраические суммы их составляющих усилий в основной и шпренгельной системе:

$$D_{3-5'} = D_{3-10}^0 + D_{3-5'}^{\text{III}} = -19.526 + 6.5085 \Rightarrow D_{3-5'} = -13.0171 \text{ kH}.$$

$$O_{3-4} = O_{3-4}^0 + O_{3-4}^{\text{III}} = -45.62 - 5.06895 \Rightarrow O_{3-4} = -50.68895 \text{ kH}.$$

2. Построим линии влияния исследуемых стержней.

2.1 Строим линию влияния для стержня с усилием $U_{8'-11}$, рисунок 8. Так как этот стержень относится к элементам первой категории, то для построения его линии влияния достаточно построить эквивалентную линию влияния U_{10-11} для основной системы, рисунок 8 б). Составим уравнения равновесия относительно моментной точки 5 этого усилия в основной системе.

При нахождении подвижной единичной нагрузки слева от разрезаемой сечением 4-4 панели— составляем уравнение равновесия: $\sum_{\text{справа}} M_5(\vec{F}_i) = 0.$

$$\sum_{\text{справа}} M_5(\vec{F}_i) = 0: U_{10-11}^0 \cdot \frac{5d}{3} - R_B^0 \cdot 4d = 0 \Rightarrow U_{10-11}^0 = 2,4 R_B^0.$$

Мы получили уравнение левой ветви $л.в. U_{10-11}^0 \equiv л.в. U_{8'-11}^0.$

При нахождении подвижной единичной нагрузки справа от разрезаемой сечением 4-4 панели— составляем уравнение равновесия: $\sum_{\text{слева}} M_5(\vec{F}_i) = 0.$

$$\sum_{\text{слева}} M_5(\vec{F}_i) = 0: -U_{10-11}^0 \cdot \frac{5d}{3} + R_A^0 \cdot 8d = 0 \Rightarrow U_{10-11}^0 = 4,8 R_A^0.$$

Мы получили уравнение правой ветви $л.в. U_{10-11}^0 \equiv л.в. U_{8'-11}^0.$

Выполняем построения этих ветвей. Убеждаемся в том, что при ездовом поясе сверху, форма линии влияния не изменится, рисунок 8 в).

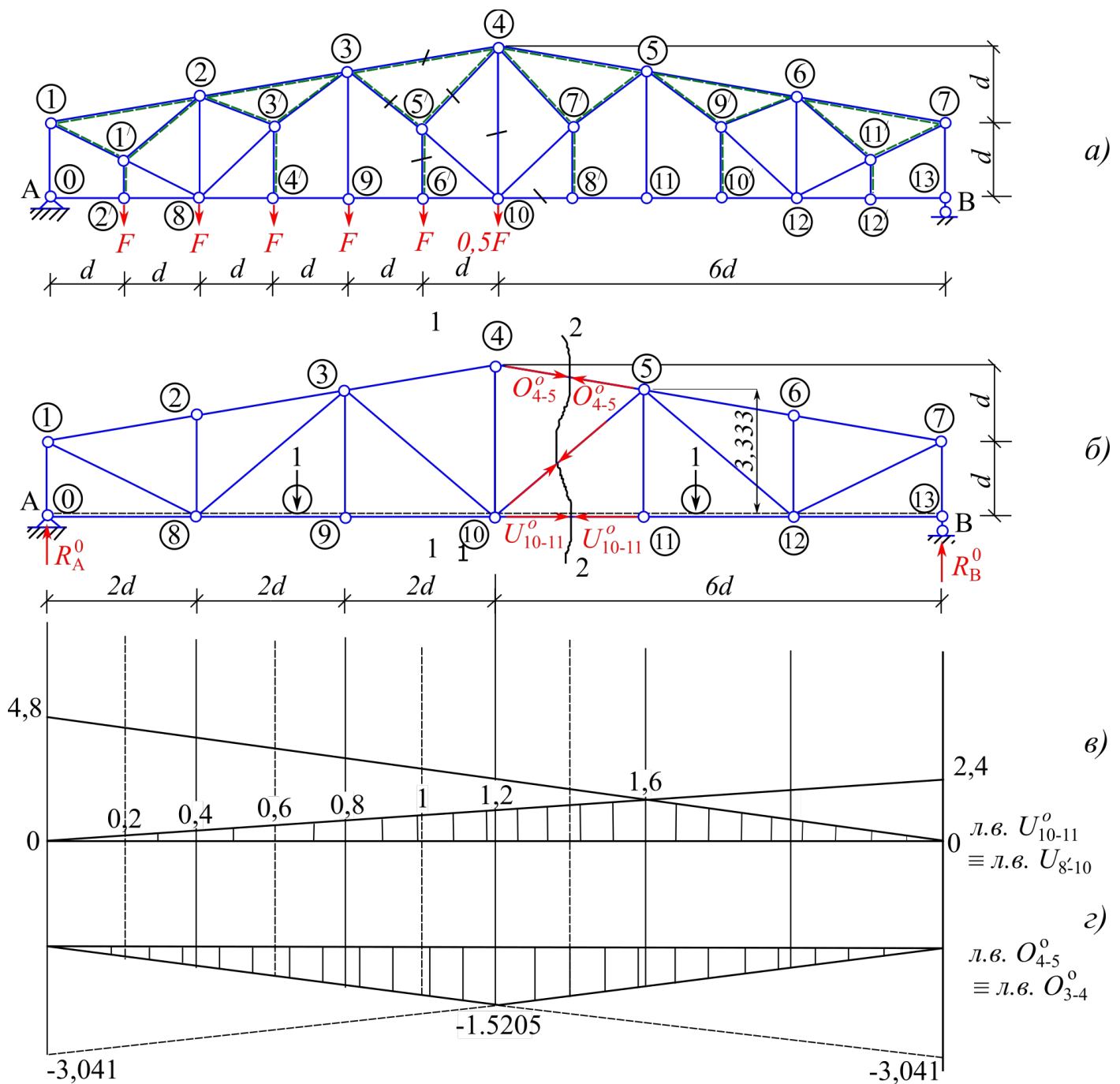


Рисунок 8: а) — исходная схема; б) -основная схема;
в) линия влияния $U_{10-11}^0 \equiv U_{8'-10}^0$; г) линия влияния $O_{4-5}^0 \equiv O_{3-4}^0$

2.2 Для вспомогательных целей, построим линию влияния в основной системе усилия O_{4-5}^0 , рисунок 8. Для этого вновь разрежем четвертую панель сечением 2-2 и рассмотрим условия равновесия относительно моментной точки данного усилия 10 слева и справа, рисунок 8 б).

При положении единичной подвижной нагрузки слева от разрезанной панели:

$$\sum_{\text{справа}} M_{10}(\vec{F}_i) = 0: -O_{4-5}^0 \cdot (\cos \alpha \cdot 3,333 + \sin \alpha \cdot 2d) - R_B^0 \cdot 6d = 0 \Rightarrow$$

$$O_{4-5}^0 = -3,041 \bar{R}_B - \text{уравнение левой ветви л.в. } O_{4-5}^0.$$

При положении единичной подвижной нагрузки справа от разрезанной панели:

$$\sum_{\text{слева}} M_{10}(\vec{F}_i) = 0: O_{4-5}^0 \cdot \cos \alpha \cdot 2d - R_A^0 \cdot 6d = 0 \Rightarrow$$

$$O_{4-5}^0 = -3,041 \bar{R}_A - \text{уравнение правой ветви л.в. } O_{4-5}^0. \text{ Выполняем построения этих}$$

ветвей, рисунок 8 г). Убеждаемся в том, что передаточная прямая для данного усилия латентна.

2.3 Построим линии влияния для элементов, входящих в шпренгель 3 панели, рисунок 9.

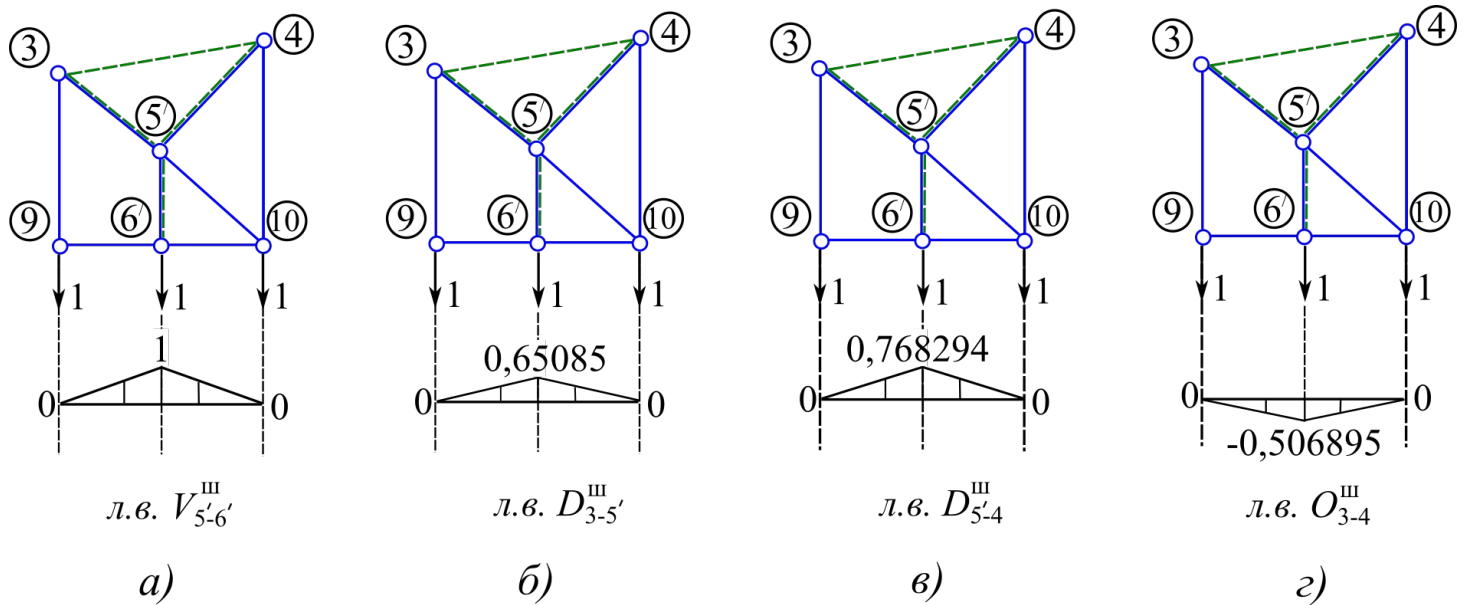


Рисунок 9

При построении шпренгельных линий влияний учтем, что пиковое значение нагрузки элементы шпренгеля получают при нахождении единичной подвижной силы в узле 6'.

При нахождении единичной подвижной силы в точке 9 и левее, в точке 10 и правее, значения линий влияния усилий элементов шпренгеля будут равны нулю.

При определении пиковых значений линий влияния элементов шпренгеля, используют уравнения равновесия элементов или узлов шпренгеля, полученные нами ранее.

2.4 Построим линию влияния усилия в стойке V_{4-10} .

Для этого вырежем узел 4 и рассмотрим условие его равновесия при движении единичной подвижной нагрузки по верхнему и по нижнему поясу, рисунок 10.

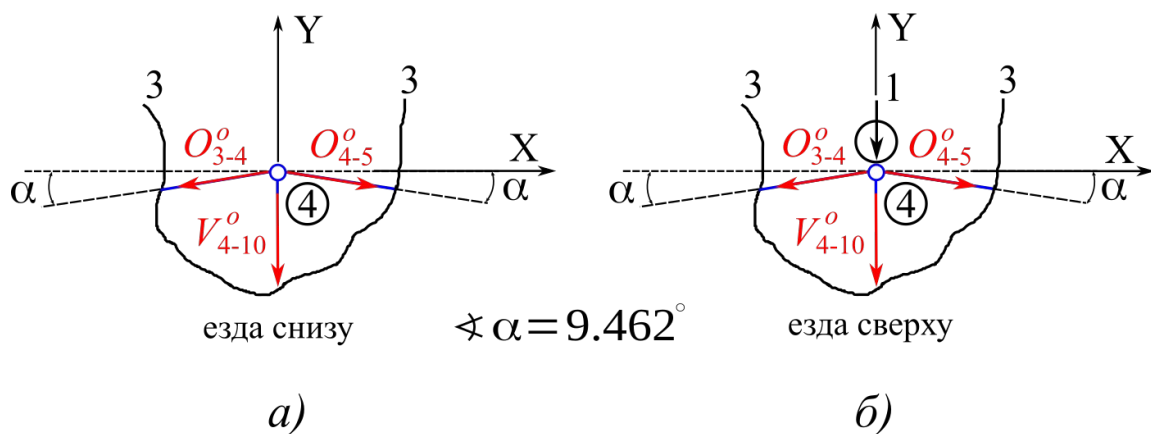


Рисунок 10

Для езды снизу, рисунок 9 а):

$$\sum X=0: -O_{3-4}^o \cdot \sin \alpha + O_{4-5}^o \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow O_{3-4}^o = O_{4-5}^o.$$

$$\sum Y=0: -2 \sin \alpha \cdot O_{4-5}^o - V_{4-10}^o = 0 \Rightarrow V_{4-10}^o = -0.32878 \cdot O_{4-5}^o$$

Для езды сверху, рисунок 9 б):

$$\sum X=0: -O_{3-4}^o \cdot \sin \alpha + O_{4-5}^o \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow O_{3-4}^o = O_{4-5}^o.$$

$$\sum Y=0: -2 \sin \alpha \cdot O_{4-5}^o - V_{4-10}^o - 1 = 0 \Rightarrow V_{4-10}^o = -1 - 0.32878 \cdot O_{4-5}^o \quad (\text{при нахождении единичной подвижной нагрузки в узле 4}).$$

При других положениях подвижной нагрузки, т.е. левее точки 9 и правее точки 11 см. рисунок 11 а), линия влияния при езде сверху такая же, как и при езде снизу, см. рисунок 11 е) и ж).

При езде сверху, линия влияния в сечении узла 4 имеет скачок на величину -1, рисунок 11 ж).

Это обусловлено приложением в данном узле единичной отрицательной силы. С учетом построенной ранее вспомогательной л.в. O_{4-5}^o , рисунок 8 г) и соответственно, рисунок 11 в), линия влияния усилия V_{4-10}^o при движении снизу строится путем перемножения ординат л.в. O_{4-5}^o на коэффициент -0,32878, рисунок 11 е).

Используя построенную л.в. V_{4-10}^o строим окончательную л.в. V_{4-10} (езда снизу) рисунок 11 и), которая учитывает передачу усилия через шпренгели (рисунок 11 г) и д)), на верхний пояс, при нахождении единичной подвижной нагрузки в дополнительных узлах 6', 8', рис.11 а).

В этих сечениях, ординаты л.в. V_{4-10} , рисунок 11 и), берутся равными ординатам л.в. V_{4-10}^o при езде сверху, рисунок 11 ж).

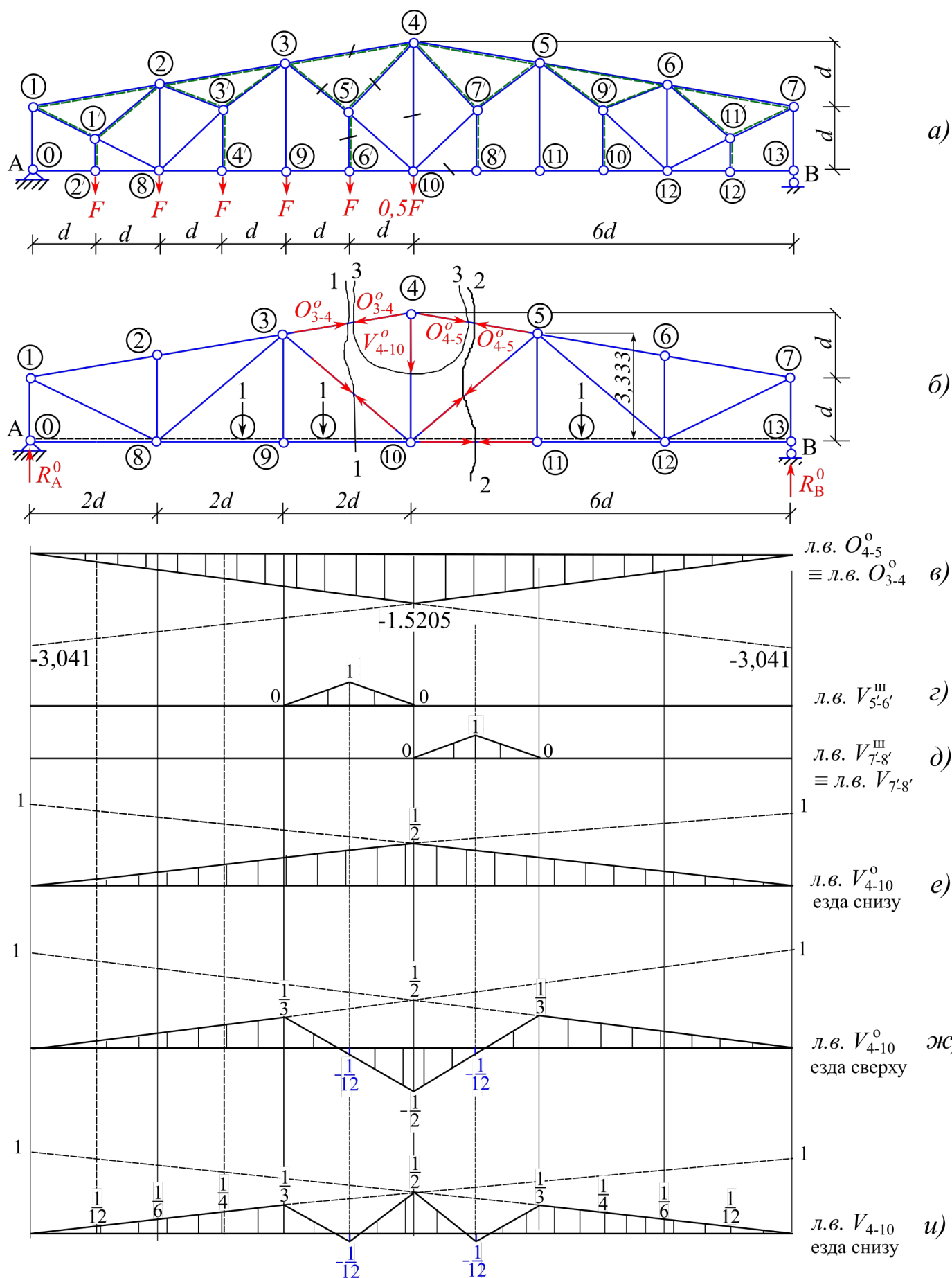


Рисунок 11

2.5 Построим линию влияния O_{3-4}^0 для основной системы, рисунок 12 б). Для этого вновь разрежем третью панель сечением 1-1 и рассмотрим условия равновесия относительно моментной точки 10 данного усилия.

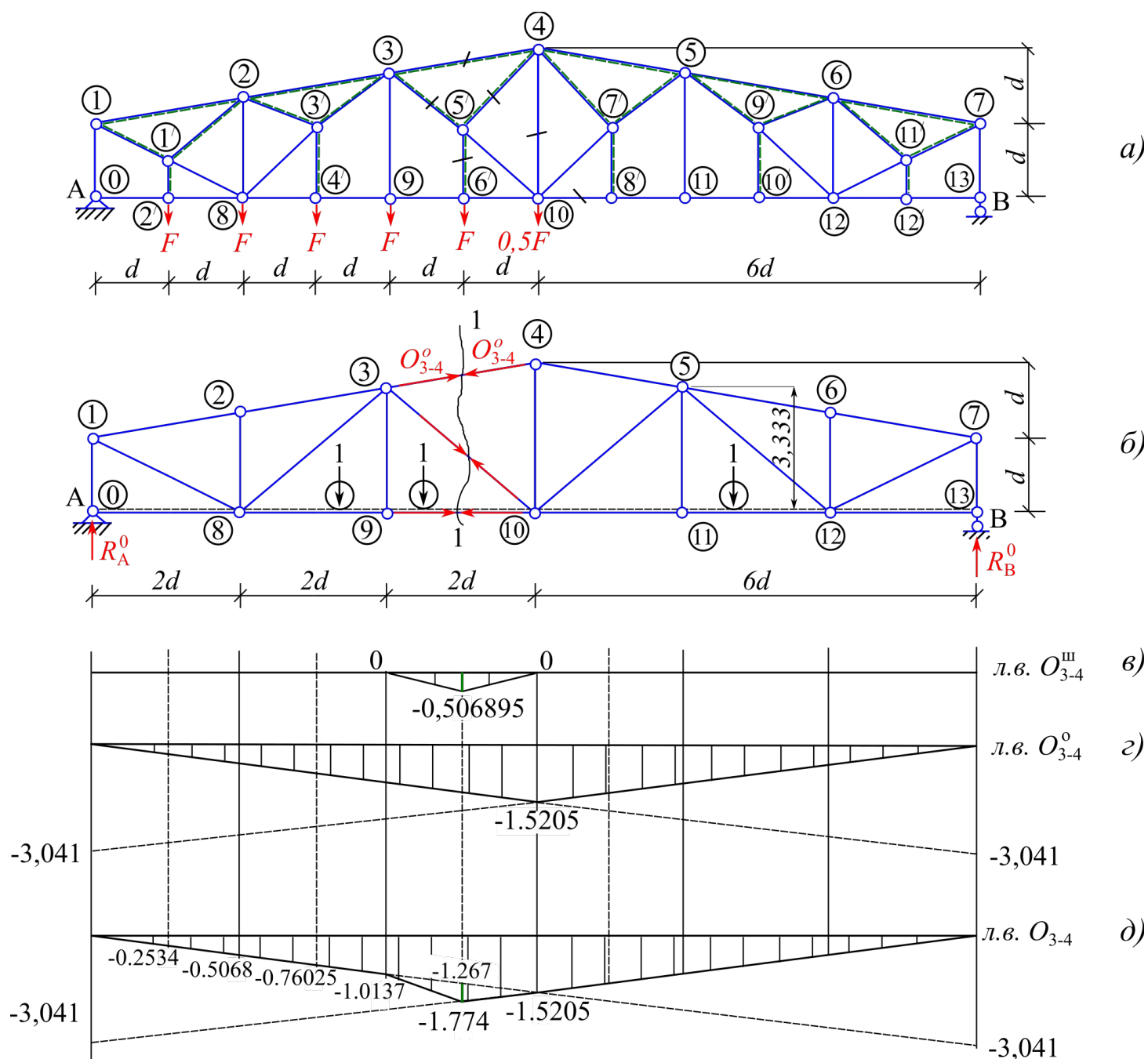


Рисунок 12

При положении единичной подвижной нагрузки слева от разрезанной панели:

$$\sum_{\text{справа}} M_{10}(\vec{F}_i) = 0: -O_{3-4}^o \cdot \cos \alpha \cdot 2d - R_B^o \cdot 6d = 0 \Rightarrow$$

$$O_{3-4}^o = -3,041 R_B^o - \text{уравнение левой ветви } л. в. O_{3-4}^o.$$

При положении единичной подвижной нагрузки справа от разрезанной панели:

$$\sum_{\text{слева}} M_{10}(\vec{F}_i) = 0: R_A^o \cdot 6d + O_{3-4}^o \cdot (\cos \alpha \cdot 3,333 + \sin \alpha \cdot 2d) = 0 \Rightarrow$$

$$O_{3-4}^o = -3,041 R_A^o - \text{уравнение правой ветви } л. в. O_{3-4}^o.$$

Выполняем построения этих ветвей, рисунок 12 г).

Убеждаемся в том, что передаточная прямая для данного усилия латентна.

Наличие шпренгеля в рассматриваемой панели учитывается алгебраическим сложением ординат линии влияния $O_{3-4}^ш$, рисунок 12 в) и ординат линии влияния O_{3-4}^o , рисунок 12 г).

Искомая линия влияния O_{3-4} показана на рисунке 12 д).

2.6 Построим линию влияния D_{3-10}^o .

Используя снова сечение 1-1, рассмотрим условия равновесия относительно моментной точки C данного усилия в основной системе, рисунок 13 б).

При положении единичной подвижной нагрузки слева от разрезанной панели:

$$\sum_{\text{справа}} M_C(\vec{F}_i) = 0: -D_{3-10}^o \cdot \cos \beta \cdot 12d - R_B^o \cdot 18d = 0 \Rightarrow \\ O_{3-4}^o = -2.343 \bar{R}_B - \text{уравнение левой ветви л. в. } D_{3-10}^o.$$

При положении единичной подвижной нагрузки справа от разрезанной панели:

$$\sum_{\text{слева}} M_C(\vec{F}_i) = 0: -R_A^o \cdot 6d + D_{3-10}^o (\cos \beta \cdot 10d + \sin \beta \cdot 3.333) = 0 \Rightarrow \\ D_{3-10}^o = 0.7810 R_A^o - \text{уравнение правой ветви л. в. } D_{3-10}^o.$$

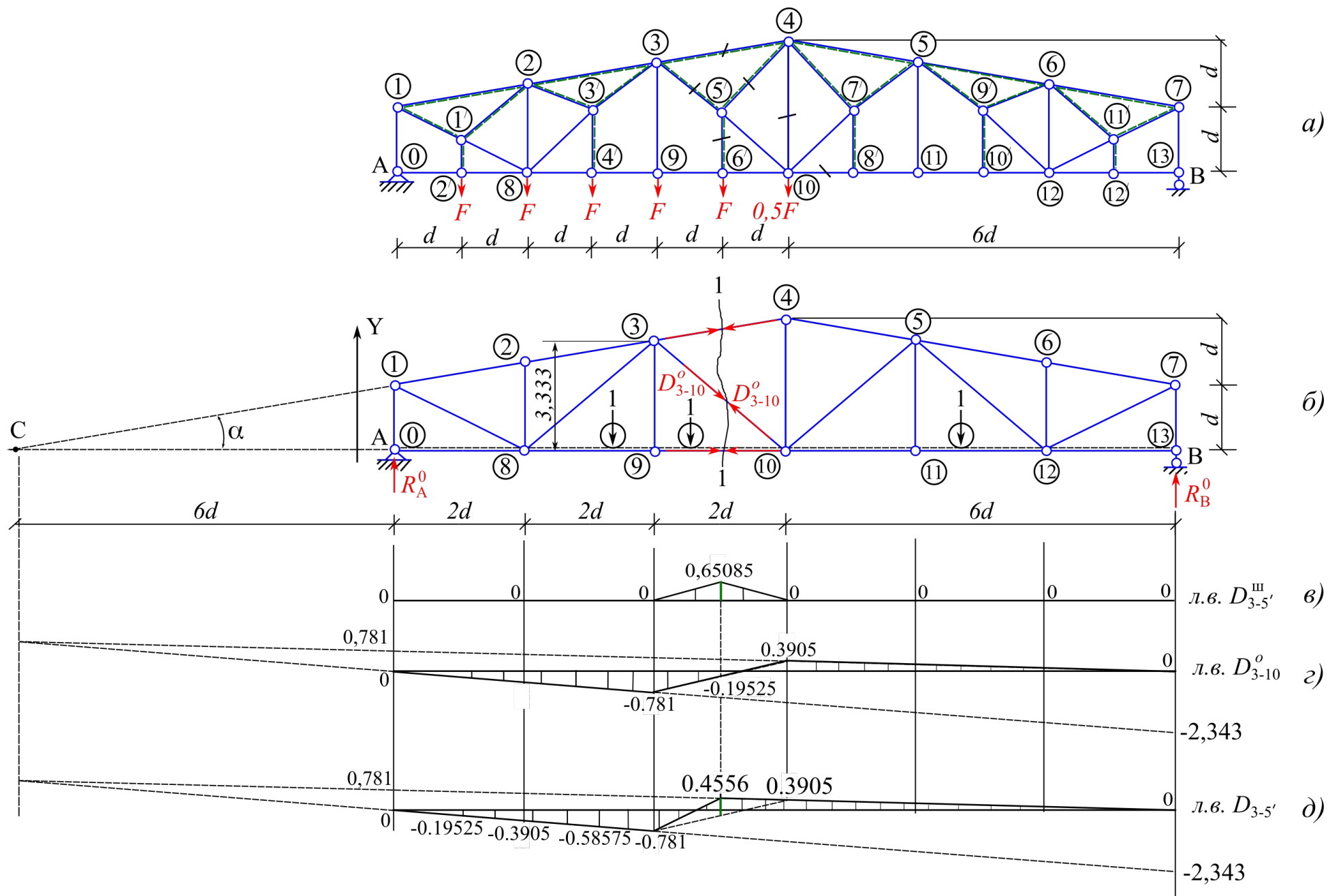
Выполняем построения этих ветвей, рисунок 13 г).

При положении единичной нагрузки в пределах разрезаемой панели, форма линии влияния определится передаточной прямой.

Передаточная прямая проводится через точки пересечения соответствующих границ и ветвей линии влияния.

Наличие шпренгеля в рассматриваемой панели учитывается алгебраическим сложением ординат линии влияния $D_{3-5'}^{\text{ш}}$, рисунок 13 в) и ординат линии влияния основной системы D_{3-10}^o , рисунок 13 г).

Искомая линия влияния элемента $D_{3-5'}$ показана на рисунке 13 д).



3. Определим используя линии влияния усилия в указанных стержнях. По условию задачи необходимо определить усилия O_{3-4} , $D_{3-5'}$, $D_{5'-4}$, $V_{5'-6'}$, V_{4-10} , $U_{8'-10}$.

3.1 Определим усилие O_{3-4} . Для этого используем данные по нагрузке, рисунок 12 а) и данные ординат линии влияния O_{3-4} , рисунок 12 д).

$$O_{3-4} = 10 \cdot (-0,2534) + 10 \cdot (-0,5068) + 10 \cdot (-0,76025) + 10 \cdot (-1,0137) + 10 \cdot (-1,774) + \dots \\ \dots + 5 \cdot (-1,5205) \Rightarrow O_{3-4} = -50.684 \text{ кН}.$$

3.2 Определим усилие $D_{3-5'}$. Для этого используем данные по нагрузке, рисунок 13 а) и данные ординат линии влияния $D_{3-5'}$, рисунок 13 д).

$$D_{3-5'} = 10 \cdot (-0,19525) + 10 \cdot (-0,3905) + 10 \cdot (-0,58575) + 10 \cdot (-0,781) + 10 \cdot (0,4556) + \dots \\ \dots + 5 \cdot (0,3905) \Rightarrow D_{3-5'} = -13.0165 \text{ кН}.$$

3.3 Определим усилие $D_{5'-4}$. Для этого используем данные по нагрузке и данные ординат линии влияния $D_{5'-4}$, рисунок 9 в).

$$D_{5'-4} = 10 \cdot (0,768294) \Rightarrow D_{5'-4} = 7.68294 \text{ кН}.$$

3.4 Определим усилие $V_{5'-6'}$. Для этого используем данные по нагрузке и данные ординат линии влияния $V_{5'-6'}$, рисунок 9 а).

$$V_{5'-6'} = 10 \cdot (1) \Rightarrow V_{5'-6'} = 10 \text{ кН}.$$

3.5 Определим усилие V_{4-10} . Для этого используем данные по нагрузке, рисунок 11 а) и данные ординат линии влияния V_{4-10} , рисунок 11 и).

$$V_{4-10} = 10 \cdot \left(\frac{1}{12}\right) + 10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 10 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) + \dots \\ \dots + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow V_{4-10} = 10 \text{ кН}.$$

3.6 Определим усилие $U_{8'-10}$. Для этого используем данные по нагрузке, рисунок 8 а) и данные ординат линии влияния V_{4-10} , рисунок 8 в).

$$U_{8'-10} = 10 \cdot (0,2) + 10 \cdot (0,4) + 10 \cdot (0,6) + 10 \cdot (0,8) + 10 \cdot (1) + \dots \\ \dots + 5 \cdot (1,2) \Rightarrow U_{8'-10} = 36 \text{ кН}.$$

4. Сравним усилия в стержнях, полученные аналитически и по линиям влияния.

Таблица 2

Усилие, кН	O_{3-4}	$D_{3-5'}$	$D_{5'-4}$	$V_{5'-6'}$	V_{4-10}	$U_{8'-10}$
F_a	50.68895	-13.0171	7.68294	10	10	36
$F_{л.в.}$	-50,684	-13,0165	7,68294	10	10	36
Отклонение $\delta, \%$	<0.01	<0.005	0	0	0	0