Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся *к вашему варианту*, т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после ее текста под рубрикой «Указания», затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера — разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. *Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями;* в конце должны быть даны ответы.

ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

СТАТИКА

Задача С1

Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. С1.0 — С1.9, табл. С1), закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом $P = 25$ кН. На раму действуют пара сил с моментом $M = 100$ кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действует сила $\bar{F}_2$ под углом 15° к горизонтальной оси, приложенная в точке D, и сила $\bar{F}_3$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке E, и т. д.).

Определить реакции связей в точках A, B, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять $a = 0{,}5$ м.

Указания. Задача С1 — на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы $\bar{F}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_O(\bar{F}) = m_O(\bar{F}') + m_O(\bar{F}'')$.

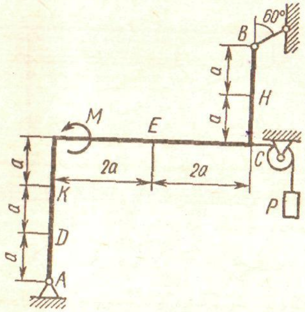


Рис. С1.0

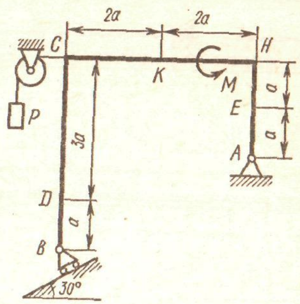


Рис. С1.1

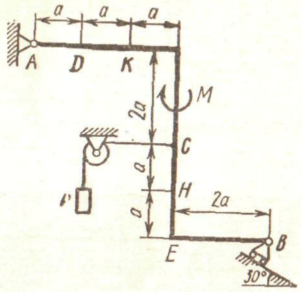


Рис. С1.2

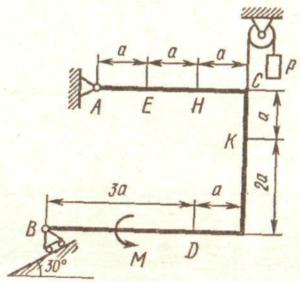


Рис. С1.3

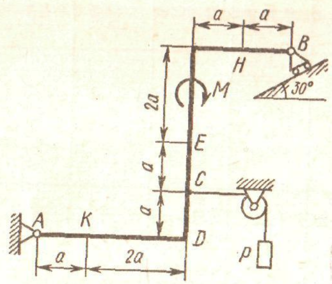


Рис. С1.4

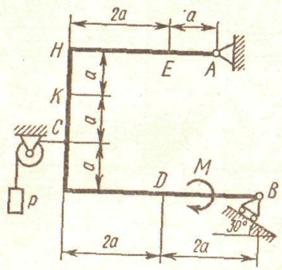


Рис. С1.5

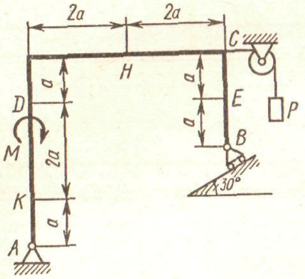


Рис. С1.6

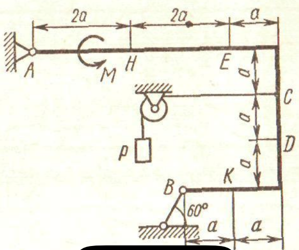


Рис. С1.7

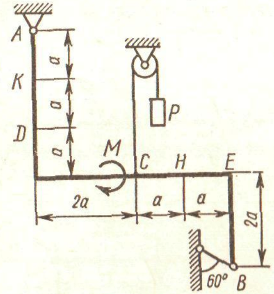


Рис. С1.8

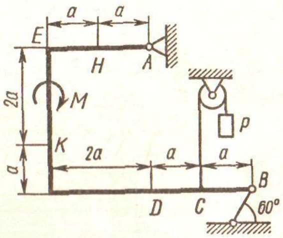
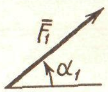
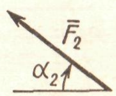
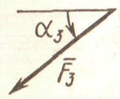
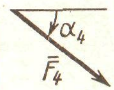


Рис. С1.9

Таблица С1

Силы								
	$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
0	*H*	30	—	—	—	—	*K*	60
1	—	—	*D*	15	*E*	60	—	—
2	*K*	75	—	—	—	—	*E*	30
3	—	—	*K*	60	*H*	30	—	—
4	*D*	30	—	—	—	—	*E*	60
5	—	—	*H*	30	—	—	*D*	75
6	*E*	60	—	—	*K*	15	—	—
7	—	—	*D*	60	—	—	*H*	15
8	*H*	60	—	—	*D*	30	—	—
9	—	—	*E*	75	*K*	30	—	—

Пример С1. Жесткая пластина *ABCD* (рис. С1) имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору, а в точке *B* — подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: $F = 25$ кН, $\alpha = 60°$, $P = 18$ кН, $\gamma = 75°$, $M = 50$ кН·м, $\beta = 30°$, $a = 0{,}5$ м. Определить: реакции в точках *A* и *B*, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси *xy* и изобразим действующие на пластину силы: силу $\bar{F}$, пару сил с моментом *M*, натяжение троса $\bar{T}$ (по модулю $T = P$) и реакции связей $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры *A* изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\bar{F}$ относительно точки *A* воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу $\bar{F}$ на составляющие $\bar{F}'$, $\bar{F}''$ ($F' = F\cos\alpha$, $F'' = F\sin\alpha$) и учтем, что $m_A(\bar{F}) = m_A(\bar{F}') + m_A(\bar{F}'')$. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0,\quad X_A + R_B\sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0; \tag{1}$$

$$\sum F_{ky} = 0,\quad Y_A + R_B\cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0; \tag{2}$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0,\quad M - R_B\cos\beta\cdot 4a + F\cos\alpha\cdot 2a - F\sin\alpha\cdot 3a - T\sin\gamma\cdot 2a = 0. \tag{3}$$

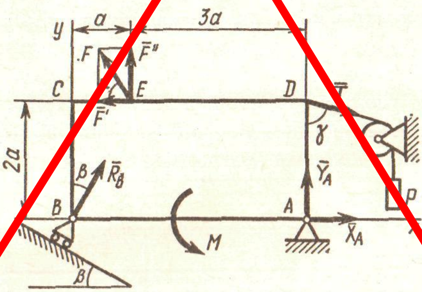


Рис. С1

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ: $X_A = -8{,}5$ кН; $Y_A = -23{,}3$ кН; $R_B = 7{,}3$ кН. Знаки указывают, что силы $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$ направлены противоположно показанным на рис. С1.

Задача С4

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке A, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем 1 (рис. С4.0 — С4.7) или же двумя подшипниками в точках A и B и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (рис. С4.8, С4.9); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках; вес бóльшей плиты $P_1 = 5$ кН, вес меньшей плиты $P_2 = 3$ кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость xy — горизонтальная).

На плиты действуют пара сил с моментом $M = 4$ кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С4; при этом силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости xy, сила $\bar{F}_2$ — в плоскости, параллельной xz, и сила $\bar{F}_3$ — в плоскости, параллельной yz. Точки приложения сил (D, E, H, K) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках A и B и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять $a = 0{,}6$ м.

Указания. Задача С4 — на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) — две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы $\bar{F}$ часто удобно разложить ее на две составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные координатным осям (или на три); тогда, по теореме Вариньона, $m_x(\bar{F}) = m_x(\bar{F}') + m_x(\bar{F}'')$ и т. д.

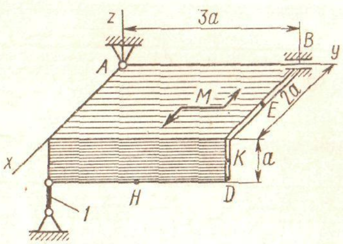


Рис. С4.0

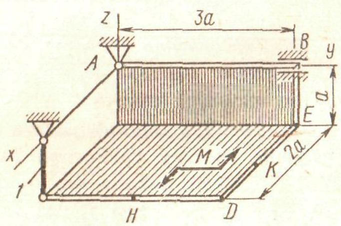


Рис. С4.1

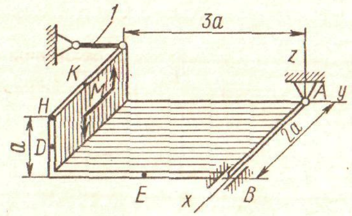


Рис. С4.2

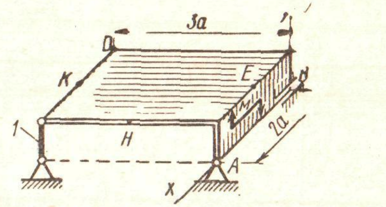


Рис. С4.3

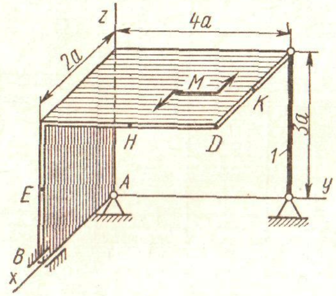


Рис. С4.4

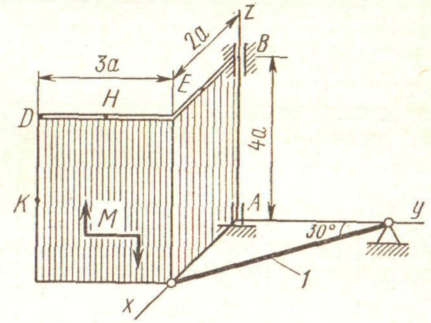


Рис. С4.5

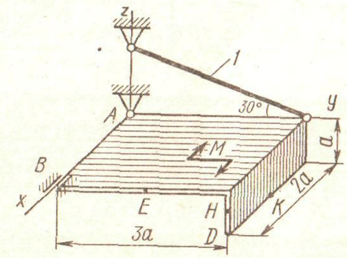


Рис. С4.6

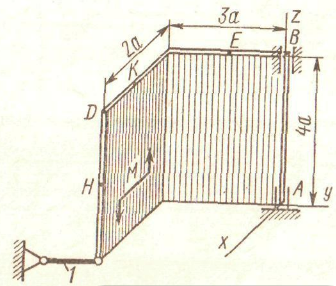


Рис. С4.7

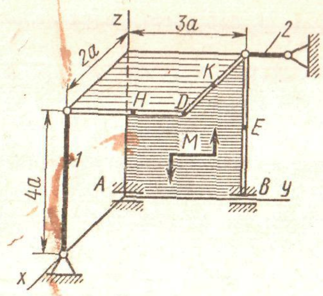


Рис. С4.8

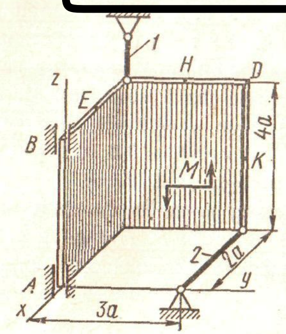
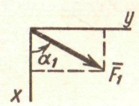
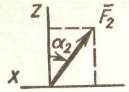
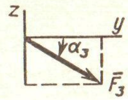
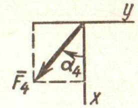


Рис. С4.9

Силы								
	$F_1 = 6$ кН		$F_2 = 8$ кН		$F_3 = 10$ кН		$F_4 = 12$ кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
0	*E*	60	*H*	30	—	—	—	—
1	—	—	*D*	60	*E*	30	—	—
2	—	—	—	—	*K*	60	*E*	30
3	*K*	30	—	—	*D*	0	—	—
4	—	—	*E*	30	—	—	*D*	60
5	*H*	0	*K*	60	—	—	—	—
6	—	—	*H*	90	*D*	30	—	—
7	—	—	—	—	*H*	60	*K*	90
8	*D*	30	—		*K*	0	—	—
9	—	—	*D*	90	—	—	*H*	30

Пример С4. Горизонтальная прямоугольная плита весом P (рис. С4) закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD'. На плиту в плоскости, параллельной xz, действует сила $\bar{F}$, а в плоскости, параллельной yz, — пара сил с моментом M.

Дано: $P = 3$ кН, $F = 8$ кН, $M = 4$ кН·м, $\alpha = 60°$, $AC = 0{,}8$ м, $AB = 1{,}2$ м, $BE = 0{,}4$ м, $EH = 0{,}4$ м. Определить: реакции опор A, B и стержня DD'.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\bar{P}$, $\bar{F}$ и пара с моментом M, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$, цилиндрического (подшипника) — на две составляющие $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$; реакцию $\bar{N}$ стержня (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\bar{N}$ стержня направляем вдоль стержня от D к D', предполагая, что он растянут.

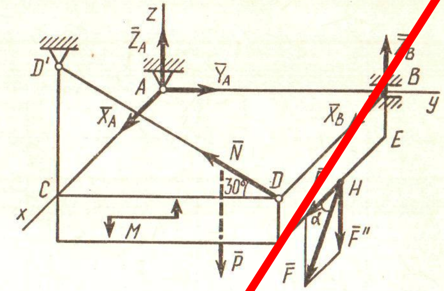


Рис. С4

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ X_A + X_B + F\cos 60° = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0,\ Y_A - N\cos 30° = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma F_{kz} = 0,\ Z_A + Z_B - P + N\sin 30° - F\sin 60° = 0; \quad (3)$$

$$\Sigma m_x(\bar{F}_k) = 0,\ M - P\cdot AB/2 + Z_B\cdot AB - F\sin 60°\cdot AB + N\sin 30°\cdot AB = 0; \quad (4)$$

$$\Sigma m_y(\bar{F}_k) = 0,\ P\cdot AC/2 - N\sin 30°\cdot AC + F\sin 60°\cdot AC/2 - F\cos 60°\cdot BE = 0; \quad (5)$$

$$\Sigma m_z(\bar{F}_k) = 0,\ -F\cos 60°\cdot AB - N\cos 30°\cdot AC - X_B\cdot AB = 0. \quad (6)$$

Для определения моментов силы $\bar{F}$ относительно осей разлагаем ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные осям x и z ($F' = F\cos\alpha$, $F'' = F\sin\alpha$), и применяем теорему Вариньона (см. «Указания»). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\bar{N}$.

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = 3{,}4$ кН; $Y_A = 5{,}1$ кН; $Z_A = 4{,}8$ кН; $X_B = -7{,}4$ кН; $Z_B = 2{,}1$ кН; $N = 5{,}9$ кН. Знак минус указывает, что реакция $\bar{X}_B$ направлена противоположно показанной на рис. С4.

КИНЕМАТИКА

Задача К.1

Под номером К1 помещены две задачи К1а и К1б, которые надо решить.

Задача К1а. Точка B движется в плоскости xy (рис. К1.0 — К1.9, табл. К1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t — в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а за-

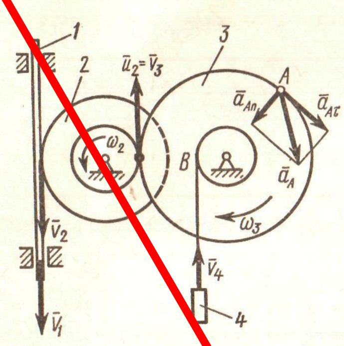


Рис. К2

твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Пример К2. Рейка *1*, ступенчатое колесо *2* с радиусами R_2 и r_2 и колесо *3* радиуса R_3, скрепленное с валом радиуса r_3, находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом *4* на конце (рис. К2). Рейка движется по закону $s_1 = f(t)$.

Дано: $R_2 = 6$ см, $r_2 = 4$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 3$ см, $s_1 = 3t^3$ (s — в сантиметрах, t — в секундах), A — точка обода колеса *3*, $t_1 = 3$ с. Определить: ω_3, v_4, ε_3, a_A в момент времени $t = t_1$.

Решение. Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_i), через v_i, а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i), — через u_i.

1. Определяем сначала угловые скорости всех колес как функции времени t. Зная закон движения рейки *1*, находим ее скорость:

$$v_1 = \dot{s}_1 = 9t^2 . \tag{1}$$

Так как рейка и колесо *2* находятся в зацеплении, то $v_2 = v_1$ или $\omega_2 R_2 = v_1$. Но колеса *2* и *3* тоже находятся в зацеплении, следовательно, $u_2 = v_3$ или $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$. Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2 , \quad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2 . \tag{2}$$

Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с получим $\omega_3 = 6{,}75$ с$^{-1}$.

2. Определяем v_4. Так как $v_4 = v_B = \omega_3 r_3$, то при $t_1 = 3$ с $v_4 = 20{,}25$ см/с.

3. Определяем ε_3. Учитывая второе из равенств (2), получим $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 1{,}5t$. Тогда при $t_1 = 3$ с $\varepsilon_3 = 4{,}5$ с$^{-2}$.

4. Определяем a_A. Для точки A $\bar{a}_A = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An}$, где численно $a_{A\tau} = R_3\varepsilon_3$, $a_{An} = R_3\omega_3^2$. Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с имеем

$$a_{A\tau} = 36 \text{ см/с}^2, \; a_{An} = 364{,}5 \text{ см/с}^2 ;$$

$$a_A = \sqrt{a_{A\tau}^2 + a_{An}^2} = 366{,}3 \text{ см/с}^2 .$$

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. К2.

Ответ: $\omega_3 = 6{,}75$ с$^{-1}$; $v_4 = 20{,}25$ см/с; $\varepsilon_3 = 4{,}5$ с$^{-2}$; $a_A = 366{,}3$ см/с^2.

Задача К3

Плоский механизм состоит из стержней *1, 2, 3, 4* и ползуна B или E (рис. К3.0 — К3.7) или из стержней *1, 2, 3* и ползунов B и E (рис. К3.8, К3.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами; точка D находится в середине стержня AB. Длины стержней равны соответственно $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $l_4 = 0{,}6$ м. Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К3а (для рис. 0—4) или в табл. К3б (для рис. 5—9); при этом в табл. К3а ω_1 и ω_4 — **величины постоянные.**

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: **по ходу или против хода часовой стрелки** (например, угол γ на рис. 8 следует отложить от DB по ходу часовой стрелки, а на рис. 9 — против хода часовой стрелки и т. д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере К3 (см. рис. К3б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость $\bar{v}_B$ и ускорение $\bar{a}_B$ — от точки B к b (на рис. 5—9).

Таблица К3а (к рис. К3.0 — К3.4)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/c	ω_4, 1/c	v точек	ω звена	a точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	—	B, E	DE	B	AB
1	90	120	150	0	30	—	4	A, E	AB	A	AB
2	30	60	30	0	120	5	—	B, E	AB	B	AB
3	60	150	150	90	30	—	5	A, E	DE	A	AB
4	30	30	60	0	150	4	—	D, E	AB	B	AB
5	90	120	120	90	60	—	6	A, E	AB	A	AB
6	90	150	120	90	30	3	—	B, E	DE	B	AB
7	0	60	60	0	120	—	2	A, E	DE	A	AB
8	60	150	120	90	30	2	—	D, E	AB	B	AB
9	30	120	150	0	60	—	8	A, E	DE	A	AB

Таблица К3б (к рис. К3.5 — К3.9)

Номер условия	Углы, град					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ε_1, 1/с²	v_B, м/с	a_B, м/с²	v точек	ω звена	a точки	ε звена
0	120	30	30	90	150	2	4	—	—	B, E	AB	B	AB
1	0	60	90	0	120	—	—	4	6	A, E	DE	A	AB
2	60	150	30	90	30	3	5	—	—	B, E	AB	B	AB
3	0	150	30	0	60	—	—	6	8	A, E	AB	A	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	—	—	B, E	DE	B	AB
5	90	120	90	90	60	—	—	8	10	D, E	DE	A	AB
6	0	150	90	0	120	5	8	—	—	B, E	DE	B	AB
7	30	120	30	0	60	—	—	2	5	A, E	AB	A	AB
8	90	120	120	90	150	6	10	—	—	B, E	DE	B	AB
9	60	60	60	90	30	—	—	5	4	D, E	AB	A	AB

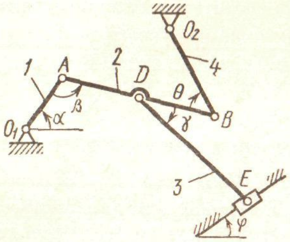


Рис. К3.0

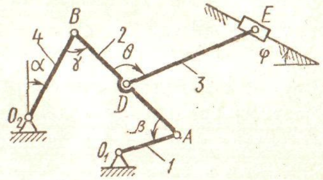


Рис. К3.1

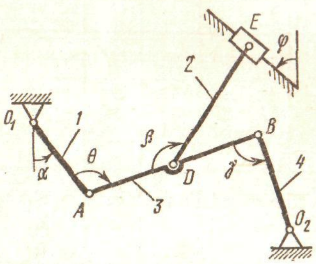


Рис. К3.2

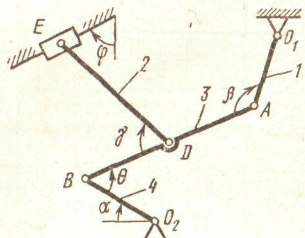


Рис. К3.3

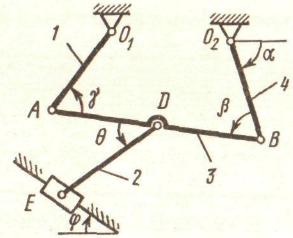


Рис. К3.4

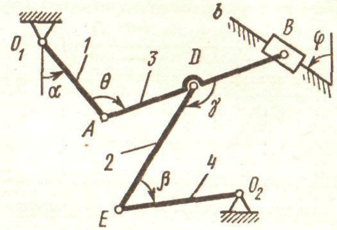


Рис. К3.5

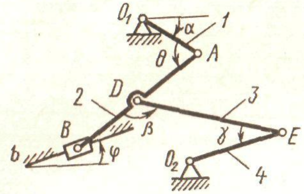


Рис. К3.6

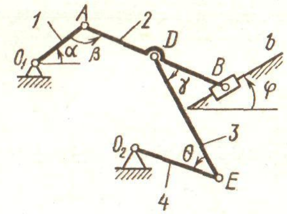


Рис. К3.7

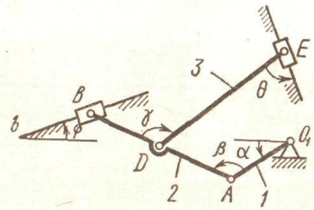


Рис. К3.8

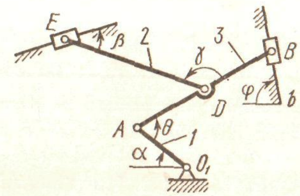


Рис. К3.9

Указания. Задача К3 — на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) **к каждому звену механизма в отдельности.**

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}$, где A — точка, ускорение $\bar{a}_A$ которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка A движется по дуге окружности, то $\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n}$); B — точка, ускорение $\bar{a}_B$ которой нужно определить (о случае, когда точка B

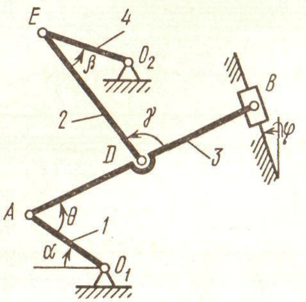


Рис. К3а

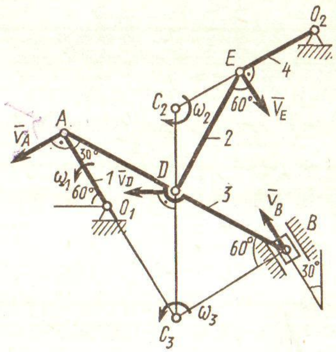


Рис. К3б

тоже движется по дуге окружности, см. примечание в конце рассмотренного ниже примера К3).

Пример К3. Механизм (рис. К3а) состоит из стержней *1, 2, 3, 4* и ползуна B, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 30°$, $\theta = 30°$, $AD = DB$, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7$ с$^{-2}$ (направления ω_1 и ε_1 — против хода часовой стрелки). Определить: v_B, v_E, ω_2, a_B, ε_3.

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К3б, на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).

2. Определяем v_B. Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти v_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\bar v_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_1, можем определить $\bar v_A$; численно

$$v_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8 \text{ м/с}; \quad \bar v_A \perp O_1A. \qquad (1)$$

Направление $\bar v_B$ найдем, учтя, что точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\bar v_A$ и направление $\bar v_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AB) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AB). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\bar v_B$ **(проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки).** Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_B \cos 30° = v_A \cos 60° \text{ и } v_B = 0{,}46 \text{ м/с}. \qquad (2)$$

3. Определяем $\bar v_E$. Точка E принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\bar v_E$, надо сначала

найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AB. Для этого, зная $\bar v_A$ и $\bar v_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB; это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\bar v_A$ и $\bar v_B$, восставленных из точек A и B (к $\bar v_A$ перпендикулярен стержень *1*). По направлению вектора $\bar v_A$ определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС C_3. Вектор $\bar v_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину v_D найдем из пропорции

$$\frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_B}{C_3B}. \qquad (3)$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что ΔAC_3B — прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°, и что $C_3B = AB \sin 30° = 0{,}5AB = BD$. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3B = C_3D$. В результате равенство (3) дает

$$v_D = v_B = 0{,}46 \text{ м/с}; \quad \bar v_D \perp C_3D. \qquad (4)$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\bar v_E \perp O_2E$. Тогда, восставляя из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\bar v_E$ и $\bar v_D$, построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\bar v_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2. Вектор $\bar v_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К3б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30°$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{v_E}{C_2E} = \frac{v_D}{C_2D}, \quad v_E = v_D = 0{,}46 \text{ м/с}. \qquad (5)$$

4. Определяем ω_2. Так как МЦС стержня *2* известен (точка C_2) и $C_2D = l_2/(2\cos 30°) = 0{,}69$ м, то

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2D} = 0{,}67 \text{ с}^{-1}. \qquad (6)$$

5. Определяем $\bar a_B$ (рис. К3в, на котором изображаем все векторы ускорений). Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти $\bar a_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня AB и траекторию точки B. По данным задачи можем определить $\bar a_A = \bar a_A^\tau + \bar a_A^n$, где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 2{,}8 \text{ м/с}^2;$$
$$a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1{,}6 \text{ м/с}^2. \qquad (7)$$

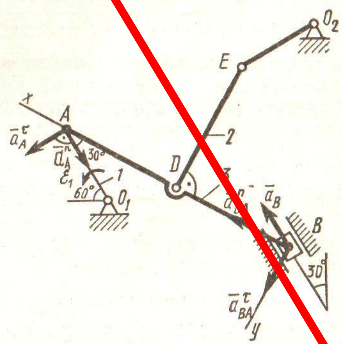


Рис. К3в

Вектор $\bar a_A^n$ направлен вдоль AO_1, а $\bar a_A^\tau$ — перпендикулярно AO_1; изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. К3в). Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\bar a_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\bar a_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\bar v_B$.

Для определения $\bar a_B$ воспользуемся равенством

$$\bar a_B = \bar a_A^\tau + \bar a_A^n + \bar a_{BA}^\tau + \bar a_{BA}^n. \qquad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы $\bar a_{BA}^n$ (вдоль BA от B к A) и $\bar a_{BA}^\tau$ (в любую сторону перпендикулярно BA); численно $a_{BA}^n = \omega_3^2 l_3$. Найдя ω_3 с помощью построенного МЦС C_3 стержня *3*, получим

$$\omega_3 = \frac{v_A}{C_3A} = \frac{v_A}{l_3\cos 30^\circ} = 0{,}66\ \text{с}^{-1} \ \text{и} \ a_{BA}^n = 0{,}61\ \text{м/с}^2. \qquad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^τ; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B, спроектируем обе части равенства (8) на направление BA (ось x), перпендикулярное неизвестному вектору $\bar a_{BA}^\tau$. Тогда получим

$$a_B\cos 30^\circ = a_A^\tau\cos 60^\circ - a_A^n\cos 30^\circ + a_{BA}^n. \qquad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0{,}72\ \text{м/с}^2. \qquad (11)$$

Так как получилось $a_B > 0$, то, следовательно, вектор $\bar a_B$ направлен как показано на рис. К3в.

6. Определяем ε_3. Чтобы найти ε_3, сначала определим a_{BA}^τ. Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное AB (ось y). Тогда получим

$$-a_B\sin 30^\circ = a_A^\tau\sin 60^\circ + a_A^n\sin 30^\circ + a_{BA}^\tau. \qquad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что $a_{BA}^\tau = -3{,}58$ м/с^2. Знак указывает, что направление $\bar a_{BA}^\tau$ противоположно показанному на рис. К3в.

Теперь из равенства $a_{BA}^\tau = \varepsilon_3 l_3$ получим

$$\varepsilon_3 = \frac{|a_{BA}^\tau|}{l_3} = 2{,}56\ \text{с}^{-2}.$$

Ответ: $v_B = 0{,}46$ м/с; $v_E = 0{,}46$ м/с; $\omega_2 = 0{,}67$ с$^{-1}$; $a_B = 0{,}72$ м/с^2; $\varepsilon_3 = 2{,}56$ с$^{-2}$.

Примечание. Если точка B, ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис. К3.0 — К3.4, где B движется по окружности радиуса O_2B), то направление $\bar a_B$ заранее неизвестно.

В этом случае $\bar a_B$ также следует представить двумя составляющими ($\bar a_B = \bar a_B^\tau + \bar a_B^n$) и исходное уравнение (8) примет вид

$$\bar a_B^\tau + \bar a_B^n = \bar a_A^\tau + \bar a_A^n + \bar a_{BA}^\tau + \bar a_{BA}^n. \qquad (13)$$

При этом вектор $\bar a_B^n$ (см., например, рис. К3.0) будет направлен вдоль BO_2, а вектор $\bar a_B^\tau$ — перпендикулярно BO_2 в любую сторону. Числовые значения a_A^τ, a_A^n и a_{BA}^n определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть $a_A^\tau = 0$ или $a_A^n = 0$, если точка A движется прямолинейно).

Значение a_B^n также вычисляется по формуле $a_B^n = v_B^2/\rho = v_B^2/l$, где l — радиус окружности O_2B, а v_B определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (13) остаются неизвестными только значения a_B^τ и a_{BA}^τ и они, как и в рассмотренном примере, находятся проектированием обеих частей равенства (13) на две оси.

Найдя a_B^τ, можем вычислить искомое ускорение $a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2}$. Величина a_{BA}^τ служит для нахождения ε_{AB} (как в рассмотренном примере).

Задача К4

Прямоугольная пластина (рис. К4.0 — К4.4) или круглая пластина радиуса $R = 60$ см (рис. К4.5 — К4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$, заданному в табл. К4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 0, 1, 2, 5, 6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 3, 4, 7, 8, 9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис. 0—4) или по окружности радиуса R (рис. 5—9) движется точка M; закон ее относительного движения, т. е. зависимость $s = AM = f_2(t)$ (s выражено в сантиметрах, t — в секундах), задан в таблице отдельно для рис. 0—4 и для рис. 5—9; там же даны размеры b и l. На рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM > 0$ (при $s < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Указания. Задача К4 — на сложное движение точки. Для ее решения воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить все расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка M на пластине в момент времени $t_1 = 1$ с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рис. 5—9, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положе-

Таблица К4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. 0—4		Для рис. 5—9	
		b, см	$s = AM = f_2(t)$	l	$s = \breve{AM} = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{6}R(t^3 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t - 5t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^2)$

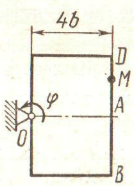


Рис. К4.0

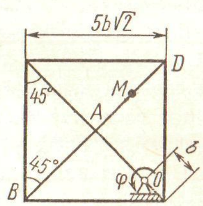


Рис. К4.1

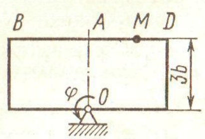


Рис. К4.2

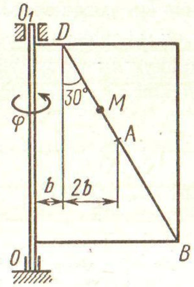


Рис. К4.3

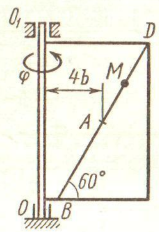


Рис. К4.4

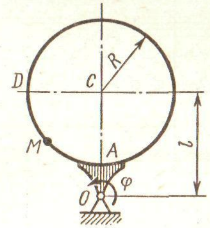


Рис. К4.5

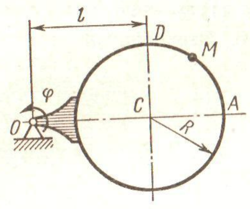


Рис. К4.6

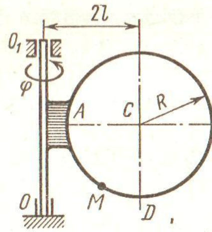


Рис. К4.7

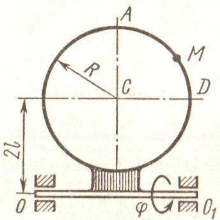


Рис. К4.8

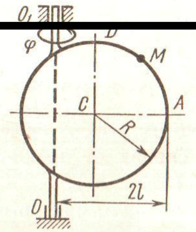


Рис. К4.9

ние точки M в момент времени $t_1 = 1$ с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Рассмотрим два примера решения этой задачи.

Пример К4а. Пластина $OEAB_1D$ ($OE = OD$, рис. К4а) вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости пластины, по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К4а дуговой стрелкой). По дуге окружности радиуса R движется точка B по закону $s = \breve{AB} = f_2(t)$ (положительное направление отсчета s — от A к B).

Дано: $R = 0{,}5$ м, $\varphi = t^2 - 0{,}5t^3$, $s = \pi R \cos(\pi t/3)$ (φ — в радианах, s — в метрах, t — в секундах). Определить: $v_{абс}$ и $a_{абс}$ в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки B как сложное, считая ее движение по дуге окружности относительным, а вращение пластины —