Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова»
Чукотский филиал
Кафедра общих дисциплин

МАТЕМАТИКА

Методические указания и задания контрольных работ
для студентов первого курса заочной формы обучения
направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

Анадырь 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В данном методическом пособии содержатся задания контрольных работ № 1 и № 2 и методические указания к их выполнению. В работе имеется справочный материал по основным теоретическим вопросам курса, а также по элементарной математике.

Перед выполнением контрольной работы студент должен изучить соответствующие разделы курса «Математика», используя учебную литературу. Студент может использовать также учебники и учебные пособия, не включенные в данный список, если эти пособия содержат соответствующие разделы учебного курса.

Вариант контрольной работы определяется согласно номера списка ведомости. Выполненная контрольная работа должна содержать все задания. Решения задач следует приводить в той последовательности, которая определена в таблице вариантов. Условие каждой задачи должно быть приведено полностью перед ее решением. Контрольная работа должна быть подписана студентом.

Если контрольная работа возвращена на доработку, то необходимо исправить недочеты (в той же тетради) и сдать работу на повторную проверку.

По каждой контрольной работе со студентом проводится собеседование, после чего выставляется оценка: «зачтено» или «незачтено».

Студенту, не выполнившему контрольную работу до начала экзаменационной сессии, может быть предложена аудиторная контрольная работа.

Если контрольная работа имеет оценку «незачтено», студент к экзамену не допускается.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Правила оформления контрольных работ

При выполнении контрольных работ по математике нужно придерживаться следующих правил:

1. Каждую контрольную работу выполнять в отдельной тетради чернилами любого цвета, кроме красного и зеленого, оставляя поля для замечаний преподавателя.

2. На обложке тетради разборчиво написать фамилию, инициалы, учебный шифр, номер контрольной работы, название дисциплины.

3. Работа обязательно должна содержать все задачи именно вашего варианта.

4. Решения задач располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи записать полностью ее условие.

6. Решения задач излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7. После получения проверенной работы следует исправить все отмеченные преподавателем ошибки и недочеты и выполнить все его рекомендации.

Таблица вариантов

Номер варианта	Контрольная работа №1 (№ задач)	Контрольная работа №2 (№ задач)
1.	1, 11, 21, 31, 41, 51	1, 11, 21, 31, 41, 51
2.	2, 12, 22, 32, 42, 52	2, 12, 22, 32, 42, 52
3.	3, 13, 23, 33, 43, 53	3, 13, 23, 33, 43, 53
4.	4, 14, 24, 34, 44, 54	4, 14, 24, 34, 44, 54
5.	5, 15, 25, 35, 45, 55	5, 15, 25, 35, 45, 55
6.	6, 16, 26, 36, 46, 56	6, 16, 26, 36, 46, 56
7.	7, 17, 27, 37, 47, 57	7, 17, 27, 37, 47, 57

8.	8, 18, 28, 38, 48, 58	8, 18, 28, 38, 48, 58
9.	9, 19, 29, 39, 49, 59	9, 19, 29, 39, 49, 59
10.	10, 20, 30, 40,50, 60	10, 20, 30, 40,50, 60

Основные вопросы экзамена

Тема 1. *Линейная и векторная алгебры*

1. Матрицы, операции над ними.
2. Определители, их свойства.
3. Обратная матрица.
4. Системы линейных уравнений. Отыскание решений линейной системы с помощью обратной матрицы. Правило Крамера, метод Гаусса.
5. Векторы: определения, свойства, линейные операции над ними.
6. Нелинейные операции над векторами: скалярное, векторное, смешанное произведения векторов, свойства и применения произведений

Тема 2. *Аналитическая геометрия на плоскости*

1. Декартова прямоугольная система координат. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка пополам.
2. Уравнения прямой линии на плоскости: общее, с угловым коэффициентом, проходящей через данную точку в заданном направлении, проходящей через две данные точки.
3. Угол между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
4. Расстояние от точки до прямой.
5. Разложение вектора в ортогональном базисе. Модуль вектора. Направляющие косинусы вектора.
6. Кривые второго порядка, их канонические уравнения и графическое изображение.

Тема 3. *Введение в математический анализ*

1. Функция, способы ее задания. Свойства функции: четность, нечетность, периодичность, ограниченность, монотонность. Основные элементарные функции, их свойства и графики.
2. Предел функции. Теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства и взаимная связь.
3. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Точки разрыва, их классификация.

Тема 4. *Дифференциальное исчисление*

1. Производная функции, ее геометрический, механический и экономический смысл. Связь непрерывности и дифференцируемости функции.
2. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и суперпозиции функций. Формулы дифференцирования основных элементарных функций.
3. Дифференциал функции, его геометрический смысл.
4. Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма, Ролля, Лагранжа. Правило Лопиталя.
5. Производные высших порядков.
6. Признаки возрастания и убывания функции. Локальный экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума. Правило исследования функции на монотонность и экстремум.
7. Признаки выпуклости и вогнутости функции. Точки перегиба. Достаточное условие существования точек перегиба. Правило исследования функции на выпуклость, вогнутость, перегиб.
8. Асимптоты функции, их виды и способы нахождения.
9. Общая схема исследования функций, построение их графиков.

Тема 5. *Интегральное исчисление*

1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства.
2. Таблица основных интегралов.

3. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, интегрирование подстановкой, интегрирование по частям.
4. Интегрирование рациональных дробей.
5. Интегрирование некоторых иррациональных и тригонометрических функций.
6. Определенный интеграл, его геометрический смысл. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
7. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
8. Приложения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и экономические приложения.
9. Несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования.

Тема 6. *Дифференциальные уравнения*

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения, их общее и частные решения. Задача Коши.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, их решение.
4. Понятие о дифференциальных уравнениях второго порядка.

Тема 7. *Функции нескольких переменных*

1. Функция двух переменных, ее графическое изображение. Функция трех переменных. Линии и поверхности уровня. Предел функции. Непрерывность функции.
2. Частные производные первого порядка и высших порядков. Полный дифференциал первого порядка.
3. Локальный экстремум функции. Необходимое и достаточное условия экстремума. Правило исследования на экстремум для функции двух переменных.
4. Градиент и производная по направлению функции, их смысл и взаимосвязь.
5. Метод наименьших квадратов.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Аналитическая геометрия на плоскости

Задачи 1–10

Даны вершины треугольника: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Сделать чертеж и найти:

1) длину стороны AB;
2) внутренний угол при вершине A;
3) уравнение высоты, проведенной через вершину C;
4) уравнение медианы, проведенной через вершину B;
5) точку пересечения медианы BE и высоты CD;
6) длину высоты, опущенной из вершины C.

1.	$A\,(-2; 2)$,	$B\,(1; 6)$,	$C\,(1; 1)$;
2.	$A\,(1; -1)$,	$B\,(-2; 3)$,	$C\,(-3; 1)$;
3.	$A\,(2; -4)$,	$B\,(5; 0)$,	$C\,(-1; 2)$;
4.	$A\,(2; 0)$,	$B\,(-1; 4)$,	$C\,(3; 2)$;
5.	$A\,(5; -1)$,	$B\,(2; 3)$,	$C\,(-3; -2)$;
6.	$A\,(4; 1)$,	$B\,(1; -3)$,	$C\,(-4; 2)$;
7.	$A\,(-1; 0)$,	$B\,(2; 4)$,	$C\,(3; 2)$;
8.	$A\,(2; -2)$,	$B\,(-1; 2)$,	$C\,(4; 2)$;
9.	$A\,(3; 3)$,	$B\,(0; -1)$,	$C\,(4; 1)$;
10.	$A\,(1; 0)$,	$B\,(4; 4)$,	$C\,(-1; 4)$.

Введение в математический анализ

Задачи 11–20

Вычислить пределы функции $y=f(x)$, при указанном поведении аргумента x.

11. $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$;

а) $x\to 1$; *б)* $x\to 2$; *в)* $x\to -1$; *г)* $x\to 3$; *д)* $x\to\infty$.

12. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-1}$;

а) $x\to -2$; *б)* $x\to 0{,}5$; *в)* $x\to -1$; *г)* $x\to 3$; *д)* $x\to\infty$.

13. $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-2x-3}$;

а) $x\to 1$; *б)* $x\to -1{,}5$; *в)* $x\to -1$; *г)* $x\to 3$; *д)* $x\to\infty$.

14. $f(x)=\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-2x}$;

а) $x\to 5$; *б)* $x\to 2$; *в)* $x\to -\dfrac{1}{3}$; *г)* $x\to 0$; *д)* $x\to\infty$.

15. $f(x)=\dfrac{x^2-4x-5}{2x^2-9x-5}$;

а) $x\to 5$; *б)* $x\to 2$; *в)* $x\to -1$; *г)* $x\to -0{,}5$; *д)* $x\to\infty$.

16. $f(x)=\dfrac{4x^2-x}{4x^2+3x-1}$;

а) $x\to 1$; *б)* $x\to 0$; *в)* $x\to -1$; *г)* $x\to \dfrac{1}{4}$; *д)* $x\to\infty$.

17. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+4x-5}$;

а) $x\to 1$; *б)* $x\to -5$; *в)* $x\to -\dfrac{5}{2}$; *г)* $x\to 3$; *д)* $x\to\infty$.

18. $f(x)=\dfrac{5x^2-12x+4}{x^2+x-6}$;

а) $x\to -3$; *б)* $x\to 2$; *в)* $x\to -1$; *г)* $x\to \dfrac{2}{5}$; *д)* $x\to\infty$.

19. $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{3x^2-13x+12}$;

а) $x \to -1$*;* *б)* $x \to \dfrac{4}{3}$*;* *в)* $x \to 1$*;* *г)* $x \to 3$*;* *д)* $x \to \infty$.

20. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{2x^2 + x - 28}$;

а) $x \to -4$*;* *б)* $x \to 2$*;* *в)* $x \to \dfrac{7}{2}$*;* *г)* $x \to 3$*;* *д)* $x \to \infty$.

Задачи 21–30

Вычислить пределы, используя замечательные пределы или эквивалентные бесконечно малые функции.

21. *а)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x^2}{x \sin x}$*;* *б)* $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3n+3}{3n-2} \right)^{2n+4}$.

22. *а)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{\ln(1+4x)}$*;* *б)* $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{4n-4}{4n-2} \right)^{3n+3}$.

23. *а)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x^2}{2x^2}$*;* *б)* $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n+5}{2n-5} \right)^{2n-1}$.

24. *а)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x^3}{\operatorname{tg} 5x^3}$*;* *б)* $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{5n+6}{5n+2} \right)^{3n-5}$.

25. *а)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 7x}{4x}$*;* *б)* $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{n-4}{n-5} \right)^{9n-6}$.

26. *а)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{2x}$*;* *б)* $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n-3}{2n+5} \right)^{3n+2}$.

27. *а)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x}$*;* *б)* $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3n-7}{3n+5} \right)^{-3n}$.

28. *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-3}{4n-2}\right)^{-n+5}$.

29. *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{e^{2x}-1}$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n-1}\right)^{-n+4}$.

30. *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\arcsin 4x}$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^{-n+3}$.

Задачи 31– 40

Исследовать на непрерывность функцию *y = f (x)* и построить ее график.

31. $y(x)=\begin{cases}0{,}5^x & \text{при } x\le 0,\\ x^2 & \text{при } 0<x\le 2,\\ 6-x & \text{при } x>2.\end{cases}$ **32.** $y(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{при } x\le -1,\\ x^2 & \text{при } -1<x\le 1,\\ \ln x & \text{при } x>1.\end{cases}$

33. $y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{при } x\le 0,\\ 2^x & \text{при } 0<x\le 2,\\ 0{,}5x+3 & \text{при } x>2.\end{cases}$ **34.** $y(x)=\begin{cases}3^x & \text{при } x\le 1,\\ \dfrac{1}{x-1} & \text{при } 1<x\le 3,\\ x-2 & \text{при } x>3.\end{cases}$

35. $y(x)=\begin{cases}(0{,}25)^x & \text{при } x\le -1,\\ 1+2x & \text{при } -1<x\le 1,\\ \dfrac{3}{x} & \text{при } x>1.\end{cases}$ **36.** $y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{при } x\le -1,\\ 2x+1 & \text{при } -1<x\le 1,\\ \ln x & \text{при } x>1.\end{cases}$

37. $y(x)=\begin{cases} x^3 & \text{при } x\le -1,\\ 0{,}5(x+1) & \text{при } -1<x\le 1,\\ \dfrac{1}{x} & \text{при } x>1.\end{cases}$ **38.** $y(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{3}{x} & \text{при } 0<x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$

39. $y(x)=\begin{cases} \sin x & \text{при } x\le 0,\\ 1 & \text{при } 0<x\le 1,\\ \dfrac{1}{x-1} & \text{при } x>1.\end{cases}$ **40.** $y(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{при } x\le -1,\\ 2x & \text{при } -1<x\le 0,\\ \cos x & \text{при } x>0.\end{cases}$

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Задачи 41–50

Найти производные данных функций и их дифференциалы.

41. *а)* $y=3x^4-\dfrac{5}{\sqrt[4]{x}}+2$; *б)* $y=\dfrac{2x^2}{1-3x}$;

в) $y=2\cos x\cdot\ln x+\sqrt{1-4x^2}$; *г)* $y=2^{\sin x}+\operatorname{arctg}3x$.

42. *а)* $y=5x^2+4\sqrt[3]{x^5}+3$; *б)* $y=\dfrac{x^3-2x}{3x}$;

в) $y=\operatorname{arctg}x^4-x\cdot\ln x$; *г)* $y=e^{3x}-\sin x^2$.

43. *а)* $y=\dfrac{1}{4}x^8+8\sqrt[8]{x^3}-1$; *б)* $y=\dfrac{4x^2-1}{1-x^2}$;

в) $y=\cos(\ln x)+x^2\cdot\operatorname{tg}x$; *г)* $y=3^{\cos x}-\arcsin 2x$.

44. *а)* $y=\frac{1}{5}x^5-3x\cdot\sqrt[3]{x}-4$; *б)* $y=\frac{x+3}{2x-5}$;

в) $y=\ln\sqrt{x-1}+x^3\cdot\operatorname{arctg}x$; *г)* $y=\sin 3x-2^{x^2}$.

45. *а)* $y=3x^8+5\sqrt[5]{x^2}-3$; *б)* $y=\frac{3x^4}{x-3}$;

в) $y=\operatorname{tg}e^x+\sin x\cdot\ln x$; *г)* $y=5^{\sqrt{x}}-\arccos 2x$.

46. *а)* $y=5x^4-\frac{2}{x\sqrt{x}}+3$**;** *б)* $y=\frac{2x-1}{x^5}$;

в) $y=\ln(\sin x)-x^6\cdot\operatorname{tg}x$; *г)* $y=3^{\sqrt{x}}+\cos 3x$.

47. *а)* $y=4x^3+\frac{3}{x\cdot\sqrt[3]{x}}-2$; *б)* $y=\frac{1-6x^2}{1+x}$**;**

в) $y=\sqrt{\sin x}-x\cdot\operatorname{ctg}x$; *г)* $y=2^{x^2+1}-\ln(4x-1)$.

48. *а)* $y=7x^5-3x\cdot\sqrt[3]{x^2}-6$; *б)* $y=\frac{2x+4}{1+x^2}$;

в) $y=\sqrt{\ln x}-(1-2x^2)\cdot\sin x$; *г)* $y=e^{\operatorname{tg}x}-\cos 2x$.

49. *а)* $y=3x^4-\frac{4}{\sqrt[4]{x}}-3$; *б)* $y=\frac{x^6-1}{2x+1}$;

в) $y=\operatorname{tg}x^2+\sin x\cdot e^x$; *г)* $y=\ln 3x+4^{5x-2}$.

50. *а)* $y=8x^2-\frac{9}{x^2\cdot\sqrt{x}}+6$; *б)* $y=\frac{2x^2-1}{x^2+1}$;

в) $y = \arcsin x^3 + \ln x \cdot \cos x$; *г)* $y = 8^{\sin x} - \mathrm{tg}\, 5x$.

Задачи 51– 60

Исследовать функцию *y = f (x)* средствами дифференциального исчисления и построить ее график.

51. $y = \frac{1}{4}x^4 + x^3$. **52.** $y = -2x^3 + 6x^2$.

53. $y = 2x^3 - \frac{1}{2}x^4$. **54.** $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

55. $y = \frac{1}{25}(5x^4 - x^5)$. **56.** $y = -2x^3 - 8x^2 - 8x$.

57. $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$. **58.** $y = x^3 + 3x^2$.

59. $y = \frac{1}{50}(x^5 - 5x^4)$. **60.** $y = 2x^3 + 12x^2 + 18x$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 1

Первая контрольная работа содержит задания разделов: «Аналитическая геометрия на плоскости» (задачи 1–10), «Введение в математический анализ» (задачи 11–20, 21–30, 31– 40), «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» (задачи 41–50, 51– 60).

Задачи 1-10

Аналитическая геометрия на плоскости

1. *Основные формулы метода координат.*

- Формула расстояния между двумя точками $A(x_A;y_A)$ и $B(x_B;y_B)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

- Формула нахождения координат точки E – середины отрезка AB:

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_E = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

2. *Уравнения прямой на плоскости.*

Прямую линию на плоскости можно задавать различными способами, приведем некоторые их них.

- Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0, \left(A^2 + B^2 \neq 0\right).$$

- Уравнение прямой с угловым коэффициентом k:

$$y = kx+b.$$

Если известны координаты двух различных точек $A(x_A;\ y_A)$ и $B(x_B;\ y_B)$ на прямой, то угловой коэффициент можно вычислить по формуле

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

- Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k и проходящей через точку $(x_0;y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Если в этом уравнении менять k, то получим семейство прямых, проходящих через точку $(x_0;\, y_0)$, которое называют «пучком прямых».

- Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_A;\, y_A)$ и $B(x_B; y_B)$:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A},$$

где $x_B \neq x_A,\ y_B \neq y_A$.

Если $x_B = x_A$, то прямая параллельна оси Oy, ее уравнение: $x = x_A$.

Если $y_B = y_A$, то прямая параллельна оси Ox, ее уравнение: $y = y_A$.

Обратите внимание, что уравнение прямой, в каком бы виде оно ни было записано, является уравнением первой степени.

3. *Взаимное расположение прямых.*

Пусть k_1 и k_2 – угловые коэффициенты двух прямых.
Формула нахождения тангенса острого угла между прямыми:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}\right|.$$

- Условие параллельности прямых: $k_1 = k_2$.
- Условие перпендикулярности прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

4. *Положение точки относительно прямой.*

Формула нахождения расстояния от точки $M(x_0;\, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Точка $M(x_0;\, y_0)$ лежит на прямой $Ax + By + C = 0$, если ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т.е. справедливо равенство

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Задача. Даны вершины треугольника $A(2;1)$, $B(-4;4)$, $C(-1,5)$. Сделать чертеж и найти:

1) длину стороны AB;
2) внутренний угол при вершине A;
3) уравнение высоты CD, проведенной через вершину C;

4) уравнение медианы BE, проведенной через вершину B;
5) точку пересечения высоты CD и медианы BE;
6) длину высоты, опущенной из вершины C.

Решение. Начнем решение задачи с выполнения чертежа (рис. 1). Построим точки $A(2;1)$, $B(-4;4)$, $C(-1;5)$ в прямоугольной системе координат Оxy и, соединив их, получим треугольник ABC. Проведем высоту CD и медиану BE, уравнения которых необходимо найти. Обратите внимание, что $CD \perp AB$, а точка E – середина отрезка AC.

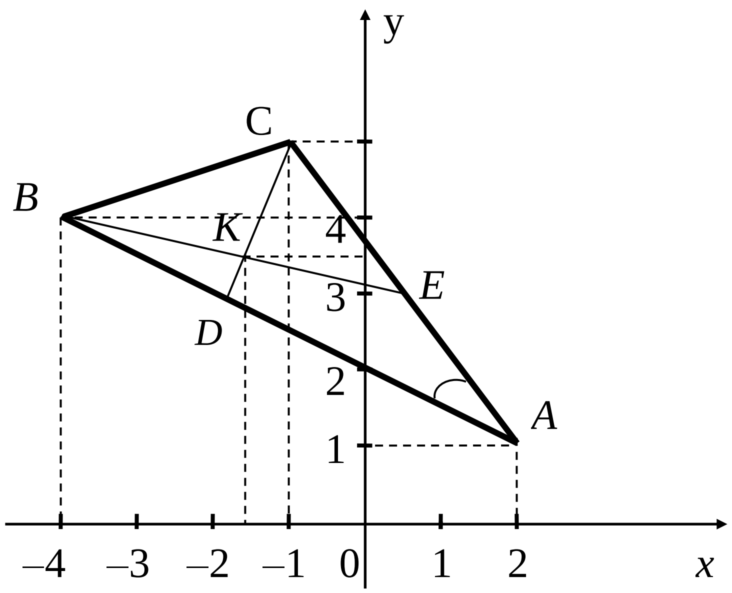


Рис. 1

1. Длину стороны AB находим как расстояние между двумя точками $A(2;1)$ и $B(-4;4)$:

$$|AB| = \sqrt{\left(x_B - y_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(-4-2)^2 + (4-1)^2} =$$
$$= \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6,7.$$

2. Отметим, что угол A в треугольнике является острым. Тангенс этого угла можно найти по формуле

$$\operatorname{tg} A = \left|\frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{AC}}\right|.$$

Найдем угловые коэффициенты прямых:

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-1}{-4-2} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2},$$

$$k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{5-1}{-1-2} = -\frac{4}{3}.$$

Тогда, $\operatorname{tg} A = \left| \dfrac{-\frac{1}{2} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)} \right| = \left| \dfrac{-\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{1 + \frac{2}{3}} \right| = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{3}} = 0{,}5.$

С помощью калькулятора или по таблице Брадиса (см. прил. 3) определяем, что такое значение тангенса соответствует углу $\angle A \approx 26{,}6^0$.

3. Уравнение высоты *CD* запишем в виде уравнения пучка прямых, проходящих через точку *C*:

$$y - y_C = k(x - x_C).$$

По условию перпендикулярности *CD* и *AB*: $k_{CD} \cdot k_{AB} = -1$.

Ранее (см. п. 2) было найдено: $k_{AB} = -1/2$.

Тогда, $k_{CD} = -\dfrac{1}{k_{AB}} = -\dfrac{1}{-1/2} = 2.$

Подставим в уравнение $k = k_{CD} = 2$, получим

$y - 5 = 2(x+1);$

$y - 5 = 2x + 2;$

$2x - y + 7 = 0$ – уравнение высоты *CD*.

Замечание. Всегда следует проверять полученные результаты, причем это делать надо не простым повторением действий, а каким-либо другим способом. Например, в полученное уравнение высоты *CD* подставьте координаты точки *C,* должно получится очевидное равенство.

4. Медиана *BE* соединяет вершину *B* с точкой *E*, которая является серединой отрезка *AC*. Координаты точки *E*:

$$x_E = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5; \quad y_E = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Составим уравнение медианы *BE* по двум точкам $B(-4;4)$ и $E(0{,}5;\,3)$, воспользовавшись формулой: $\dfrac{x - x_E}{x_B - x_E} = \dfrac{y - y_E}{y_B - y_E}$.

$$\frac{x - 0{,}5}{-4 - 0{,}5} = \frac{y-3}{4-3} \Rightarrow \frac{x - 0{,}5}{-4{,}5} = \frac{y-3}{1};$$

$$x-0,5=-4,5\cdot(y-3); \qquad \Big|\cdot 2$$
$$2x-1=-9\cdot(y-3);$$
$$2x-1=-9y+27;$$
$2x+9y-28=0$ – уравнение медианы BE.

5. Координаты точки пересечения высоты CD и медианы BE найдем, решив систему уравнений для прямых CD и BE:

$$\begin{cases}2x-y+7=0,\\2x+9y-28=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x+7,\\2x+9(2x+7)-28=0\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=2x+7,\\20x+35=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-35/20=-1,75,\\y=2\cdot(-1,75)+7=7-3,5=3,5.\end{cases}$$

В результате получим точку пересечения $K(-1,75;\ 3,5)$, координаты которой соответствуют точке на чертеже (рис. 1).

6. Длину высоты найдем как расстояние от точки C до прямой AB по формуле
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$
Уравнение прямой AB составим, используя уравнение пучка прямых:
$$y-y_A=k(x-x_A),\ \text{где}\ k=k_{AB}=-\frac{1}{2}.$$

Получим $$y-1=-\frac{1}{2}(x-2);$$
$$2(y-1)=-(x-2);$$
$$2y-2+x-2=0;$$
$x+2y-4=0$ – уравнение прямой AB.

Тогда, $|CD|=\dfrac{|x_C+2y_C-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|-1+2\cdot 5-4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\approx 2,24$.

Ответы. 1) $|AB|=5\sqrt{3}\approx 6,7$;

2) $\angle A\approx 26,6^0$;

3) $2x-y+7=0$ – уравнение высоты CD;

4) $2x+9y-28=0$ – уравнение медианы BE;

5) $K(-1,75;\ 3,5)$;

6) $|CD|=\sqrt{5}\approx 2,24$.

Задачи 11–20

Пределы функций, основные теоремы о пределах

1. *Теоремы о пределах.*

Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B;$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B;$
- $\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot f(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=cA$, где c – число;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

2. *Бесконечно малые и бесконечно большие функции.*

Бесконечно малой функцией при $x\to x_0$ называется функция $\alpha(x)$, предел которой равен нулю при $x\to x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Если значения функции *f(x)* неограниченно возрастают по абсолютной величине при $x\to x_0$, то такую функцию называют *бесконечно большой при* $x\to x_0$. Предел этой функции обозначают знаком бесконечности ∞: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty\ \ (\pm\infty)$.

Теорема о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0.$

Задача. Вычислить пределы функции $f(x)=\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$ при

$$а)\ x\to 1;\qquad б)\ x\to -4;\qquad в)\ x\to \frac{1}{4};\qquad г)\ x\to \frac{2}{3};\qquad д)\ x\to \infty.$$

Решение. В задаче следует найти предел частного. С этой целью необходимо вычислить пределы числителя и знаменателя дроби, подставив в них предельное значение аргумента.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\dfrac{3\cdot 1^2+10\cdot 1-8}{4\cdot 1^2+15\cdot 1-4}=\dfrac{5}{15}=\dfrac{1}{3}.$

Здесь применима теорема о пределе частного.

б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}.$

При подстановке $x=-4$ в числитель и знаменатель дроби убеждаемся, что их значения равны нулю, поэтому теорема о пределе частного здесь не применима. В данном случае говорят, что имеется неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ *при* $x\to x_0$ *может быть раскрыта сокращением дроби на множитель вида* ($x-x_0$)*, который обращает числитель и знаменатель дроби в нуль, в данном случае на* ($x+4$). Поэтому, следует разложить на множители числитель и знаменатель дроби (п.2 и п.3 прил.1).

$3x^2+10x-8=0;$

$D=10^2-4\cdot 3\cdot(-8)=196;$

$x_{1,2}=\dfrac{-10\pm\sqrt{196}}{2\cdot 3}=\dfrac{-10\pm 14}{6};$

$x_1=-4;\quad x_2=\dfrac{2}{3}.$

$3x^2+10x-8=3(x+4)(x-2/3)=$

$=(x+4)(3x-2).$

$4x^2+15x-4=0;$

$D=15^2-4\cdot 4\cdot(-4)=289;$

$x_{1,2}=\dfrac{-15\pm\sqrt{289}}{2\cdot 4}=\dfrac{-15\pm 17}{8};$

$x_1=-4;\qquad x_2=\dfrac{1}{4}.$

$4x^2+15x-4=4(x+4)(x-1/4)=$

$=(x+4)(4x-1).$

Таким образом,

$$\lim_{x\to -4}\frac{3x^2+10x-8}{4x^4+15x-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(3x-2)}{(x+4)(4x-1)}=\lim_{x\to -4}\frac{3x-2}{4x-1}=\frac{-14}{-17}=\frac{14}{17}.$$

в) $$\lim_{x\to \frac{2}{3}}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\frac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+10\cdot\frac{2}{3}-8}{4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+15\cdot\frac{2}{3}-4}=\frac{0}{70/9}=0.$$

Здесь применима теорема о пределе частного, так как существуют конечные пределы числителя и знаменателя, и предел знаменателя не равен нулю.

г) $$\lim_{x\to \frac{1}{4}}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\frac{3\cdot\frac{1}{16}+10\cdot\frac{1}{4}-8}{4\cdot\frac{1}{16}+15\cdot\frac{1}{4}-4}=\left(\frac{-41/8}{0}\right)=\infty.$$

Здесь использована теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.

д) $$\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}.$$

Пределы числителя и знаменателя дроби равны ∞. В этом случае говорят, что имеется неопределенность вида «бесконечность на бесконечность». Теорема о пределе частного здесь не применима.

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ *при* $x\to\infty$, *каждый член числителя и знаменателя дроби делят на x в наивысшей степени (в нашем примере на* x^2*), отчего величина дроби не изменится, но исчезнет неопределенность.*

$$\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to \infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{10x}{x^2}-\frac{8}{x^2}}{\frac{4}{x^2}+\frac{15x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to \infty}\frac{3+\frac{10}{x}-\frac{8}{x^2}}{4+\frac{15}{x}-\frac{4}{x^2}}=\frac{3}{4},$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10}{x}=0;\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^2}=0;\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{15}{x}=0;\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0$

(по теореме о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций).

Замечание. Полезно запомнить, что при $x \to \infty$ предел отношения многочленов с одинаковыми наивысшими степенями равен отношению коэффициентов при этих степенях.

В нашем примере, коэффициенты при наивысшей степени x^2 многочленов равны 3 и 4, поэтому и предел дроби равен $\frac{3}{4}$.

Ответы. *а*) $\frac{1}{3}$; *б*) $\frac{14}{17}$; *в*) 0 ; *г*) ∞ ; *д*) $\frac{3}{4}$.

Задачи 11– 20

Замечательные пределы, эквивалентные бесконечно малые функции

1. *Замечательные пределы:*

- первый замечательный предел: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;
- второй замечательный предел:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

или в другой форме: $\lim\limits_{\alpha \to 0} \left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e$,

где $e = 2,718...$ – иррациональное число.

Второй замечательный предел используется для раскрытия неопределенности вида $\left(1^\infty\right)$.

2. Две бесконечно малые функции $\alpha\,(x)$ и $\beta\,(x)$ называются *эквивалентными при* $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. В этом случае пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

Предел отношения двух бесконечно малых функции не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой функцией.

Наиболее часто используют эквивалентность следующих бесконечно малых функций при $\alpha(x) \to 0$:

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x);$ $\qquad\qquad$ $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x);$

$\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x);$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x);$

$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x);$ $\qquad\qquad$ $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x).$

Задача. Вычислить пределы: *а*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\ln(1+5x)}$; *б*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 6x}{2x}$.

Решение.

$$\textbf{\textit{а)}}\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}3x}{\ln(1+5x)}=\left(\frac{\operatorname{tg}0}{\ln 1}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}3x\sim 3x;\\ \ln(1+5x)\sim 5x\\ \text{при }\ x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5};$$

$$\textbf{\textit{б)}}\quad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin 6x}{2x}=\left(\frac{\arcsin 0}{0}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\arcsin 6x\sim 6x\\ \text{при}\quad x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{6x}{2x}=3.$$

В рассматриваемых задачах неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ была раскрыта после замены бесконечно малых функций на эквивалентные им и сокращения полученных дробей на бесконечно малую функцию *x*.

Ответ. *а*) $\dfrac{3}{5}$; $\qquad$ *б*) 3.

Задача. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-2}{3n+5}\right)^{4n+1}$.

Решение.

Очевидно, что

$$\frac{3n-2}{3n+5}=\frac{3n+5-5-2}{3n+5}=\frac{(3n+5)-7}{3n+5}=1-\frac{7}{3n+5}=1+\frac{-7}{3n+5}.$$

Далее воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+5}\right)^{4n+1}=\left(\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7}{3n+5}\right)^{4n+1}=\left(1^{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n+5}{-7}}\right)^{4n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n+5}{-7}}\right)^{\frac{3n+5}{-7}}\right]^{\frac{-7}{3n+5}\cdot(4n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{-7\cdot(4n+1)}{3n+5}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-28n-7}{3n+5}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-28-\frac{7}{n}}{3+\frac{5}{n}}}=e^{-\frac{28}{3}}.$$

Ответ. $e^{-\frac{28}{3}}$.

Задачи 31– 40

Непрерывность функции

1. *Односторонние пределы функции в точке.*

- Правый предел: $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0,\\ x>x_0}}f(x)$.

- Левый предел: $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0,\\ x<x_0}}f(x)$.

2. *Условия непрерывности функции в точке* x_0.

Функция *f(x)* непрерывна в точке x_0, если она определена в точке x_0 и имеет конечные односторонние пределы в этой точке, причем справедливо равенство:

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0).$$

Если хотя бы одно из условий непрерывности не выполняется, то x_0 – точка разрыва функции.

3. *Виды точек разрыва.*

В точке x_0 – *разрыв 1-го рода,* если существуют конечные односторонние пределы функции в точке x_0, но они либо не равны между собой, либо не равны значению функции в точке x_0.

Причем, разрыв 1-го рода называется:

- *неустранимым,* если $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$;
- *устранимым,* если $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$.

В точке x_0 – *разрыв 2-ого рода,* если хотя бы один из односторонних пределов функции в x_0 не существует или равен бесконечности.

4. *Свойства и графики основных элементарных функций.*

К основным элементарным функциями относятся следующие функции:

- *степенные:* $y = x^{\alpha}, \quad \alpha \in$ Ў;

например: $y = x,\ y = x^2,\ y = x^3,\ y = \sqrt{x},\ \ y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$;

- *показательные:* $y = a^x, \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;

например: $y = 2^x, \quad y = 0{,}5^x, \quad y = e^x$, где $e \approx 2{,}718$;

- *логарифмические:* $y = \log_a x, \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;

например: $y = \log_2 x, \quad y = \log_{0,5} x, \quad y = \ln x, \quad y = \lg x$;

- *тригонометрические:* $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \mathrm{tg} x,\ y = \mathrm{ctg}\, x$;

- *обратные тригонометрические:*
$y = \arcsin x, \ \ y = \arccos x, \quad y = \mathrm{arctg} x, \quad y = \mathrm{arcctg} x$.

Графики этих функций приведены в прил. 2.

Отметим, что *все основные элементарные функции непрерывны в области их определения.*

5. *Наиболее часто встречающиеся элементарные функции.*

- *Линейная функция* $y = kx + b$ задает прямую линию на плоскости. Ее график можно построить по двум любым выбранным точкам. В частности, линейная функция $y = b$ задает на плоскости прямую, параллельную оси Ox.

- *Квадратичная функция* $y = ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0)$ задает параболу.

  Вершина параболы находится в точке $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

  Ветви параболы направлены вверх, если $a > 0$, или вниз, если $a < 0$.

Задача. Исследовать на непрерывность функцию в области ее определения. Указать вид точек разрыва, если они имеются. Построить график.

$$а)\ f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{при } x \le 0, \\ \ln x & \text{при } 0 < x \le e, \\ 0{,}5x + 1 & \text{при } x > e. \end{cases} \qquad б)\ f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \le 0, \\ 1 & \text{при } 0 < x \le 2, \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Решение. *а)* Функция $y = f(x)$ определена при $x \in (-\infty; +\infty)$ и непрерывна на интервалах $(-\infty; 0)$, $(0; e)$ и $(e; +\infty)$, так как задана на них основными элементарными функциями.

Исследуем функцию $y = f(x)$ на непрерывность в точках $x = 0$ и $x = e$, где происходит смена аналитических выражений функции. Найдем в этих точках односторонние пределы функции.

При $x = 0$: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} 2^x = 2^0 = 1;$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} \ln x = -\infty.$$

Так как один из односторонних пределов бесконечен, то в точке $x = 0$ разрыв второго рода.

При $x = e$: $\lim\limits_{x \to e - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to e - 0} \ln x = \ln e = 1;$

$$\lim_{x \to e + 0} f(x) = \lim_{x \to e + 0} (0{,}5x + 1) = 0{,}5e + 1 \approx 2{,}36.$$

Так как односторонние пределы существуют, но не равны, то в точке $x = e$ имеется разрыв первого рода, неустранимый.

Строим график функции (рис. 2).

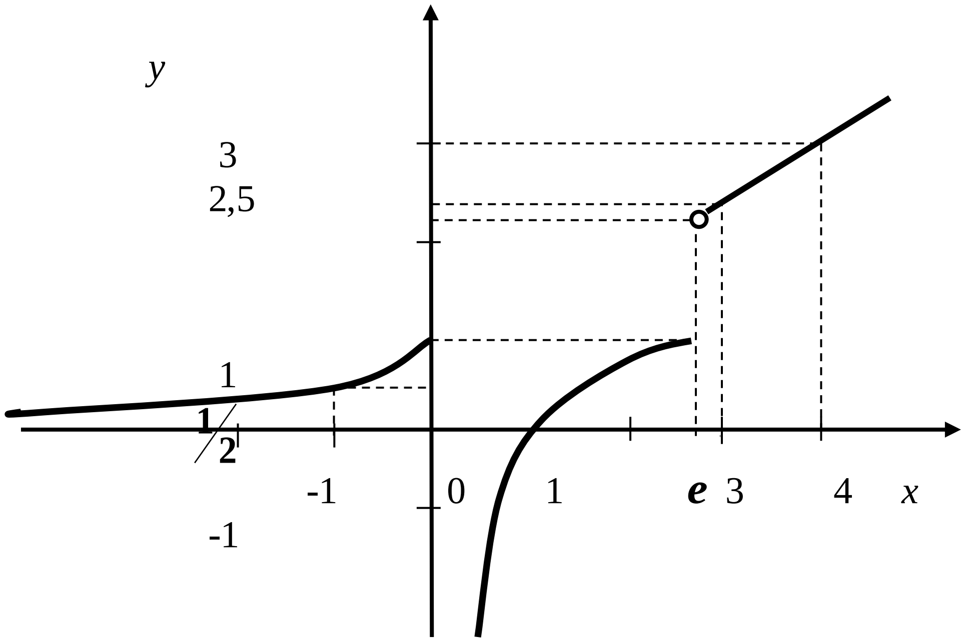


Рис. 2.

При $x \in (-\infty; 0)$ строим график показательной функции $y = 2^x$, а при $x \in (0; e)$ – график логарифмической функции $y = \ln x$ (прил. 2).

При $x \in (e; +\infty)$ график функции – прямая $y = 0{,}5x + 1$. Ее удобно строить по двум точкам, например, (3;2,5) и (4;3), так как при $x = 3$, $y = 0{,}5 \cdot 3 + 1 = 2{,}5$; при $x = 4$, $y = 0{,}5 \cdot 4 + 1 = 3$.

Ответ. Функция $y = f(x)$ непрерывна во всех точках, кроме точки $x = 0$, где имеется разрыв второго рода, и точки $x = e$, где имеется разрыв первого рода.

б) $$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \le 0, \\ 1 & \text{при } 0 < x \le 2, \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Функция $y = f(x)$ определена при $x \in (-\infty; +\infty)$ и непрерывна на интервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, так как задана на них основными элементарными функциями. При $x \in (2; +\infty)$ $y = \dfrac{1}{x-2}$ – непрерывна как частное непрерывных функций, где знаменатель $x - 2 \neq 0$.

Исследуем на непрерывность в точках $x=0$ и $x=2$, где происходит смена аналитических выражений для функции $y=f(x)$. Найдем в этих точках односторонние пределы функции.

При $x=0$: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} 2^x=2^0=1;$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} 1=1;$$

$$f(0)=\cos 0=1.$$

Так как в точке $x=0$ односторонние пределы равны, и они равны значению функции в этой точке $f(0)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$ (по определению).

При $x=2$: $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0} 1=1;$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{(2+0)-2}=\frac{1}{+0}=+\infty.$$

Так как один из односторонних пределов бесконечен, то в точке $x=2$ имеется разрыв второго рода.

Строим график функции (рис. 3).

При $x\in(-\infty;0)$ графиком функции $y=f(x)$ является график тригонометрической функции $y=\cos x$ (прил. 2).

При $x\in(0;2)$ график функции – прямая $y=1$, параллельная оси Ox.

При $x\in(2;+\infty)$ график функции – гипербола $y=\dfrac{1}{x}$, смещенная на 2 единицы вправо по оси *x*: $y=\dfrac{1}{x-2}$. График строится по нескольким точкам, взятым из указанного промежутка. Например, при $x=2{,}5$, $y=\dfrac{1}{2{,}5-2}=\dfrac{1}{0{,}5}=2$; при $x=3$, $y=\dfrac{1}{3-2}=\dfrac{1}{1}=1$. Таким образом, получены точки графика (2,5;2) и (3;1).

Полезно учесть также, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{+\infty}=+0.$

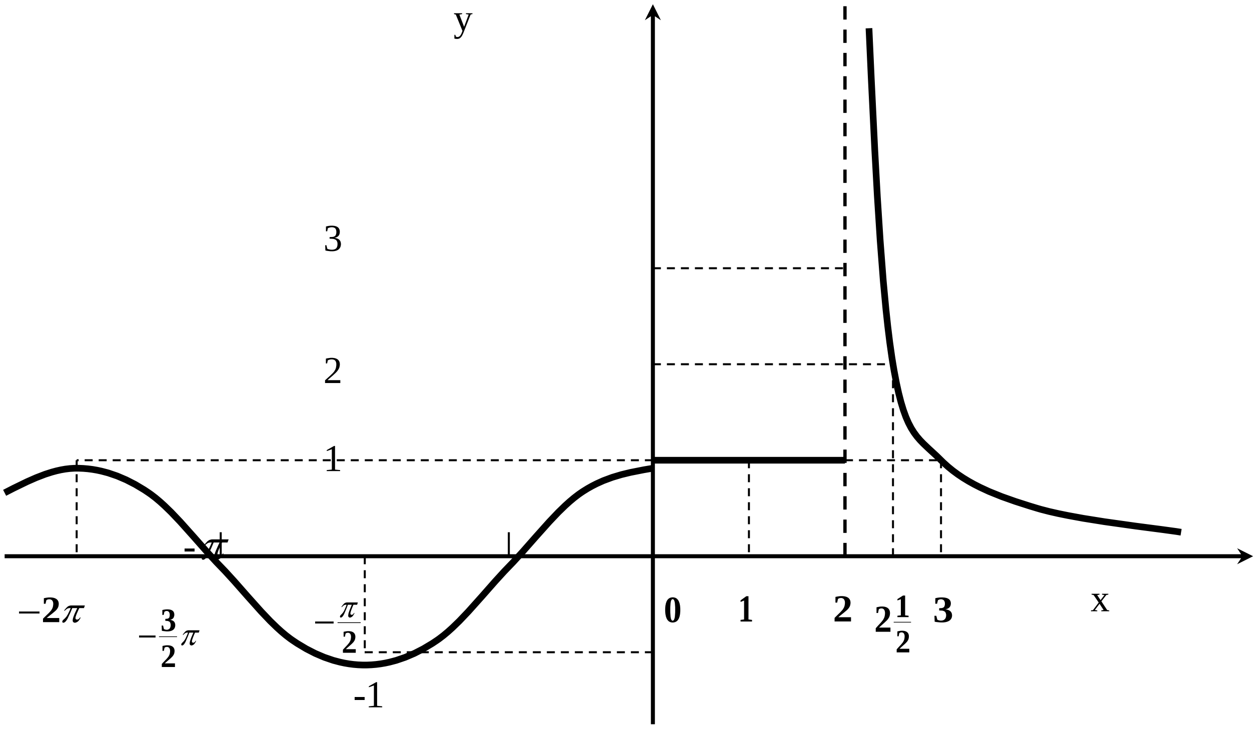


Рис.3.

Ответ. Функция $y = f(x)$ имеет разрыв второго рода в точке $x = 2$, в остальных точках функция непрерывна.

Задачи 41–50

Производная и дифференциал функции одной переменной

1. *Правила дифференцирования.*

Пусть даны дифференцируемые функции *u(x)* и $v(x)$, тогда справедливы формулы:

$$(u+v)' = u' + v';$$

$$(u-v)' = u' - v';$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Отметим также, что

а) производная от независимой переменной равна единице:

$$x' = 1;$$

б) производная постоянной величины c равна нулю:

$$c' = 0;$$

в) постоянный множитель выносится за знак производной:

$$(cu)' = c \cdot u'.$$

2. Производная сложной функции.

Сложная функция (суперпозиция функций) – это функция вида *y = f(u),* где *u = u(x)* , т.е. функция от функции.

Например,

- функция $y = \sin 2x$ является сложной, так как ее можно представить в виде $y = \sin u$, где $u = 2x$;
- функция $y = e^{\operatorname{tg} x}$ является сложной, так как ее можно представить в виде $y = e^{u}$, где $u = \operatorname{tg} x$.

Производную сложной функции находят по правилу

$$\left[f(u(x)) \right]' = f'_u \cdot u'_x \; .$$

3. Таблица производных.

Производные основных элементарных функций	**Производные сложных функций**
1. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	1. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
2. $(a^{x})' = a^{x} \ln a$	2. $(a^{u})' = a^{u} \ln a \cdot u'$
$(e^{x})' = e^{x}$	$(e^{u})' = e^{u} \cdot u'$
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	3. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
4. $(\sin x)' = \cos x$	4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
5. $(\cos x)' = -\sin x$	5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	6. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	7. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	8. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
9. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	9. $(\arccos u)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	10. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
11. $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$	11. $(\operatorname{arcctg} u)' = \dfrac{-1}{1+u^2} \cdot u'$

4. *Дифференциал функции.*
Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной:

$$dy = f'(x)dx.$$

Задача. Найти производные данных функций и их дифференциалы:

а) $y = 4x^3 - \dfrac{6}{x^3 \cdot \sqrt{x}} + 3$; *б)* $y = \dfrac{1+9x}{x^3+3}$;

в) $y = \sqrt{\cos x} - \operatorname{tg} x \cdot \ln x$; *г)* $y = 2^{\sin x} - \arccos x^5$.

Решение.

а) $y = 4x^3 - \dfrac{6}{x^3 \cdot \sqrt{x}} + 3$.

Приведем функцию y к виду, удобному для дифференцирования, используя правила действия со степенями (прил. 1).

$$y = 4x^3 - \frac{6}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}} + 3 = 4x^3 - \frac{6}{x^{\frac{7}{2}}} + 3 = 4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} + 3.$$

По правилу дифференцирования суммы и разности функции:

$$y' = \left(4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} + 3\right)' = \left(4x^3\right)' - \left(6x^{-\frac{7}{2}}\right)' + 3' =$$

$$= 4\cdot 3x^{3-1} - 6\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot x^{-\frac{7}{2}-1} + 0 = 12x^2 + 21x^{-\frac{9}{2}} = 12x^2 + \frac{21}{\sqrt{x^9}}.$$

Тогда дифференциал функции *y:*

$$dy = f'(x)dx = \left(12x^2 + \frac{21}{\sqrt{x^9}}\right)dx.$$

б) $y = \dfrac{1+9x}{x^3+3}.$

Воспользуемся правилом дифференцирования частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}, \text{ где } u = 1+9x, \quad v = x^3+3.$$

$$y' = \left(\frac{1+9x}{x^3+3}\right)' = \frac{\left(1+9x\right)'\cdot(x^3+3) - (1+9x)\cdot\left(x^3+3\right)'}{(x^3+3)^2} =$$

$$= \frac{9\cdot(x^3+3)-(1+9x)\cdot 3x^2}{(x^3+3)^2} = \frac{9x^3+27-3x^2-27x^3}{(x^3+3)^2} = \frac{27-3x^2-18x^3}{(x^3+3)^2}.$$

Тогда дифференциал функции *y:*

$$dy = f'(x)dx = \frac{27-3x^2-18x^3}{(x^3+3)^2}\,dx.$$

в) $y = \sqrt{\cos x} - \operatorname{tg} x\cdot \ln x.$

Функция $\sqrt{\cos x}$ сложная. Ее можно представить в виде $y = \sqrt{u}$, где $u = \cos x$. Применим формулу $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'.$

$$\left(\sqrt{\cos x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

Производную функции $\operatorname{tg} x \cdot \ln x$ находим по правилу дифференцирования произведения:

$$(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v', \text{ где } u = \operatorname{tg} x, \quad v = \ln x.$$

$$(\operatorname{tg} x \cdot \ln x)' = (\operatorname{tg} x)' \cdot \ln x + \operatorname{tg} x \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}.$$

Таким образом,

$$y' = \left(\sqrt{\cos x}\right)' - \left(\operatorname{tg} x \cdot \ln x\right)' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \frac{\ln x}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Тогда дифференциал функции *y:*

$$dy = f'(x)dx = \left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \frac{\ln x}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) dx.$$

г) $y = 2^{\sin x} - \arccos x^5.$

Производную первого слагаемого найдем как производную сложной функции $y = 2^u$, где $u = \sin x$, применяя формулу

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u':$$

$$\left(2^{\sin x}\right)' = \left(2^u\right)' = 2^u \ln 2 \cdot (u)' = 2^{\sin x} \ln 2 \cdot (\sin x)' = 2^{\sin x} \ln 2 \cdot \cos x.$$

Производную функции $\arccos x^5$ найдем как производную функции $y = \arccos u$, где $u = x^5$, применяя формулу

$$\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$\left(\arccos x^5\right)' = -\frac{\left(x^5\right)'}{\sqrt{1-(x^5)^2}} = -\frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}.$$

Таким образом,

$$y' = \left(2^{\sin x}\right)' - \left(\arccos x^5\right)' = 2^{\sin x} \ln 2 \cdot \cos x + \frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}.$$

Тогда дифференциал функции *y:*

$$dy = f'(x)dx = \left(2^{\sin x} \ln 2 \cdot \cos x + \frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}\right) dx.$$

Задачи 41 – 50

Исследование функции

1. Проиллюстрируем на примере некоторые важные свойства графика функции (рис. 4).

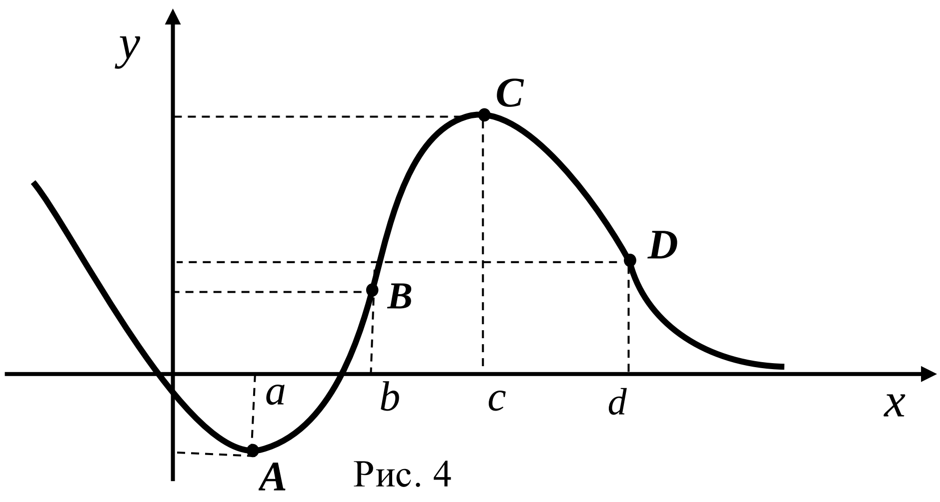


Рис. 4

Интервалы монотонности:

- функция возрастает при $x \in (a;c)$;
- функция убывает при $x \in (-\infty;a)$ и $x \in (c;+\infty)$.

Точки экстремума:

C – точка максимума (max); *A* – точка минимума (min).

Интервалы выпуклости:

- функция выпуклая при $x \in (b;d)$;
- функция вогнутая при $x \in (-\infty;b)$ и при $x \in (d;+\infty)$.

Точки *B* и *D* являются точками перегиба, так как в них происходит смена выпуклости на вогнутость или наоборот.

2. *Правило исследования функции y = f(x) на монотонность и точки экстремума.*

а) Вычислить первую производную $f'(x)$.

б) Найти *критические* точки, т.е. точки, в которых производная равна нулю или не существует.

в) Определить знак производной на интервалах между критическими точками в области определения функции.

г) Сделать выводы о промежутках монотонности функции согласно *признакам монотонности:*

если $f'(x) < 0$ на *(a;b)*, то функция убывает при $x \in (a;b)$,

если $f'(x) > 0$ на *(a;b)*, то функция возрастает при $x \in (a;b)$.

д) Сделать выводы о наличии точек экстремума согласно *признаку существования экстремума:*

если при переходе слева направо через критическую точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка максимума; если с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

3. *Правило исследования функции y = f(x) на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.*

а) Вычислить вторую производную $f''(x)$.

б) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, эти точки называются подозрительными на перегиб.

в) Определить знак второй производной на интервалах между найденными точками в области определения функции.

г) Сделать выводы о промежутках выпуклости и вогнутости согласно *признакам выпуклости и вогнутости:*

если $f''(x) > 0$ на *(a;b),* то график функции вогнутый при $x \in (a;b)$,

если $f''(x) < 0$ на *(a;b),* то график функции выпуклый при $x \in (a;b)$.

д) Сделать выводы о наличии точек перегиба согласно *достаточному условию существования точек перегиба:*

если при переходе через подозрительную на перегиб точку вторая производная меняет знак, то в этой точке имеется перегиб графика функции.

4. *Четность и периодичность функции.*

Функция *y = f(x)* называется *четной*, если для любых *x* из области определения функции справедливо равенство *f(–x)= f(x)*, в этом случае график симметричен относительно оси *Oy*.

Для *нечетной* функции для любых *x* из области определения справедливо равенство *f(–x)= – f(x)*, ее график симметричен относительно начала координат.

Функция *y = f(x)* называется *периодической*, если существует число $T > 0$ такое, что для любых *x* из области определения функции справедливо *f(x+T)= f(x)*.

Задача. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию

$$y = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$$ и построить ее график.

Решение. Исследование будем проводить по следующей схеме.

1. *Область определения функции*.

В нашем примере это множество всех действительных чисел, т.е. $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. *Четность и нечетность функции*.

$$f(-x)=\frac{1}{2}(-x)^3-4(-x)^2+8(-x)=-\frac{1}{2}x^3-4x^2-8x\neq\pm f(x).$$

Функция не обладает свойствами четности или нечетности. Следовательно, график функции не будет симметричен ни относительно оси Оy, ни относительно начала координат.

3. *Периодичность функции*.

Данная функция непериодическая, так как является многочленом.

4. *Непрерывность функции*.

На всей области определения данная функция непрерывна как многочлен.

5. *Поведение функции на концах области определения.*

Концами области определения являются $-\infty$ и $+\infty$, так как $x\in(-\infty;+\infty)$. Найдем пределы функции при $x\to\pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^3\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}\right)=+\infty\cdot\frac{1}{2}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}\right)=-\infty\cdot\frac{1}{2}=-\infty.$$

Таким образом, слева, при $x\to-\infty$, график функции уходит неограниченно вниз, а справа, при $x\to+\infty$, – неограниченно вверх.

6. *Интервалы монотонности и точки экстремума*.

Вычислим производную функции и найдем критические точки.

$$y'=\frac{1}{2}\cdot3x^2-4\cdot2x+8=\frac{3}{2}x^2-8x+8.$$

Производная существует при любых x.

Решим уравнение $y'=0$.

$$\frac{3}{2}x^2-8x+8=0.$$

$$3x^2-16x+16=0.$$

$$D=16^2-4\cdot3\cdot16=64;$$

$$x_1=\frac{16-\sqrt{64}}{6}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3},\qquad x_2=\frac{16+\sqrt{64}}{6}=4.$$

Следовательно,

$$y'=\frac{3}{2}x^2-8x+8=\frac{3}{2}\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-4).$$

Точки $x_1 = \dfrac{4}{3}$ и $x_2 = 4$ критические. Они делят область определения функции на интервалы: $\left(-\infty; \dfrac{4}{3}\right)$, $\left(\dfrac{4}{3};\ 4\right)$, $(4;\ +\infty)$. Изобразим эти интервалы на числовой оси (рис. 5).

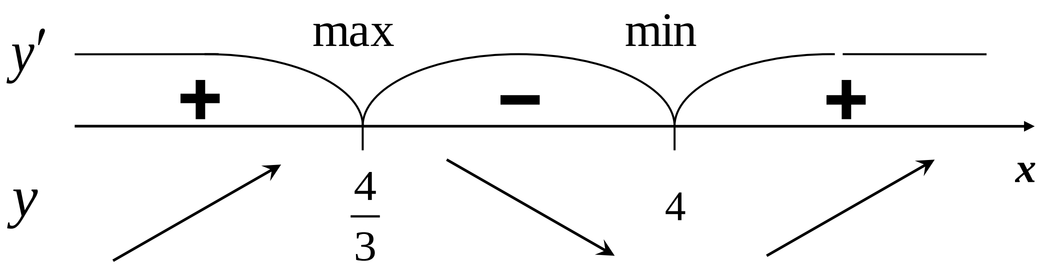


Рис. 5

Поведение функции на каждом интервале определяется знаком производной. Для определения знака y' на интервале достаточно взять любое значение *x* из рассматриваемого интервала и подставить его в производную y'.

а) На интервале $\left(-\infty; \dfrac{4}{3}\right)$ выберем число, например, $x = 0$, и подставим его в производную: $y'(0) = \dfrac{3}{2}(0-4)\left(0-\dfrac{4}{3}\right) > 0$.

Так как на интервале $\left(-\infty; \dfrac{4}{3}\right)$ производная $y' > 0$, следовательно, функция y возрастает на этом интервале (см. признаки монотонности).

б) На интервале $\left(\dfrac{4}{3};\ 4\right)$ возьмем $x = 3$, подставим в производную, получим $y'(3) = \dfrac{3}{2}(3-4)\left(3-\dfrac{4}{3}\right) < 0$. Следовательно, на интервале $\left(\dfrac{4}{3};\ 4\right)$ функция убывает.

в) На интервале $(4; +\infty)$ возьмем значение $x = 5$. Видим, что $y'(5) = \dfrac{3}{2}(5-4)\left(5-\dfrac{4}{3}\right) > 0$, следовательно, на интервале $(\ 4;\ +\infty)$ функция возрастает.

Знаки первой производной проставим на рис. 5.

Замечаем, что при переходе через точку $x=\dfrac{4}{3}$ производная поменяла знак с плюса на минус, значит, $x=\dfrac{4}{3}$ является точкой максимума (см. признак экстремума).

Найдем значение функции y в этой точке:

$$y_{\max}=y\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3-4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2+8\cdot\frac{4}{3}=\frac{128}{27}=4\frac{20}{27}.$$

Таким образом, график имеет максимум в точке $A\left(1\frac{1}{3};\quad 4\frac{20}{27}\right)$.

При переходе через точку $x=4$ производная меняет знак с минуса на плюс (рис. 5). Это означает, что $x=4$ – точка минимума.

$$y_{\min}=y(4)=\frac{1}{2}\cdot 4^3-4\cdot 4^2+8\cdot 4=0.$$

В точке $B(4;0)$ график функции имеет минимум.

7. *Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.*

Найдем производную второго порядка от рассматриваемой функции $y=\dfrac{1}{2}x^3-4x^2+8x$. Так как $y'=\dfrac{3}{2}x^2-8x+8,$ то $y''=3x-8.$

Вторая производная существует при любых значениях x.

Найдем точки, где $y''=0$:

$$3x-8=0 \Rightarrow \quad x=\frac{8}{3}.$$

Значение $x=\dfrac{8}{3}$ является единственным подозрительным на перегиб. Эта точка делит область определения $(-\infty;+\infty)$ на интервалы $\left(-\infty;\ \dfrac{8}{3}\right)$ и $\left(\dfrac{8}{3};\ +\infty\right)$ (рис. 6).

а) На интервале $\left(-\infty;\ \dfrac{8}{3}\right)$ выберем любое число, например, $x=0$ и подставим его во вторую производную $y''=3x-8$. Получим

$y''(0)=3\cdot 0-8<0$, значит, на интервале $\left(-\infty;\ \frac{8}{3}\right)$ график функции выпуклый (см. признак выпуклости и вогнутости).

б) На интервале $\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$ возьмем, например, $x=5$ и подставим во вторую производную. Получим $y''(5)=3\cdot 5-8>0$, значит, на интервале $\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$ график функции вогнутый.

Знаки второй производной проставим на рис. 6.

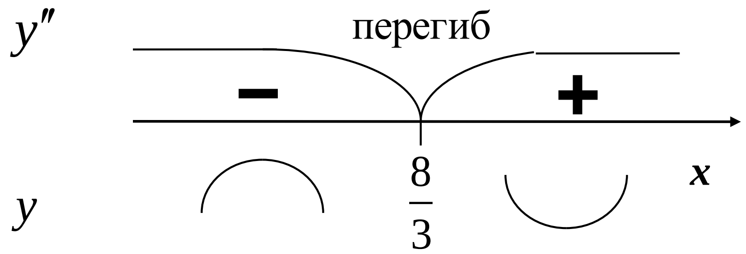


Рис. 6

Так как при переходе через точку $x=\frac{8}{3}$ вторая производная y'' меняет знак, то $x=\frac{8}{3}$ – точка перегиба (см. условие перегиба).

$$y_{перегиб}=y\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3-4\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2+8\cdot\frac{8}{3}=\frac{64}{27}=2\frac{10}{27}.$$

Таким образом, точка $C\left(2\frac{2}{3};\ \ 2\frac{10}{27}\right)$ – единственная точка перегиба.

8. *Точки пересечения графика с осями координат*.

На оси О*y* $x=0$, $y(0)=\frac{1}{2}\cdot 0^3-4\cdot 0^2+8\cdot 0=0.$ Получили точку пересечения с осью О*y*: (0;0).

На оси О*x* $y=0$, тогда $\frac{1}{2}\cdot x^3-4\cdot x^2+8\cdot x=0$,

$$x\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-4\cdot x+8\right)=0.$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, в нашем случае $x = 0$ или $\frac{1}{2}x^2 - 4 \cdot x + 8 = 0.$

Решим квадратное уравнение: $D = 4^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 0;$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{1} = 4.$$

Значения функции в точках $x = 0$ и $x = 4$ были найдены ранее:

$$y(0) = 0, \quad y(4) = 0.$$

Таким образом, график функции пересекает ось Оx в точках (0;0) и (4;0).

9. *Дополнительные точки*.

Для более точного построения графика можно найти дополнительные точки. Например, найдем значение функции y при $x = 5$:

$$y(5) = \frac{1}{2} \cdot 5^3 - 4 \cdot 5^2 + 8 \cdot 5 = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

$D(5;\ 2{,}5)$ – дополнительная точка для построения графика.

Выпишем результаты исследования функции $y = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$.

1. Область определения $(-\infty; +\infty)$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty.$
3. Функция возрастает на промежутках $\left(-\infty;\ 1\frac{1}{3}\right)$ и $(4;\ +\infty)$,

   убывает на промежутке $\left(1\frac{1}{3};\ 4\right)$.
4. Максимум функции в точке $A\left(1\frac{1}{3};\ 4\frac{20}{27}\right)$, минимум – в точке B(4;0).
5. График выпуклый на интервале $\left(-\infty; 2\frac{2}{3}\right)$ и вогнутый на интервале $\left(2\frac{2}{3};\ +\infty\right)$.
6. Точка перегиба $C\left(2\frac{2}{3};\ 2\frac{10}{27}\right)$.
7. Точки пересечения с осями координат: (0;0), (4;0).

8. Дополнительная точка $D(5;\ 2{,}5)$.

Построим график функции (рис. 7). На плоскости Оxy отметим все характерные точки: точки пересечения с осями координат, точки экстремумов, точку перегиба, а также дополнительную точку.

В силу непрерывности функции соединим все отмеченные точки плавной кривой, продолжив график влево вниз и вправо вверх согласно поведению функции на концах области определения и учитывая характер монотонности и выпуклости графика функции.

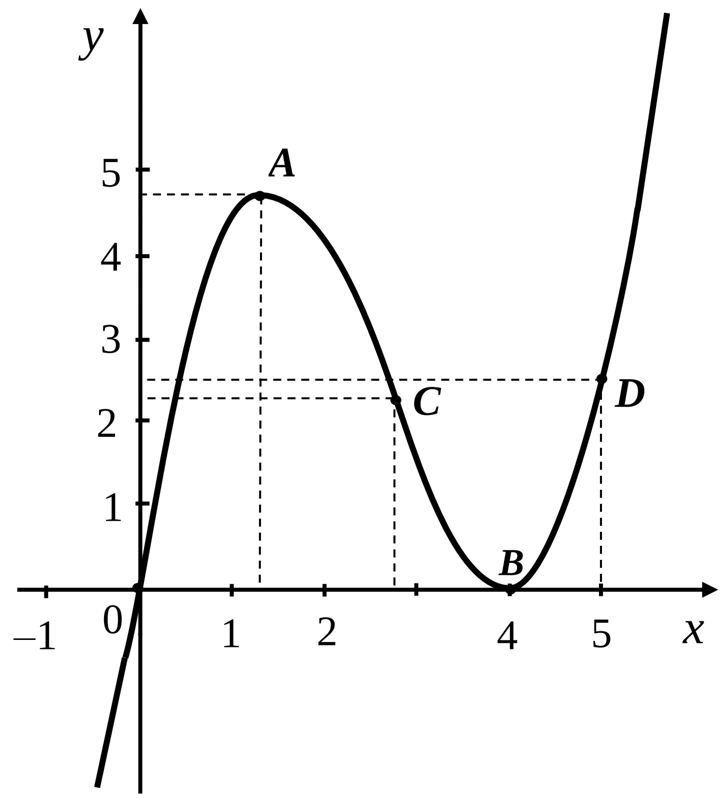


Рис. 7

Замечание. Графики многочленов представляют собой непрерывные линии, весьма разнообразные по форме. Они могут иметь различное количество точек экстремумов и перегибов, а также по-разному вести себя на бесконечности, т.е. при $x \to \pm\infty$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Интегральное исчисление

Задачи 1– 10

Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

1. *а)* $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx;$

б) $\int \cos\left(\frac{2x-5}{3}\right)dx;$

в) $\int x^2 \cdot \sqrt{4-5x^3}\ dx;$

г) $\int (x+2)\cos 5x dx;$

д) $\int \frac{1-2x}{3x+1}dx.$

2. *а)* $\int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt[3]{x}}dx;$

б) $\int \sqrt{4-3x}\ dx;$

в) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx;$

г) $\int (x-1)\ e^{-3x}dx;$

д) $\int \frac{2x+3}{4x-5}dx.$

3. *а)* $\int \frac{2+3x^3+x\sqrt{x}}{x}dx;$

б) $\int \cos(2x-1)dx;$

в) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx;$

г) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx;$

д) $\int \frac{3-5x}{6x+8}dx.$

4. *а)* $\int \frac{x-2\sqrt[3]{x^2}+1}{x}dx;$

б) $\int e^{3-2x}dx;$

в) $\int \frac{x^2}{(3-2x^3)^2}dx;$

г) $\int (3-x)\sin 4x dx;$

д) $\int \frac{4x+1}{2x-2}dx.$

5. *а)* $\int \frac{x^5-x^3\cdot\sqrt{x}+1}{x^2}dx;$

б) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{5}dx;$

6. *а)* $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-x^2-3}{x}dx;$

б) $\int \frac{1}{(3+2x)^5}dx;$

в) $\int x^3 e^{x^4+2}dx;$

г) $\int (x-2)\cos\frac{x}{3}dx;$

д) $\int \frac{7x+2}{3x-4}dx.$

в) $\int \frac{1}{(x-1)\ln^2(x-1)}dx;$

г) $\int (5-x)\sin 6x dx;$

д) $\int \frac{5-6x}{2x+1}dx.$

7. *а)* $\int \frac{x^5-x+1}{\sqrt[3]{x}}dx;$

б) $\int (2x+5)^6 dx;$

в) $\int x\cos(x^2-1)dx;$

г) $\int (x-4)e^{-7x}dx;$

д) $\int \frac{2x+1}{3x-7}dx.$

8. *а)* $\int \frac{x^4-9\quad\sqrt[3]{x}-5}{x^2}dx;$

б) $\int \cos(2-3x)\,dx;$

в) $\int \frac{\sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x}dx;$

г) $\int x^2\ln(3x)dx;$

д) $\int \frac{3-8x}{3x-5}dx.$

9. *а)* $\int \frac{x^3+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$

б) $\int e^{-0,5x+1}dx;$

в) $\int \frac{x^2-e^{3x}}{x^3-e^{3x}}dx;$

г) $\int x^4\ln(2x)\,dx;$

д) $\int \frac{2x+5}{7x-9}dx.$

10. *а)* $\int \frac{x^2+3\sqrt[3]{x}+4}{x}dx;$

б) $\int \sin\left(\frac{1-3x}{4}\right)dx;$

в) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx;$

г) $\int (2-x)\quad e^{-5x}dx;$

д) $\int \frac{4-3x}{5x+6}dx.$

Задачи 11–20

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.

11. $xy = -3;$ $\quad x - y - 4 = 0.$

12. $y = 3x^2 - 2;$ $\quad y = 3x + 4.$

13. $xy = 3;$ $\quad x + y - 4 = 0.$

14. $y = x^2 + 4x + 3;$ $\quad y = -x + 3.$

15. $xy = 6;$ $\quad x + y - 7 = 0.$

16. $y = 2x - x^2;$ $\quad x + y = 0.$

17. $xy = 8;$ $\quad x + y - 9 = 0.$

18. $y = x^2 - 3x - 4;$ $\quad y = 2x - 4.$

19. $xy = -7;$ $\quad y = x + 8.$

20. $y = x^2 + x + 1;$ $\quad y = x + 2.$

Дифференциальные уравнения

Задачи 21– 30

Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

21. $y' - \frac{2}{x} y = 2x^3;$ $\quad x_0 = 2, \quad y_0 = 0.$

22. $y' + 2xy = xe^{-x^2};$ $\quad x_0 = 0, \quad y_0 = -4.$

23. $y' + \frac{4}{x} y = 3x + 5;$ $x_0 = -2,$ $y_0 = -\frac{1}{4}.$

24. $y' + \frac{1}{x+2} y = \frac{5e^{5x}}{x+2};$ $x_0 = 0,$ $y_0 = -\frac{3}{2}.$

25. $y' - \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2};$ $x_0 = \frac{1}{2},$ $y_0 = -3.$

26. $y' + y = 2e^x;$ $x_0 = 0,$ $y_0 = -3.$

27. $y' - \frac{2}{x+4} y = (x+4)^2;$ $x_0 = 4,$ $y_0 = 0.$

28. $y' - y = (2x-3)e^x;$ $x_0 = 0,$ $y_0 = -4.$

29. $y' + \frac{1}{x+1} y = 1;$ $x_0 = 0,$ $y_0 = -4.$

30. $y' - 2y = xe^{2x};$ $x_0 = 0,$ $y_0 = -4.$

Функции нескольких переменных

Задачи 31–40

Найти частные производные первого порядка и полный дифференциал для функции двух переменных.

31. $z = x^2 \cdot \sin(4x + 3y).$

32. $z = y \cdot \ln(y - x^2 + 2).$

33. $z = x^3 \cdot e^{xy^2}.$

34. $z = y^2 \cdot \sin(3x + y^2).$

35. $z = 2^y \cdot \cos(6x + 3y).$

36. $z = \sqrt{x} \cdot \cos(x^2 + 3y).$

37. $z = (x - y) \cdot \sin(4x + 5y^2).$

38. $z = 2y \cdot e^{5x - y^2}.$

39. $z = x^2 \cdot e^{-3x + 2y}.$

40. $z = xy \cdot e^{2x^2 - y}.$

Задачи 41– 50

Дано: функция $z = f(x;y)$ и точка $M_0(x_0;y_0)$.
Найти: *а)* градиент функции z в точке $M_0(x_0;y_0)$.

б) производную функции z в точке $M_0(x_0;y_0)$ по направлению вектора $\vec{a} = \{a_x;a_y\}$.

41. $z = 3x^2 + 2xy - 2y^3$, $M_0 = (2;-1)$, $\vec{a} = \left\{6;-\frac{5}{2}\right\}$.

42. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$, $M_0 = (2;1)$, $\vec{a} = \{3;-4\}$.

43. $z = 3x^2y^2 + 5y^2x$, $M_0 = (1;1)$, $\vec{a} = \left\{-6;\frac{5}{2}\right\}$.

44. $z = \ln(x^2 + 3y^2)$, $M_0 = (1;1)$, $\vec{a} = \{4;3\}$.

45. $z = 4x^3 + 2x^2y^2$, $M_0 = (-1;2)$, $\vec{a} = \{-4;3\}$.

46. $z = 5x^2 + 6xy$, $M_0 = (2;1)$, $\vec{a} = \left\{1;-\frac{4}{3}\right\}$.

47. $z = \ln(x^2 + 5y^2)$, $M_0 = (-1;1)$, $\vec{a} = \{5;-12\}$.

48. $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$, $M_0 = (0;1)$, $\vec{a} = \{4;-3\}$.

49. $z = \ln(4x^4 + y^5)$, $M_0 = (1;-2)$, $\vec{a} = \{5;12\}$.

50. $z = \operatorname{arctg}(2x - 3y)$, $M_0 = (0;0)$, $\vec{a} = \{-3;4\}$.

Задачи 51– 60

Исследовать на экстремум функцию $z = f(x;y)$ в области ее определения.

51. $f(x;y) = (6x^2 - 12x + 7)(4y - y^2 - 5)$.

52. $f(x;y) = (5x^2 + 10x + 6)(y^2 - 4y + 6)$.

53. $f(x;y) = (4x^2 - 8x + 5)(y^2 + 4y + 6)$.

54. $f(x;y) = (6x - x^2 - 10)(12y - 6y^2 - 7)$.

55. $f(x;y) = (3x^2 - 6x + 4)(6y - y^2 - 10)$.

56. $f(x;y) = (4x - x^2 - 5)(6y^2 - 12y + 7)$.

57. $f(x;y) = (x^2 + 4x + 6)(5y^2 + 10y + 6)$.

58. $f(x;y) = (8x - 2x^2 - 9)(y^2 + 6y + 11)$.

59. $f(x;y) = (4x - x^2 - 6)(y^2 - 6y + 10)$.

60. $f(x;y) = (x^2 + 6x + 11)(4y^2 - 8y + 5)$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

Вторая контрольная работа посвящена разделам «Интегральное исчисление» (задачи 1–10 и 11–20), «Дифференциальные уравнения» (задачи 21–30), «Функции нескольких переменных» (задачи 31– 40, 41– 50, 51– 60). Ниже приведен справочный материал и даны образцы решения задач.

Задачи 1–10

Неопределенный интеграл, методы интегрирования

1. *Понятия первообразной и неопределенного интеграла.*

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ задается формулой $F(x)+C$, где C – произвольное число, и называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

2. *Свойства неопределенного интеграла.*

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx,$$

где k – постоянная, отличная от нуля.

3. *Таблица интегралов.*

1. $\int dx = x + C;$

2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C;$

9. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C;$

3. $\int x^{\alpha} \cdot dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1;$ 10. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C;$

4. $\int e^x dx = e^x + C;$ 11. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$ 12. $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C;$

6. $\int \sin x \quad dx = -\cos x + C;$ 13. $\int \dfrac{1}{a^2 + x^2} dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C;$

7. $\int \cos x \quad dx = \sin x + C;$ 14. $\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} dx = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C.$

15. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| \ x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$

Примечание. Формулы верны, когда переменная *x* является независимой переменной, а также когда *x* является функцией другой переменной: *x = x(t)*.

4. *Основные методы интегрирования.*

Идея всех методов интегрирования заключается в приведении искомого интеграла к табличному интегралу или сумме табличных интегралов.

1) *Непосредственное интегрирование.*

Интеграл приводится к табличному виду путем алгебраических или тригонометрических преобразований.

2) *Замена переменной (интегрирование подстановкой).*

Сведение интеграла к табличному виду осуществляется с помощью подстановки $t = \varphi(x)$. Тогда дифференциал dt равен

$$dt = \varphi'(x) dx.$$

Рекомендации по введению новой переменной даны ниже в примерах.

3) *Интегрирование по частям.*

Интегрирование по частям производится по формуле

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Этим методом интегрируются некоторые произведения, например, произведения степенной функции на логарифмическую, или на показательную, или на тригонометрическую, или на обратные тригонометрические функции.

Чтобы воспользоваться формулой, следует один множитель в подынтегральном выражении обозначить u, а другой множитель вместе с dx принять за dv.

Для того, чтобы интеграл в правой части был проще данного интеграла, надо правильно выбрать множители u и dv.

В интегралах, берущихся по частям, обычно *логарифмическую* и *обратные тригонометрические* функции принимают за u, а *показательную* или *тригонометрические* функции относят к dv.

5. *Связь между интегрированием и дифференцированием.*

Интегрирование – это операция, обратная дифференцированию. Если интеграл взят правильно, то производная от интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x).$$

Задача. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

Решение. В контрольной работе интеграл под буквой ***а*** берется методом непосредственного интегрирования. При этом используются табличные интегралы от степенных функций:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1; \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

а) $$\int \frac{3\sqrt[3]{x} - 2 + 6x^4}{\sqrt[3]{x^4}} dx = \int \left(\frac{3x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} - \frac{2}{x^{\frac{4}{3}}} + \frac{6x^4}{x^{\frac{4}{3}}} \right) dx =$$

$$= \int \left(3x^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} - 2x^{-\frac{4}{3}} + 6x^{4-\frac{4}{3}} \right) dx = \int \left(x^{-1} - 2x^{-\frac{4}{3}} + 6x^{\frac{8}{3}} \right) dx =$$

$$= \int \frac{3}{x} dx - \int 2x^{-\frac{4}{3}} dx + \int 6x^{\frac{8}{3}} dx = 3\int \frac{dx}{x} - 2\int x^{-\frac{4}{3}} dx + 6\int x^{\frac{8}{3}} dx =$$

$$= 3\ln|x| - 2\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + 6\frac{x^{\frac{8}{3}+1}}{\frac{8}{3}+1} + C = 3\ln|x| - 2\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + 6\frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}} + C =$$

$$= 3\ln|x| + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + \frac{18}{11}x^{3\frac{2}{3}} + C = 3\ln|x| + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + \frac{18}{11}x^{3}\cdot\sqrt[3]{x^{2}} + C.$$

Проверка.

$$\left(3\ln|x| + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + \frac{18}{11}x^{3}\cdot\sqrt[3]{x^{2}} + C\right)' = \left(3\ln|x|\right)' + \left(6x^{-\frac{1}{3}}\right)' + \left(\frac{18}{11}x^{\frac{11}{3}}\right)' + C' =$$

$$= 3\frac{1}{x} + 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1} + \frac{18}{11}\cdot\frac{11}{3}x^{\frac{11}{3}-1} + 0 = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^{\frac{4}{3}}} + 6x^{\frac{8}{3}} =$$

$$= \frac{3x^{\frac{1}{3}} - 2 + 6x^{\frac{8}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{3\sqrt[3]{x} - 2 + 6x^{4}}{\sqrt[3]{x^{4}}}.$$

Получена подынтегральная функция, что и требовалось показать.

Интеграл ***б*** в контрольной работе берется методом замены переменной (подстановкой). Приведем ряд примеров.

***б*.1)** $\int \sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)dx.$

За новую переменную возьмем *аргумент подынтегральной функции* $t = \frac{1-2x}{3}$ и найдем dt по формуле:

$$dt = t'(x)dx = \left(\frac{1-2x}{3}\right)' dx = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x\right)' dx = \left(0 - \frac{2}{3}\cdot 1\right)dx = -\frac{2}{3}dx.$$

Тогда

$$\int \sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)dx = \left| \begin{aligned} & t = \frac{1-2x}{3} \\ & dt = -\frac{2}{3}dx \\ & dx = -\frac{3}{2}dt \end{aligned} \right| = \int \sin t \cdot \left(-\frac{3}{2}dt\right) = -\frac{3}{2}\int \sin t \cdot dt =$$

$$= -\frac{3}{2}(-\cos t) + C = \frac{3}{2}\cos t + C = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right) + C.$$

В последнем действии осуществлен переход к исходной переменной x с учетом, что $t = \dfrac{1-2x}{3}$.

Проверка.

$$\left(\frac{3}{2}\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right) + C\right)' = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right)\right)' + C' =$$

$$= -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right) \cdot \left(\frac{1-2x}{3}\right)' + 0 = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \sin\left(\frac{1-2x}{3}\right).$$

Что и требовалось показать.

***б*.2)** $\displaystyle\int e^{1-\frac{1}{3}x}dx$.

За новую переменную возьмем *показатель степени* $t = 1 - \dfrac{1}{3}x$.

Тогда

$$\int e^{1-\frac{1}{3}x}dx = \left| \begin{aligned} & t = 1 - \frac{1}{3}x \\ & dt = -\frac{1}{3}dx \\ & dx = -3dt \end{aligned} \right| = \int e^t(-3dt) = -3\int e^t dt = -3e^t + C = -3e^{1-\frac{1}{3}x} + C.$$

Проверка.

$$\left(-3e^{1-\frac{1}{3}x}+C\right)'=-3\left(e^{1-\frac{1}{3}x}\right)'+C'=-3e^{1-\frac{1}{3}x}\left(1-\frac{1}{3}x\right)'+0=$$

$$=-3e^{1-\frac{1}{3}x}\left(-\frac{1}{3}\right)=e^{1-\frac{1}{3}x}.$$

Получена подынтегральная функция.

***б*.3)** $\int\sqrt[3]{12-4x}\;dx$.

За новую переменную возьмем *подкоренное выражение* $t=12-4x$.

$$\int\sqrt[3]{12-4x}\;dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)t^{\frac{4}{3}}+C=-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(12-x)^4}+C.$$

Проверка.

$$\left(-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(12-4x)^4}+C\right)'=-\frac{3}{16}\left((12-4x)^{\frac{4}{3}}\right)'+C'=$$

$$=-\frac{3}{16}\cdot\frac{4}{3}(12-4x)^{\frac{4}{3}-1}(12-4x)'+0=-\frac{3}{16}\cdot\frac{4}{3}(12-4x)^{\frac{1}{3}}(-4)=\sqrt[3]{(12-4x)}.$$

Что и требовалось показать.

***б*.4)** $\int\frac{1}{(4-3x)^7}dx$.

За новую переменную возьмем *функцию, стоящую в основании степени* $t=4-3x$. Тогда

$$\int\frac{1}{(4-3x)^7}dx=\left|\begin{array}{l}t=4-3x\\ dt=-3dx\\ dx=-\frac{1}{3}dt\end{array}\right|=\int t^{-7}\left(-\frac{1}{3}dt\right)=-\frac{1}{3}\int t^{-7}dt=-\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-7+1}}{-7+1}+C=$$

$$=-\frac{1}{3\cdot(-6)}\cdot t^{-6}+C=\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{t^6}+C=\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{(4-3x)^6}+C.$$

Проверка.

$$\left(\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{(4-3x)^6}+C\right)'=\frac{1}{18}\left((4-3x)^{-6}\right)'+C'=$$

$$=\frac{1}{18}(-6)(4-3x)^{-6-1}(4-3x)'+0=-\frac{1}{3}(4-3x)^{-7}(-3)=\frac{1}{(4-3x)^7}.$$

Получена подынтегральная функция.

Интеграл под буквой ***в*** в контрольной работе также берется методом замены переменной (подстановкой). Ознакомимся с примерами таких подстановок.

***в*.1)** $\int x\sin(2-3x^2)dx$.

За новую переменную удобно взять *аргумент тригонометрической функции,* если к тому же под интегралом присутствует производная этого аргумента (с точностью до постоянного множителя).

$$\int x\sin(2-3x^2)dx=\left|\begin{array}{l} t=2-3x^2 \\ dt=-6xdx \\ xdx=-\frac{1}{6}dt \end{array}\right|=\int\sin t\left(-\frac{1}{6}dt\right)=-\frac{1}{6}\int\sin t dt=$$

$$=\frac{1}{6}\cos t+C=\frac{1}{6}\cos(2-3x^2)+C.$$

Проверка.

$$\left(\frac{1}{6}\cos(2-3x^2)+C\right)'=\frac{1}{6}\left(-\sin(2-3x^2)\right)(-6x)+0=x\sin(2-3x^2).$$

Что и требовалось показать.

***в*.2)** $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Здесь за новую переменную удобно принять *показатель степени*, учитывая, что под знаком интеграла присутствует производная этого показателя (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dt=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ \dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2dt \end{array} \right| = \int e^t\left(2dt\right) = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Проверка.

$$\left(2e^{\sqrt{x}}+C\right)' = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)' + C' = 2e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

Что и требовалось показать.

***в*.3)** $\int \sin 3x\,\sqrt[6]{3-4\cos 3x}\;dx$.

За новую переменную удобно взять *подкоренное выражение*, так как под интегралом присутствует также его производная (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \sin 3x\,\sqrt[6]{3-4\cos 3x}\;dx = \left| \begin{array}{l} t=3-4\cos 3x \\ dt=-4\left(-\sin 3x\right)\cdot 3dx \\ \sin 3x\cdot dx=\dfrac{1}{12}dt \end{array} \right| = \int \sqrt[6]{t}\cdot\frac{1}{12}dt =$$

$$= \frac{1}{12}\int t^{\frac{1}{6}}\cdot dt = \frac{1}{12}\cdot\frac{t^{7/6}}{7/6} + C = \frac{1}{14}\sqrt[6]{\left(3-4\cos 3x\right)^7} + C.$$

Проверка.

$$\left[\frac{1}{14}\left(3-4\cos 3x\right)^{\frac{7}{6}} + C\right]' = \frac{1}{14}\cdot\frac{7}{6}\cdot\left(3-4\cos 3x\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\left(3-4\cos 3x\right)' =$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\left(3-4\cos 3x\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\left[0-4\cdot\left(-\sin 3x\right)\cdot\left(3x\right)'\right] = \sin 3x\,\sqrt[6]{3-4\cos 3x}.$$

***в*.4)** $\int \frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}dx$.

За новую переменную берем функцию, стоящую в *основании степени*, так как подынтегральное выражение содержит производную этой функции (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = 2 + x^4 \\ dt = 4x^3 dx \\ x^3 dx = \frac{1}{4}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{4}dt}{t^2} = \frac{1}{4}\int t^{-2}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{4t} + C = -\frac{1}{4(2+x^4)} + C.$$

Проверка.

$$\left(-\frac{1}{4(2+x^4)} + C\right)' = -\frac{1}{4}(-1)\left(2+x^4\right)^{-2}\left(2+x^4\right)' + C' =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2+x^4\right)^{-2}\cdot 4x^3 + 0 = \frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}.$$

Что и требовалось показать.

***в*.5)** $\displaystyle\int \frac{\ln^3(2x-3)}{2x-3}\ dx$.

Здесь под интегралом содержится *логарифмическая функция,* удобно принять ее за новую переменную, учитывая, что под знаком интеграла присутствует производная этой функции (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \frac{\ln^3\left(2x-3\right)}{2x-3}dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln(2x-3) \\ dt = \frac{1}{2x-3}\cdot 2dx \\ \frac{1}{2x-3}dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| == \int t^3\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^3 dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{8}\ln^4\left(2x-3\right) + C.$$

Проверка.

$$\left[\frac{1}{8}\ln^4(2x-3)+C\right]' = \frac{1}{8}\cdot 4\cdot \ln^3(2x-3)\cdot\left[\ln(2x-3)\right]' + 0 =$$

$$=\frac{1}{2}\ln^3(2x-3)\cdot\frac{1}{2x-3}(2x-3)' = \frac{1}{2}\ln^3(2x-3)\frac{1}{2x-3}\cdot 2 = \frac{\ln^3(2x-3)}{2x-3}.$$

Что и требовалось показать.

***в*.6)** $\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}dx$.

Часто удобно обозначать за новую переменную *знаменатель дроби подынтегральной функции.*

$$\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}dx = \begin{vmatrix} t = x^2+\sin 2x \\ dt = (2x+2\cos 2x)\,dx \\ \frac{1}{2}dt = (x+\cos 2x)\,dx \end{vmatrix} =$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sin 2x\right| + C.$$

Проверка.

$$\left(\frac{1}{2}(\ln\left|x^2+\sin 2x\right|+C\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+\sin 2x\right)'}{x^2+\sin 2x} = \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}.$$

Что и требовалось показать.

Интеграл под буквой *г* берется методом интегрирования по частям:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

***г*.1)** $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{x^{-\frac{2}{3}}dx}_{dv} = \left| \begin{array}{ll} \text{принимаем:} & \text{находим:} \\ u = \ln x; & du = \frac{1}{x}dx; \\ dv = \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}; & v = \int x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = 3x^{\frac{1}{3}} \end{array} \right| =$$

$$= uv - \int vdu = \ln x \cdot 3\sqrt[3]{x} - \int 3x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x}dx = 3\sqrt[3]{x} \cdot \ln x - 3\int x^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= 3\sqrt[3]{x} \cdot \ln x - 3\int x^{-\frac{2}{3}}dx = 3\sqrt[3]{x} \cdot \ln x - 3 \cdot 3\sqrt[3]{x} + C = 3\sqrt[3]{x}(\ln x - 3) + C.$$

Проверка.

$$\left(3\sqrt[3]{x}(\ln x - 3) + C\right)' = 3\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)'(\ln x - 3) + \sqrt[3]{x}(\ln x - 3)'\right) + C' =$$

$$= 3\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(\ln x - 3) + \sqrt[3]{x}\frac{1}{x}\right) + 0 = x^{-\frac{2}{3}}(\ln x - 3) + 3x^{\frac{1}{3}-1} =$$

$$= x^{-\frac{2}{3}}\ln x - 3x^{-\frac{2}{3}} + 3x^{-\frac{2}{3}} = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Что и требовалось показать.

***г*.2)** $\int (x-2)\sin 5x\,dx$.*

$$\int \underbrace{(x-2)}_{u}\underbrace{\sin 5x\,dx}_{dv} = \left| \begin{array}{ll} \text{принимаем:} & \text{находим:} \\ u = x - 2; & du = dx; \\ dv = \sin 5x\,dx; & v = \int \sin 5x\,dx = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{array} \right| =$$

$$= uv - \int v du = (x-2)\cdot\left(-\frac{1}{5}\cos 5x\right) - \int -\frac{1}{5}\cos 5x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{5}(x-2)\cos 5x + \frac{1}{5}\int \cos 5x\, dx = -\frac{1}{5}(x-2)\cos 5x +$$

$$+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\int \cos 5x\, d(5x) = -\frac{1}{5}(x-2)\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x + C.$$

[*]Решения задач *г*.2 и *г*.3 даны без проверки. Студент может выполнить её самостоятельно.

***г*.3)** $\int (3-x)e^{\frac{x}{5}}dx.$

$$\int \underbrace{(3-x)}_{u}\underbrace{e^{\frac{x}{5}}dx}_{dv} = \left|\begin{array}{ll} \text{принимаем:} & \text{находим:} \\ u = 3-x; & du = -dx; \\ dv = e^{\frac{x}{5}}\,dx; & v = \int e^{\frac{x}{5}}\,dx = 5\int e^{\frac{x}{5}} d\left(\frac{x}{5}\right) = 5e^{\frac{x}{5}} \end{array}\right| =$$

$$= uv - \int v du = (3-x)\cdot 5e^{\frac{x}{5}} - \int 5e^{\frac{x}{5}}(-dx) = 5(3-x)e^{\frac{x}{5}} + 5\int e^{\frac{x}{5}}dx =$$

$$= 5(3-x)e^{\frac{x}{5}} + 5\cdot 5\int e^{\frac{x}{5}} d\left(\frac{x}{5}\right) = 5(3-x)e^{\frac{x}{5}} + 25e^{\frac{x}{5}} + C.$$

В пункте ***д*** предлагается взять интеграл от рациональной дроби.

Рациональная дробь – это отношение двух многочленов. Если степень многочлена в числителе строго меньше степени многочлена в знаменателе, то дробь называется *правильной*. В противном случае дробь *неправильная*, она представляется в виде суммы некоторого многочлена и правильной рациональной дроби.

***д*)** $\int \frac{3-2x}{5x+1}\, dx.$

Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь, так как и в числителе и в знаменателе стоят многочлены первой степени (наивысшая степень x). Выделим целую часть с помощью следующих преобразований дроби:

$$\frac{3-2x}{5x+1}=\frac{-2x+3}{5x+1}=\frac{-2\cdot 5x\cdot\frac{1}{5}+3}{5x+1}=\frac{-\frac{2}{5}\cdot 5x+3}{5x+1}=\frac{-\frac{2}{5}\cdot(5x+1)+\frac{2}{5}+3}{5x+1}=$$

$$=\frac{-\frac{2}{5}(5x+1)+\frac{17}{5}}{5x+1}=\frac{-\frac{2}{5}(5x+1)}{5x+1}+\frac{\frac{17}{5}}{5x+1}=-\frac{2}{5}+\frac{17}{5}\cdot\frac{1}{5x+1}.$$

Подставим полученное выражение под знак интеграла.

$$\int\frac{3-2x}{5x+1}\,dx=\int\left(-\frac{2}{5}+\frac{17}{5}\cdot\frac{1}{5x+1}\right)dx=\int-\frac{2}{5}\,dx+\int\frac{17}{5}\cdot\frac{1}{5x+1}dx=$$

$$=\frac{2}{5}\int dx+\frac{17}{5}\int\frac{1}{5x+1}dx=\left|\begin{matrix}t=5x+1\\ dt=5dx\\ dx=\frac{1}{5}dt\end{matrix}\right|=-\frac{2}{5}x+\frac{17}{5}\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{5}\,dt=$$

$$=-\frac{2}{5}x+\frac{17}{5}\cdot\frac{1}{5}\int\frac{1}{t}dt=-\frac{2}{5}x+\frac{17}{25}\ln|t|+C=-\frac{2}{5}x+\frac{17}{25}\ln|5x+1|+C.$$

Проверка.

$$\left(-\frac{2}{5}x+\frac{17}{25}\ln|5x+1|+C\right)'=-\frac{2}{5}x'+\frac{17}{25}\left(\ln|5x+1|\right)'+C'=$$

$$=-\frac{2}{5}+\frac{17}{25}\cdot\frac{1}{5x+1}(5x+1)'+0=-\frac{2}{5}+\frac{17}{25}\cdot\frac{1}{5x+1}\cdot 5=-\frac{2}{5}+\frac{17}{5}\cdot\frac{1}{5x+1}=$$

$$=\frac{-2(5x+1)+17}{5(5x+1)}=\frac{-10x-2+17}{5(5x+1)}=\frac{-10x+15}{5(5x+1)}=\frac{5(-2x+3)}{5(5x+1)}=\frac{3-2x}{5x+1}.$$

Получена подынтегральная функция.

Задачи 11–20

Определенный интеграл, вычисление площадей

1. *Понятие определенного интеграла.*

Определенный интеграл – это число, которое находится по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$; a, b – нижний и верхний пределы интегрирования, показывающие, как меняется переменная интегрирования *x*.

Формула Ньютона-Лейбница связывает определенный и неопределенный интегралы. Чтобы ею воспользоваться, следует взять сначала неопределенный интеграл, т.е. найти первообразную, причем удобно взять произвольную постоянную равной нулю: $C = 0$, а затем вычислить разность значений этой первообразной в верхнем и нижнем пределах.

Например:

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

2. *Геометрический смысл определенного интеграла.*

Если функция $y = f(x)$ неотрицательная на отрезке $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = S,$$

где *S* – площадь под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ (рис. 8).

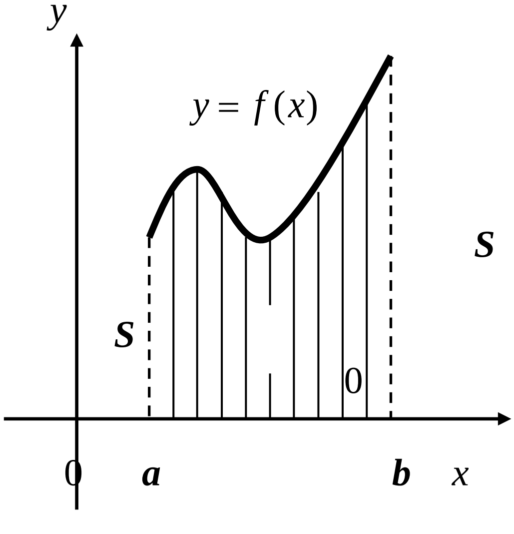


Рис. 8

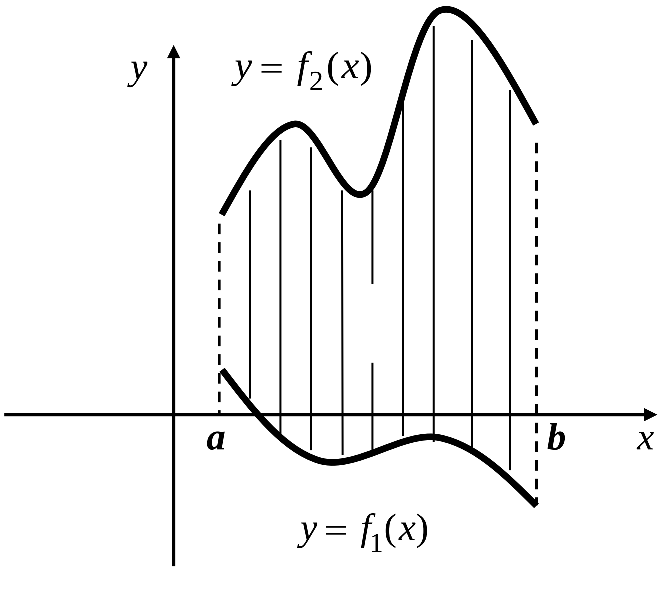


Рис. 9

3. *Вычисление площадей плоских фигур.*

Площадь фигуры, заключенной между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ на отрезке $[a;b]$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx,$$

при этом $f_2(x) \geq f_1(x)$ для $x \in [a;b]$ (рис. 9).

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6x + 5$ и $y = x - 1$. Сделать чертеж.

Решение. Выполним чертеж.

Первое уравнение определяет параболу, а второе – прямую линию.

Для построения параболы найдем координаты ее вершины и точки пересечения ее с осями координат.

Если уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, то вершина параболы находится в точке $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. В данной задаче $x_0 = -\dfrac{-6}{2 \cdot 1} = 3$, $y_0 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$. Итак, вершина параболы – точка (3;– 4).

Точки пересечения параболы с осями.

С осью Ox: $y = 0$, тогда $x^2 - 6x + 5 = 0$. Решив квадратное уравнение (прил.1, п. 2), получаем $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Точки пересечения параболы с осью Ox есть точки (1;0) и (5;0).

С осью Oy: $x = 0$, тогда $y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$. Точка пересечения параболы с осью Oy есть точка (0;5).

Строим параболу по найденным точкам, замечая, что ветви параболы направлены вверх, т.к. $a = 1 > 0$ (рис. 10).

Прямую $y = x - 1$ строим по двум точкам, например,

при $x = 0$ $y = 0 - 1 = -1$; при $x = 1$ $y = 1 - 1 = 0$.

Получены точки: $(0;-1)$, $(1;0)$.

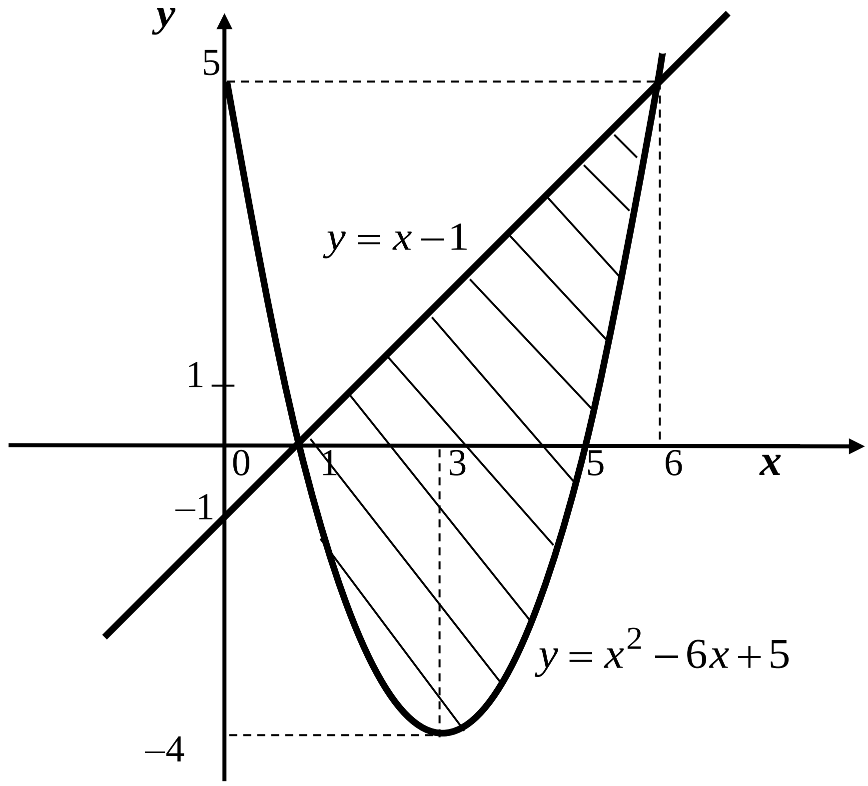


Рис. 10

Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5, \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \; x^2 - 6x + 5 = x - 1 \;\Rightarrow\; x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25; \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2}; \quad x_1 = 1; \, x_2 = 6.$$

Найдем соответствующие ординаты $y_{1,2}$ из уравнения $y = x – 1$: $y_1 = 1 - 1 = 0$; $y_2 = 6 - 1 = 5$. Итак, точки пересечения параболы и прямой есть точки $(1;0)$ и $(6;5)$.

Заштрихуем плоскую фигуру, ограниченную параболой и прямой (рис.10). Здесь функции $f_1(x) = x^2 - 6x + 5$ и $f_2(x) = x - 1$ ограничивают фигуру соответственно снизу и сверху, то есть $f_2(x) \geq f_1(x)$ при $x \in [1;6]$.

Для нахождения искомой площади воспользуемся формулой

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx = \int_1^6 \Big(x - 1 - (x^2 - 6x + 5)\Big)dx = \int_1^6 \Big(-x^2 + 7x - 6\Big)dx =$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+7\cdot\frac{x^2}{2}-6x\right)\Bigg|_1^6=\left(-\frac{6^3}{3}+7\cdot\frac{6^2}{2}-6\cdot 6\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+7\cdot\frac{1^2}{2}-6\cdot 1\right)=$$

$$=\left(-\frac{216}{3}+7\cdot\frac{36}{2}-36\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{7}{2}-6\right)=\frac{125}{6}.$$

Ответ. Искомая площадь равна: $S=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}$ *кв. ед.*

Замечание. Если одна из линий – гипербола, например, *xy* = –6, то ее можно построить по точкам. Удобно взять точки с абсциссами $x=\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ldots$ и вычислить соответствующие им ординаты *y*, в нашем случае по формуле $y=-\frac{6}{x}$.

Если в ответе задачи получен логарифм числа, то значение логарифма можно взять из прил.1, п. 9.

Задачи 21–30

Дифференциальные уравнения

1. *Понятие дифференциального уравнения и его решения.*

Дифференциальное уравнение (ДУ) первого порядка – это уравнение вида $F(x,y,y')=0$ или $y'=f(x;y)$, содержащее производную y' от неизвестной функции $y=y(x)$.

Решением ДУ называется функция *y* = *y(x)*, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Например, решением уравнения $y'=2x$ является функция $y=x^2$ или $y=x^2+C$, где *C* – произвольная постоянная. Решением уравнения $y'=y$ является функция $y=e^x$ или $y=Ce^x$.

Общим решением ДУ называется функция $y=y(x,C)$, зависящая от произвольной постоянной *C* и удовлетворяющая ДУ при любом значении *C*.

Частное решение получается из общего при конкретных значениях *C*. Чтобы выделить частное решение из общего задают начальное условие: $y=y_0$ при $x=x_0$ или $y(x_0)=y_0$.

Совокупность дифференциального уравнения и начального условия

$$y'=f(x;y),\quad y(x_0)=y_0$$

называется *задачей Коши* (для ДУ первого порядка).

2. *Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными*.

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = h(x)g(y)$$

называется уравнением *с разделяющимися переменными*.
Это уравнение можно привести к виду:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0,$$

где переменные *x* и *y* содержатся в разных слагаемых (разделены).

Чтобы разделить переменные нужно производную y' представить как отношение дифференциалов $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и выполнить ряд дополнительных преобразований (см. примеры ниже).

После разделения переменных производится почленное интегрирование обеих частей равенства. Интегралы берутся с помощью таблицы интегралов с учетом их зависимости от произвольной постоянной *C*. Затем, выражая *y*, находят общее решение ДУ: $y = y(x;C)$.

Например, найдем общее решение уравнения $y' = 2xy$.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \qquad dy = 2xydx \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = 2xdx.$$

Переменные разделились, производим почленное интегрирование.

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_0 \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = x^2 + C_0;$$

$$|y| = e^{x^2 + C_0} \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{x^2} \cdot e^{C_0}.$$

Обозначим $C = \pm e^{C_0}$, получим $y = Ce^{x^2}$ – общее решение ДУ.

3. *Линейные дифференциальные уравнения первого порядка*.

ДУ первого порядка называется *линейным*, если его можно привести к виду: $y' + P(x)y = Q(x)$, где искомая функция *y* и ее производная y' содержатся в первых степенях (в разных слагаемых).

Разделить переменные для такого уравнения не удается, если правая часть $Q(x)$ отлична от нуля.

Линейные ДУ можно решать *методом Бернулли*. При этом неизвестную функцию *y* представляют в виде произведения двух функций: $y = u(x) \cdot v(x)$, для каждой из которых получают ДУ с разделяющимися переменными. Решая первое из этих уравнений, берут его частное решение, например, полагая, что $C = 0$. Для второго уравнения находят его общее решение (с учетом зависимости от *C*).

Алгоритм применения метода Бернулли показан ниже на примерах.

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$, если

а) $y'-2y=e^{2x}$; $\qquad x_0=0, \quad y_0=2.$

б) $y'+\dfrac{4x}{x^2+1}y=\dfrac{1}{x^2+1}$; $\qquad x_0=1; \quad y_0=2.$

Решение.

а) $y'-2y=e^{2x}$; $\qquad y(0)=2.$

Пусть $y=uv$, тогда $y'=u'v+uv'$. Подставим эти выражения в дифференциальное уравнение:

$$u'v+uv'-2uv=e^{2x}.$$

Сгруппируем слагаемые, имеющие общий множитель u:

$$u'v+u\left(v'-2v\right)=e^{2x}.$$

Подберем функцию v так, чтобы обратилось в нуль выражение, стоящее в скобках:

$$v'-2v=0.$$

Тогда уравнение примет вид

$$u'v=e^{2x}.$$

Два последних уравнения решаются разделением переменных, поочередно.

1. $v'-2v=0$; $v'=\dfrac{dv}{dx}$;

$\dfrac{dv}{dx}=2v; \quad \Big|\cdot dx$

$dv=2vdx; \quad |: v\neq 0$

$\dfrac{dv}{v}=2dx;$

$\displaystyle\int\frac{dv}{v}=2\int dx;$

$\ln|v|=2x+C; \quad (C=0)$

$\ln|v|=2x \quad \Rightarrow \quad v=e^{2x}.$

2. Подставим $v=e^{2x}$ в уравнение $u'v=e^{2x}$.

$u'\cdot e^{2x}=e^{2x}; \quad |: e^{2x}\neq 0$

$u'=1;$

$\dfrac{du}{dx}=1; \quad \Big|\cdot dx$

$du=dx;$

$\displaystyle\int du=\int dx \quad \Rightarrow \quad u=x+C.$

Поскольку $y = uv$, то $y = (x+C)e^{2x}$ – общее решение уравнения.

Для нахождения частного решения обратимся к начальному условию: $y_0=2$ при $x_0=0$. Подставим эти значения в общее решение дифференциального уравнения:

$$2=(0+C)\cdot e^{0}.$$

Так как $e^{0}=1$, то $C=2$.

Подставляя найденное значение C = 2 в общее решение уравнения, находим частное решение:

$$y=(x+2)e^{2x}.$$

Ответ. $y=(x+C)e^{2x}$ – общее решение уравнения;
$y=(x+2)e^{2x}$– частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=2$.

б) $y'+\dfrac{4x}{x^2+1}y=\dfrac{1}{x^2+1};\qquad y(1)=2.$

Пусть $y=uv$, тогда $y'=u'v+uv'$. Подставим y и y' в данное уравнение:

$$u'v+uv'+\frac{4x}{x^2+1}uv=\frac{1}{x^2+1}.$$

Группируем 2-е и 3-е слагаемые:

$$u'v+u\left(v'+\frac{4x}{x^2+1}v\right)=\frac{1}{x^2+1}.$$

Потребуем, чтобы $v'+\dfrac{4x}{x^2+1}v=0$, тогда исходное уравнение примет вид: $u'v=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Решим последовательно оба уравнения, причем для первого из них берем лишь частное решение при C = 0.

1. $v'+\dfrac{4x}{x^2+1}v=0;\quad v'=\dfrac{dv}{dx};$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{4x}{x^2+1}v;\quad |\cdot dx$$

$$dv=-\frac{4x}{x^2+1}vdx;\quad |:v\neq 0$$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{4x}{x^2+1}dx;$$

2. Подставим $v=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ в уравнение $u'v=\dfrac{1}{x^2+1}$.

$$u'\frac{1}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2+1};$$

$$\ln|v| = -2\int \frac{2x}{x^2+1}dx;$$
$$\ln|v| = -2\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1};$$
$$\ln|v| = -2\ln(x^2+1); \qquad (C=0)$$
$$\ln|v| = \ln(x^2+1)^{-2};$$
$$v = (x^2+1)^{-2} = \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

$$u'\frac{1}{x^2+1} = 1; \quad |\cdot(x^2+1)$$
$$u' = x^2+1; \quad u' = \frac{du}{dx};$$
$$\frac{du}{dx} = x^2+1; \quad |\cdot dx$$
$$du = (x^2+1)dx;$$
$$\int du = \int (x^2+1)dx;$$
$$u = \frac{x^3}{3} + x + C.$$

Так как $y = uv$, то $y = \left(\frac{x^3}{3} + x + C\right)\cdot\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$ – общее решение исходного уравнения.

Для нахождения частного решения обратимся к начальным условиям: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$ – и подставим их в найденное общее решение:

$$2 = \left(\frac{1^3}{3} + 1 + C\right)\cdot\frac{1}{\left(1^2+1\right)^2};$$

$$2 = \left(\frac{4}{3} + C\right)\cdot\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 8 = \frac{4}{3} + C \quad \Rightarrow \quad C = 8 - \frac{4}{3} = \frac{20}{3}.$$

Искомое частное решение получим из общего, подставив в него найденное значение $C = \frac{20}{3}$, $\quad y = \left(\frac{x^3}{3} + x + \frac{20}{3}\right)\cdot\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}.$

Ответ. $y = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\left(\frac{x^3}{3} + x + C\right)$ – общее решение уравнения;

$$y=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\left(\frac{x^3}{3}+x+\frac{20}{3}\right)$$ – частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.

Замечание. Чтобы проверить правильность найденного решения (общего или частного), нужно подставить его в исходное уравнение и убедиться, что получилось верное равенство (тождество).

Задачи 31– 40

Функции нескольких переменных: частные производные, полный дифференциал

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x;y)$, где x и y – независимые переменные.

1. *Частные производные функции двух переменных.*

Для нахождения частных производных используют таблицу производных и правила дифференцирования для функций одной переменной (см. справочный материал к задачам 41–50 контрольной работы 1).

Частная производная по x функции $z = f\,(x;y)$ вычисляется так же, как производная функции одной переменной x в предположении, что y – постоянная величина. Обозначения частной производной по x: $z'_x(x;y)$, или $\frac{\partial z}{\partial x}$, или $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Частная производная по y функции $z = f\,(x;y)$ вычисляется так же, как производная функции одной переменной y в предположении, что x – постоянная величина. Обозначения частной производной по y: $z'_y(x;y)$, или $\frac{\partial z}{\partial y}$, или $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2. *Полный дифференциал функции двух переменных.*

Полный дифференциал функции двух переменных находим по формуле

$$dz = z'_x dx + z'_y dy,$$

где z'_x, z'_y – частные производные функции z;

dx и dy – дифференциалы независимых переменных.

Задача. Найти полный дифференциал функции двух переменных $z = f(x;y) = y^2 e^{x^3 y}$.

Решение. Сначала находим частные производные.

$$z'_x = \left(y^2 \cdot e^{x^3 y} \right)'_x = \left(y^2 \right)'_x \cdot e^{x^3 y} + y^2 \cdot \left(e^{x^3 y} \right)'_x =$$

$$= 0 \cdot e^{x^3 y} + y^2 \cdot e^{x^3 y} (x^3 y)'_x = y^2 \cdot e^{x^3 y} \cdot 3x^2 y = 3x^2 y^3 e^{x^3 y},$$

здесь $y = const$ и использована формула $\left(e^u \right)'_x = e^u \cdot u'_x$.

$$z'_y = \left(y^2 \cdot e^{x^3 y} \right)'_y = \left(y^2 \right)'_y \cdot e^{x^3 y} + y^2 \cdot \left(e^{x^3 y} \right)'_y =$$

$$= 2y \cdot e^{x^3 y} + y^2 \cdot e^{x^3 y} (x^3 y)'_y = 2y \cdot e^{x^3 y} + y^2 \cdot e^{x^3 y} \cdot x^3 = y(2 + x^3 y) e^{x^3 y},$$

здесь $x = const$ и использована формула $\left(e^u \right)'_y = e^u \cdot u'_y$.

Полный дифференциал функции:

$$d\,z = 3x^2 y^3 e^{x^3 y}\, dx + y(2 + x^3 y) e^{x^3 y} dy.$$

Задачи 41– 50
Функции нескольких переменных: градиент функции, производная по направлению

1. *Понятие вектора на плоскости.*

Вектор – это направленный отрезок. Его можно задать в координатной форме: $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$. Числа a_x, a_y называются координатами вектора – это проекции вектора на оси Ox, Oy, соответственно (рис. 11).

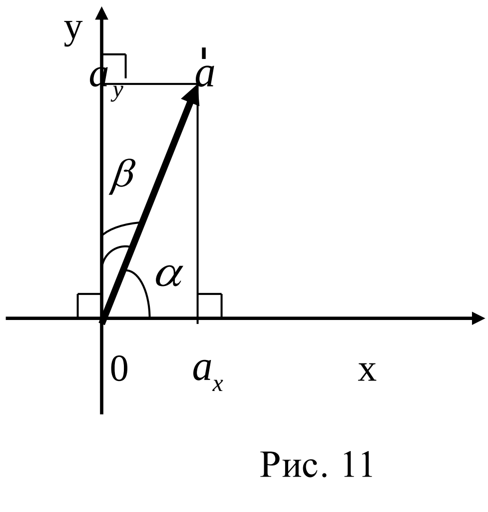


Рис. 11

Пусть α и β – это углы вектора $\vec{a}$ с осями координат. Косинусы этих углов называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$ и вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},$$

где $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ – длина вектора $\vec{a}$.

Векторы $\vec{i} = (1;0)$ и $\vec{j} = (0;1)$, направленные соответственно по осям Ox, Oy и имеющие длины, равные 1, называются *ортами координатных осей*. Справедливо равенство:

$$\vec{a} = \{a_x; a_y\} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}.$$

2. *Градиент функции двух переменных.*

Градиентом функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x_0; y_0)$ называется вектор, координаты которого равны значениям частных производных функции *z*, вычисленным в точке $M(x_0; y_0)$:

$$\text{grad } z = \{z'_x; z'_y\} = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Этот вектор указывает направление и величину скорости *наибольшего роста* функции z в точке *М*.

3. *Производная по направлению для функции двух переменных.*

Производная функции $z = f(x; y)$ *по направлению* вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$ в точке $M(x_0; y_0)$ показывает скорость изменения функции z в точке $M(x_0; y_0)$ в направлении вектора $\vec{a}$ и вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{d\vec{a}} = z'_x \cdot \cos\alpha + z'_y \cdot \cos\beta,$$

где z'_x и z'_y – частные производные, вычисленные в точке $M(x_0; y_0)$; $\cos\alpha, \cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

Задача. Дана функция $z = xy^2 - 2x$ и точка $M(1;3)$.

Найти: *а)* градиент данной функции в точке *М*;

б) производную данной функции в точке М по направлению вектора $\vec{a} = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$.

Решение.

***а*)** Найдем частные производные:

$$z'_x = (xy^2 - 2x)'_x = y^2 - 2, \qquad z'_y = (xy^2 - 2x)'_y = x \cdot 2y - 0 = 2xy.$$

Вычислим значения $z'_x,\ z'_y$ в точке $M(1;3)$:

$$z'_x(1;3) = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7, \qquad z'_y(1;3) = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6.$$

Вектор-градиент равен: $\operatorname{grad} z(M) = \{7;6\} = 7\vec{i} + 6\vec{j}$.

Величина скорости наибольшего роста функции:

$$V_{\max} = |\operatorname{grad} z(M)| = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{49 + 36} = \sqrt{85} \approx 9,22.$$

***б*)** Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2};$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{3}{5}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|a|} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Подставим все найденные значения в формулу для производной по направлению:

$$\frac{dz}{d\vec{a}} = z'_x(1;3) \cdot \cos\alpha + z'_y(1;3) \cdot \cos\beta = 7 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 6 \cdot \frac{4}{5} = \frac{-21 + 24}{5} = 0,6.$$

Так как $\frac{dz}{d\vec{a}} = 0,6 > 0$, то функция z в точке $M(1;3)$ в направлении вектора $\vec{a} = \{-\frac{3}{2}; 2\}$ возрастает со скоростью $V = 0,6$.

Ответ. $\operatorname{grad} z(M) = 7\vec{i} + 6\vec{j}$; $\frac{dz}{d\vec{a}} = 0,6$.

Замечание. Если $\frac{dz}{d\vec{a}} < 0$, то функция z убывает в направлении вектора $\vec{a}$.

Задачи 51– 60

Экстремумы функции двух переменных

1. *Частные производные второго порядка.*

Для функции $z = f(x, y)$ существуют четыре частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(z'_x\right)'_x = f''_{xx}(x, y);$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(z'_y\right)'_y = f''_{yy}(x, y);$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(z'_x\right)'_y = f''_{xy}(x, y);$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(z'_y\right)'_x = f''_{yx}(x, y).$$

Производные z''_{xy} и z''_{yx}, которые отличаются лишь порядком дифференцирования, называются *смешанными частными производными*.

Смешанные частные производные равны в точках их непрерывности:

$$z''_{xy} = z''_{yx}.$$

2. *Локальные экстремумы функции двух переменных.*

Функция двух переменных $z = f(x, y)$ графически представляет собой некоторую поверхность, на которой могут быть точки *экстремумов*: максимумы и минимумы (рис.12).

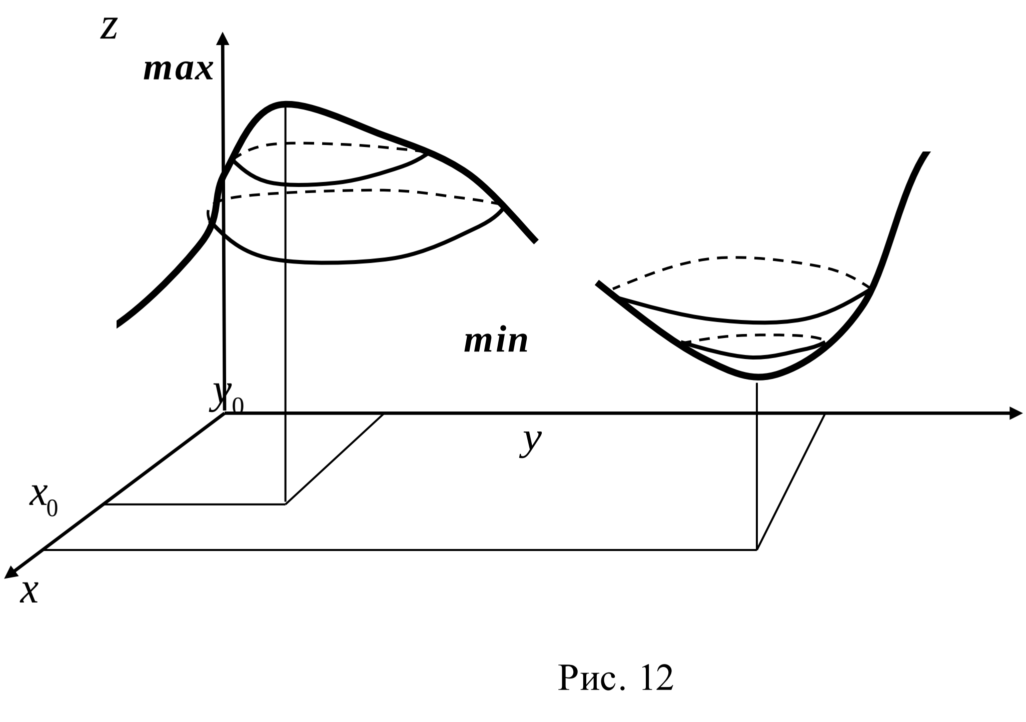


Рис. 12

Необходимое условие экстремума функции двух переменных:

$z = f(x, y)$ может иметь экстремум лишь в точках, где обе частные производные функции z'_x, z'_y равны нулю либо не существуют. Такие точки называются *критическими*.

Достаточное условие экстремума функции двух переменных.

Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ первые частные производные обращаются в нуль, т.е.

$$z'_x(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Обозначим вторые частные производные в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$z''_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad z''_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad z''_{yy}(x_0, y_0) = C.$$

Введем величину: $\Delta = A \cdot C - B^2$.

1) если $\Delta > 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум *есть,*
причем, если $A < 0$, то это *максимум,*
если $A > 0$, то это *минимум*;
2) если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума *нет*;
3) если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть (требуется дополнительное исследование).

Задача. Исследовать на экстремум функцию
$z = (x^2 + 6x + 10)(y - 2y^2 - 1)$ в области ее определения.

Решение. 1. Находим область определения данной функции z. Так как в данной задаче x и y могут принимать любые значения, то областью определения функции z является множество всех пар чисел $(x; y)$ или, что то же самое, все точки координатной плоскости xOy.

2. Найдем частные производные данной функции:

$$z'_x = \left[(x^2 + 6x + 10)(y - 2y^2 - 1)\right]'_x = (x^2 + 6x + 10)'_x(y - 2y^2 - 1) =$$
$$= (2x + 6)(y - 2y^2 - 1);$$
$$z'_y = \left[(x^2 + 6x + 10)(y - 2y^2 - 1)\right]'_y = (x^2 + 6x + 10)(y - 2y^2 - 1)'_y =$$
$$= (x^2 + 6x + 10)(1 - 4y).$$

Обе частные производные существуют во всех точках области определения.

3. Найдем точки, где эти производные равны нулю.

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x+6)(y-2y^2-1)=0, \\ (x^2+6x+10)(1-4y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-2y^2-1=0 \text{ или } 2x+6=0, \\ x^2+6x+10=0 \text{ или } 1-4y=0; \end{cases}$$

$$2y^2-y+1\neq 0, \text{ так как } D=1-4\cdot(-2)\cdot(-1)<0;$$

$$x^2+6x+10\neq 0, \text{ так как } D=36-4\cdot 10<0;$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+6=0, \\ 1-4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Таким образом, в области определения имеется лишь одна критическая точка: $M(-3;\frac{1}{4})$.

4. Найдем вторые производные функции z.

$$z''_{xx}=\left(z'_x\right)'_x=\left[(2x+6)(y-2y^2-1)\right]'_x=2\cdot(y-2y^2-1);$$

$$z''_{xy}=\left(z'_x\right)'_y=\left[(2x+6)(y-2y^2-1)\right]'_y=(2x+6)(1-4y);$$

$$z''_{yy}=\left(z'_y\right)'_y=\left[(x^2+6x+10)(1-4y)\right]'_y=(x^2+6x+10)\cdot(-4).$$

5. Проверим выполнение достаточных условий экстремума.

Вычислим значения вторых производных в найденной критической точке $M(-3;\frac{1}{4})$ и значение величины Δ:

$$A=z''_{xx}\left(-3;\frac{1}{4}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{16}-1\right)=2\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-1\right)=2\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)=-\frac{7}{4};$$

$$B=z''_{xy}\left(-3;\frac{1}{4}\right)=(2(-3)+6)\cdot\left(1-4\cdot\frac{1}{4}\right)=0;$$

$$C=z''_{yy}\left(-3;\frac{1}{4}\right)=\left((-3)^2+6\cdot(-3)+10\right)\cdot(-4)=(9-18+10)\cdot(-4)=-4.$$

$$\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{7}{4}\right)\cdot(-4) - 0^2 = 7 > 0.$$

Следовательно, экстремум в точке $M(-3;\frac{1}{4})$ есть. Так как $A = -\frac{7}{4} < 0$, то в точке $M(-3;\frac{1}{4})$ – максимум функции.

6. Найдем значение функции z в точке максимума:

$$z_{\max} = z\left(-3;\frac{1}{4}\right) = \left[(x^2+6x+10)(y-2y^2-1)\right]_{\substack{x=-3\\ y=1/4}} =$$

$$= \left((-3)^2 + 6\cdot(-3) + 10\right)\cdot\left(\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{16} - 1\right) = (9-18+10)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-1\right) = -\frac{7}{8}.$$

Ответ. $\left(-3;\frac{1}{4};-\frac{7}{8}\right)$ – точка максимума функции z.

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В двух частях. – М.: Айрис-Пресс, 2010
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Е.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В двух частях. - М.: Оникс, 2009

Приложение 1

Справочный материал по элементарной математике

1. Формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

2. Формулы для нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант уравнения.

3. Формула разложения квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

4. Действия со степенями:

$$x^0 = 1 \quad (x \neq 0); \quad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}; \quad x^{-p} = \frac{1}{x^p};$$

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}; \quad \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}; \quad \left(x^p\right)^q = x^{pq};$$

$$(xy)^p = x^p \cdot y^p; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x^p}{y^p}.$$

Здесь $n \in$ Ґ; $m \in$ ў; $p, q \in$ Ў.

5. Некоторые тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x;$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

6. Значения тригонометрических функций для некоторых углов α :

Угол α / Функция	0^0	30^0	60^0	90^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{ctg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

7. Значения некоторых обратных тригонометрических функций:

$$\sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \arcsin 0 = 0;$$
$$\cos 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \arccos 1 = 0;$$
$$\operatorname{tg} 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} 0 = 0 \qquad \text{и т.п.}$$

8. Логарифмы:

$$\boxed{\log_a x = b \quad \Leftrightarrow \quad a^b = x.}$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y; \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$\log_a x^p = p \log_a x; \qquad \log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}.$$

Здесь $a > 0,\quad a \neq 1,\quad x > 0,\quad y > 0,\quad p \in$ Ў, $c > 0,\quad c \neq 1$.

9. Десятичные и натуральные логарифмы, их значения:

x	$\lg x$	$\ln x$
1	0	0
2	0,3010	0,6931
$e \approx 2{,}718$	0,4343	1
3	0,4772	1,0986
4	0,6021	1,3863
5	0,6990	1,6094
6	0,7782	1,7918
7	0,8451	1,9459
8	0,9031	2,0794
9	0,9542	2,1972
10	1	2,3026

$$\lg x = \log_{10} x;$$

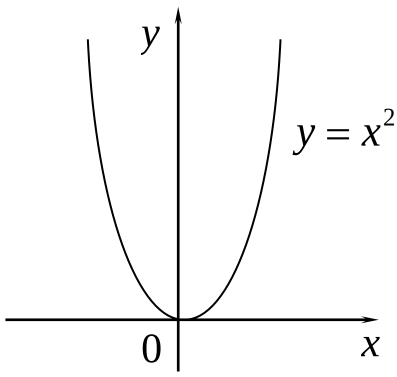
$\ln x = \log_e x$, где e=2,711828...

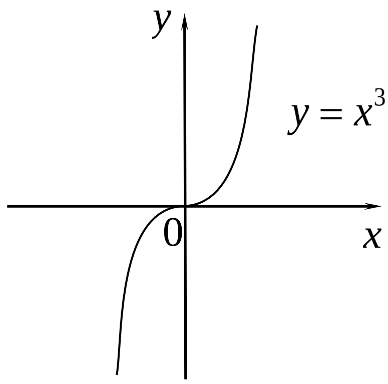
$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \approx \frac{\lg x}{0{,}4343} \approx 2{,}3026 \cdot \lg x.$$

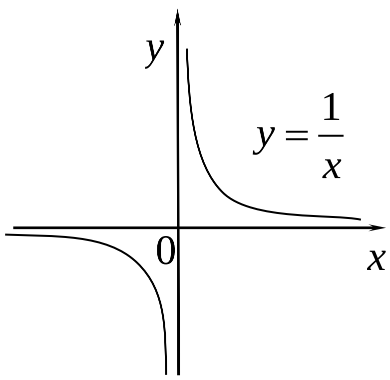
Приложение 2

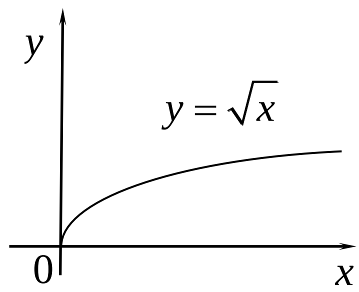
Графики основных элементарных функций

1. Степенные функции:

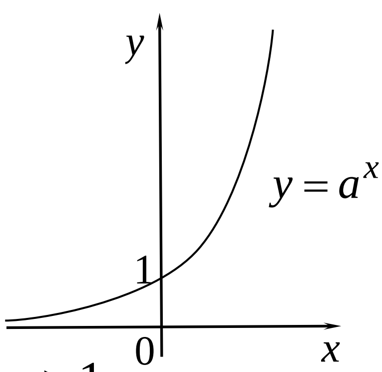




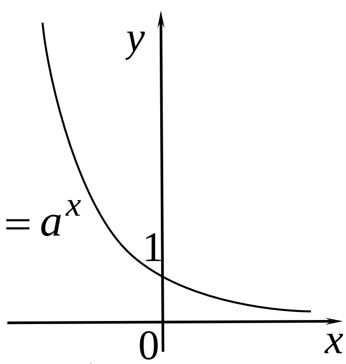




2. Показательные функции:

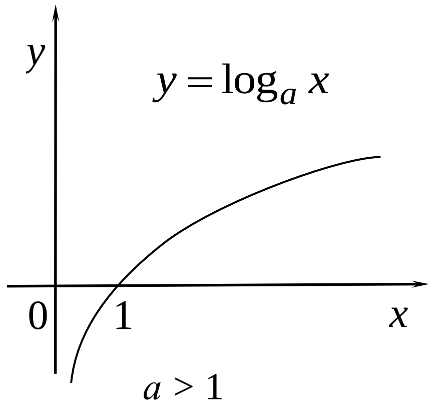


$a > 1$

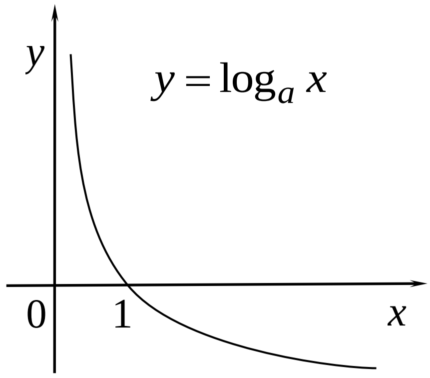


$0 < a < 1$

3. Логарифмические функции:

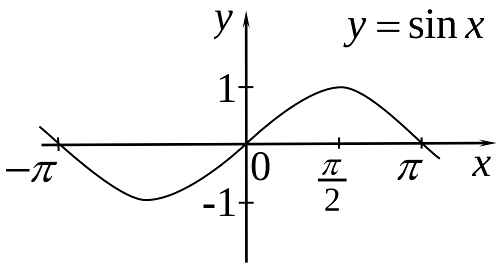


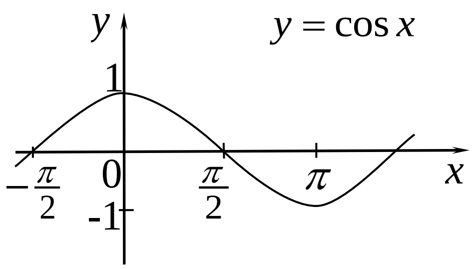
$a > 1$

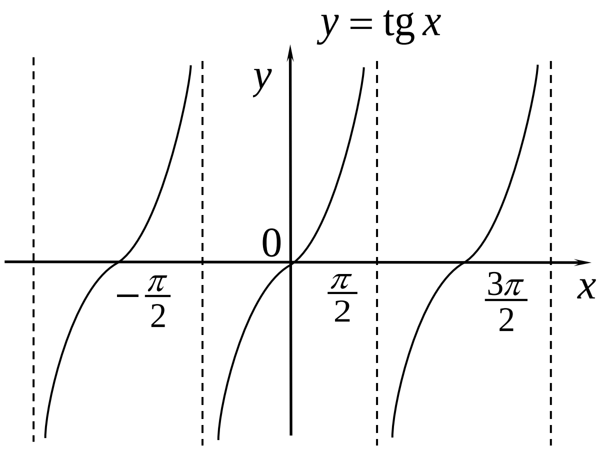


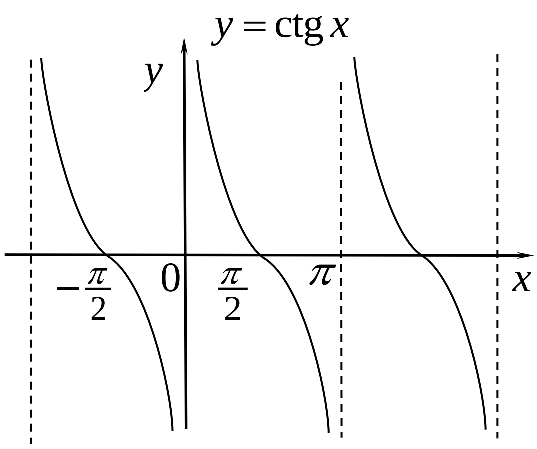
$0 < a < 1$

4. Тригонометрические функции:









Приложение 3

ТАБЛИЦА ТАНГЕНСОВ

Градусы	Доли градусов									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,0000	0,0017	0,0035	0,0052	0,0070	0,0087	0,0105	0,0122	0,0140	0,0157
1	0,0175	0,0192	0,0209	0,0227	0,0244	0,0262	0,0279	0,0297	0,0344	0,0332
2	0,0349	0,0367	0,0384	0,0402	0,0419	0,0437	0,0454	0,0472	0,0489	0,0507
3	0,0524	0,0542	0,0559	0,0577	0,0594	0,0612	0,0629	0,0647	0,0664	0,0682
4	0,0699	0,0717	0,0734	0,0752	0,0769	0,0787	0,0805	0,0822	0,0840	0,0857
5	0,0875	0,0892	0,0910	0,0928	0,0945	0,0963	0,0981	0,0998	0,1016	0,1033
6	0,1051	0,1069	0,1086	0,1104	0,1122	0,1139	0,1157	0,1175	0,1192	0,1210
7	0,1228	0,1246	0,1263	0,1281	0,1299	0,1317	0,1334	0,1352	0,1370	0,1388
8	0,1405	0,1423	0,1441	0,1459	0,1477	0,1495	0,1512	0,1530	0,1548	0,1566
9	0,1584	0,1602	0,1620	0,1638	0,1655	0,1673	0,1691	0,1709	0,1727	0,1745
10	0,1763	0,1781	0,1799	0,1817	0,1835	0,1853	0,1871	0,1890	0,1908	0,1926
II	0,1944	0,1962	0,1980	0,1998	0,2016	0,2035	0,2053	0,2071	0,2089	0,2107
12	0,2126	0,2144	0,2162	0,2180	0,2199	0,2217	0,2235	0,2254	0,2272	0,2290
13	0,2309	0,2327	0,2345	0,2364	0,2382	0,2401	0,2419	0,2438	0,2456	0,2475
14	0,2493	0,2512	0,2530	0,2549	0,2568	0,2586	0,2605	0,2623	0,2642	0,2661
15	0,2679	0,2698	0,2717	0,2736	0,2754	0,2773	0,2792	0,2811	0,2830	0,2849
16	0,2867	0,2886	0,2905	0,2924	0,2943	0,2962	0,2981	0,3000	0,3010	0,3038
17	0,3057	0,3076	0,3096	0,3115	0,3134	0,3153	0,3172	0,3191	0,3211	0,3230
18	0,3249	0,3269	0,3288	0,3307	0,3327	0,3346	0,3365	0,3385	0,3404	0,3424
19	0,3443	0,3463	0,3482	0,3502	0,3522	0,3541	0,3561	0,3581	0,3600	0,3620
20	0,3640	0,3659	0,3679	0,3699	0,3719	0,3739	0,3759	0,3779	0,3799	0,3819
21	0,3839	0 3859	0,3879	0,3899	0,3919	0,3939	0,3959	0 3979	0,4000	0,4020
22	0,4040	0,4061	0,4081	0,4101	0,4122	0,4142	0,4163	0,4183	0,4204	0,4224
23	0,4245	0,4265	0,4286	0,4307	0,4327	0,4348	0,4369	0,4390	0,4411	0,4431
24	0,4452	0,4473	0,4494	0,4515	0,4536	0,4557	0,4578	0,4599	0,4621	0,4642
25	0,4663	0,4684	0,4706	0,4727	0,4748	0,4770	0,4791	0,4813	0,4834	0,4856
26	0,4877	0,4899	0,4921	0,4942	0,4964	0,4986	0,5008	0,5029	0,5051	0,5073
27	0,5095	0,5117	0,5139	0,5161	0,5184	0,5206	0,5228	0,5250	0,5272	0,5295
28	0,5317	0,5340	0,5362	0,5384	0,5407	0,5430	0,5452	0,5475	0,5498	0,5520
29	0,5543	0,5566	0,5589	0,5612	0,5635	0,5658	0,5681	0,5704	0,5727	0,5750
30	0,5774	0,5797	0,5820	0,5844	0,5867	0,5890	0,5914	0,5938	0,5961	0,5985
31	0,6009	0,6032	0,6056	0,6080	0,6104	0,6128	0,6152	0,6176	0,6200	0,6224
32	0,6249	0,6273	0,6297	0,6322	0,6346	0,6371	0,6395	0,6420	0,6445	0,6469
33	0,6494	0,6519	0,6544	0,6569	0,6594	0,6619	0,6644	0,6669	0,6694	0,6720
34	0,6745	0,6771	0,6796	0,6822	0,6847	0,6873	0,6899	0,6924	0,6950	0,6976
35	0,7002	0,7028	0,7054	0,7080	0,7107	0,7133	0,7159	0,7186	0,7212	0,7239
36	0,7265	0,7292	0,7319	0,7346	0,7373	0,7400	0,7427	0,7454	0,7481	0,7508
37	0,7536	0,7563	0,7590	0,7618	0,7646	0,7673	0,7701	0,7729	0,7757	0,7785
38	0,7813	0,7841	0,7869	0,7898	0,7926	0,7954	0,7983	0,8012	0,8040	0,8069
39	0,8098	0,8127	0,8156	0,8185	0,8214	0,8243	0,8273	0,8302	0,8332	0,8361
40	0,8391	0,8421	0,8451	0,8481	0,8511	0,8541	0,8571	0,8601	0,8632	0,8662
41	0,8693	0,8724	0,8754	0,8785	0,8816	0,8847	0,8878	0,8910	0,8941	0,8972
42	0,9004	0,9036	0,9067	0,9099	0,9131	0,9163	0,9195	0,9228	0,9260	0,9293
43	0,9325	0,9358	0,9391	0,9424	0,9457	0,9490	0,9523	0,9556	0,9590	0,9623
44	0,9657	0,9691	0,9725	0,9759	0,9793	0,9827	0,9861	0,9896	0,9930	0,9965
45	1,0000	1,00015	1,0070	1,0105	1,0141	1,0176	1,0212	1,0247	1,0283	1,0319

Окончание прил.3

Граду-сы	Доли градусов									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
45	1,0000	1,0035	1,0070	1,0105	1,0141	1,0176	1,0212	1,0247	1,0283	1,0319
46	1,0355	1,0392	1,0428	1,0464	1,0501	1,0538	1,0575	1,0612	1,0649	1,0686
47	1,0724	1,0761	1,0799	1,0837	1,0875	1,0913	1,0951	1,0990	1,1028	1,1067
48	1,1106	1,1145	1,1184	1,1224	1,1263	1,1303	1,1343	1,1383	1,1423	1,1463
49	1,1504	1,1544	1,1585	1,1626	1,1667	1,1708	1,1750	1,1792	1,1833	1,1875
50	1,1918	1,1960	1,2002	1,2045	1,2088	1,2131	1,2174	1,2218	1,2261	1,2305
51	1,2349	1,2393	1,2437	1,2483	1,2527	1,2572	1,2617	1,2662	1,2708	1,2753
52	1,2799	1,2846	1,2892	1,2938	1,2985	1,3032	1,3079	1,3127	1,3175	1,3222
53	1,3270	1,3319	1,3367	1,3416	1,3465	1,3514	1,3564	1,3613	1,3663	1,3713
54	1,3764	1,3814	1,3865	1,3916	1,3968	1,4019	1,4071	1,4124	1,4176	1,4229
55	1,4281	1,4335	1,4388	1,4442	1,4496	1,4550	1,4605	1,4659	1,4715	1,4770
56	1,4826	1,4882	1,4938	1,4994	1,5051	1,5108	1,5166	1,5224	1,5282	1,5340
57	1,5399	1,5458	1,5517	1,5577	1,5637	1,5697	1,5757	1,5818	1,5880	1,5941
58	1,6003	1,6066	1,6128	1,6191	1,6255	1,6319	1,6383	1,6447	1,6512	1,6577
59	1,6643	1,6709	1,6725	1,6842	1,6909	1,6977	1,7045	1,7113	1,7182	1,7251
60	1,7321	1,7391	1,7461	1,7532	1,7603	1,7675	1,7747	1,7820	1,7893	1,7966
61	1,8040	1,8115	1,8190	1,8265	1,8341	1,8418	1,8495	1,8572	1,8650	1,8728
62	1,8807	1,8887	1,8967	1,9047	1,9128	1,9210	1,9292	1,9375	1,9458	1,9542
63	1,9626	1,9711	1,9797	1,9883	1,9970	2,0057	2,0145	2,0233	2,0323	2,0413
64	2,0503	2,3463	2,3482	2,3502	2,3522	2,3541	2,3561	2,3581	2,3600	2,3620
65	2,1445	2,1543	2,1642	2,1742	2,1842	2,1943	2,2045	2,2148	2,2251	2,2355
66	2,2460	2,2566	2,2673	2,2781	2,2889	2,2998	2,3109	2,3220	2,3332	2,3445
67	2,3559	2,3673	2,3798	2,3906	2,4023	2,4142	2,4262	2,4383	2,4504	2,4627
68	2,4751	2,4876	2,5002	2,5129	2,5257	2,5386	2,5517	2,5649	2,5782	2,5916
69	2,6051	2,6187	2,6325	2,6464	2,6605	2,6746	2,6889	2,7034	2,7179	2,7326
70	2,7475	2,7625	2,7776	2,7927	2,8083	2,8239	2,8397	2,8556	2,8716	2,8878
71	2,9042	2,9208	2,9375	2,9544	2,9714	2,9887	3,0061	3,0237	3,0415	3,0595
72	3,0777	3,0961	3,1146	3,1334	3,1524	3,1716	3,1910	3,2106	3,2305	3,2506
73	3,2709	3,2914	3,3122	3,3332	3,3544	3,3759	3,3977	3,4197	3,4420	3,4646
74	3,4874	3,5105	3,5329	3,5576	3,5816	3,6059	3,6305	3,6554	3,6806	3,7062
75	3,7321	3,7583	3,7848	3,8118	3,8391	3,8667	3,8947	3,9232	3,9520	3,9812
76	4,0108	4,0408	4,0713	4,1022	4,1335	4,1653	4,1976	4,2303	4,2635	4,2972
77	4,3315	4,3662	4,4015	4,4373	4,4737	4,5107	4,5483	4,5864	4,6252	4,6646
78	4,7046	4,7453	4,7867	4,8288	4,8716	4,9152	4,9594	5,0045	5,0504	5,0970
79	5,1446	5,1929	5,2422	5,2924	5,3435	5,3955	5,4486	5,5026	5,5578	5,6140
80	5,6713	5,7297	5,7894	5,8502	5,9124	5,9758	6,0405	6,1066	6,1742	6,2432
81	6,3138	6,3859	6,4596	6,5350	6,6122	6,6912	6,7720	6,8548	6,9395	7,0264
82	7,1154	7,2066	7,3002	7,3962	7,4947	7,5958	7,6996	7,8062	7,9158	8,0285
83	8,1443	8,2636	8,3863	8,5126	8,6427	8,7769	8,9152	9,0579	9,2052	9,3572
84	9,5144	9,6768	9,8448	10,0187	10,1988	10,3854	10,5789	10,7797	10,9882	11,2048
85	11,4301	11,6645	11,9087	12,1632	12,4288	12,7062	12,9962	13,2996	13,6174	13,9507
86	14,3007	14,6685	15,0557	15,4638	15,8945	16,3499	16,8319	17,3432	17,8863	18,4645
87	19,0811	19,7403	20,4465	21,2049	22,0217	22,9038	23,8593	24,8978	26,0307	27,2715
88	28,6363	30,1444	31,8205	33,6935	35,8006	38,1885	40,9174	44,0661	47,7395	52,0807
89	57,2900	63,6567	71,6151	81,8470	95,4895	114,588	143,237	190,984	296,477	572,957
90	∞									