

**Завдання 1.** Знайти операторну передаточну функцію і часові характеристики для пасивного чотирьополосника. Номера варіантів з відповідаючими їм номерами рисунків (рис. 1-25) і параметрами елементів схем приведені в табл. 1.

### Методичні вказівки

При підготовці до виконання завдання 1 необхідно ознайомитися:

- з методикою складання дифференціальних і операторних рівнянь для лінійних електричних кіл та схем [1, с.9-27; 13, с.53-58; 16, с.5-9, 28-29, 33-43], а також з матричною формою їх запису [1, с.82-106; 18, с.50-79; 19, с.5-19];
- з взаємозв'язком дифференціальних рівнянь, передаточних функцій і часових характеристик [2, с.58-61; 3, с.39-43; 6, с.29-32; 7, с.6-7; 9, с.18-22; 12, с.40-44, 49-52; 14, с.58-59, 111-115, 181-183; 18, с.133-135, 143-145];
- з перетворенням Лапласа і його властивостями, формулами (теоремами) розкладу [1, с.219-229; 2, с.176-183; 3, с.39-42; 12, с.37-40; 14, с.421-425; 18, с.23-33, 451-457];

**Вказівка!** Передаточну функцію  $W(p)$  спочатку необхідно вивести в загальному вигляді:

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0},$$

а потім підставити числові значення параметрів і привести до нормованого вигляду:

$$W(p) = K_0 \frac{B_0(p)}{A_0(p)},$$

де  $K_0 = b_0/a_0$ ;  $B_0(p) = \frac{b_m p^m}{b_0} + \frac{b_{m-1} p^{m-1}}{b_0} + \dots + \frac{b_1 p}{b_0} + 1$ ;

$$A_0 = \frac{a_m p^m}{a_0} + \frac{a_{m-1} p^{m-1}}{a_0} + \dots + \frac{a_1 p}{a_0} + 1.$$

Часові характеристики схеми – вагову (імпульсну) і перехідну  $h(t)$  функції знаходять по передаточній функції  $W(p)$ :  $\omega(t) = L^{-1}\{W(p)\}$ ;  $h(t) = L^{-1}\{W(p)/p\}$ , де  $L^{-1}$  - символ зворотнього перетворення Лапласа.

Для знаходження оригіналів  $\omega(t)$  і  $h(t)$  використовуємо формули розкладу [12; 19]. Передаточні функції являються, як правило, дрібно-раціональними функціями комплексної змінної  $p$ , тобто їх можна представити в вигляді  $W(p) = B(p)/A(p)$ . Якщо дріб  $B(p)/A(p)$  нескорочуєма, тобто степінь полінома знаменника  $A(p)$  більше

Таблиця 1

Номер варіанта	Номер рисунок- ка	R <sub>1</sub> , Ом	R <sub>2</sub> , Ом	R <sub>3</sub> , Ом	L <sub>1</sub> , мГн	L <sub>2</sub> , мГн	C <sub>1</sub> , мкФ	C <sub>2</sub> , мкФ
1	1	2К	100	200	15К	-	10К	-
2	2	50	10К	-	5К	-	1000	-
3	3	100	500	-	10К	-	10	5К
4	4	20К	150	-	5К	-	10К	-
5	5	5К	120	-	-	-	К	10К
6	6	0,1К	200	-	-	-	5К	15К
7	7	100	5К	300	К	-	20К	-
8	8	К	2К	3К	10К	-	1000	-
9	9	50	100	-	5К	20К	-	-
10	10	100	15К	-	10	-	50К	-
11	11	500	10	-	15К	-	50	-
12	12	0,5К	30	100	10	-	15К	-
13	13	10	40	150	10К	-	0,1К	-
14	14	2К	5К	-	20К	-	200	-
15	15	100	0,1К	200	50	-	10К	-
16	16	2К	50	3К	-	-	1000	10К
17	17	200	15К	250	5К	-	20К	-
18	18	30	2К	100	10К	-	5К	-
19	19	500	10К	20	К	-	500	-
20	20	1000	150	10К	150	-	10К	-
21	21	100	5К	500	20	-	150	-
22	22	10	300	20К	50	-	30К	-
23	23	200	50К	1000	10К	-	2500	-
24	24	50	10К	300	25	-	100	5К
25	25	20К	500	100	15К	-	200	-

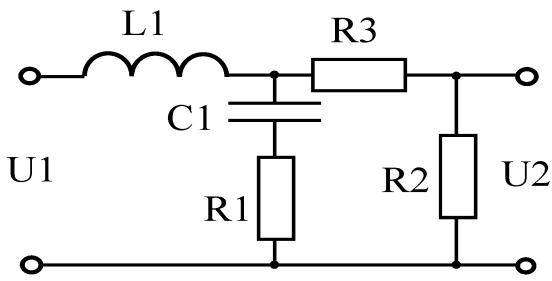


Рис. 1

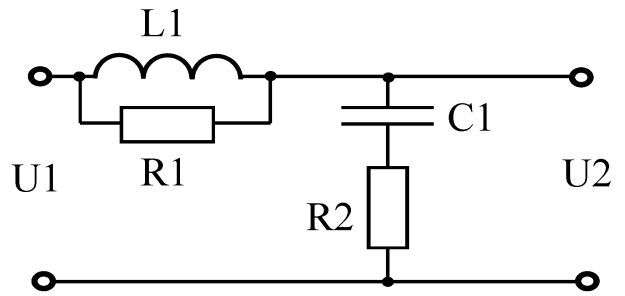


Рис. 2

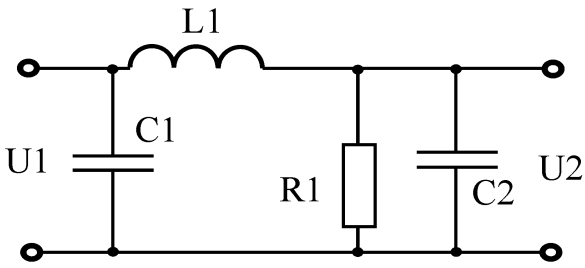


Рис. 3

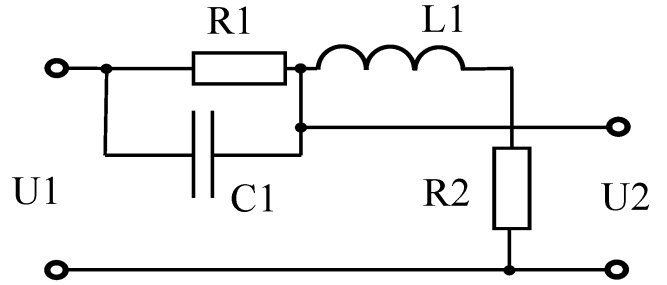


Рис. 4

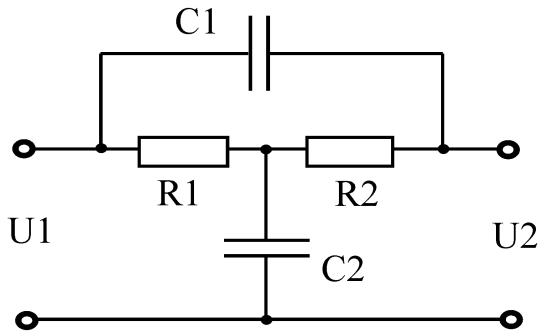


Рис. 5

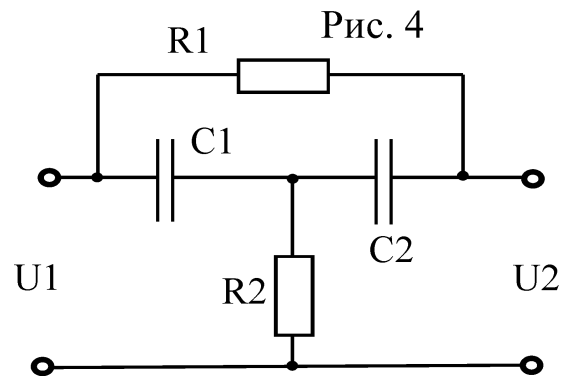


Рис. 6

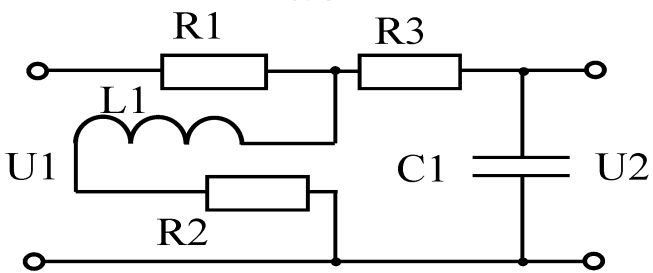


Рис. 7

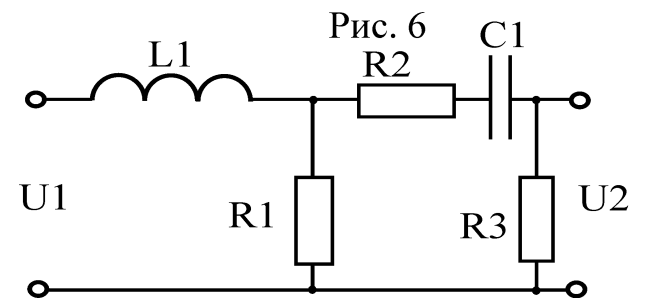


Рис. 8

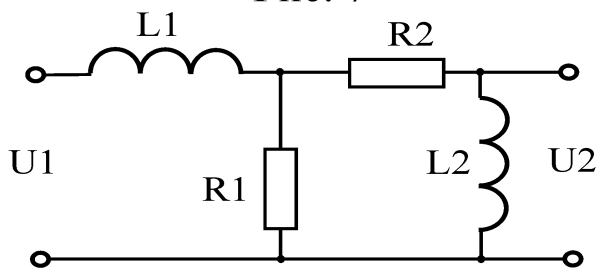


Рис. 9

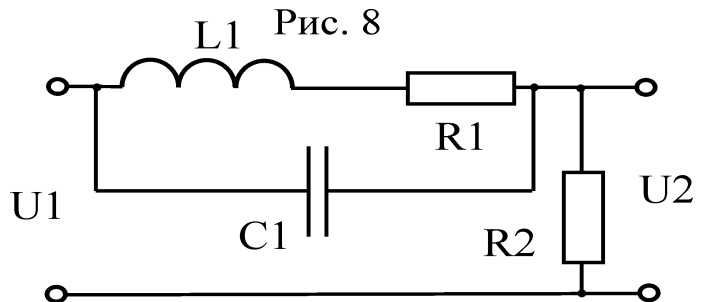


Рис. 10

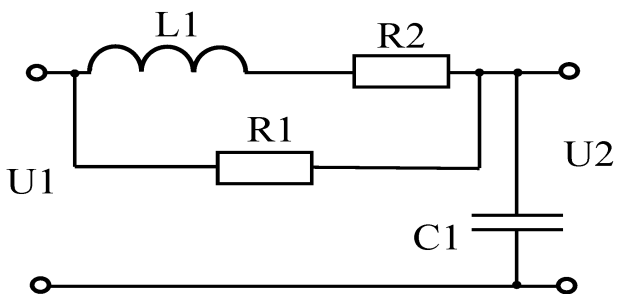


Рис. 11

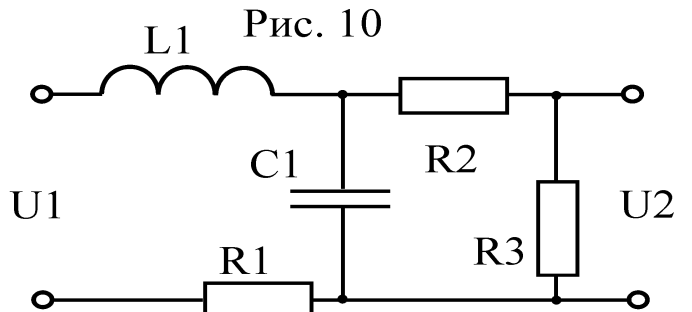


Рис. 12

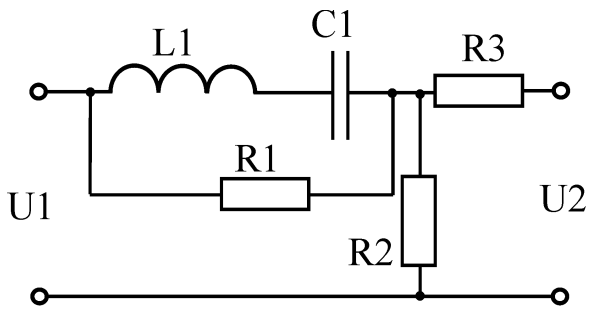


Рис. 13

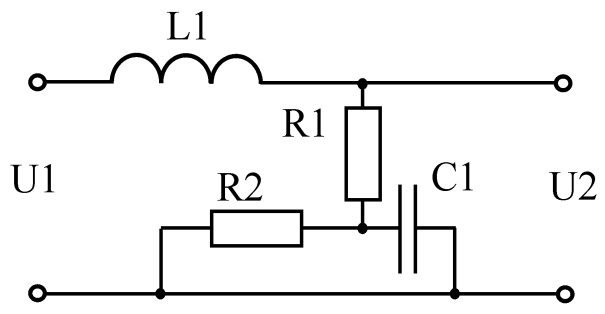


Рис. 14

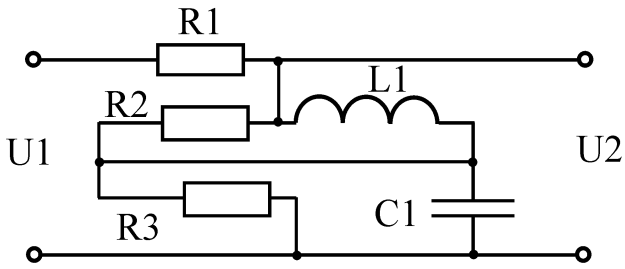


Рис. 15

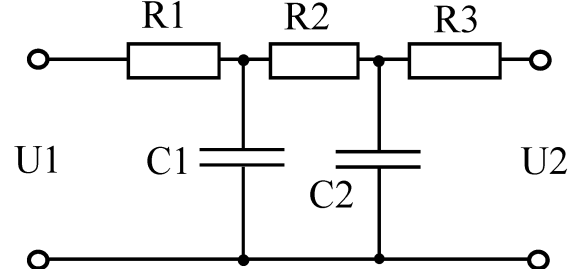


Рис. 16

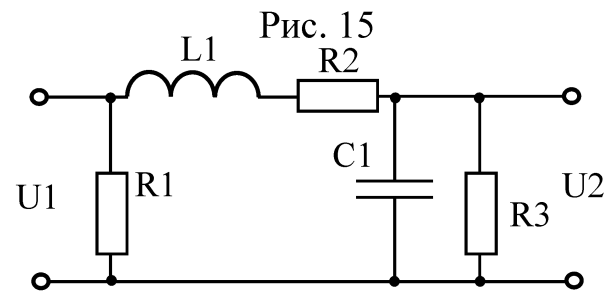


Рис. 17

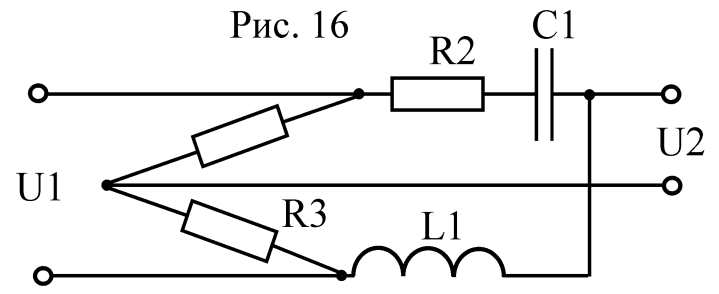


Рис. 18

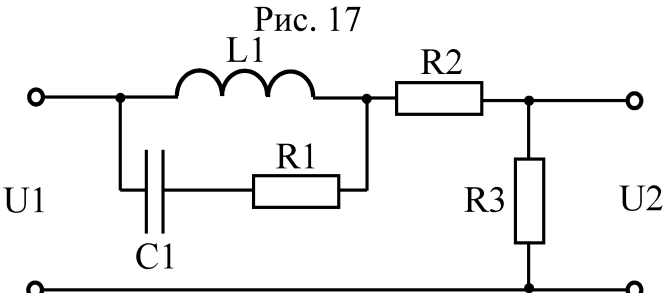


Рис. 19

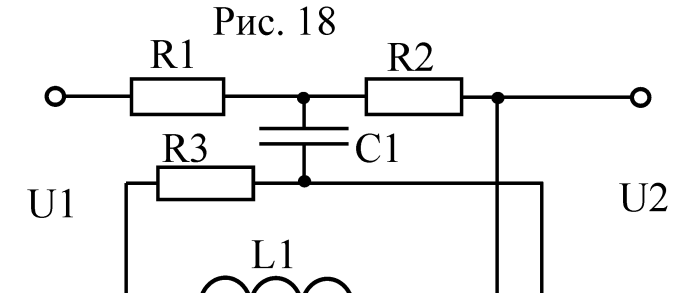


Рис. 20

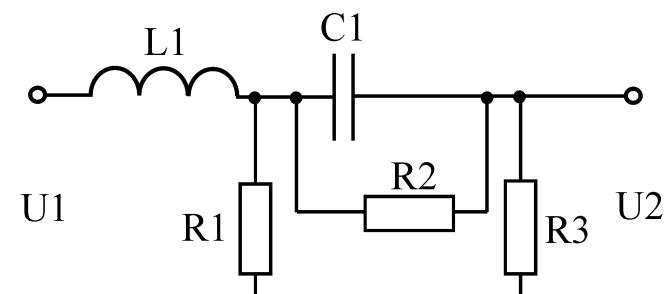


Рис. 21

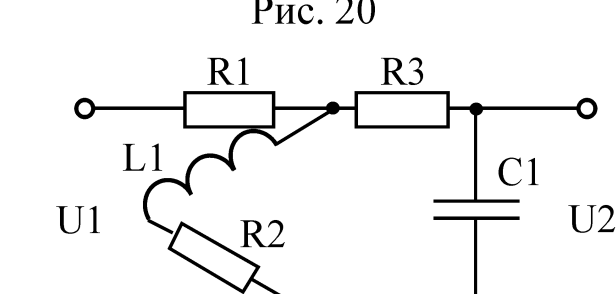


Рис. 22

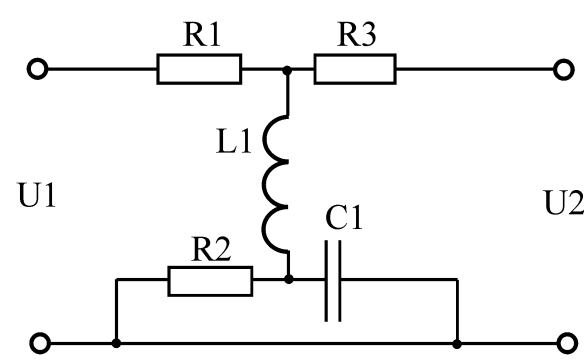


Рис. 23

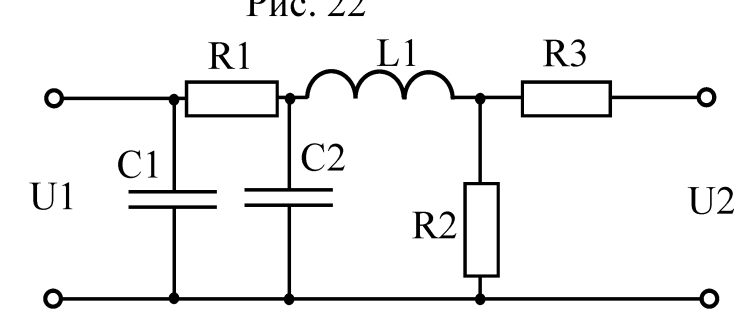


Рис. 24

степені полінома чисельника  $B(p)$ , від оригіналу функції  $W(p)$  можна знайти по кореням характеристичного полінома  $A(p)$ . Нулі знаменника (корені характеристичного полінома) називають полюсами функції  $W(p)$ . Розглянемо два випадка: всі полюси прості і всі, або деякі полюси кратні. В першому випадку функція - оригінал визначається за виразом :

$$\omega(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[W(p)e^{pt}, p_k] = \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{p_k t},$$

де  $n$ -ступінь полінома  $A(p)$ ;  $p_k$  - корені рівняння  $A(p)=0$ ;

$$A'(p_k) = \left. \frac{dA(p)}{dp} \right|_{p=p_k}.$$

Якщо функція  $W(p)$  має нульовий полюс, тобто  $W(p) = \frac{B(p)}{pC(p)}$ , то

$$\omega(t) = \frac{B(0)}{C(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{B(p_k)}{p_k C'(p_k)} e^{p_k t}$$

Якщо функція  $W(p)$  має комплексно-спряженні полюси  $p = \alpha \pm j\beta$ , то і відрахування функції в цих точках будуть комплексно-спряженими, тому їх сума дорівнює подвійній дійсній частині

$$\operatorname{Res}[W(p), \alpha + j\beta] + \operatorname{Res}[W(p), \alpha - j\beta] = 2 \operatorname{Re}\{\operatorname{Res}[W(p), \alpha + j\beta]\} = 2 \operatorname{Re}\{\operatorname{Res}[W(p), \alpha - j\beta]\}.$$

В другому випадку функції

$$\omega(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \left\{ \frac{d^{m_k - 1}}{dp^{m_k - 1}} \left[ [p - p_k]^{m_k} \frac{B(p)}{A(p)} e^{pt} \right] \right\},$$

де  $m_k$  – кратність  $k$ -го полюса.

**Зауваження.** В випадках, коли порядок чисельника зображення, наприклад, функції  $W(p)$  дорівнює або вище, ніж у знаменника, при зворотньому перетворенні в оригіналі функції  $\omega(t)$  з'являються  $\delta(t)$ -функція і її похідна, наприклад:

$$W(p) = \frac{p + \alpha}{p + \beta} = 1 + \frac{\alpha - \beta}{p + \beta}.$$

Застосовуючи зворотнє перетворення Лапласа, отримаємо:

$$\omega(t) = L^{-1}\{W(p)\} = \delta(t) + (\alpha - \beta)e^{-\beta t}.$$

**Приклад.** Вивести операторну передаточну функцію пасивного чотирьохполюсника, схема якого показана на рис.26. Знайти його часові

характеристики при наступних значеннях параметрів:  $R_1 = 50 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 150 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 300 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $C = 10^{-3} \text{ Ф}$ .

Запишемо рівняння в операторній формі, використовуючи метод контурних струмів [1;18],

$$\begin{cases} U_1(p) = (R_1 + pL_1)I_1(p) - pL_1I_2(p); \\ 0 = -pL_1I_2(p) + \left(R_2 + pL_1 + \frac{1}{pC_1}\right)I_2(p) - \frac{1}{pC_1}I_3(p); \\ -U_2(p) = -\frac{1}{pC_1}I_2(p) + \left(R_3 + \frac{1}{pC_1}\right)I_3(p). \end{cases}$$

Враховуючи, що  $I_3(p) = 0$ , рівняння можна переписати в вигляді:

$$\begin{cases} U_1(p) = (R_1 + pL_1)I_1(p) - pL_1I_2(p); \\ 0 = -pL_1I_2(p) + \left(R_2 + pL_1 + \frac{1}{pC_1}\right)I_2(p); \\ -U_2(p) = -\frac{1}{pC_1}I_2(p). \end{cases}$$

З перших двох рівнянь виключаємо струм  $I_1(p)$ :

$$I_2(p) = \frac{U_1(p)pL_1}{\left(R_2 + pL_1 + \frac{1}{pC_1}\right)(R_1 + pL_1) - p^2L_1^2}.$$

Підставляючи вираз для струму  $I_2(p)$  в третє рівняння і враховуючи, що передаточна функція визначається співвідношенням,  $W(p) = U_2(p)/U_1(p)$  отримуємо

$$W(p) = \frac{pL_1}{p^2L_1C_1(R_1 + R_2) + (C_1R_1R_2 + L_1)p + R_1}.$$

Враховуючи чисельні значення параметрів, отримаємо

$$W(p) = \frac{0.1p}{2 \cdot 10^{-2}p^2 + 7.6p + 50}$$

або, приводячи до нормованого виду, маємо

$$W(p) = 2 \cdot 10^{-3} \frac{p}{4 \cdot 10^{-4}p^2 + 0.152p + 1}.$$

Знаходимо часові характеристики схем. Знайдемо корені характеристичного многочлена (полуса  $W(p)$ )  $4 \cdot 10^{-4}p^2 + 0.152p + 1 = 0$ , отримуємо  $p_1 = -6.696975$   $p_2 = -373.3030$ .

Для знаходження вагової функції скористаємось формулою розкладання (випадок простих полюсів):

$$\omega(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{p_k t} = 2 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{-6.696975e^{-6.696975t}}{8 \cdot 10^{-4}(-6.696975) + 0.152} + \frac{-373.303e^{-373.303t}}{8 \cdot 10^{-4}(-373.303) + 0.152} \right] = 5.091337e^{-6.696975t} - 0.091337e^{-373.303t}.$$

Знайдемо перехідну характеристику

$$h(t) = L^{-1}\{W(p)/p\} = L^{-1}\{H(p)\};$$

$$H(p) = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-4} p^2 + 0.125p + 1}.$$

Тоді

$$h(t) = 2 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{e^{-6.696975t}}{8 \cdot 10^{-4}(-6.696975) + 0.152} + \frac{e^{-373.303t}}{8 \cdot 10^{-4}(-373.303) + 0.152} \right] = 0.01364e^{-6.696975t} - 0.01364e^{-373.303t}.$$

При дослідженні складних електронних систем рівняння в основному записують в матричній формі. Причому однією з найбільш простих і зручних для аналізу електронних схем, являється система вузлових рівнянь (метод вузлових напруг) [1; 18-19]. Передаточну функцію системи в цьому випадку можна розрахувати безпосередньо по матриці провідності схеми

$$W(p) = \frac{\Delta(\alpha + \gamma)(\beta + \delta)}{\Delta(\alpha + \gamma)(\alpha + \gamma) + G_n \Delta(\alpha + \gamma)(\alpha + \gamma), (\beta + \delta)(\beta + \delta)},$$

де  $\Delta(\alpha + \gamma)(\beta + \delta)$  - сумарне алгебраїчне доповнення, яке отримують з визначника  $\Delta$  матриці схеми після викреслення рядка  $\alpha$  і додавання його до рядка  $\gamma$ , викреслення стовбчика  $\beta$  і додавання його до стовбчика  $\delta$ , а також множення на  $(-1)^{\alpha+\beta}$ ;  $\gamma, \alpha$  і  $\beta, \delta$  - відповідно вхідні і вихідні вузли чотирьохполюсника,  $G_n$  - провідність навантаження.

Якщо  $\gamma$  або  $\delta$  співпадає з базовим вузлом, тобто  $\gamma = 0$  або  $\delta = 0$ , то додавання з індексом 0 зводиться до одиночного індексу, що означає виключення відповідного рядка або стовбчика.

На практиці достатньо часто спостерігається випадок, коли вхід і вихід чотирьохполюсника мають загальний полюс, який і вибирають в якості базисного. При цьому

$$W(p) = \frac{\Delta\alpha\beta}{\Delta\alpha\alpha + G_n + \Delta\alpha\alpha\beta\beta}$$

Для знаходження передаточної функції чотирьохполюсника (див.рис.26) необхідно попередньо сформулювати матрицю провідності схеми.

Для розглядаємого приклада вона буде мати вигляд

		1	2	3	4
Y=	1	G <sub>1</sub>	-G <sub>1</sub>	0	0
	2	-G <sub>1</sub>	G <sub>1</sub> +G <sub>2</sub> + $\frac{1}{pL}$	-G <sub>2</sub>	0
	3	0	-G <sub>2</sub>	G <sub>2</sub> +G <sub>3</sub> +pC <sub>1</sub>	-G <sub>3</sub>
	4	0	0	-G <sub>3</sub>	G <sub>3</sub>

Знаходимо передаточну функцію, скориставшись співвідношенням

$$W(p) = \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{11}}$$

		1	2	3	
Δ <sub>14</sub> =	2	-G <sub>1</sub>	G <sub>1</sub> +G <sub>2</sub> + $\frac{1}{pL}$	-G <sub>2</sub>	= G <sub>1</sub> G <sub>2</sub> G <sub>3</sub>
	3	0	-G <sub>2</sub>	G <sub>2</sub> +G <sub>3</sub> +pC <sub>1</sub>	
	4	0	0	-G <sub>3</sub>	

		2	3	4	
Δ <sub>11</sub> =	2	G <sub>1</sub> +G <sub>2</sub> + $\frac{1}{pL}$	-G <sub>2</sub>	0	=
	3	-G <sub>2</sub>	G <sub>2</sub> +G <sub>3</sub> +pC <sub>1</sub>	-G <sub>3</sub>	
	4	0	-G <sub>3</sub>	G <sub>3</sub>	

$$= (-1)^{1+1} \left[ \left( G_1 + G_2 + \frac{1}{pL} \right) (G_2 + G_3 + pC_1) G_3 - G_3^2 \left( G_1 + G_2 + \frac{1}{pL} \right) - G_2^2 G_3 \right] =$$

$$= \frac{p^2 L_1 C_1 (G_1 G_3 + G_2 G_3) + p(C_1 G_3 + L_1 G_1 G_2 G_3) + G_2 G_3}{pL_1}$$



тоді

$$W(p) = \frac{pL_1G_1G_2}{p^2L_1C_1(G_1 + G_2) + p(C_1 + L_1G_1G_2) + G_2}.$$

Підставляючи чисельні значення параметрів

$$W(p) = \frac{p \cdot 0.1 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 6.667 \cdot 10^{-3}}{p^2 \cdot 0.1 \cdot 10^{-2} \cdot 2.667 \cdot 10^{-3} + 1.01333 \cdot 10^{-3} p + 6.667 \cdot 10^{-3}}$$

і приводячи до нормованого виду, в кінцевому результаті отримаємо

$$W(p) = 2 \cdot 10^{-3} \frac{p}{4 \cdot 10^{-4} p^2 + 0.152p + 1}.$$

**Завдання 2.** Вивести передаточну функцію чотирьохполосника на операційному підсилювачі. Приймати вхідний опір операційного підсилювача і його коефіцієнт передачі  $K_0$  нескінченно великим (ідеальний підсилювач). Визначити реакцію кола на задаючу дію  $g(t)$ . Вихідні дані приведені в табл. 2, схеми показані на рис. 27-51.

### Методичні вказівки

При підготовці до виконання завдання 2 потрібно ознайомитись з вказівками, приведеними в завданні 2, і повторити методику складання матриці провідності схем з залежними джерелами живлення [19, с.15-19, 39-45, 85-91].

**Приклад.** Вивести передаточну функцію пристрою, зібраного на операційному підсилювачі (рис.52). Знайти реакцію на задану дію  $g(t) = 5 + \sin 2t$  при наступних значеннях параметрів елементів схеми:  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 1000$  Ом,  $C = 100$  мкФ.

У відповідності з першим законом Кірхгофа  $I_1(p) = I_2(p) + I_3(p)$ .

Оскільки підсилювач ідеальний, то  $I_3(p) = 0$ , отже,  $I_1(p) = I_2(p)$ .

Виражаючи струми  $I_1(p), I_2(p)$  через напруги  $U_1(p), U_2(p), U_3(p)$ , отримаємо

$$I_1(p) = \frac{U_1(p) - U_3(p)}{R_1}; \quad I_2(p) = \frac{U_3(p) - U_2(p)}{R_2 / (pC_1R_2 + 1)}.$$

Враховуючи, що  $U_2(p) = -K_0 U_3(p)$ , отримаємо

$$\frac{U_1(p) + U_2(p) / K_0}{R_1} = \frac{-U_2(p) / K_0 - U_2(p)}{R_2 / (pC_1R_2 + 1)}.$$

Оскільки операційний підсилювач ідеальний,  $K_0 \rightarrow \infty$ ,

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{R_2}{R_1(pC_1R_2 + 1)}.$$

**Таблиця 2**

Номер варіан- ту	Номер рису- нка	R <sub>1</sub> , Ом	R <sub>2</sub> , Ом	R <sub>3</sub> , Ом	R <sub>4</sub> , Ом	C <sub>1</sub> , мкФ	C <sub>2</sub> , мкФ	g(t)
1	27	100	20К	500	1000	10К	-	δ (t-5)
2	28	50К	1500	-	-	15К	100	sin10t
3	29	300	10К	750	-	20К	-	5t
4	30	500	5К	-	-	150	5К	10e <sup>-2t</sup>
5	31	10К	200	300	-	50	15К	δ (t)
6	32	50	1000	5К	-	0,1К	-	cos50t
7	33	К	75	250	-	2К	50	10
8	34	150	20К	-	-	5К	150	sin5t
9	35	10К	300	20К	1500	100	-	δ (t-2)
10	36	700	25К	150	-	10К	К	5+10e <sup>-10t</sup>
11	37	200	10К	-	-	1000	15К	10cost
12	38	400	4К	-	-	40К	750	5(t-2)
13	39	1000	50К	0,1К	-	500	К	1+sin5t
14	40	200	500	10К	5К	200	5К	5+e <sup>-t</sup>
15	41	5К	150	500	-	150	10К	10+δ (t)
16	42	15К	800	200	-	100К	-	δ (10-t)
17	43	330	910	5К	-	150	-	10+cos5t
18	44	30	850	220	-	20К	10К	δ (t)
19	45	600	К	810	-	330	500	sin(t-10)
20	46	20К	50К	-	-	1500	750	5e <sup>-10t</sup> +10
21	47	150	330	5К	-	150	20К	cos(t-10)
22	48	200	950	-	-	5К	400	δ (t)+5(t-5)
23	49	30К	500	10К	-	150	5К	5sin10t
24	50	80	120	500	20К	10	30К	5+10e <sup>-t</sup>
25	51	1100	800	30К	-	250	10К	δ (t-5)

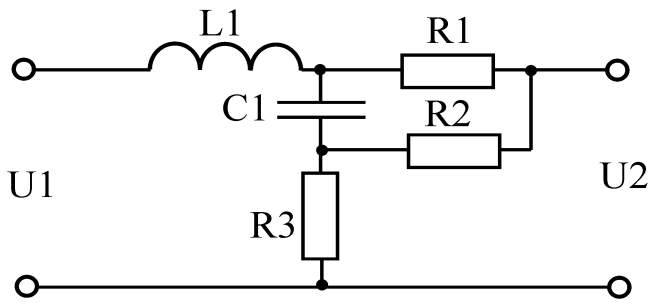


Рис. 25

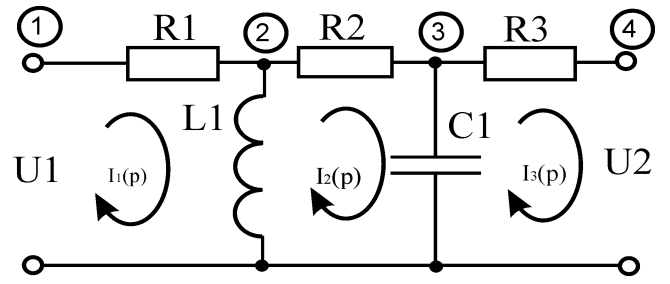


Рис. 26

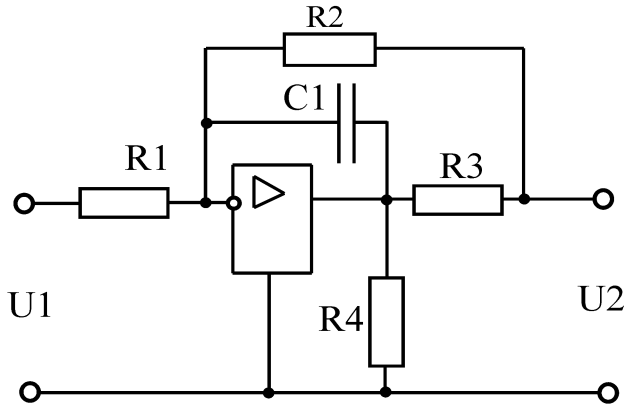


Рис. 27

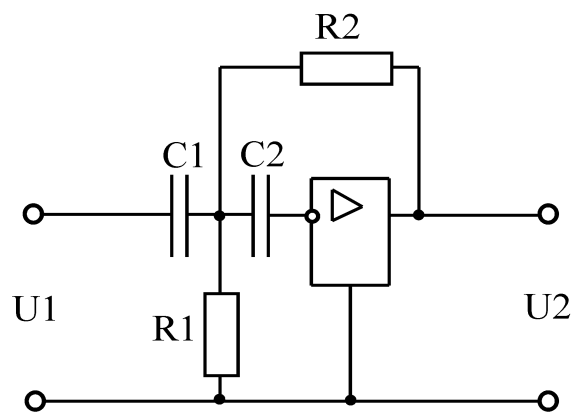


Рис. 28

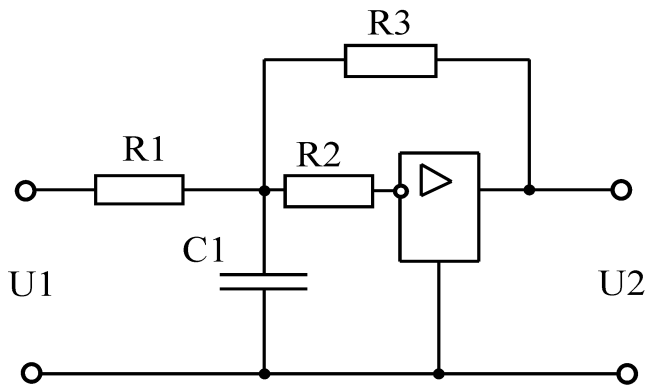


Рис. 29

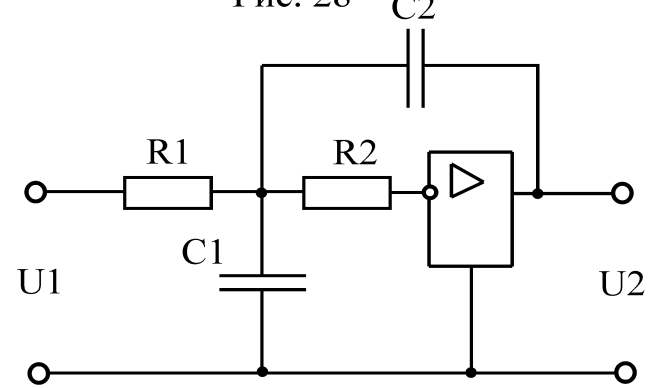


Рис. 30

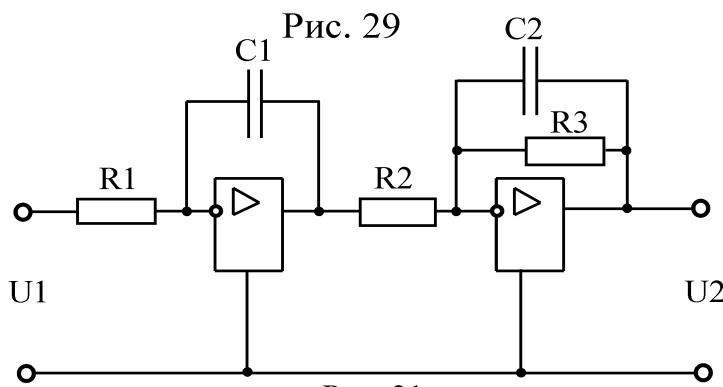


Рис. 31

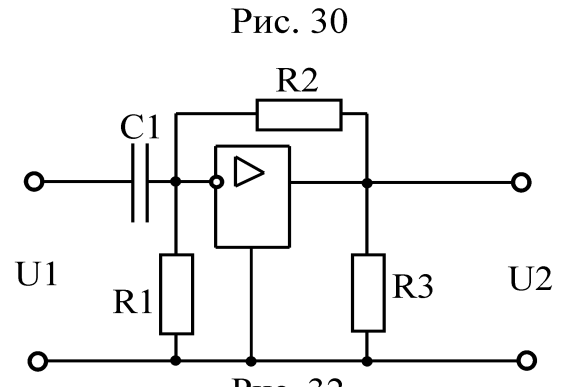


Рис. 32

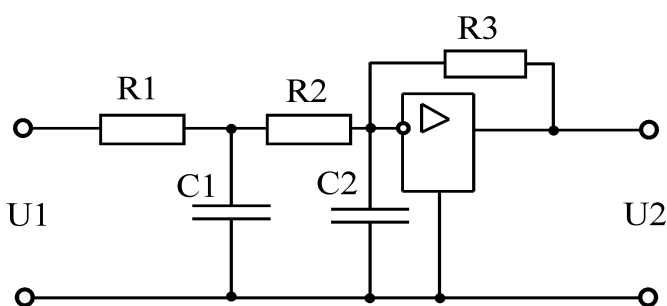


Рис. 33

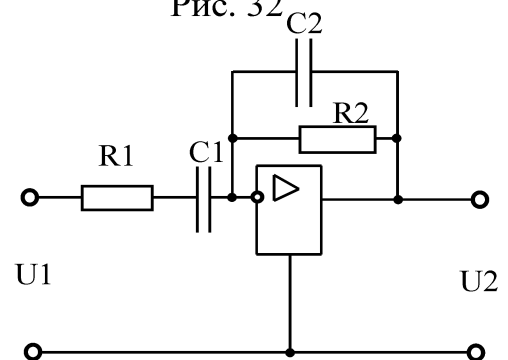


Рис. 34

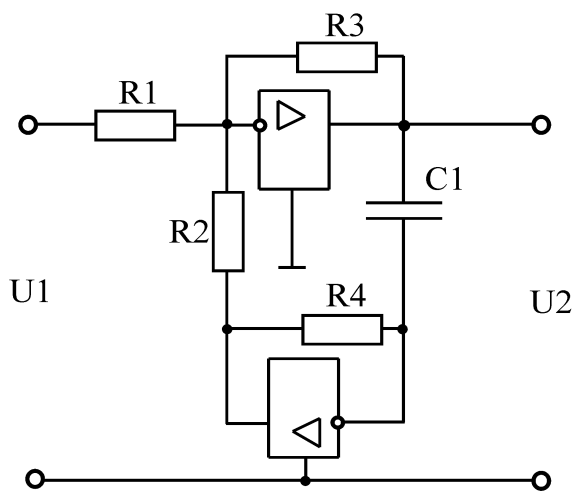


Рис. 35

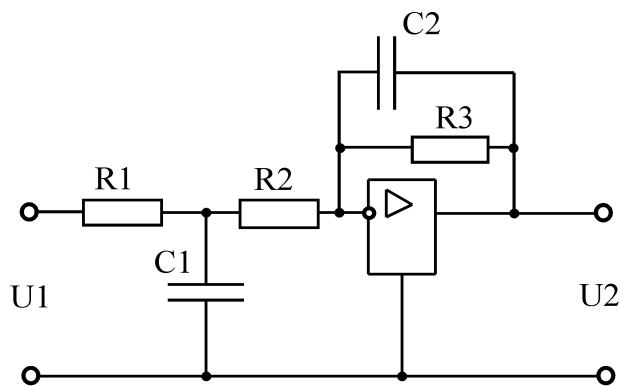


Рис. 36

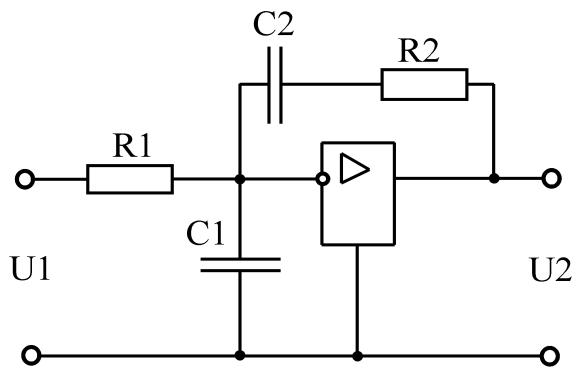


Рис. 37

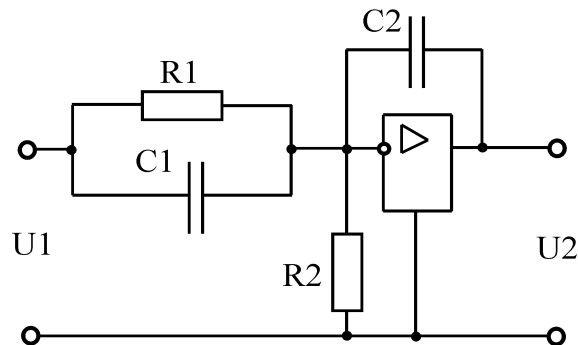


Рис. 38

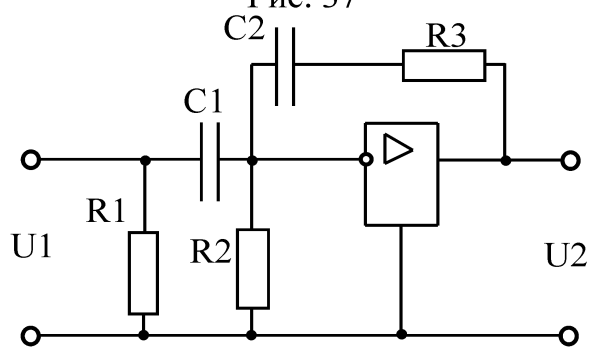


Рис. 39

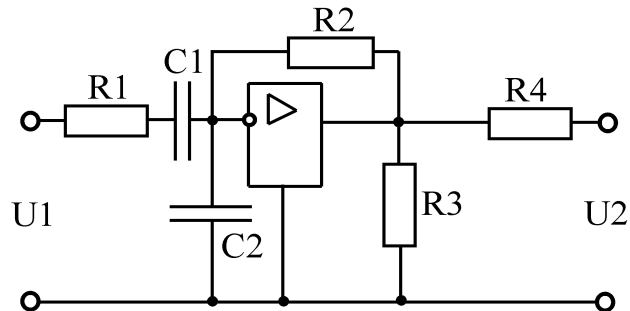


Рис. 40

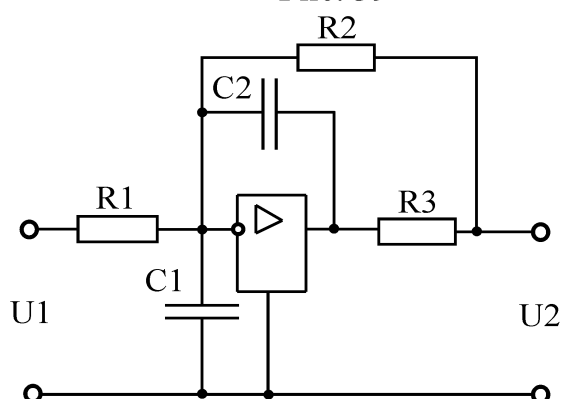


Рис. 41

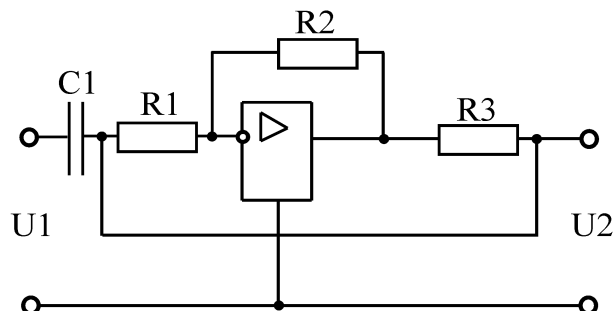


Рис. 42

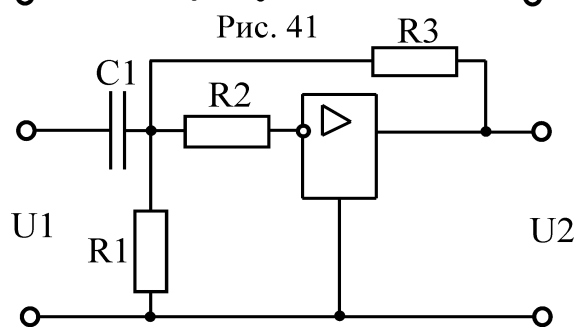


Рис. 43

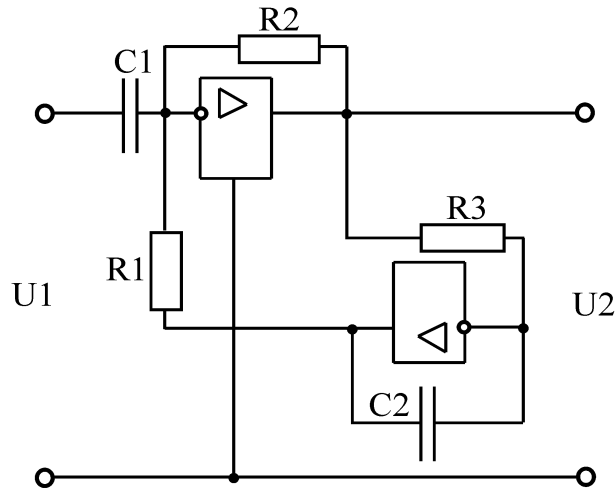


Рис. 44

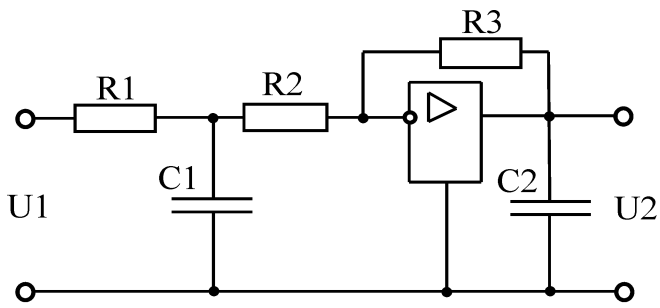


Рис. 45

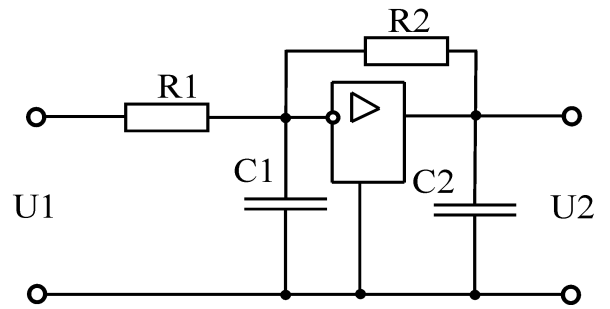


Рис. 46

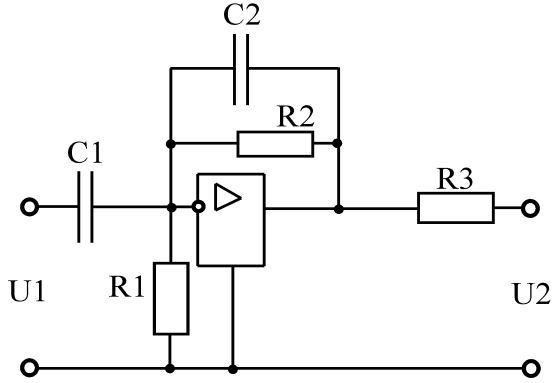


Рис. 47

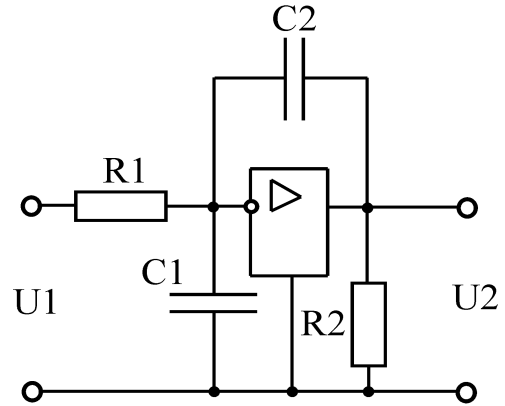


Рис. 48

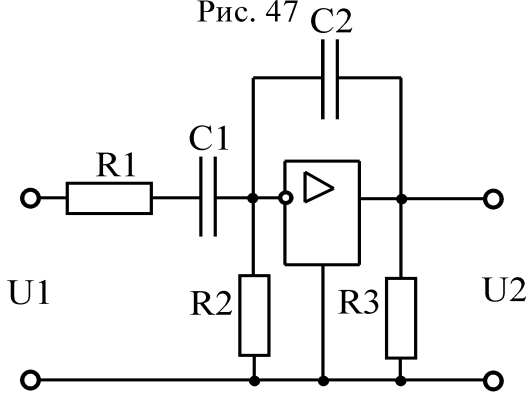


Рис. 49

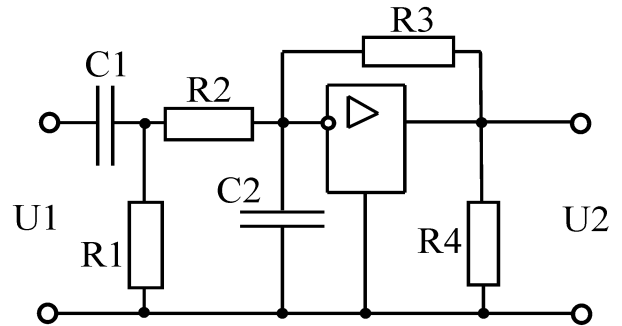


Рис. 50

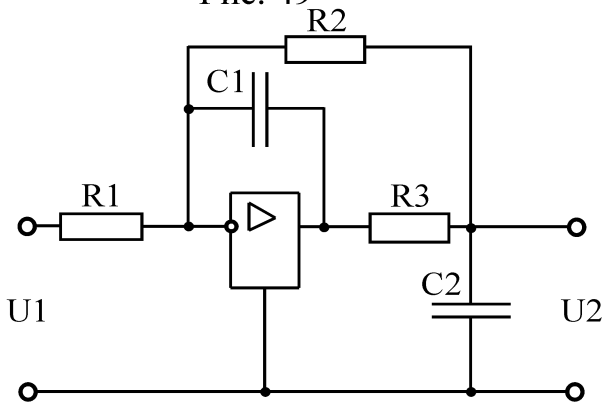


Рис. 51

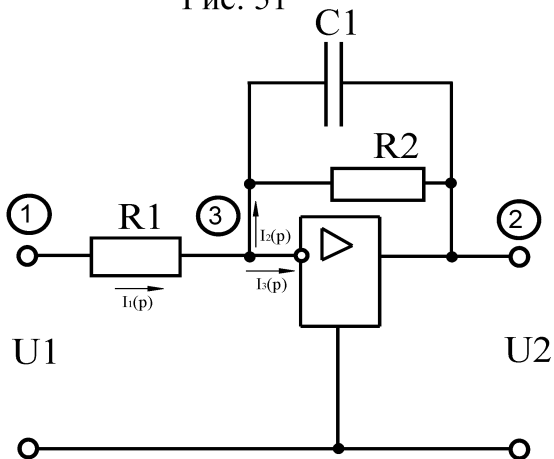


Рис. 52

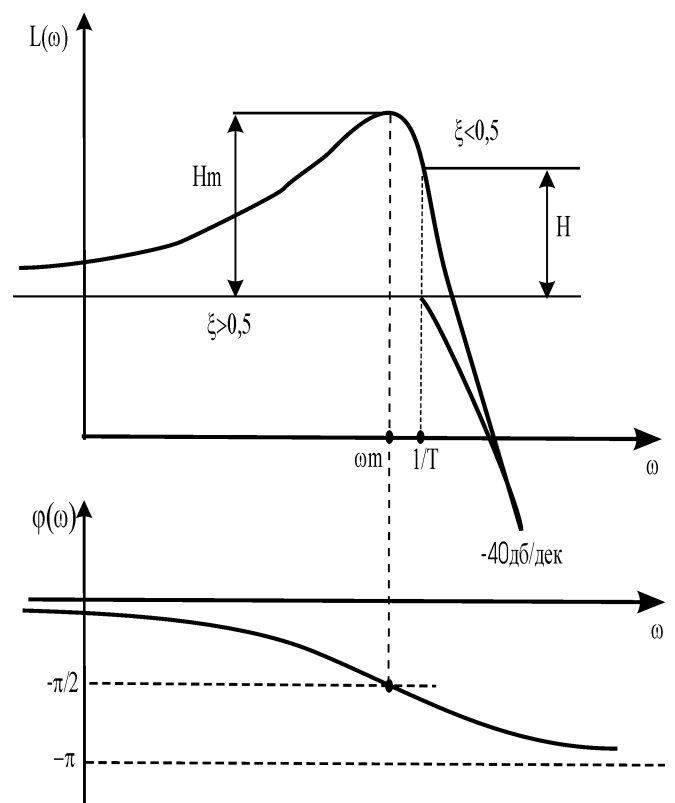


Рис. 53

Виведемо вираз для передаточної функції, використовуючи матрицю провідності схеми. Матриця провідності регулярної частини схеми має вигляд

$$Y = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline G_1 & 0 & -G_1 \\ \hline 0 & G_2 + pC_1 & -G_2 - pC_1 \\ \hline -G_1 & -G_2 - pC_1 & G_1 + G_2 + pC_1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

При вмиканні в схему ідеального операційного підсилювача додаються стовбчики з номерами вхідних полюсів підсилювача і рядки з номерами вихідних полюсів підсилювача. В часткових випадках додавання з базисним вузлом означає викреслення відповідного стовбчика і рядка [19]. Отже, в даному прикладі матриця провідності матиме вигляд

$$Y = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 1 & 2 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline G_1 & 0 \\ \hline -G_1 & -G_2 - pC_1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Для знаходження передаточної функції скористаємось співвідношенням  $W(p) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}$ .

Тоді,

$$W(p) = -\frac{G_1}{G_2 + pC_1} = -\frac{R_2}{pC_1 R_1 R_2 + R_1}.$$

Підставляючи чисельні значення параметрів, отримаємо

$$W(p) = -\frac{1000}{p100 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 1000 + 20} = -\frac{500}{p + 10}.$$

Знайдемо реакцію кола на вхідну дію  $g(t) = 5 + \sin 2t$ . Зображення вхідного сигналу

$$G(p) = L\{g(t)\} = \frac{5}{p} + \frac{2}{p^2 + 4}.$$

Зображення вихідного сигналу

$$X(p) = W(p)G(p) = -\frac{500}{p} \left[ \frac{5}{p} + \frac{2}{p^2 + 4} \right].$$

Вихідний сигнал як функцію часу знаходимо по формулам розкладу. Знайдемо

полюса функції  $X(p)$ :

$$p(p+10)(p^2+4)=0$$

$$p_1=0; p_2=-10; p_{3,4}=\pm j2.$$

Тоді

$$x(t) = -2500\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{-10}e^{-10t}\right) - 1000\left(\frac{1}{100+4}e^{-10t} + 2\operatorname{Re}\frac{1}{(2j+10)4j}e^{j2t}\right) =$$

$$= 250(e^{-10t} - 1) - 1000\left(\frac{e^{-10t}}{104} - 2\operatorname{Re}\frac{8+j40}{1664}e^{j2t}\right) =$$

$$= 250(e^{-10t} - 1) - \frac{125}{13}(e^{-10t} + 5\sin 2t - \cos 2t)$$

**Завдання 3.** Побудувати АФЧХ, АЧХ, логарифмічні АЧХ і ФЧХ системи з передаточною функцією  $W(p)$ .

Вихідні данні приведені в таблиці 3.

### Методичні вказівки

При підготовці до виконання завдання 3 необхідно:

1. Вивчити різні види частотних характеристик, способи їх побудування [2, с.61-69; 3, с.75-82; 6, с.59-62, 69-70; 7, с.7-8; 9, с.22-26; 11, с.43-45, 59-74; 12, с.44-49].
2. Ознайомитись з частотними характеристиками типових ланок [2, с.69-93; 3, с.86-102; 6, с.52-67, 71-77; 9, с.26-40; 11, с.49-57; 12, с.52-64].

При побудованні ФЧХ необхідно врахувати, що

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}, & U(\omega) \geq 0; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}, & U(\omega) < 0, V(\omega) \geq 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}, & U(\omega) < 0, V(\omega) < 0, \end{cases}$$

де - відповідно дійсна і уявна частини АФЧХ.

Передаточні функції аперіодичної ланки другого порядку і коливальної ланки по вигляду співпадають:

$$W(p) = \frac{K}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$$

Таблиця 3

Номер варіанту	$W(p)$	$K_1$	$T_1, c$	$T_2, c$	$T_3, c$	$a$	$b$
1	$K K_1 p / [(T_{1p+1})(T_{2p-1})]$	10	0.1	0.01	-	-	-
2	$K K_1 p / [(T_{1p+1})(T_{2p-1})]$	0.1	1	100	-	-	-
3	$K K_1 (T_{1p+1}) / [p(T_{2p-1})]$	10	0.1	10	-	-	-
4	$K K_1 p^2 / [(a p^2 + b p + 1)]$	100	-	-	-	1	4
5	$K K_1 (T_{1p-1}) / [p^2 (T_{2p+1})]$	50	100	0.01	-	-	-
6	$K K_1 / [p(a p^2 + b p + 1)]$	0.01	-	-	-	0.1	0.2
7	$K K_1 p / (T_{1p+1})^2$	10	100	-	-	-	-
8	$K K_1 (T_{1p-1}) / [p^2 (T_{2p+1})]$	20	0.1	10	-	-	-
9	$K_1 (T_{1p-1}) / (T_{2p+1})$	10	0.01	10K	-	-	-
10	$K_1 / [(T_{1p-1}) (a p^2 + b p + 1)]$	100	0.1	-	-	K	5
11	$K K_1 / [(T_{1p-1})(T_{2p-1})]$	5	0.1K	100	-	-	-
12	$K K_1 p / [(T_{1p-1})(T_{2p-1})]$	0.5	0.01K	10	-	-	-
13	$K K_1 p^2 / [(T_{1p+1})(T_{2p+1})]$	15	0.01	5K	-	-	-
14	$K K_1 p / [(T_{1p+1})(T_{2p-1})]$	10	0.1	100	-	-	-
15	$K_1 (T_{1p+1}) / [(T_{2p-1})(T_{3p+1})]$	100	0.1	0.01	10K	-	-
16	$K K_1 (T_{1p+1}) / [p^2 (T_{2p+1})]$	0.5	10	0.01K	-	-	-
17	$K_1 (T_{1p+1}) / (T_{2p-1})^2$	100	0.2K	0.01	-	-	-
18	$K_1 (T_{1p+1}) / [p(a p^2 + b p + 1)]$	0.1K	0.01	-	-	5	2
19	$K_1 p / [(a p^2 + b p + 1)]$	10	-	-	-	K	10
20	$K_1 p / [(T_{1p-1})(T_{2p-1})]$	10	0.01K	100	-	-	-
21	$K K_1 / [p(T_{1p-1})(T_{2p-1})]$	0.1	100	0.1	-	-	-
22	$K K_1 (T_{1p-1}) / [(a p^2 + b p + 1)]$	40	10	-	-	2	1
23	$K_1 (T_{1p-1}) / [p(T_{2p+1})]$	0.2K	0.1	10	-	-	-
24	$K_1 (T_{1p-1}) / [p(T_{2p+1})(T_{3p+1})]$	10K	0.01	0.1	100	-	-
25	$K K_1 (T_{1p-1}) / [p(a p^2 + b p + 1)]$	5	0.1	-	-	4	8



Однак для аперіодичної ланки другого порядку  $T_1 \geq 2T_2$  (корені характеристичного рівняння дійсні). Передаточну функцію аперіодичної ланки другого порядку можна представити в вигляді

$$W(p) = \frac{K}{(T_3p+1)(T_4p+1)},$$

де

$$T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{T_1}{2}\right)^2 - T_2^2}.$$

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАХ) такої ланки

$$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{(\omega T_3)^2 + 1} - 20\lg\sqrt{(\omega T_4)^2 + 1}.$$

Для коливальної ланки  $T_1 < 2T_2$  (корені характеристичного рівняння комплексні).

Загальноприйнятий запис передаточної функції коливальної ланки в вигляді

$$W(p) = \frac{K}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1},$$

де  $T = T_2$ ;  $\xi = \frac{T_1}{2T_2}$ ;  $0 < \xi < 1$ .

ЛАХ

$$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}.$$

В залежності від значення коефіцієнта  $\xi$  форма ЛАХ змінюється (рис.53). При  $\xi < 0.5$  необхідно розрахувати перевищення  $H_m$  на частоті  $\omega_m$

$$H_m = 20\lg \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2} \cdot 2\xi}; \quad \omega_m = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\xi^2}.$$

При спрощених розрахунках знаходять

$$H = 20\lg \frac{1}{2\xi}; \quad \omega_m = \frac{1}{T}.$$

**Приклад.** Побудувати АФЧХ, АЧХ, ЛАХ, ФЧХ системи з передаточною функцією

$$W(p) = \frac{Kp}{Tp + 1},$$

де  $K=100$ ;  $T=0,1$ .

Виділимо дійсну та уявну частини комплексної передаточної функції

$$W(j\omega) = W(p)|_{p=j\omega} = \frac{Kj\omega}{Tj\omega + 1} = \frac{Kj\omega(1 - j\omega T)}{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)} = \frac{\omega^2 KT + j\omega K}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Таким чином,  $U(\omega) = \frac{\omega^2 K T}{1 + \omega^2 T^2}$ ;  $V(\omega) = \frac{\omega K}{1 + \omega^2 T^2}$ , виділимо модуль і аргумент функції

$W(j\omega)$

$$W(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{\omega K}{1 + \omega^2 T^2}; \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega T}.$$

Задаючись значенням частоти  $\omega$  від нуля до нескінченності, визначають чисельні значення функцій  $W(\omega), U(\omega), V(\omega), \varphi(\omega)$  і зводять їх в табл. 4. Точки характеристик частот визначаються за допомогою граничних переходів

$$U(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega^2 K T}{1 + \omega^2 T^2} = 0;$$

$$V(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega K}{1 + \omega^2 T^2} = 0;$$

$$W(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega K}{1 + \omega^2 T^2} = 0;$$

$$\varphi(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \arctg \frac{1}{\omega T} = \frac{\pi}{2};$$

$$U(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega^2 K T}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{K}{T};$$

$$V(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega K}{1 + \omega^2 T^2} = 0;$$

$$W(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega K}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{K}{T};$$

$$\varphi(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctg \frac{1}{\omega T} = 0.$$

Графіки функцій показані на рис.54-56.

Для побудування ЛАХ представимо передаточну функцію в вигляді добутку трьох більш простих типових передаточних функцій

$$W_1(p) = K; W_2(p) = p; W_3(p) = \frac{1}{T_1 p + 1}.$$

Відповідаючі їм ЛАХ визначаються співвідношенням

$$L_1(\omega) = 20 \lg K; L_2(\omega) = 20 \lg \omega; L_3(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}.$$

Перша характеристика представляє собою пряму 1 паралельну вісі абсцисс (рис.57), друга – пряму 2 з нахилом 20 дБ/дек, третю характеристику будують за допомогою асимптот

$$\omega \rightarrow 0, \omega T \ll 1, L_3(\omega) = -20 \lg 1 = 0;$$

$$\omega \rightarrow \infty, \omega T \gg 1, L_3(\omega) = -20 \lg \omega T.$$

Перша асимптота (пряма 3) співпадає з віссю абсцисс, а друга (пряма 4 з нахилом) – 20 дБ/дек. Вони пересікаються в точці  $\omega = 1/T$ . Сумарна ЛАХ показана на рис.58.

При побудуванні ФЧХ складних ланок і систем їх передаточні функції також слушно представляти в вигляді добутку більш простих ланок. При цьому

ФЧХ системи визначається як сума ФЧХ окремих ланок. Для прикладу, що ми розглядаємо  $\varphi_1(\omega) = 0$ ;  $\varphi_2(\omega) = \frac{\pi}{2}$ ;  $\varphi_3(\omega) = -\arctg\omega T$ .

Додавши ці характеристики, також отримаємо ФЧХ системи (див. рис.55).

Таблица 4

$\omega$	$U(\omega)$	$V(\omega)$	$W(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	0	0	0	
1	99	99	99,5	1,47
3	82,57	275,23	287,35	1,28
5	200	400	447,21	1,11
7	328,86	469,8	573,46	0,96
10	500	500	707,11	0,785
15	692	461	832,05	0,588
20	800	400	894,43	0,464
100	990,1	99,01	995,04	0,0997
1000	999,9	9,999	999,95	0,0099
100000	1000	0,1	1000	0,001

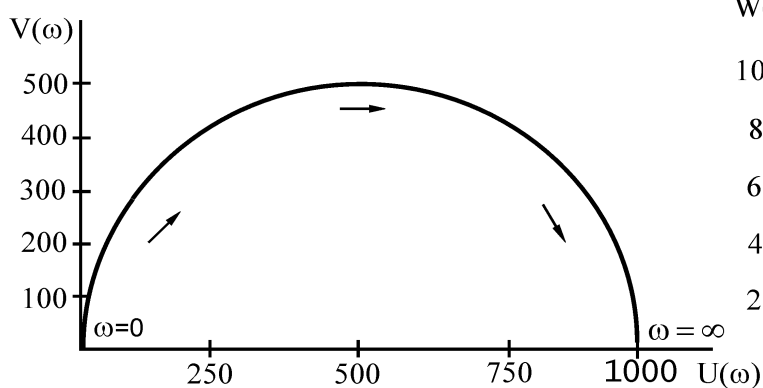


Рис. 54

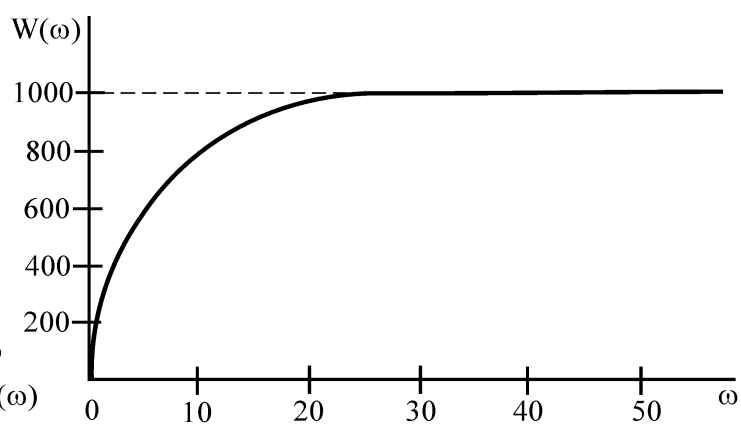


Рис. 56

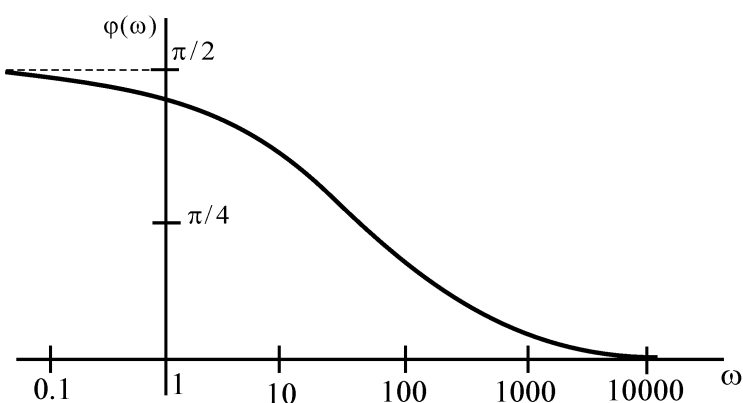


Рис. 55

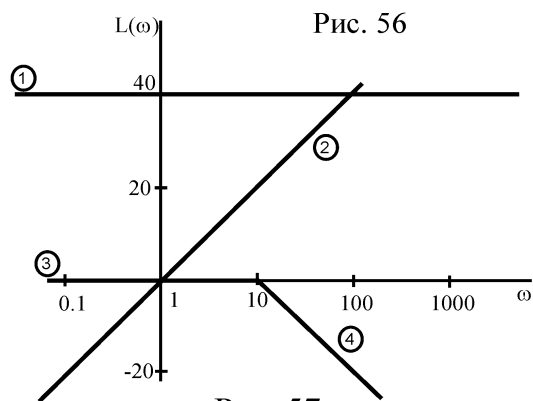


Рис. 57

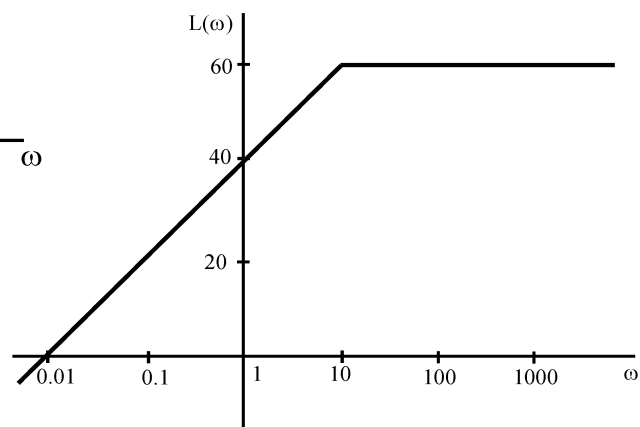


Рис. 58

**Завдання 4.** Дослідити стійкість системи, охопленої колом зворотнього зв'язку, наступними методами:

1) Рауса (рис.59),  $W(p)$ - відповідає передаточній функції, визначеній в завданні 1,

$$W_0(p) = \frac{K}{p^2 + 0.1Kp + 2K};$$

2) Гурвіца (умови ті ж);

3) Михайлова (умови ті ж);

4) Найквіста (див. рис.59)  $W(p)$  - відповідає передаточній функції, визначеній в завданні 3,  $W_0(p)=1$ ;

5) за допомогою логарифмічних частотних характеристик (див. рис.59)  $W(p)$ - відповідає передаточній функції, заданій в завданні 3,  $W_0=K$ ;

### Методичні вказівки

При підготовці до виконання завдання 4 необхідно:

1. Ознайомитись з поняттям «стійкість» для лінійних неперервних САР, необхідною і достатньою умовою стійкості [2, с.133-139; 3, с.107-109; 6, с.95-98; 7, с.18-19; 9, с.82-88; 12, с.114-128; 14, с.130-134; 11, с.101-105].
2. Вивчити алгебраїчні і частотні критерії стійкості лінійних САР [2, с.139-165; 3, с.126-144; 6, с.102-117; 7, с.19-26; 9, с.68-112; 11, с.105-119; 12, с.128-154; 14, с.134-150; 19, с.557-575], а також розібрати рішення задач по даній темі, приведених в [5; 16; 17].

При дослідженні стійкості з використанням критеріїв Рауса, Гурвіца, Михайлова необхідно попередньо визначити передаточну функцію замкнутої системи

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 \pm W_0(p)W(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)},$$

де знак «+» - для систем з від'ємним зворотнім зв'язком, «-» - для систем з додатнім.

Алгебраїчна оцінка стійкості (Рауса, Гурвіца) дозволяють визначити стійкість системи по коефіцієнтам характеристичного многочлена

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0.$$

Критерій стійкості Рауса. Для того щоб САР була стійкою необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти першого стовбчика таблиці Рауса (табл.5) мали один і той же знак, тобто при  $a_n > 0$  були додатніми.

**Таблиця 5**

Коефіцієнт $r_i$	Номер рядка $i$	Номер стовбчика К		
		1	2	3
-	1	$a_n = c_{11}$	$a_{n-2} = c_{21}$	$a_{n-4} = c_{31}$
-	2	$a_{n-1} = c_{12}$	$a_{n-3} = c_{22}$	$a_{n-5} = c_{32}$
$r_3 = \frac{c_{11}}{c_{12}}$	3	$c_{13} = c_{21} - r_3 c_{22}$	$c_{23} = c_{31} - r_3 c_{32}$	$c_{33} = c_{41} - r_3 c_{42}$
$r_4 = \frac{c_{12}}{c_{13}}$	4	$c_{14} = c_{22} - r_4 c_{23}$	$c_{24} = c_{32} - r_4 c_{33}$	$c_{34} = c_{42} - r_4 c_{43}$
$r_5 = \frac{c_{13}}{c_{14}}$	5	$c_{15} = c_{23} - r_5 c_{24}$	$c_{25} = c_{33} - r_5 c_{34}$	$c_{35} = c_{43} - r_5 c_{44}$
.....	.....	.....	.....	.....
$r_i = \frac{c_{1,i-2}}{c_{1,i-1}}$		$c_{1,i} = c_{2,i-2} - r_i c_{2,i-1}$	$c_{2,i} = c_{3,i-2} - r_i c_{3,i-1}$	$c_{3,i} = c_{4,i-2} - r_i c_{4,i-1}$
.....	.....	.....	.....	.....

Таким чином, два перших рядка таблиці Рауса заповнюють коефіцієнтами характеристичного рівняння. Любий з інших коефіцієнтів цієї таблиці визначають в відповідності з співвідношенням

$$c_{K,i} = c_{K+1,i-2} - r_i c_{K+1,i-1};$$

$$r_i = \frac{c_{1,i-2}}{c_{1,i-1}},$$

де  $K, i$  – номер відповідного стовбчика і рядка.

Число рядків таблиці Рауса дорівнює степені характеристичного рівняння плюс одиниця  $(n + 1)$ .

Якщо не всі коефіцієнти першого стовбчика додатні, то система нестійка, а число коренів характеристичного многочлена, що лежать в правій напівплощині (індекс нестійкості), дорівнює числу змін знака в 1-ому стовбчику.

**Приклад.** Дослідити стійкість системи (див. рис.59) за допомогою критерія Рауса:

$$W(p) = \frac{10}{(p+1)(10p+1)}; \quad W(p) = \frac{5}{p^2 + 10p + 2}.$$

Визначимо передаточну функцію замкнутої системи

$$W_3(p) = \frac{\frac{10}{(p+1)(10p+1)}}{1 + \frac{10}{(p+1)(10p+1)} \cdot \frac{5}{p^2 + 10p + 2}} = \frac{10(p^2 + 10p + 2)}{10p^4 + 111p^3 + 131p^2 + 32p + 52}.$$

Характеристичний многочлен системи  $A(p) = 10p^4 + 111p^3 + 131p^2 + 32p + 52$ .

Складемо таблицю Рауса (табл. 6):

**Таблиця 6**

Коефіцієнт $r_i$	Номер рядка $i$	Номер стовбчика К		
		1	2	3
-	1	$a_4 = 10 = c_{11}$	$a_2 = 131 = c_{21}$	$a_0 = 52 = c_{31}$
-	2	$a_3 = 111 = c_{12}$	$a_1 = 32 = c_{22}$	0
$r_3 = \frac{a_4}{a_3} = 0.09$	3	$c_{13} = c_{21} - r_3 c_{22} =$ $= 131 - 0.9 \cdot 32 = 128.12$	$c_{23} = c_{31} - r_3 c_{32} = 52 -$ $- 0.09 \cdot 0 = 52$	0
$r_4 = \frac{a_3}{c_{13}} =$ $= \frac{111}{128.12} = 0.866$	4	$c_{14} = c_{22} - r_4 c_{23} =$ $= 32 - 0.866 \cdot 52 = -13.05$	0	0
$r_5 = \frac{c_{13}}{c_{14}} =$ $= \frac{128.12}{-13.05} = -9.818$	5	$c_{15} = c_{23} - r_5 c_{24} =$ $= 52 - (-9.818) \cdot 0 = 52$	0	0

Є дві зміни знака коефіцієнтів першого стовбчика, отже, система нестійка, а характеристичне рівняння має два правих корня.

**Критерій стійкості Гурвіца.** Для стійкості лінійної системи необхідно і достатньо, щоб при  $a_n > 0$  були додатніми  $n$  головних визначників слідуєчої матриці характеристичного рівняння даної системи

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

т.т.  $a_n > 0$  ;  $\Delta_1 = a_{n-1} > 0$  ;  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0 \dots \Delta_n > 0$ .

**Приклад.** Дослідити стійкість системи за допомогою критерія Гурвіца (вихідні дані ті ж, що і в попередньому прикладі).

Характеристичний многочлен системи

$$A(p) = 10p^4 + 111p^3 + 131p^2 + 32p + 52.$$

Складемо визначник Гурвіца

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 111 & 32 & 0 & 0 \\ 10 & 132 & 52 & 0 \\ 0 & 111 & 32 & 0 \\ 0 & 10 & 132 & 52 \end{vmatrix}$$

В відповідності з критерієм стійкості Гурвіца отримаємо

$$a_4 = 10 > 0; \Delta_1 = a_3 = 111 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 111 & 32 \\ 10 & 132 \end{vmatrix} = 14332 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 111 & 32 & 0 \\ 10 & 132 & 52 \\ 0 & 111 & 32 \end{vmatrix} = 111 \cdot 132 \cdot 32 - 111^2 \cdot 52 - 32^2 \cdot 10 = -182068 < 0.$$

Таким чином, дана система нестійка.

**Критерій стійкості Михайлова.** Це один з частотних критеріїв стійкості, який дозволяє судити про стійкість системи на основі деякої кривої, кривої (годографом) Михайлова. Для її побудування необхідно в характеристичний многочлен замість  $p$  підставити  $j\omega$ , виділити дійсну і уявну частини  $A(j\omega) = P(j\omega) + Q(j\omega)$ .

Змінюючи частоту від 0 до  $\infty$ , в площині параметрів  $P(j\omega)$  і  $Q(j\omega)$  будують криву Михайлова.

Для того щоб лінійна система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб вектор кривої Михайлова при зміні частоти від нуля до нескінченності повернувся, ніде не



перетворюючись в нуль, навколо початку координат проти часової стрілки на кут  $n \frac{\pi}{2}$ , де n-порядок характеристичного многочлена, тобто годограф Михайлова при зміні частоти від нуля до нескінченності, починаючись при  $\omega=0$  на вагомій додатній напівосі, обходив тільки проти часової стрілки послідовно n квадрантів координатної площини (весь час оточуючи початок координат). На рис.60 показані типові криві Михайлова для стійких систем починаючи від першого (n=1) і закінчуючись (n=5) порядком.

**Приклад.** Дослідити стійкість системи за допомогою критерія Михайлова (вихідні данні ті ж, що і в попередньому пункті).

Характеристичний многочлен

$$A(p) = 10p^4 + 111p^3 + 131p^2 + 32p + 52.$$

Замість p підставляємо  $j\omega$  і виділяємо дійсну та уявну частини

$$A(j\omega) = 10\omega^4 - j111\omega^3 - 132\omega^2 - j32\omega + 52;$$

$$P(\omega) = 10\omega^4 - 132\omega^2 + 52 ; \quad Q(\omega) = -111\omega^3 - 32\omega.$$

Задаючись значеннями частоти від нуля до нескінченності, визначаємо (табл. 7) та будуємо годограф Михайлова (рис.61). Оскільки годограф Михайлова не проходить послідовно n=4 квадрантів проти часової стрілки, оточуючи початок координат, то система нестійка.

**Таблиця 7**

$\omega$	0	0.2	0.5	0.55	0.65	0.7	1	3	5	100
P( $\omega$ )	52	46.74	19.63	12.98	-1.96	-10.28	-70	-326	3002	$9.9 \cdot 10^8$
Q( $\omega$ )	0	5.51	2.13	-0.87	-9.68	-15.68	-79	-2901	-13715	$-1.1 \cdot 10^8$

**Критерій стійкості Найквіста.** Даний критерій по виду АФЧХ розімкнутої системи дозволяє зробити висновок що до стійкості замкнутої системи.

Якщо розімкнуте коло системи стійке або нейтральне, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, що АФЧХ розімкнутого кола не охоплює точку  $(-1, j0)$  (рис.62).

Якщо система нестійка в розімкнутому стані, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб АФЧХ розімкнутого кола охоплювала точку  $(-1, j0)$  проти часової стрілки на кут  $\pi$ , де L – число коренів характеристичного многочлена

розімкнутого кола, що мають додатні вагомні частини (індекс нестійкості). Наприклад, якщо індекс нестійкості  $L=1$ , то для стійкості замкнутої системи АФЧХ розімкнутого кола повинна мати вид приблизно, як показано на рис.63.

При складній формі характеристики  $W_p(j\omega)$  можуть виникнути труднощі при визначенні числа її обертів навколо точки  $(-1, j0)$ . В цьому випадку для оцінки стійкості доцільно використовувати «правило переходів». Перехід характеристики через вагому вісь лівіше точки  $(-1, j0)$ , тобто через відрізок  $[-\infty, -1]$ , при зростанні частоти називається додатнім, якщо він здійснюється зверху вниз, і від'ємним - якщо знизу вверх. Якщо характеристика  $W_p(j)$  починається або закінчується на відрізку  $[-\infty, -1]$ , то вважають, що вона здійснює півперехода (рис.64). Тоді критерій Найквіста можна сформулювати так: для того щоб замкнута система була стійка, необхідно і достатньо, щоб різниця між числом додатніх і від'ємних переходів АФЧХ розімкнутої системи  $W_p(j\omega)$ . Через відрізок вагомої вісі  $[-\infty, -1]$  при зміні частоти від нуля до нескінченності була рівна  $L/2$ , де  $L$  – число правих коренів характеристичного рівняння розімкнутої системи число додатніх переходів лівіше точки  $(-1, j0)$  повинно дорівнювати числу від'ємних переходів.

Якщо передаточна функція розімкнутого кола системи володіє астатизмом  $\nu$ -го порядку (має  $\nu$  нульових полюсів )

$$W_p(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{p^\nu (a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0)} = \frac{W_{cr}(p)}{p^\nu},$$

то годограф АФЧХ розімкнутої системи необхідно доповнити дугою кола нескінченно великого радіуса, яка буде мати  $\nu$  четвертей, тобто  $\nu \frac{\pi}{2}$ . Коло нескінченного радіуса

завжди будується в від'ємному напрямку (по годинниковій стрілці), причому, якщо

границя  $\lim_{p \rightarrow 0} W_{cr}(p) = \frac{b_0}{a_0} > 0$ , то дуга кола нескінченного радіуса починається на

додатній частині вагомої вісі, а якщо границя  $\lim_{p \rightarrow 0} W_{cr}(p) = \frac{b_0}{a_0} < 0$ , то на від'ємній.

Функцію  $W_{cr}(p)$  виділяють з передаточної функції розімкнутого кола  $W_p(p)$  виключенням з знаменника  $p^\nu$ . Дуга кола нескінченного радіуса повинна закінчуватись на годографі АФЧХ розімкнутої системи (рис. 65). В випадку астатичної розімкнутої

системи в число від'ємних переходів необхідно включати і переходи, що вносяться дугою нескінченно великого радіуса при  $\omega = 0$ .

**Приклад.** Дослідити стійкість замкнутої системи за допомогою критерія Найквіста (див. рис.59). Передаточні функції:

$$W(p) = \frac{p+1}{p-2}; \quad W_0(p) = \frac{10}{p}.$$

Визначимо передаточну функцію розімкнутого кола системи

$$W_p(p) = W(p)W_0(p) = \frac{10(p+1)}{p(p-2)}.$$

В розімкнутому стані система нестійка (має додатній корінь  $p=2$ ) і володіє астатизмом першого порядку (один нульовий корінь  $p=0$ ). В вираз  $W_p(p)$  замість  $p$  підставляємо  $j\omega$  знаходимо АФЧХ  $W_p(j\omega)$  розімкнутої системи

$$W_p(j\omega) = \frac{10(j\omega+1)(-j\omega-2)}{j\omega(j\omega-2)(-j\omega-2)} = 10 \frac{\omega^2 - 2 - 3j\omega}{j\omega(\omega^2 + 4)}.$$

Звідси отримуємо

$$U(\omega) = -\frac{30}{\omega^2 + 4}; \quad V(\omega) = -10 \frac{\omega^2 - 2}{\omega(\omega^2 + 4)}.$$

Визначимо граничні точки характеристики

$$U(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( -\frac{30}{\omega^2 + 4} \right) = -7.5; \quad V(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( -10 \frac{\omega^2 - 2}{\omega(\omega^2 + 4)} \right) = \infty;$$

$$U(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( -\frac{30}{\omega^2 + 4} \right) = 0; \quad V(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( -10 \frac{\omega^2 - 2}{\omega(\omega^2 + 4)} \right) = 0.$$

З отриманих виразів для  $V(\omega)$  і  $U(\omega)$  слідує, що при зміні  $\omega$  від нуля до нескінченності  $U(\omega)$  завжди від'ємна і обертається в нуль тільки при  $\omega \rightarrow \infty$ , а  $V(\omega)$  приймають як додатні, так і від'ємні значення, причому при  $\omega = \sqrt{2}$   $V(\omega) = 0$  є точка перетину вісі абсцисс.

Підставляючи  $\omega = \sqrt{2}$   $U(\omega) = 0$ , отримаємо

$$U(\sqrt{2}) = -\frac{30}{2+4} = -5.$$

Таким чином, характеристика  $W_p(j\omega)$  перетинає вісь абсцис при  $\omega = \sqrt{2}$  в точці  $(-5, j0)$ .

Оскільки розімкнуте коло системи володіє астатизмом першого порядку, то годограф АФЧХ  $W_p(j\omega)$  необхідно доповнити при  $\omega=0$  дугою четвертю кола нескінченного радіуса. Визначимо границю для статичної передаточної функції

$$\lim_{p \rightarrow 0} W_{ст}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{10(p+1)}{p-2} = -5 < 0.$$

Таким чином, дуга кола нескінченного радіуса починається на від'ємній вісі і складає четверть кола.

Задаючи значення  $\omega$  від нуля до нескінченності, будемо АФЧХ  $W_p(j\omega)$  розімкнутої частини системи (рис.66). Левіше точки  $(-1, j0)$  є два переходи характеристики через вагому вісь. Точці  $\omega=0$  відповідає половина від'ємного переходу, а точці  $\omega=\sqrt{2}$  - додатній перехід. Різниця між числом додатніх і від'ємних переходів дорівнює  $1/2$ . Оскільки в розімкнутому стані система була нестійкою і мала один додатній корінь (індекс нестійкості  $L=1$ ), то, в відповідності до критерія Найквіста, можна зробити висновок, що в замкнутому стані система буде стійкою, так як різниця між кількістю додатніх і від'ємних переходів  $L/2=1/2$ .

### **Використання логарифмічних частотних характеристик для дослідження стійкості замкнутих систем.**

Для того щоб замкнута система автоматичного керування була стійка, необхідно і достатньо, щоб різниця між числом додатніх і від'ємних переходів логарифмічної фазочастотної характеристики (ЛАЧХ) прямих  $\pm \pi(2i+1)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  в усіх областях, де ЛАЧХ додатня  $L(\omega) > 0$  (рис.67) була рівна  $L/2$  (де  $L$  – число правих корнів характеристичного рівняння розімкнутої системи). Для дослідження стійкості замкнутої системи використовується логарифмічні частотні характеристики її розімкнутого кола. Додатньому переходу відповідає перетин ЛФЧХ прямих  $\pm \pi(2i+1)$  знизу вверху при  $L(\omega) > 0$ , а від'ємному – зверху вниз. Якщо при  $L(\omega) > 0$  ЛФЧХ починається або закінчується на лініях  $\pm \pi(2i+1)$ , то це вважається половиною переходу. В випадку астатичних систем необхідно враховувати і точки перетину або дотики ЛФЧХ прямих  $\pm \pi(2i+1)$  при  $\omega=0$ .

Якщо границя від статичної частини передаточної функції розімкнутого кола додатня, то при  $\omega=0$  ЛФЧХ починається на лініях  $\pm\pi 2i$ , а якщо від'ємний - то на лініях  $\pm\pi(2i+1)$ , причому ЛФЧХ проходить завжди зверху вниз, а фазовий зсув дорівнює  $v\pi/2$ ,  $v$  - порядок астатизма.

**Приклад.** Дослідити стійкість замкнутої системи (див. рис.59) за допомогою логарифмічних частотних характеристик. Передаточні функції :

$$W(p) = \frac{p-0.1}{p+10}, \quad W_0(p) = -\frac{10}{p}.$$

Визначимо передаточну функцію розімкнутого кола

$$W_p(p) = \frac{10(p-0.1)}{p(p+10)} = \frac{10(10p-0.1)}{p(0.1p+1)}.$$

Представимо передаточну функцію розімкнутого кола в вигляді добутку чотирьох передаточних функцій:

$$W_1(p) = 10; \quad W_2(p) = 1/p; \quad W_3(p) = 10p-1; \quad W_4(p) = \frac{1}{0.1p+1}.$$

Оскільки модуль передаточної функції дорівнює добутку модулів, а їх логарифм - сума, то

$$W_p(\omega) = \frac{10\sqrt{10^2\omega^2+1}}{\omega\sqrt{0.1^2\omega^2+1}},$$

$$L(\omega) = 20\lg W_p(p) = 20\lg 10 - 20\lg\sqrt{10^2\omega^2+1} - 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{0.1^2\omega^2+1}.$$

ФЧХ системи визначається сумою ФЧХ окремих ланок. Оскільки

$$\varphi_1(\omega) = 0, \quad \varphi_2(\omega) = -\pi/2, \quad \varphi_3(\omega) = \pi - \arctg 10\omega, \quad \varphi_4(\omega) = -\arctg 0.1\omega,$$

то  $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg 10\omega - \arctg 0.1\omega.$

При  $\omega = 0$  ФЧХ починається на лінії  $\pi$ , що обумовлено астатизмом розімкнутої системи

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{10(10p-1)}{0.1p+1} = -10 < 0.$$

Причому зміна фази складає  $-1*\pi/2$  (так як система володіє астатизмом першого порядку). На рис.68 показані логарифмічні частотні характеристики. Оскільки в розімкнутому стані система нейтральна ( $I=0$ ), а ФЧХ починається на лінії  $\pi$  при  $L(\omega)>0$  ( $\epsilon$  половина від'ємного переходу), то в замкнутому стані система буде нестійка.

**Завдання 5.** Розв'язати лінійне різностне рівняння за допомогою дискретного перетворення Лапласа. Вихідні дані приведенні в табл.8. Початкові умови нульові.

### **Методичні вказівки**

- 1.** Ознайомитись з методикою складання і розв'язання лінійних різностних рівнянь [2, с.452-453; 4,с.60-67; 6, с.327-330; 7, с.28-36; 16, с.125-133; 11, с.194-197].
- 2.** Вивчити дискретне перетворення Лапласа і z-перетворення, формули розкладу [2, с.437-451; 4, с.48-60; 6, с.330-335; 7, с.36-39; 11, с.215-219; 13, с.85- 88; 14, с.533- 539; 15, с.134-200].

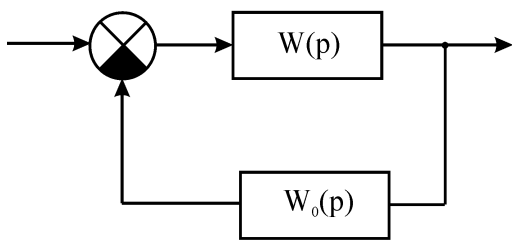


Рис. 59

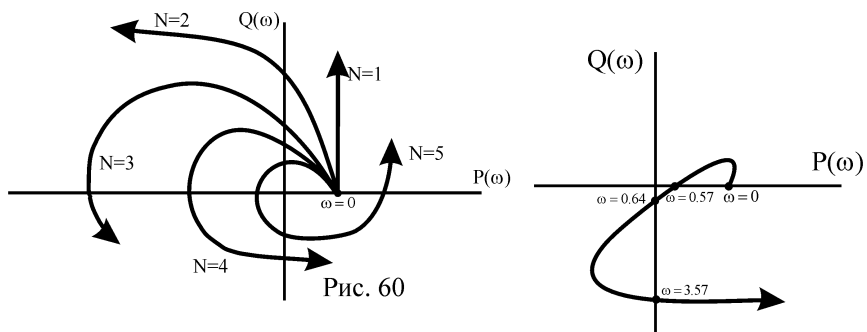


Рис. 60

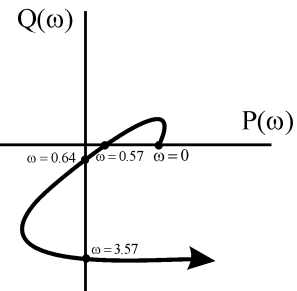


Рис. 61

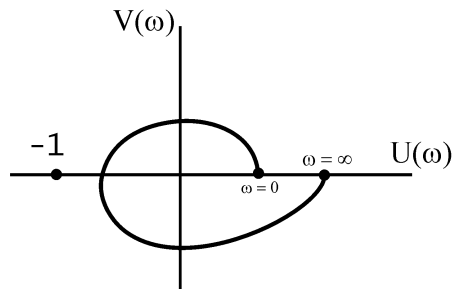


Рис. 62

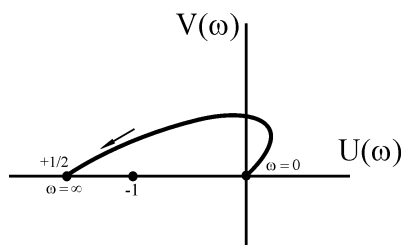


Рис. 63

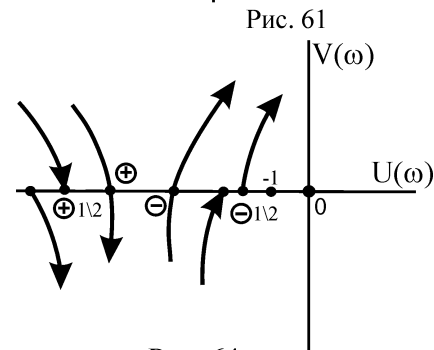


Рис. 64

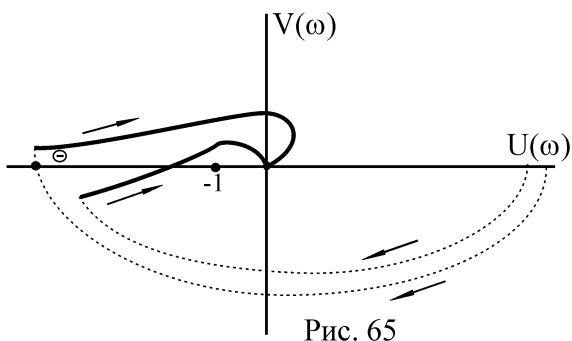


Рис. 65

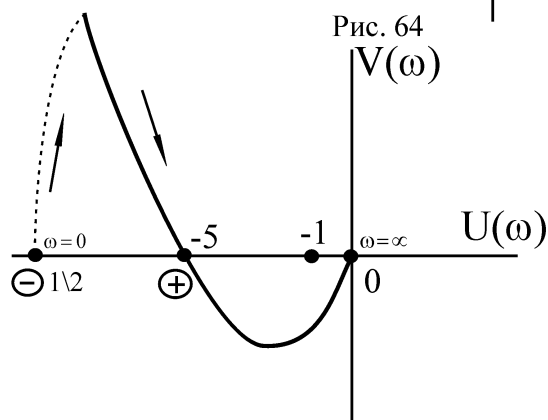


Рис. 66

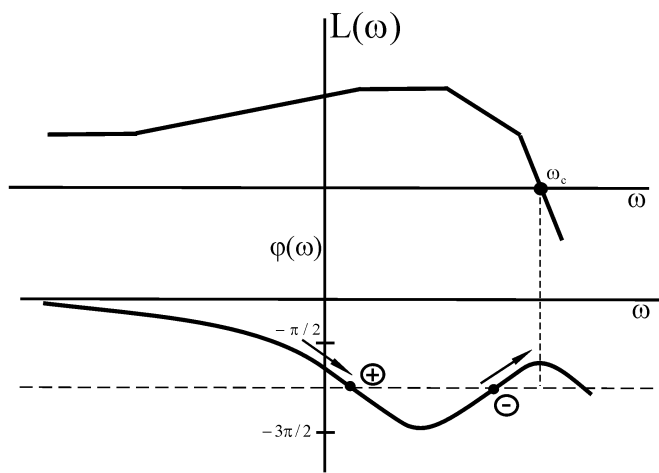


Рис. 67

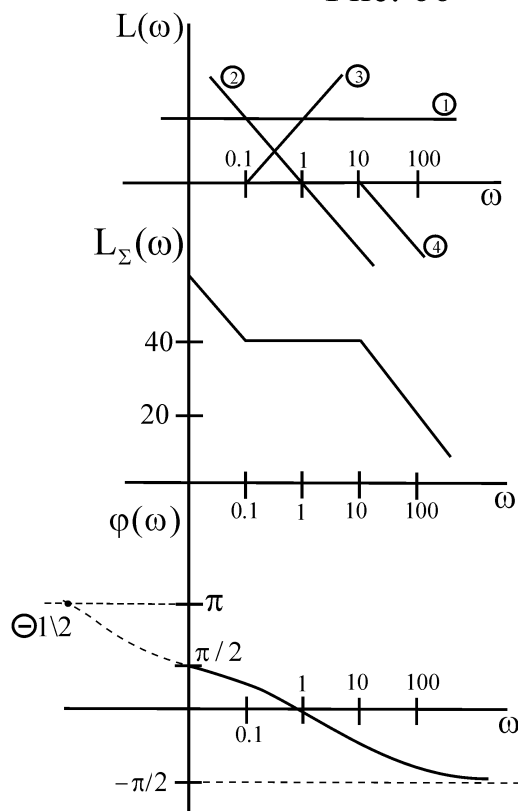


Рис. 68

Дискретне перетворення Лапласа ставить в відповідність решітчастої функції-оригіналу  $x(mT)$  ( $x(mT) \equiv 0; m < 0; m$ -номер періоду,  $m=0,1,2,\dots; T$ -період квантування) зображення  $X^*(p)$ . Умовно такий перехід записується наступним чином:

$$X^*(p) = D\{x(mT)\}.$$

При розв'язанні лінійних різницевих рівнянь використовують наступні властивості дискретного перетворення Лапласа

### 1. Властивість лінійності

$$D\left\{\sum_{k=1}^n a_k x_k(mT)\right\} = \sum_{k=1}^n a_k D\{x_k(mT)\} = \sum_{k=1}^n a_k X_p^*(p).$$

### 2. Зміщення аргумента решітчастої функції

$$D\{x(m-s)T\} = e^{-psT} D\{x(mT)\} = e^{-psT} X^*(p);$$

$$D\{x(m-s)T\} = e^{-psT} \left[ X^*(p) - \sum_{k=0}^{s-1} x(kT) e^{-psT} \right],$$

де  $X(kT)$  – початкові значення решітчастої функції в точках. При нульових початкових умовах  $x(0) = x(T) = \dots x((s-1)T) = 0; D\{x((m+s)T)\} = e^{psT} X^*(p)$ .

Зображення найчастіше зустрічаючихся функцій.

### 1. Одиначна ступінчата функція

$$g(mT) = 1; D\{1\} = \frac{e^{pT}}{(e^{pT} - 1)}.$$



Таблиця 8

Номер варіанту	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$	$g(mT)$
1	0	2	K	1	5mT
2	K	2	1	0	10
3	0	1	2	1	4K
4	0	1	0	1	2K
5	1	4	5K	0	5
6	0	4	K	6	4mT
7	0	0	K	2	3+2mT
8	1	K	2	0	10mT
9	0	K	4K	4K	5K
10	1	2K	10	0	12mT
11	1	K	20	0	$e^{mT}$
12	0	10	K	1	$e^{2mT}$
13	0	K	4	2	$e^{10mT}$
14	0	K	2	0	$K + e^{4mT}$
15	0	K	9	2	$e^{5mT}$
16	0	2	1	0	$KmT + 5$
17	1	2	K	0	$e^{-5mT}$
18	1	2K	0	0	$mT + e^{3mT}$
19	1	K	5	0	$4 + e^{mT}$
20	0	1	K	0	$5 + e^{2mT}$
21	0	0	1	K	$7 + 4 e^{mT}$
22	0	2	K	1	$12 + mT$
23	0	2	2K	0	$12 + e^{mT}$
24	2	8	K	0	$e^{7mT}$
25	0	7	2K	0	$mT + e^{2mT}$
$g(mT) = a_3x((m + 3)T) + a_2x((m + 2)T) + a_1x((m + 1)T) + a_0x(mT)$					

## 2. Лінійна функція

$$g(mT) = mT; D\{mT\} = \frac{T e^{pT}}{(e^{pT} - 1)^2}.$$

## 3. Експоненціальна функція

$$g(mT) = e^{\alpha mT}; D\{e^{\alpha mT}\} = \frac{e^{pT}}{(e^{pT} - e^{\alpha T})}.$$

Зворотнє дискретне перетворення Лапласа дозволяє визначити решітчасту функцію по її зображенню  $X^*(p)$

$$x(mT) = D^{-1}\{X^*(p)\} = \sum_{k=1}^n \text{Res}[TX^*(p)e^{pmT}]_{p=p_k},$$

де  $n$ -число полюсів функції  $X^*(p)$  (нулів характеристичного рівняння);  $p_k$  –  $k$ -й полюс функції  $X^*(p)$ .

Якщо всі полюси функції  $X^*(p)$  різні, то решітчасту функцію можна знайти по формулі

$$x(mT) = \sum_{k=1}^n T \frac{B^*(p_k)}{A'^*(p_k)} e^{p_k mT};$$

$$X^*(p) = \frac{B^*(p)}{A^*(p)}; \quad A'^*(p_k) = \left. \frac{dA^*(p)}{dp} \right|_{p=p_k}.$$

Звичайно при здійсненні зворотнього переходу попередньо виконують заміну  $e^{pT}$  на  $z$ . Тоді для випадку простих полюсів.

$$x(mT) = \sum_{k=1}^n \text{Res}[X^*(z)z^{m-1}]_{z=z_k} = \sum_{k=1}^n \frac{B^*(z_k)}{A^*(z_k)} z_k^{m-1}, \quad m \geq 1$$

а для випадку кратних полюсів

$$x(mT) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(S_k - 1)!} \frac{d^{S_k-1}}{dz^{S_k-1}} \left[ (z - z_k)^{S_k} \frac{B^*(z)}{A^*(z)} z^{m-1} \right]_{z=z_k}, \quad m \geq 1$$

де  $S_k$ -кратність  $k$ -ого полюса;  $B^*(z) = b_r z^r + b_{r-1} z^{r-1} + \dots + b_1 z + b_0$ ;

$$A^*(z) = a_r z^r + a_{r-1} z^{r-1} + \dots + a_1 z + a_0.$$

Зображення функції часто отримують в вигляді

$$X^*(z) = \frac{z^l B^*(z)}{z^v A^*(z)}.$$

При знаходженні решітчастої функції оригінала в даному випадку

$$x(mT) = \sum_{k=1}^n \frac{B^*(z_k)}{A^*(z_k)} z_k^{m+1-v-1},$$

Причому  $m$  може приймати значення

$$m \geq \begin{cases} v+1-1, & v+1-1 > 0; \\ 0 & , v+1-1 < 0. \end{cases}$$

**Приклад.** Розв'язати різницеве рівняння при нульових початкових умовах

$$a_2 x((m+2)T) + a_1 x((m+1)T) + a_0 x(mT) = 1, \text{ где } a_2 = 1; a_1 = 5; a_0 = 6.$$

Застосуємо до лівої та правої частини різницевого рівняння D-перетворення:

$$D\{x((m+2)T) + 5x((m+1)T) + 6x(mT)\} = D\{1\}.$$

У відповідності з властивостями лінійності та зміщення

$$e^{2pT} X^*(p) + 5e^{pT} X^*(p) + 6X^*(p) = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1}.$$

Розв'язуємо це рівняння відповідно

$$X^*(p) = \frac{e^{pT}}{(e^{pT} - 1)(e^{2pT} + 5e^{pT} + 6)}.$$

Робимо заміну

$$e^{pT} = z.$$

Для здійснення зворотнього переходу знаходимо корені характеристичного рівняння

$$(z-1)(z^2 + z + 6) = 0 \text{ і визначаємо } z_1 = 1; z_2 = -2; z_3 = -3.$$

Скористаємось формулою обернення для випадку простих коренів:

$$x(mT) = \sum_{k=1}^3 \frac{B^*(z_k)}{A^*(z_k)} z_k^{m-1} = \sum_{k=1}^3 \frac{z_k}{A^*(z_k)} z_k^{m-1} = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{A^*(z_k)} z_k^m,$$

$$\text{де } x(mT) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}(-2)^m + \frac{1}{4}(-3)^m; \quad A^*(z_k) = 3z_k^2 + 8z_k + 1.$$

**Завдання 6.** Знайти передаточну функцію імпульсної САР. Вихідні данні приведені в таблиці 9. Схеми показані на рис.69-76.

Методичні вказівки

1. Ознайомитись з  $\bar{D}$ -перетворенням, встановлюючим зв'язок між неперервним і дискретним перетвореннями Лапласа, а також з властивостями  $\bar{D}$ -перетворення [4, с.67-75; 6, с. 333; 7, с.39-44; 14, с.533-540; 15, с.215-239].

**Таблиця 9**

№ п/п	Номер рисунка	$W_1(p)$	$W_2(p)$	№ п/п	Номер рисунка	$W_1(p)$	$W_2(p)$
1	69	$10K/[(p+1)(p+10)]$	-	14	74	$20p/(p+K)$	$1/(p+5)$
2	70	$100K/(p+2)$	$10K/(p+10)$	15	75	$P/(p+20)$	$10K/(p+2)$
3	71	$K/(p+10)$	$20/(p-20)$	16	76	$100/(p-10)$	$pK/(p+20)$
4	72	$20/(p+10)$	$15K/(p-20)$	17	69	$K/[(p-5)(p+10)]$	-
5	73	$100/p$	$10K/(p-10)$	18	70	$Kp/(p+10)$	$20/(p-10)$
6	74	$10/p$	$1/(p+K)$	19	71	$10/(p-2)$	$10K/(p+30)$
7	75	$10/(p+10)$	$10K/(p+20)$	20	72	$Kp/(p+5)$	$40/(p+20)$
8	76	$K/(p+20)$	$(p+1)/(p+5)$	21	73	$Kp/(p+0.1)$	$100/(p+10)$
9	69	$100K/[(p-10)(p-20)]$	-	22	74	$100/(p+1)$	$Kp/(p-10)$
10	70	$10/(p+10)$	$pK/(p+1)$	23	75	$50/(p+10)$	$10K/(p+40)$
11	71	$p/(p+0.5)$	$K/(p+40)$	24	76	$Kp/(p+5)$	$10/(p-10)$
12	72	$20p/(p+10)$	$0.1/(p+K)$	25	70	$100/(p+1)$	$10K/(p-0.1)$
13	73	$10/(p-5)$	$10K/(p+10)$				

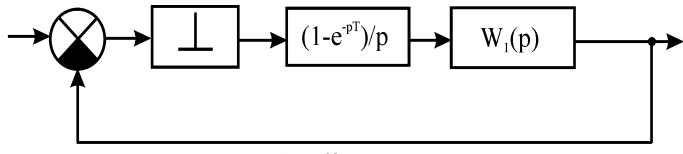


Рис.69

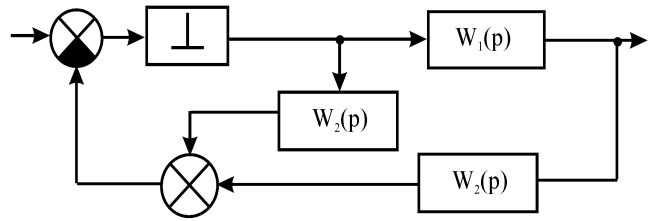


Рис.70

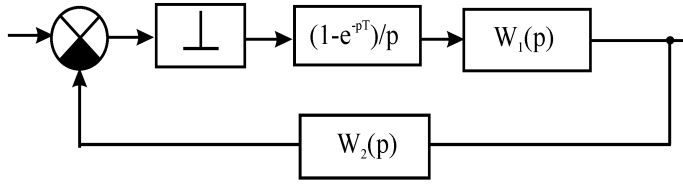


Рис.71

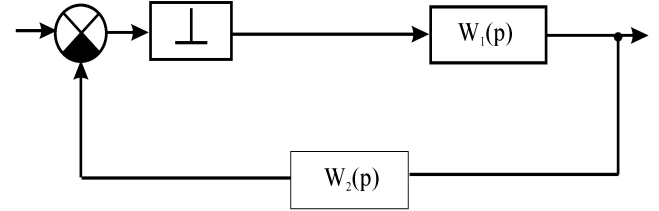


Рис.72

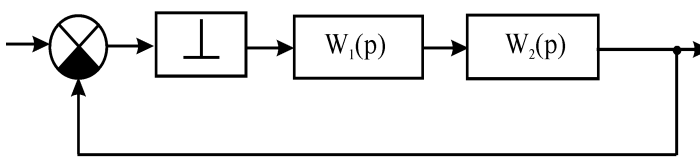


Рис.73

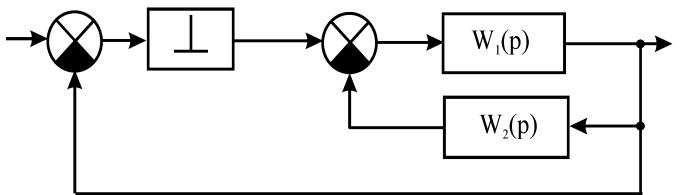


Рис.74

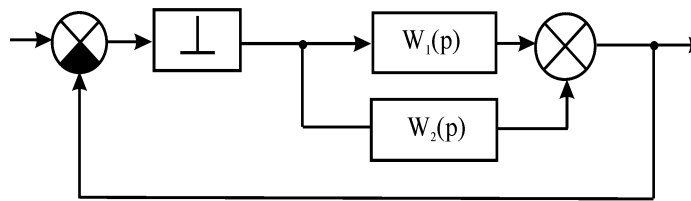


Рис.75

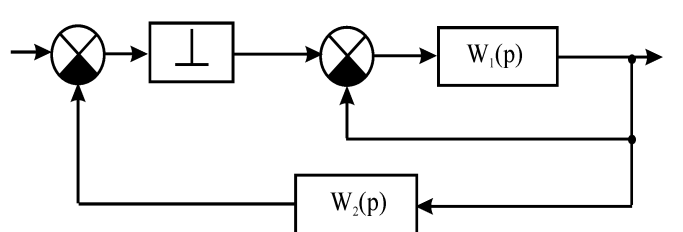


Рис.76

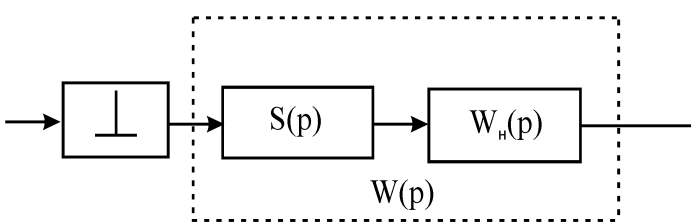


Рис.77

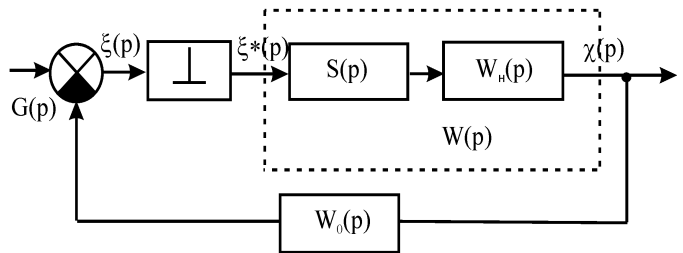


Рис.78

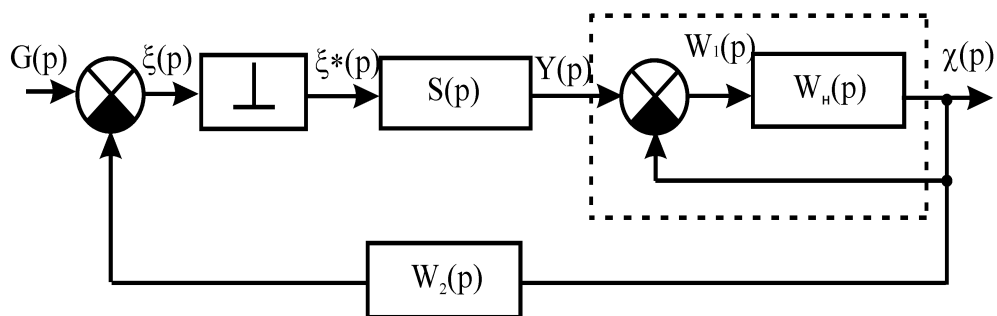


Рис.79

2. Вичити методику складання рівнянь імпульсних САР і знаходження передаточних функцій розімкнутих і замкнутих систем [2, с.455-462; 4, с.67-89; 6, с. 320-326, 335-349; 7, с.44-45; 9, с.227-235; 14, с.365-370; 15, с.254-260, 269-274, 490-507].

Якщо відоме зображення неперервної функції  $X(p)$ , то зображення решітчастої функції визначається за допомогою  $\bar{D}$ -перетворення.

$$X^*(p) = \bar{D}\{X(p)\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(p - jk\omega) + \frac{x(0)}{2},$$

де  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ;  $x(0) = x(t)|_{t=0}$ .

Якщо відомі полюси функції  $X(p)$ , то зображення решітчастої функції

$$X^*(p) = \sum_{k=1}^n \text{Res} \left[ X(q) \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{qT}} \right]_{q=p_k},$$

де  $p_k$  –  $k$ -й полюс функції  $X(p)$ .

Для випадку різних полюсів функції  $X(p)$

$$X^*(p) = \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{p_k T}}.$$

Для знаходження передаточної функції імпульсних систем використовуємо наступні властивості  $\bar{D}$ -перетворення.

1. Множення зображень неперервної і решітчастої функцій

$$\bar{D}\{X_1(p)X_2^*(p)\} = \bar{D}\{X_1(p)\}X_2^*(p) = X_1^*(p)X_2^*(p).$$

Якщо  $X_1(p) = e^{pT}$ , то  $\bar{D}\{e^{pT}X_2^*(p)\} = e^{pT}X_2^*(p)$ .

2. Лінійність  $\bar{D}$ -перетворення

$$\bar{D}\left\{ \sum_{k=1}^n a_k X_k(p) \right\} = \sum_{k=1}^n a_k \bar{D}\{X_k(p)\} = \sum_{k=1}^n a_k X_k^*(p).$$

Для розімкнутої імпульсної системи (рис.77) передаточну функцію можна знайти за допомогою  $\bar{D}$ -перетворення

$$W^*(p) = \bar{D}\{W(p)\} = \bar{D}\{S(p)W_n(p)\}.$$

Для замкнутої імпульсної системи (рис.78) рівняння мають вигляд

$$X(p) = \{S(p)W_n(p)\xi^*(p)\}; \quad \xi(p) = G(p) - W_0(p)X(p).$$

Підставляючи перше рівняння в друге, отримаємо

$$\xi(p) = G(p) - W(p)W_n(p)\xi^*(p).$$

Скориставшись властивостями лінійності і множення зображень неперервної і рещітчастої функцій  $\bar{D}$ -перетворення, отримаємо

$$\bar{D}\{\xi(p)\} = \bar{D}\{G(p) - \bar{D}\{W(p)W_n(p)\xi^*(p)\}\}; \xi^*(p) = G^*(p) - \bar{D}\{W(p)W_n(p)\}\xi^*(p).$$

Розв'язуємо отримане рівняння відносно

$$\xi^*(p) = \frac{G^*(p)}{1 + \bar{D}\{W(p)W_n(p)\}}.$$

Застосовуємо  $\bar{D}$ -перетворення до першого рівняння системи:

$$\bar{D}\{X(p)\} = \bar{D}\{W(p)\xi^*(p)\};$$

$$X^*(p) = \bar{D}\{W(p)\}\xi^*(p).$$

Підставляючи в отриманий вираз  $\xi^*(p)$ , отримаємо

$$X^*(p) = \bar{D}\{W(p)\} \frac{G^*(p)}{1 + \bar{D}\{W(p)W_n(p)\}}.$$

Тоді для передаточної функції імпульсної САР отримуємо

$$W_3^*(p) = \frac{X^*(p)}{G^*(p)} = \frac{\bar{D}\{W(p)\}}{1 + \bar{D}\{W(p)W_n(p)\}}.$$

**Приклад.** Знайти передаточну функцію замкнутої імпульсної системи, зображеної на рис.79. Передаточні функції ланок

$$S(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}; \quad W_n(p) = \frac{10}{p+5}; \quad W_2(p) = \frac{1}{p+20}.$$

Визначимо передаточну функцію ланки, охопленого одиничним зворотнім зв'язком,

$$W_1(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{W_n(p)}{1 + W_n(p)} = \frac{10}{p+15}.$$

Записуємо рівняння для імпульсної системи:

$$X(p) = S(p)W_1(p)\xi^*(p);$$

$$\xi(p) = G(p) - W_2(p)X(p).$$

Підставляючи перше рівняння в друге, отримаємо

$$\xi(p) = G(p) - W_2(p)S(p)W_1(p)\xi^*(p).$$

Застосовуємо  $\bar{D}$ -перетворення :

$$\xi^*(p) = G^*(p) - \bar{D}\{W_2(p)S(p)W_1(p)\}\xi^*(p)$$

або

$$\xi^*(p) = \frac{G^*(p)}{1 + \bar{D}\{W_2(p)S(p)W_1(p)\}}.$$

Застосовуємо  $\bar{D}$ -перетворення до першого рівняння системи, отримаємо

$$X^*(p) = \bar{D}\{S(p)W_1(p)\}\xi^*(p).$$

З урахуванням двох останніх виразів передаточна функція замкнутої імпульсної системи буде мати наступний вигляд:

$$W_3^*(p) = \frac{X^*(p)}{G^*(p)} = \frac{\bar{D}\{S(p)W_1(p)\}}{1 + \bar{D}\{W_2(p)S(p)W_1(p)\}}.$$

Знаходимо  $\bar{D}\{S(p)W_1(p)\}$  по полюсам неперервного зображення

$$\bar{D}\{S(p)W_1(p)\} = \bar{D}\left\{\frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{10}{p + 15}\right\}.$$

Скористаємося властивостями лінійності і множення зображення на експоненту:

$$\begin{aligned} \bar{D}\left\{\frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{10}{p + 15}\right\} &= 10\bar{D}\left\{\frac{1}{p(p + 15)}\right\} - \bar{D}\left\{\frac{10e^{-pT}}{p(p + 15)}\right\} = \\ &= 10\bar{D}\left\{\frac{1}{p(p + 15)}\right\} - 10e^{-pT}\bar{D}\left\{\frac{1}{p(p + 15)}\right\} = 10(1 - e^{-pT})\bar{D}\left\{\frac{1}{p(p + 15)}\right\}. \end{aligned}$$

Таким чином, постійний множник і вираз виду  $1 - e^{-pT}$  можна виносити за знак  $\bar{D}$ -перетворення.

Оскільки полюси функції  $\frac{1}{p(p + 15)}$   $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -15$ , то

$$\begin{aligned} \bar{D}\left\{\frac{1}{p(p + 15)}\right\} &= \sum_{k=1}^2 \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{p_k T}} = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2p_k + 15} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{p_k T}} = \\ &= \frac{1}{15} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{p_k T}} - \frac{1}{15} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{-15T}} = \frac{1}{15} \frac{e^{pT}(1 - e^{-15T})}{(e^{pT} - e^{p_k T})(e^{pT} - e^{-15T})}. \end{aligned}$$

Тоді

$$10(1 - e^{-pT})\bar{D}\left\{\frac{1}{p(p + 15)}\right\} = \frac{10(e^{pT} - 1)}{e^{pT}} \frac{1}{15} \frac{e^{pT}(1 - e^{-15T})}{(e^{pT} - e^{p_k T})(e^{pT} - e^{-15T})} = \frac{2}{3} \frac{(1 - e^{-15T})}{(e^{pT} - e^{-15T})}.$$

Аналогічно для  $\bar{D}\{W_2(p)S(p)W_1(p)\}$  отримуємо

$$\bar{D}\left\{\frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{10}{p + 15} \frac{1}{p + 20}\right\} = 10(1 - e^{-pT})\bar{D}\left\{\frac{1}{p(p + 15)(p + 20)}\right\}.$$

Полюси функції  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -15$ ,  $p_3 = -20$ ,



$$\begin{aligned} \overline{D} \left\{ \frac{1}{p(p+15)(p+20)} \right\} &= \sum_{k=1}^3 \frac{1}{3p_k^2 + 7p_k + 300} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{p_k T}} = \\ &= \frac{1}{300} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1} - \frac{1}{15} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{15T}} + \frac{1}{100} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{20T}} = \\ &= \frac{e^{pT}}{300} \left[ \frac{e^{2pT} - (e^{-15T} + e^{-20T})e^{pT} + e^{-35T} - 4e^{2pT} + 4(e^{-20T} + 1)e^{pT} - 4e^{-20T} + 3e^{2pT} - 3(1 + e^{-15T})e^{pT} + 3e^{-15T}}{(e^{pT} - 1)(e^{pT} - e^{-15T})(e^{pT} - e^{-20T})} \right] = \\ &= \frac{e^{pT}}{300} \left[ \frac{e^{pT}(1 + 3e^{-20T} - 4e^{-15T}) + e^{-35T} - 4e^{-20T} + 3e^{-15T}}{(e^{pT} - 1)(e^{pT} - e^{-15T})(e^{pT} - e^{-20T})} \right]. \end{aligned}$$

Тоді

$$10(1 - e^{-pT}) \overline{D} \left\{ \frac{1}{p(p+15)(p+20)} \right\} = \frac{1}{30} \left[ \frac{e^{pT}(1 + 3e^{-20T} - 4e^{-15T}) + e^{-35T} - 4e^{-20T} + 3e^{-15T}}{(e^{pT} - e^{-15T})(e^{pT} - e^{-20T})} \right].$$

З урахуванням знайдених виразів передаточних функцій замкнутої системи буде мати вигляд

$$W_3^*(p) = \frac{2(e^{pT} - e^{-20T})(1 - e^{-15T})}{90e^{2pT} + 3(1 - 27e^{-20T} - 34e^{-15T})e^{pT} + 93e^{-35T} - 12e^{-20T} + 9e^{-15T}}.$$

**Завдання 7.** Дослідити стійкість замкнутої імпульсної системи:

- 1) аналогом метода Гурвіца, використовуючи  $W_3^*(p)$ , отриману в завданні 6 (період квантування  $T=0,1$ );
- 2) аналогом метода Рауса (вихідні данні приведені в табл.10)
- 3) аналогом метода Михайлова (вихідні данні приведені в табл.10), схема імпульсної системи зображенна на рис.69  $W_1(p) = \frac{K_1}{(p+a)(p+b)}$ .

4)

### Методичні вказівки

1. Ознайомитись з поняттям «стійкість» для лінійних імпульсних систем і з необхідною і достатньою умовою стійкості [2, с.465; 4, с. 91-92; 6, с. 350-352; 7, с.49-50; 9, с.249-250; 13, с.93-94; 14, с.383-386; 15, с.546-550].
2. Вивчити алгебраїчні критерії стійкості (аналогі критеріїв Гурвіца і Рауса) [4, с. 89-91; 6, с. 352-353; 7, с.51-54; 9, с.249-250; 13, с.94-95; 14, с.386-389; 15, с. 567-577].

3. Вивчити частотні критерії стійкості (аналоги критеріїв Михайлова і Найквіста)

[4, с. 92-98; 7, с.54-57; 9, с.251-255; 13, с.96-97; 14, с.389-394; 15, с.550-567].

Таблиця 10

Номер варіанту	Завдання 7, б					Завдання 7, в			
	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$K_1$	$A$	$b$	$T$
1	K	10	1.1K	50	1.5K	100	1	3	0.1
2	2K	7	K	15	10K	10K	K	2K	0.01
3	3	2K	30	K	20	20	0.1K	0.3K	0.1
4	45	20	K+5	12	80	5K	3	7	0.1
5	10	1.5K	20	K+10	45	50	0.2K	20	0.1
6	5	K+20	0.1K	40	10	30	15	0.1K	0.1
7	0.3K	13	5K	18	5	70	35	K	0.01
8	5.5	10	0.2K	0.5K	20	2K	15	30	0.1
9	0.1K	2.5	4.2	0.7K	50	100	3K	5K	0.01
10	0.5	1.8	2.2	0.1K	3	4K	0.1K	0.3K	0.1
11	10	2K	K+3	17	25	2.5K	5	2	0.1
12	K+5	15	20	35	2K	45	8	0.1K	0.1
13	8	4.5	30	K+7	20	50	0.3K	10	0.1
14	5K	95	80	75	10K	20K	1	0.5	0.1
15	3.5	0.2K	K+3	12	6	100	K	30	0.01
16	25	K	K+10	50	80	45	20	K+5	0.01
17	0.5K	25	10	0.8K	K	3K	15	K	0.01
18	12.5	7.4	0.3K	K+1	30	75	1.5K	0.8K	0.01
19	0.0K	10	K+3	20	45	100	0.6K	K	0.01
20	5	17	24	K+7	K	80	7	5	0.1
21	6	0.2K	K+15	25	20	7K	2	6	0.1
22	0.1K	45	100	K+30	90	75	0.2K	0.4K	0.1
23	15	K+10	0.5K	40	35	15K	0.5	1.5	0.1
24	0.5	K+5	0.4K	K	2	100	0.3K	0.5K	0.1
25	10	100	2K	K+15	22	4K	25	K	0.01

$$A^*(p) = a_4 e^{4pT} + a_3 e^{3pT} + a_2 e^{2pT} + a_1 e^{pT} + a_0$$

Для розімкнutoї імпульсної системи стійкість можна дослідити по передаточній функції її неперервної частини. Якщо неперервна частина стійка, нейтральна або нестійка, то і розімкнута імпульсна система відповідно стійка, нейтральна або нестійка [15]. Таким чином, аналоги критеріїв Гурвіца, Рауса, Михайлова та ін. доцільно використовувати тільки при дослідженні стійких замкнутих імпульсних систем. При використанні перерахованих критеріїв необхідно попередньо знайти передаточну функцію замкнутої імпульсної системи

$$W_3^*(p) = \frac{b_m e^{pmT} + b_{m-1} e^{p(m-1)T} + \dots + b_1 e^{pT} + b_0}{a_n e^{pnT} + a_{n-1} e^{p(n-1)T} + \dots + a_1 e^{pT} + a_0}.$$

Для дослідження стійкості використовується характеристичний многочлен (знаменник передаточної функції)

$$A^*(p) = a_n e^{pnT} + a_{n-1} e^{p(n-1)T} + \dots + a_1 e^{pT} + a_0.$$

**Аналог критерія Гурвіца.** Зробимо заміну змінних  $e^{pT} = z$ :

$$A^*(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0.$$

Для того щоб можна було скористатись критерієм Гурвіца в його звичайному формулюванні, необхідно зробити ще одну заміну змінних

$$z = \frac{u+1}{u-1}.$$

Тоді отримаємо

$$A^*\left(\frac{u+1}{u-1}\right) = a_n \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{u+1}{u-1}\right) + a_0$$

або

$$(u-1)^n A^*\left(\frac{u+1}{u-1}\right) = A^*(u) = a_n (u+1)^n + a_{n-1} (u+1)^{n-1} (u-1) + \dots + a_1 (u+1)(u-1)^{n-1} + a_0 (u-1)^n.$$

Після розкриття скобок і зведення подібних членів отримаємо

$$A^*(z) = A_n u^n + A_{n-1} u^{n-1} + \dots + A_1 u + A_0.$$

Імпульсна система буде стійка тоді і тільки тоді, коли будуть додатні  $n$  головних визначників наступної матриці коефіцієнтів характеристичного рівняння системи:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} A_{n-1} & A_{n-3} & A_{n-5} & A_{n-7} & \dots & 0 \\ A_n & A_{n-2} & A_{n-4} & A_{n-6} & \dots & 0 \\ 0 & A_{n-1} & A_{n-3} & A_{n-5} & \dots & 0 \\ 0 & A_n & A_{n-2} & A_{n-4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_2 & A_0 \end{vmatrix}$$

тобто  $A_n > 0; \Delta_1 = A_{n-1} > 0 \dots \Delta_n > 0$ .

**Приклад.** Дослідити стійкість замкнутої імпульсної системи (див. рис.69) за допомогою аналогів критерія Гурвіца

$$W_1(p) = \frac{10}{(p+2)(p+5)}, \quad T = 0.1.$$

Знаходимо передаточну функцію замкнутої імпульсної системи

$$W_3^*(p) = \frac{\bar{D} \left\{ \frac{1-e^{-pT}}{p} W_1(p) \right\}}{1 + \bar{D} \left\{ \frac{1-e^{-pT}}{p} W_1(p) \right\}}$$

і функцію

$$\bar{D} \left\{ \frac{1-e^{-pT}}{p} W_1(p) \right\} = \bar{D} \left\{ \frac{1-e^{-pT}}{p} \frac{10}{(p+2)(p+5)} \right\} = 10(1-e^{-pT}) \bar{D} \left\{ \frac{1}{p(p+2)(p+5)} \right\}.$$

Полюси неперервної функції  $p_1 = 0, p_2 = -2, p_3 = -5$ , тоді

$$\begin{aligned} \bar{D} \left\{ \frac{1}{p(p+2)(p+5)} \right\} &= \sum_{k=1}^3 \frac{1}{3p_k^2 + 14p_k + 10} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{p_k T}} = \\ &= \frac{1}{10} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1} - \frac{1}{6} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{-2T}} + \frac{1}{15} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{-5T}} = \\ &= \frac{e^{pT}}{30} \left[ \frac{e^{pT}(3 + 2e^{-5T} - 5e^{-2T}) + 3e^{-7T} - 5e^{-5T} + 2e^{-2T}}{(e^{pT} - 1)(e^{pT} - e^{-2T})(e^{pT} - e^{-5T})} \right]; \\ 10(1-e^{-pT}) \bar{D} \left\{ \frac{1}{p(p+2)(p+5)} \right\} &= \frac{1}{3} \left[ \frac{e^{pT}(3 + 2e^{-5T} - 5e^{-2T}) + 3e^{-7T} - 5e^{-5T} + 2e^{-2T}}{(e^{pT} - 1)(e^{pT} - e^{-2T})(e^{pT} - e^{-5T})} \right]. \end{aligned}$$

З урахуванням отриманого виразу передаточна функція замкнутої імпульсної системи

$$W_3^*(p) = \frac{e^{pT}(3 + 2e^{-5T} - 5e^{-2T}) + 3e^{-7T} - 5e^{-5T} + 2e^{-2T}}{3e^{2pT} + (3 - e^{-5T} - 8e^{-2T})e^{pT} + 6e^{-7T} - 5e^{-5T} + 2e^{-2T}}.$$

Підставляючи 0,1 замість T, отримаємо:

$$W_3^*(p) = \frac{0.119e^{pT} + 0.095}{3e^{2pT} - 4.156e^{pT} + 1.584} = \frac{0.039e^{pT} + 0.0317}{e^{2pT} - 1.385e^{pT} + 0.528}.$$

Характеристичний многочлен  $A^*(p) = e^{2pT} - 1.385e^{pT} + 0.528$ .

Замінюючи  $e^{pT} = z$ , отримаємо  $A^*(z) = z^2 - 1.385z + 0.528$ .

Підставляючи  $z = \frac{u+1}{u-1}$ , отримаємо  $A^*(u) = (u+1)^2 - 1.385(u+1)(u-1) + 0.528(u-1)^2$ .

Розкриваючи скобки, зводимо подібні

$$A^*(u) = 0.143u^2 + 0.944u + 2.913.$$

Складаємо визначник Гурвіца:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0.944 & 0 \\ 0.143 & 2.913 \end{vmatrix}$$

Оскільки,  $A_2 = 0.143 > 0$ ;  $\Delta_1 = 0.944 > 0$ ;  $\Delta_2 = 2.75 > 0$ , то керуючись критерієм Гурвіца можна зробити висновок про те, що дана імпульсна система стійка.

**Аналог критерія Рауса.** Цей критерій дозволяє досліджувати стійкість імпульсної системи безпосередньо по коефіцієнтам характеристичного многочлена  $A^*(p) = a_n e^{pnT} + a_{n-1} e^{p(n-1)T} + \dots + a_1 e^{pT} + a_0$ . Складемо аналог таблиці Рауса по наступному правилу (табл.11). В першій парі рядків таблиці вписуємо коефіцієнти многочлена  $A^*(p)$  в порядку зростання, а під ними – в зворотньому порядку. Коефіцієнти наступних пар рядків визначаємо натсупним чином. Від коефіцієнтів верхнього рядка кожної пари віднімаємо відповідно коефіцієнти нижнього рядка, попередньо помножені на таке число, щоб перша різниця перетворилась в нуль. Відкидаючи цю нульову різницю, знаходимо перший рядок пари. Другий рядок складається з тих же коефіцієнтів, але записаних в зворотньому порядку.

**Таблиця 11**

Коефіцієнт	$a_0$ $a_n$	$a_1$ $a_{n-1}$	.....	$a_{n-1}$ $a_1$	$a_n$ $a_0$
$\lambda_1 = \frac{a_0}{a_n} < 1$	$c_{0,2} = a_1 - \lambda_1 a_{n-1}$ $c_{n-1,2}$	$c_{1,2} = a_2 - \lambda_1 a_{n-2}$ $c_{n-2,2}$	.....	$c_{n-1,2} = a_n - \lambda_1 a_0$ $c_{0,2}$	.....
$\lambda_2 = \frac{c_{0,2}}{c_{n-1,2}}$	$c_{0,3} = c_{1,2} - \lambda_2 c_{n-2,2}$ $c_{n-2,3}$	$c_{1,3} = c_{2,2} - \lambda_2 c_{n-3,2}$ $c_{n-3,3}$	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....

Будь-який з коефіцієнтів  $C_{k,i}$  ( $i \geq 2$ ) таблиці, де перший індекс означає номер стовбчика (номер коефіцієнта), а другий - номер рядка, в якому знаходиться коефіцієнт, можна знайти по формулі

$$c_{k,i} = c_{k+1,i-1} - \lambda_{i-1} c_{n-i-k+1,i-1},$$

$$\text{де } \lambda_i = \frac{c_{0,i}}{c_{n-i+1,i}}.$$

Скориставшись даними цієї таблиці і теоремою Шура [15], критерій стійкості можна сформулювати наступним чином: для того щоб замкнута система була стійка, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти  $\lambda_i$  були по абсолютній величині менше одиниці, тобто  $|\lambda_i| < 1$ .

**Приклад.** Дослідити стійкість замкненої імпульсної системи за допомогою аналога критерія Рауса (вихідні данні ті ж, що і в попередньому прикладі).

Характеристичний многочлен  $A^*(p) = e^{2pT} - 1.385e^{pT} + 0.528$ .

Складемо аналог таблиці Рауса (табл.12).

**Таблиця 12**

Коефіцієнт	$a_0 = 0.528$ $a_2 = 1$	$a_1 = -1.385$ $a_1 = -1.385$	$a_2 = 1$ $a_0 = 0.528$
$\lambda_1 = \frac{0.528}{1} = 0.528$	$c_{0,2} = -1.385 - 0.528(-1.385) = -0.954$ $c_{1,2} = 0.721$	$c_{1,2} = 1 - 0.528 \cdot 0.528 = 0.721$ $c_{0,2} = -0.654$	0 0
$\lambda_2 = \frac{-0.654}{0.721} = -0.907$	$c_{0,3} = 0.721 - (-0.907)(-0.654) = 0.128$ 0	0 0	0 0

Так як  $|\lambda_1| < 1$  і  $|\lambda_2| < 1$ , то робимо висновок, що данна замкнута система стійка.

**Аналог критерія Михайлова.** Для стійкості лінійної імпульсної системи необхідно і достатньо, щоб при зміні частоти  $\omega$  от 0 до  $\pi / T$  вектор  $A^*(j\omega)$  пройшов проти годинникової стрілки  $2n$  квадрантів, де  $n$  - степінь характеристичного многочлена.

Для побудування кривої Михайлова (годографа) слідє замінити  $p$  на  $j\omega$  в  $A^*(j\omega)$ , а потім виділити дійсну і уявну частини  $A^*(j\omega) = P^*(j\omega) + jQ^*(j\omega)$ . В площині параметрів

$P^*(\omega)$  і  $Q^*(\omega)$  будуюмо годограф, по виду якого можна судити про стійкість системи. На рис.80 показаний годограф стійкої, а на рис.81 – нестійкої системи ( $n=3$ ).

**Приклад.** Дослідити стійкість імпульсної системи (рис.82) за допомогою критерія Михайлова.

Знаходимо передаточну функцію замкнутої імпульсної системи

$$W_3^*(p) = \frac{\bar{D} \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{K_0}{T_1 p + 1} \right\}}{1 + \bar{D} \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{K_0}{T_1 p + 1} \right\}}.$$

Використовуючи властивості  $\bar{D}$ -перетворення, отримаємо :

$$\begin{aligned} \bar{D} \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{K_0}{T_1 p + 1} \right\} &= K_0 (1 - e^{-pT}) \bar{D} \left\{ \frac{1}{p(T_1 p + 1)} \right\} = \\ &= K_0 (1 - e^{-pT}) \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{A^*(p_k)} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{p_k T}} \left| \begin{array}{l} p_1 = 0 \\ p_2 = -\frac{1}{T_1} \end{array} \right| = \\ &= K_0 (1 - e^{-pT}) \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2T_1 p_k + 1} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{p_k T}} = K_0 (1 - e^{-pT}) \left[ \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1} - \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{-T/T_1}} \right] = \\ &= K_0 \frac{1 - e^{-T/T_1}}{e^{pT} - e^{-T/T_1}}. \end{aligned}$$

Передаточна функція замкнутої системи

$$W_3^*(p) = \frac{K_0 (1 - e^{-T/T_1})}{e^{pT} - e^{-T/T_1} + K_0 (1 - e^{-T/T_1})}.$$

Характеристичний многочлен

$$A^*(p) = e^{pT} - e^{-T/T_1} + K_0 (1 - e^{-T/T_1}).$$

Виділим дійсну і уявну частини

$$A^*(j\omega) = e^{j\omega T} - e^{-T/T_1} + K_0 (1 - e^{-T/T_1}) = \cos \omega T + j \sin \omega T - e^{-T/T_1} + K_0 (1 - e^{-T/T_1});$$

$$P^*(\omega) = \cos \omega T - e^{-T/T_1} + K_0 (1 - e^{-T/T_1});$$

$$Q^*(\omega) = \sin \omega T.$$

На рис.83 показані годографи Михайлова для системи з параметрами  $K_0=20$ ;  $T=0,2$  с;  $T_1=1$  с (крива 1) і системи з параметрами  $K_0=10$ ;  $T=0,2$  с;  $T_1=1$  с (крива 2). Таким чином, для системи, зображеної на рис.82 ( $n=1$ ), стійкість залежить від значення коефіцієнта, підсилення  $K_0$ . При  $K_0=20$  система нестійка (крива 1), а при  $K_0=10$  – стійка (крива 2).

**Завдання 8.** Дослідити стійкість САР за допомогою першого метода Ляпунова, якщо рівняння замкнутої системи мають вигляд

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \Phi_i(y_1, y_2, y_3), \quad i = \overline{1,3}.$$

Вихідні дані приведені в табл.13.

### Методичні вказівки.

1. Ознайомитись з поняттям «нелінійна система», видами нелінійностей [2, с.475- 482; 4, с.120-126; 6, с.358-362; 8, с.1-3; 10, с.7-13; 11, с.236-237; 13, с.4-9; 14, с.232-239].
2. Вивчити перший метод Ляпунова (дослідження стійкості по лінеаризованим рівнянням) [2, с.134-138; 3, с.107-117; 6, с.95-99, 362-364; 8, с. 10-13; 9, с.82-88; 11, с.101-105; 12, с.114-123].

Перший метод Ляпунова застосовується для дослідження вільного руху системи відносно початку координат ( $y_i=0$ ) при нескінченно малих відхиленнях. Розглянемо нелінійну систему, що описується системою рівнянь

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \Phi_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n}.$$

И лінеаризуємо нелінійні функції  $\Phi_i$  в навколо точки  $y_i(t)=0$

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = a_{i1}y_1(t) + a_{i2}y_2(t) + \dots + a_{in}y_n(t) + R_i(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

де  $a_{in} = \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_n} \right)_{y_n=0}$ ;  $R_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$  - сукупність членів, залежних від відхилень  $y_i$  в степені вище першої.

Оскільки відхилення  $y_i$  достатньо малі, то, нехтуючи  $R_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , отримаємо лінеаризовані рівняння:

$$\frac{dy_i}{dt} = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n, \quad i = \overline{1, n},$$

що називаються рівняннями першого приближення

Характеристичні рівняння системи можна представити наступним чином:

$$A(p) = \begin{vmatrix} a_{11} - p & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - p & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} - p \end{vmatrix} = 0.$$



Таблица 13

№ п\п	$\Phi_1 (y_1, y_2, y_3)$	$\Phi_2 (y_1, y_2, y_3)$	$\Phi_3 (y_1, y_2, y_3)$
1	$2 y_1 - 0,3Ky_3 + 5 y_1 y_2$	$-5 y_1 + 0,1K y_1 y_2 + y_3$	$y_1 + 0,2Ky_2^2 - y_1 y_3 + y_3$
2	$Ky_1 - 0,5e^{-y_2} + 5y_2 y_3$	$\sin y_1 + \cos y_2 + 2Ky_3$	$20\operatorname{tg} y_1 + y_1 y_2 + 25y_3$
3	$y_1^2 + 3\arcsin y_2 - K^2 y_3$	$2e^{y_1} - 5K \sin y_2 - 15y_3$	$y_1 + 20y_1 y_2 + (K - 10)y_3$
4	$5y_1 + y_2 y_3 - (K + 10)y_3$	$0,5y_1 + \operatorname{tg} y_2 - K \cos y_3$	$13e^{y_1} - (K - 20)y_2 + 4\operatorname{tg} y_3$
5	$0,5Ky_1 + y_1 y_2 - 30y_3$	$y_1 y_3 + \arccos y_2 + 20y_3$	$15Ky_1 + (K + 10)y_2 - 0,2\operatorname{arctg} y_3$
6	$15y_1 - e^{y_2} + 2\cos y_3$	$y_1^2 - (K + 10)y_2 - 0,3y_3$	$\sin y_1 - y_1 y_2 + 15Ky_3$
7	$4e^{y_1} - \sin y_2 + 3y_3$	$y_1 + \cos y_2 - Ky_3$	$\operatorname{tg} y_1 + 5y_2 - 25y_3$
8	$12y_1 - Ky_2^2 + (K + 15)e^{y_3}$	$13y_1 - \sin y_2 + y_2 y_3$	$5\arcsin y_1 - 3y_2^2 + (K - 7)y_3$
9	$32y_1 + y_1 y_2 - 2Ky_3$	$0,7y_2 - y_2 y_3 + 8Ky_3$	$17\arccos y_1 - Ky_1 y_2 - 2le^{y_3}$
10	$3Ky_1 - 7y_2 + 10y_3$	$5Ke^{y_1} + \sin y_1 - y_2 y_3$	$19y_1^2 - (K - 5)y_1 y_2 + 6Ky_3$
11	$(K + 12)y_1^2 - 5e^{y_2} + 13y_3$	$1,3K \sin y_1 + 2y_2 - y_3$	$(K + 1)^2 y_1 + 2y_1 y_2 - 3y_3$
12	$7y_1 - (K + 3)y_2 + y_3$	$e^{y_1} + \operatorname{tg} y_2 - 2,3Ky_3$	$y_1 y_2 - 1,8y_2 + (K + 11)y_3$
13	$\operatorname{tg} y_1 - \sin y_2 + Ky_3^2$	$\sin y_1 - e^{y_2} + y_2 y_3$	$y_1^2 + Ky_2 - 4y_3$
14	$10 y_1 + y_1^2 + (K + 5)y_3$	$15 y_1 + Ky_2 + y_1 y_2$	$5y_2 + Ky_3 + 10y_1 y_2$
15	$y_1 + Ky_2 + 10y_3 y_1$	$K y_2 + 5Ky_3$	$y_1^2 + y_2 + (K - 30) y_3$
16	$(K - 5)y_1 + \cos y_2 + y_2 y_3$	$14\cos y_1 - 11\sin y_2 + y_3$	$5y_1 - 50y_2 + (K - 13)y_3$
17	$17y_1^2 - 5Ky_2 - 8y_3$	$13\sin y_1 + e^{y_2} - 3y_3$	$5,5Ky_1 - 10Ky_2 + Ky_3$
18	$(K - 2)y_1 + y_1 y_2 + \sin y_3$	$19\cos y_1 - y_2 + y_2 y_3$	$(10 - K)e^{y_1} + y_1 y_2 - 5Ky_3$
19	$15Ky_1 - 10y_1 y_2 + 2y_2$	$11\operatorname{tg} y_1 + 5y_2 - y_3$	$14Ky_1 - y_2^2 + 40y_3$
20	$10y_1^2 + y_1 y_3 - 2y_2 + 5y_3$	$7K \sin y_1 + 3y_2^2 - e^{y_3}$	$90y_1 + 15y_2 - (K - 9)y_3^2$
21	$3 y_1 + y_1 y_3 - Ky_2 + y_2^2$	$5 y_1 + y_2 y_1 + (K - 25)y_2$	$y_1 + 5y_2 + Ky_3 - y_2 y_3$
22	$Ky_1 + (K + 10) y_1 y_2 + 15y_2$	$2 y_1 + y_1 y_2 + (K + 5)y_2$	$y_2 + (K - 40)y_3 + y_1 y_3$
23	$5 y_1 + Ky_2 + y_2 y_3$	$y_1 y_2 + 5y_2^2 + y_2 - y_3$	$10y_1 + Ky_3 + y_2^2$
24	$y_1 + (K - 20) y_3 + y_2 y_1$	$5y_1 + (K + 15)y_2 + y_1 y_2$	$y_2 + (K - 10)y_3 + y_1 y_2$
25	$8e^{y_1} + 15y_2 - \sin y_3$	$5K\operatorname{tg} y_1 - 3y_2 + \cos y_3$	$18\sin y_1 + 3\cos y_2 - 5Ky_3$

Розв'язавши характеристичне рівняння, можна визначити його корені  $p_k$ , де  $i = \overline{1, n}$ , які в загальному вигляді мають вид  $p_k = \alpha_k \pm j\omega_k$ , де  $\alpha_k$ ,  $\omega_k$  - відповідно дійсна і уявна частини.

Для дослідження стійкості систем по їх лінеаризованим рівнянням принципово важливі наступні теореми Ляпунова.

### **Теорема 1.**

Якщо дійсні частини всіх коренів  $p_k$  характеристичного рівняння  $A(p)=0$  першого приближення від'ємні, то невимушений рух асимптотично стійкий.

### **Теорема 2.**

Якщо серед коренів  $p_k$  характеристичного рівняння першого приближення  $A(p)=0$  є хоча б один корінь з додатньою дійсною частиною, то невимушений рух нестійкий.

Потрібно звернути увагу на те, що якщо серед коренів характеристичного рівняння є один або декілька нульових коренів, а інші корені мають від'ємні дійсні частини, то оцінка стійкості по рівнянням першого приближення неможлива. В цьому випадку необхідно розглядати диференціальні рівняння в їх початковому вигляді і використовувати інші критерії стійкості для нелінійних систем.

**Приклад.** Дослідити стійкість системи по першому методу Ляпунова, якщо рівняння замкнутої системи мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = y_2 - y_3; \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = y_1^2 + y_2; \\ \frac{dy_3(t)}{dt} = y_1^2 + y_3. \end{cases}$$

Рівняння системи лінійного приближення навколо точки  $y_1=y_2=y_3=0$  будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 - y_3; \\ \frac{dy_2}{dt} = y_2; \\ \frac{dy_3}{dt} = y_3. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$A(p) = \begin{vmatrix} -p & 1 & -1 \\ 0 & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p \end{vmatrix} = 0,$$

$$A(p) = p(1-p^2) = 0.$$

Звідси отримаємо  $p_1=0$ ,  $p_2=p_3=1$ .

Таким чином, згідно лінійному приближенню невимушений рух буде нестійким, так як є додатні корені.

**Завдання 9.** Дослідити абсолютну стійкість системи автоматичного регулювання (рис.84) методом Попова. Дані для розрахунків приведені в табл.14.

#### Методичні вказівки.

1. Ознайомитись з видами нелінійностей і характером процесів в нелінійних системах [2, с.475-478; 8, с.1-3, 8-10; 14, с.275-296].
2. Вивчити критерій Попова [2, с.535-538; 4, с.185-193; 6, с.374-376; 8, с.10-11; 10, с.112-115; 14, с.260-262].
3. Вивчити критерій Попова [2, с.535-538; 4, с.185-193; 6, с.374-375; 8, с.34-38; 10, с.135-142; 13, с.60-64; 14, с.275-296].

Частотний критерій Попова дозволяє досліджувати абсолютну стійкість стану рівноваги нелінійних систем. Стан рівноваги нелінійної системи з стійкою лінійною частиною буде абсолютно стійким, якщо нелінійна характеристика знаходиться в секторі  $[0, \mu]$  (рис.85) і існує таке дійсне число  $h$ , що при всіх  $\omega > 0$  виконується нерівність

$$\operatorname{Re}\{(1 + j\omega h)W(j\omega)\} \frac{1}{\mu} > 0,$$

де  $W(j\omega)$  – АФЧХ лінійної частини системи.

Частотну умову зручно перевіряти графоаналітичним методом за допомогою модифікованої частотної характеристики  $W_H(j\omega) = U_M(\omega) + jV_M(\omega)$ , де  $U_M(\omega) = U(\omega)$ ;  $V_M(\omega) = \omega V(\omega)$ .

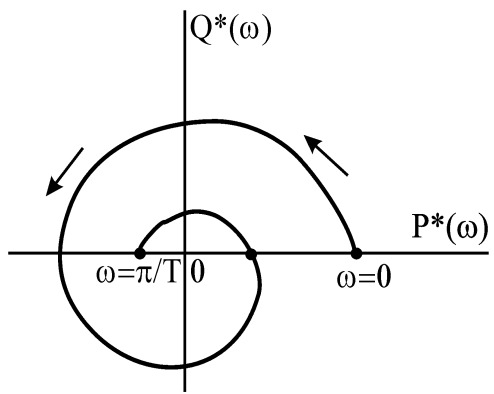


Рис.80

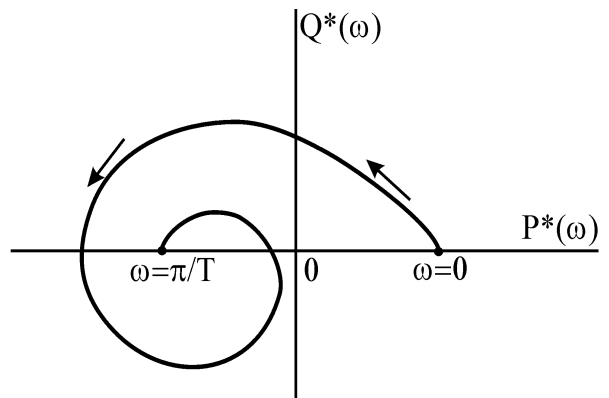


Рис.81

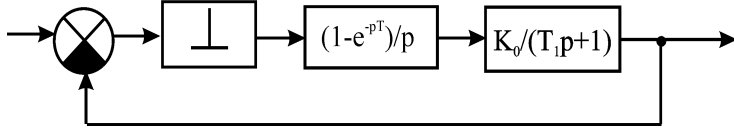


Рис.82

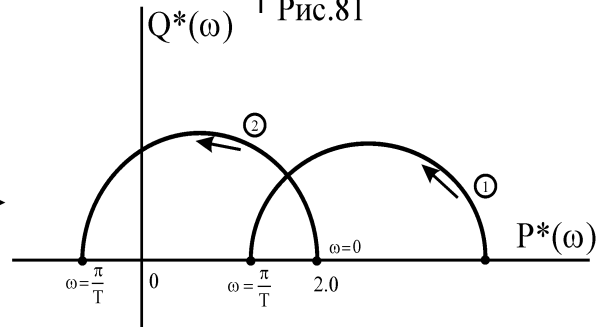


Рис.83

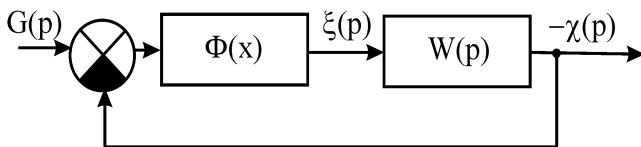


Рис.84

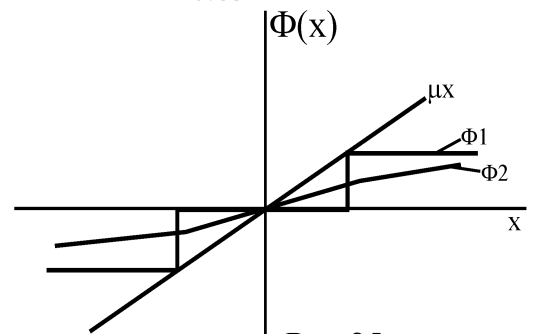


Рис.85

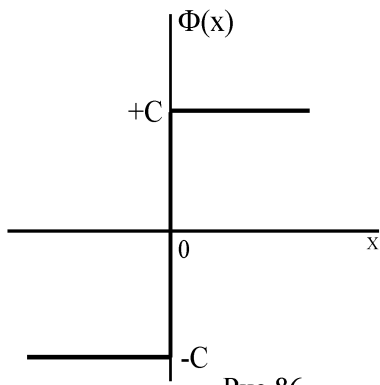


Рис.86

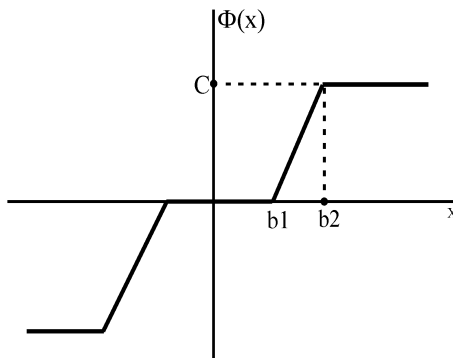


Рис.87

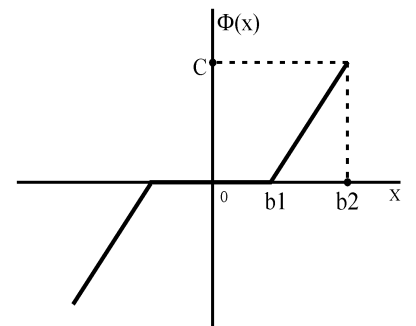


Рис.88

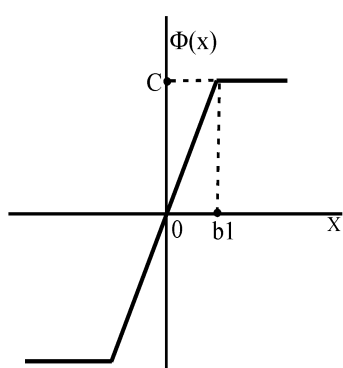


Рис.89

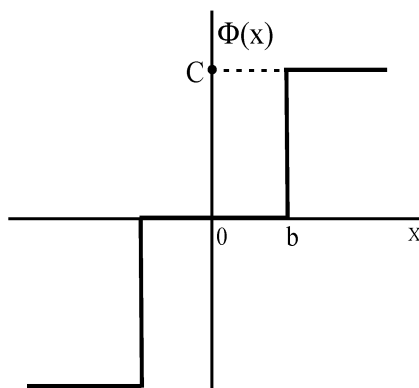


Рис.90

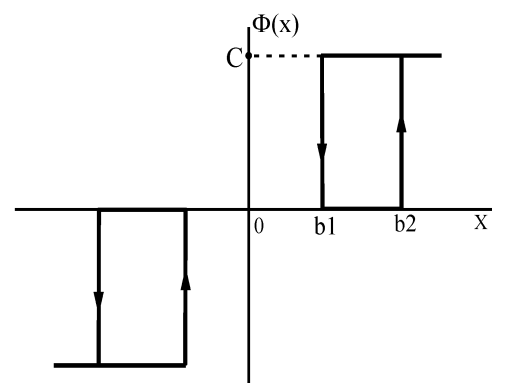


Рис.91

Таблиця 14

Номер варіанту	Номер рисунок	С	b1	b2	Завдання 9
					W(p)
1	91	10	2	4	$K/[(5p+1)(0.2p+1)]$
2	90	K	8	-	$2K/[(p+5)(p^2+2p+1)]$
3	89	20	5	-	$10/(p(5p+1))$
4	88	K	4	8	Табл.3
5	87	20	5	10	Табл.3
6	86	15	-	-	$10/[p(p+4)^2]$
7	91	50	10	20	Табл.3
8	90	K	15	-	Табл.3
9	89	30	5	-	Табл.3
10	88	40	5	9	Табл.3
11	87	K	5	10	$K/[(p+2)(p+5)]$
12	86	20	-	-	$10p/(p+10)^2$
13	91	25	5	10	$K(p+5)/[p^2(p+1)]$
14	90	90	50	-	Табл.3
15	89	100	20	-	Табл.3
16	88	K	10	15	Табл.3
17	87	15	2	5	$Kp/[(p^2+5p+1)]$
18	86	10	-	-	$(p+K)/p(p+5)^2$
19	91	90	2	4	Табл.3
20	90	90	0.5K	--	Табл.3
21	89	2K	25	-	Табл.3
22	88	30	2	5	$p/[(p+1)(p+5)]$
23	87	100	10	30	Табл.3
24	86	15	-	-	Табл.3
25	91	40	5	8	Табл.3

Стан рівноваги нелінійної системи буде абсолютно стійким, якщо модифікована частотна характеристика не перетинає пряму, що проходить через точку  $(-1/\mu)$  на вісі абсцис (рис.92).

Для однозначної стаціонарної характеристики нелінійної ланки  $-\infty < h < +\infty$ , для неоднозначної характеристики з додатнім гістерезисом  $-\infty < h \leq 0$  (рис.93), для неоднозначної характеристики з від'ємним гістерезисом  $0 \leq h < +\infty$  (рис.94).

**Зауваження.** Якщо умови критерія Попова не виконуються, то неможливо зробити висновок про те, що система нестійка. Вона може бути як стійкою, так і нестійкою. Необхідно провести додаткові дослідження, використовуючи інші критерії стійкості.

**Приклад.** Дослідити абсолютну стійкість стану рівноваги системи (див. рис.84) методом Попова. Характеристика нелінійності показана на рис.95, де  $C=5$ ,  $V=2$ .  
Передавальна функція

$$W(p) = \frac{100}{p(p+1)(p+10)}.$$

Підставляємо  $j\omega$  замість  $p$  і виділяємо дійсну та уявну частини

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{100}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+10)} = \frac{100(j\omega-1)(j\omega-10)}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+10)(j\omega-1)(j\omega-10)} = \\ &= -\frac{1100}{(\omega^2+1)(\omega^2+100)} + j \frac{100(\omega^2-10)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+100)}. \end{aligned}$$

Переходимо до модифікованої частотної характеристики

$$\begin{aligned} U_m(\omega) = U(\omega) &= -\frac{1100}{(\omega^2+1)(\omega^2+100)}; \\ V_m(\omega) = \omega V_m(\omega) &= \frac{100(\omega^2-10)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+100)}. \end{aligned}$$

В координатах  $U_m(\omega)$ ,  $V_m(\omega)$  будемо годограф модифікованої частотної характеристики (див. рис.96).

Нелінійна характеристика може бути розташована в секторі між прямою  $\Phi = \mu x$ , де  $\mu = C/V = 2,5$ , і вісью абсцис (рис.95).

У відповідності з критерієм Попова система буде стійкою в тому випадку, якщо через точку  $(-1/\mu = -0,4)$  можна провести пряму, яка б не перетинала модифіковану частотну характеристику. Однак, як видно з рис.96, будь-яка пряма, що проходить через точку  $(-0,4)$ , перетинає модифіковану частотну характеристику. Отже, неможна

зросити висновок про те, що нелінійна система абсолютно стійка (однак не можна зробити висновок і про те, що система нестійка).

**Завдання 10.** Методом гармонічної лінеаризації дослідити стійкість стану рівноваги схеми, структурна схема якої зображена на рис.84.

Номер залікової книжки це 4 цифри  $n_1n_2n_3n_4$ , наприклад ДС-5104,  $n_1 = 5, n_2 = 1, n_3 = 0, n_4 = 4$

Якщо  $n_4$  непарна цифра – перший тип рівняння, парна – другий.

$$1. \frac{m_1}{(p+x)(p+y)(p+z)};$$

$$2. \frac{p+m_2}{(p+x)(p+y)(p+z)};$$

Розрахунок коефіцієнтів:

$$x = n_1,$$

$$y = n_2 + n_3,$$

$$z = n_4,$$

$$m_1 = x + y + z,$$

$$m_2 = 2(x + y + 2z)$$

Дані для розрахунку приведені в табл.15.

### Методичні вказівки

1. Вивчити основні положення метода гармонічної лінеаризації [2, с.542-545; 4, с.238-247; 8, с.38-42; 10, с.70-75; 11, с.251-256; 13,с.35-40 ].
2. Ознайомитись з методикою визначення коефіцієнтів гармонічної лінеаризації [2, с.545-558; 8, с.42-47; 10, с.76- 86].
3. Ознайомитись з алгебраїчним методом визначення параметрів і стійкості автоколивань [2, с.549-558; 8, с.48-51; 10, с.86-91; 11, с.256-257].
4. Ознайомитись з методикою дослідження стійкості стану рівноваги (можливості виникнення автоколивань) [2, с.558-559; 8, с.56; 10, с.91-97].

В нелінійних системах можливим режимом роботи являються автоколивання. Виникнення автоколивань можливе лише тоді, коли стан рівноваги в нелінійній системі не являється абсолютно стійким.



Будемо рахувати, що нелінійна система може бути представлена в вигляді лінійної частини і нелінійної ланки (див. рис.84). Лінійна частина характеризується передаточною функцією  $W(p)=B(p)/A(p)$ , причому  $|W(jn\omega)| \ll |W(j\omega)|$  (властивість фільтра,  $\omega$  – частота власних періодичних коливань). Тому сигнал на вході нелінійної ланки виявиться близьким до синусоїди  $X(t) = a \sin \omega t$ .

При несиметричних коливаннях з'являється ще одна постійна складова  $X(t) = a_0 + a \sin \omega t$ .

В подальшому будемо розглядати тільки симетричні автоколивання.

З режимом несиметричних автоколивань можна ознайомитись по роботам [2;8;10].

В випадку симетричних коливань  $g(t)=0$  і характеристика нелінійної ланки симетрична. Співвідношення

$$Y(p) = \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] X(p)$$

називається формулою гармонічної лінеаризації, де  $q(a)$ ,  $q'(a)$ - коефіцієнти гармонічної лінеаризації.

$$q(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \Phi(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi;$$

$$q'(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \Phi(a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi,$$

$$\varphi = \omega t.$$

Якщо непарно-симетрична нелінійність однозначна (рис.86-90), то  $q'(a) \equiv 0$ .

Гармонічно лінеаризована передаточна функція нелінійної ланки має вигляд

$$W_n(a, p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p.$$

Необхідно підкреслити, що данна лінеаризована передаточна функція справедлива тільки для конкретного періодичного рішення  $X(t) = a \sin \omega t$ .

З урахуванням виразів для передаточних функцій лінеаризованої нелінійності і лінійної частини знаходимо характеристичне рівняння гармонічно лінеаризованої системи

$$A(p) + B(p) \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] = 0.$$

Режим автоколивань можливий тільки при наявності пари чисто уявних коренів  $p_{1,2} = \pm j\omega$ . Підставляючи  $j\omega$  замість  $p$ , отримаємо

$$A(j\omega) + B(j\omega) \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} j\omega \right] = 0.$$

Виділемо дійсну і уявну частини  $P(a, \omega) + jQ(a, \omega) = 0$ .

В результаті отримаємо два алгебраїчних рівняння

$$\begin{cases} P(a, \omega) = 0; \\ Q(a, \omega) = 0. \end{cases}$$

З яких визначаються шукані амплітуда  $a$  і частота  $\omega$  періодичного рішення.

Визначивши параметри періодичного рішення, необхідно дослідити його стійкість.

Для стійкості періодичного рішення повинна виконуватись нерівність

$$\left( \frac{\partial P}{\partial a} \right)^\chi \left( \frac{\partial Q}{\partial \omega} \right)^\chi - \left( \frac{\partial P}{\partial \omega} \right)^\chi \left( \frac{\partial Q}{\partial a} \right)^\chi > 0,$$

де  $\chi$  - символ, означаючий підстановку конкретних значень  $a$  і  $\omega$ , відповідючих шуканому періодичному рішенням  $X(t) = a \sin \omega t$ .

В додаток до цієї умови необхідно, щоб в характеристичному рівнянні гармонічно лінеаризованої системи всі корені (крім використаної пари чисто уявних) мали від'ємні частини, тобто щоб многочлен

$$\frac{\left\{ A(p) + B(p) \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \right\}}{p^2 + \omega^2}.$$

Задовільняв критерій Гурвіца (Рауса, Михайлова). Для систем третього і четвертого порядків для цього достатня тільки додатність коефіцієнтів рівняння

$$A(p) + B(p) \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] = 0.$$

**Приклад.** Методом гармонічної лінеаризації дослідити нелінійну систему (див. рис.84),  $g(t)=0$ . Характеристика нелінійної ланки показана на рис.90 ( $C=5$ ,  $V=2$ ). Передаточна функція лінійної частини

$$W(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+10)}.$$

Оскільки нелінійність однозначна і симетрична, а дія  $g(t)=0$ , в системі можуть виникнути тільки симетричні коливання, причому коефіцієнт  $q'(a)=0$ .

Визначимо (рис.97)

$$q(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \xi(t) \sin \omega t dt = \frac{4}{\pi a} \int_{\alpha_1}^{2\pi} C \sin \omega t dt = \frac{4C}{\pi a} \cos \alpha_1.$$

Як слідує з рис.97

$$\sin \alpha_1 = \frac{b}{a}.$$

Тоді

$$q(a) = \frac{4C}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad a \geq b.$$

Гармонічно лінеаризоване рівняння замкнутої системи має вигляд

$$p(p+1)(p+10) + 100q(a) = 0.$$

Підставимо в характеристичне рівняння  $j\omega$  замість  $p$ , виділимо дійсну і уявну частини і прирівняємо їх до нуля

$$P(a, \omega) = 100q(a) - 11\omega^2 = 0;$$

$$Q(a, \omega) = 10\omega - \omega^3 = 0.$$

З другого рівняння визначаємо частоту періодичного рішення  $\omega = \sqrt{10}$ .

Підставляючи  $\sqrt{10}$  замість  $\omega$  в перше рівняння, отримаємо

$$q(a) = \frac{110}{100} = 1,1.$$

Використовуючи графік функції  $q(a)$  (рис.98), визначаємо амплітуду періодичного рішення.

Для визначення стійкості отриманого рішення необхідно розрахувати частні похідні

$$\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)^x = 100 \frac{\partial q(a)}{\partial a}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \omega}\right)^x = -22\omega = -22\sqrt{10} < 0;$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right)^x = 0; \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial \omega}\right)^x = 10 - 3\omega^2 = 10 - 3 \cdot 10 < 0.$$

Для стійкості періодичного рішення необхідно, щоб виконувалась нерівність

$$\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)^x \left(\frac{\partial Q}{\partial \omega}\right)^x - \left(\frac{\partial p}{\partial \omega}\right)^x \left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right)^x > 0.$$

Враховуючи знайдені значення частних похідних, отримаємо

$$\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)^x \left(\frac{\partial Q}{\partial \omega}\right)^x > 0.$$

Так як  $\left(\frac{\partial Q}{\partial \omega}\right)^x < 0$ , то  $\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)^x$  також повинна бути від'ємна. Знак цієї похідної

визначається знаком  $\frac{\partial q(a)}{\partial a}$ . В точці  $a_1 = 2,16$   $\frac{\partial q(a)}{\partial a} > 0$ , а в точці  $a_2 = 5,4$   $\frac{\partial q(a)}{\partial a} < 0$ .

Отже, періодичне рішення з значеннями параметрів  $\omega = \sqrt{10}$ ,  $a_1 = 2,16$  нестійке, а  $\omega = \sqrt{10}$ ,  $a_2 = 5,4$  - стійке (друга умова - додатність коефіцієнтів характеристичного рівняння також виконується).

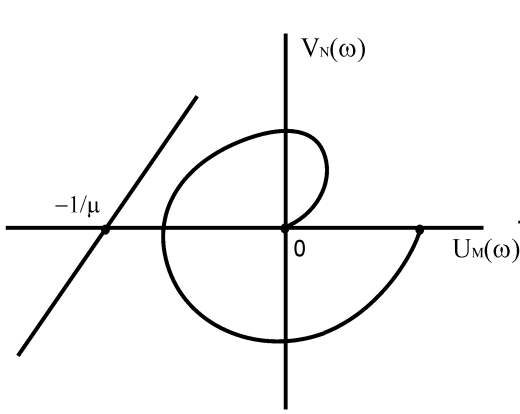


Рис. 92

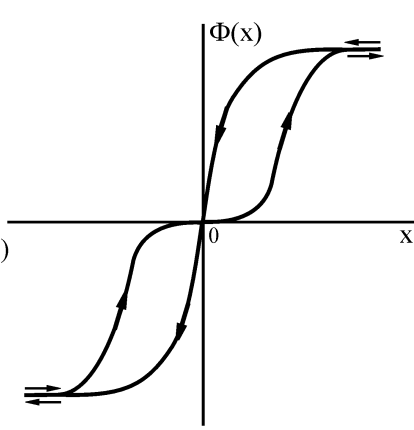


Рис. 93

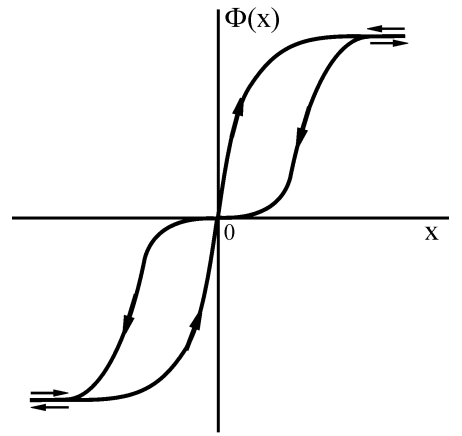


Рис. 94

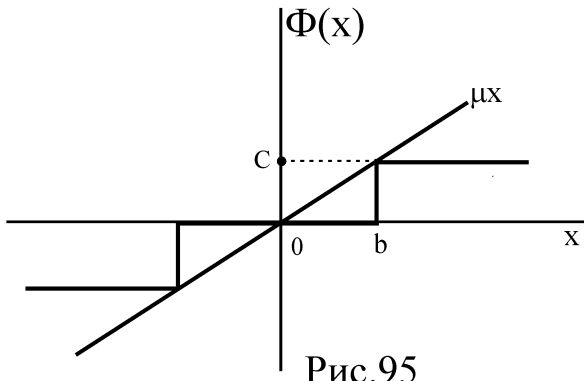


Рис.95

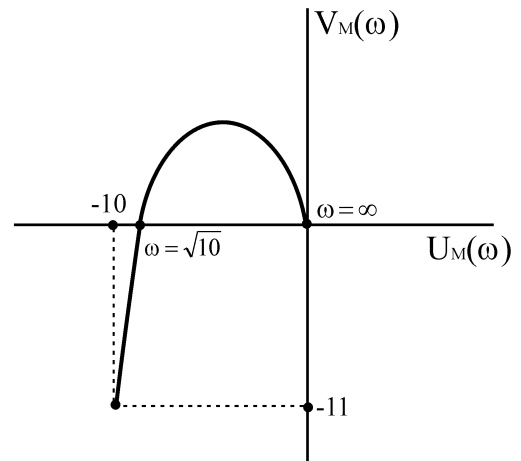


Рис.96

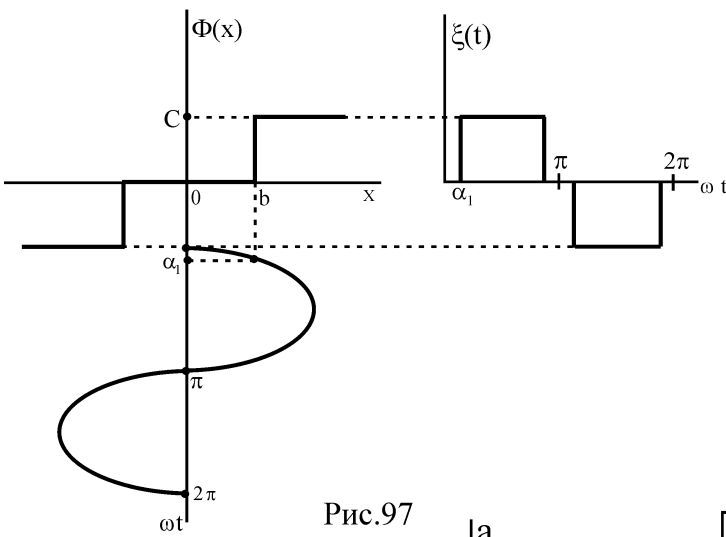


Рис.97

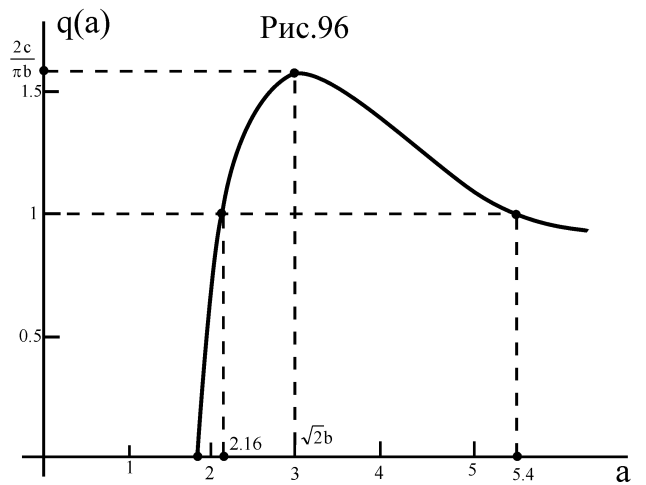


Рис. 98

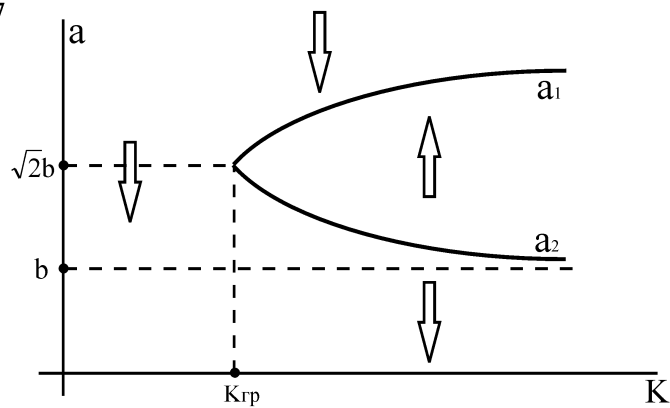


Рис. 99

Таблиця 15

Номер варіанту	рис	С	$b_1$	$b_2$
1	90	200	0,8	-
2	90	190	0,9	-
3	90	210	0,95	-
4	90	220	1	-
5	90	300	1,3	-
6	90	310	1,4	-
7	89	130	1	-
8	89	135	1	-
9	89	140	1	-
10	89	145	1	-
11	89	150	1	-
12	89	155	1	-
13	88	133	1	2
14	88	138	2	3
15	88	143	1	2
16	88	148	1	2
17	88	153	2	3
18	88	158	1	2
19	87	250	0,4	0,5
20	87	200	0,45	0,5
21	87	150	0,25	0,3
22	87	80	0,25	0,4
23	87	200	0,5	0,6
24	87	75	0,2	0,3
25	86	110	-	-
26	86	120	-	-
27	86	130	-	-
28	86	140	-	-
29	86	150	-	-
30	86	160	-	-

Стійке періодичне рішення означає автоколивальний процес, а нестійке рішення відповідає нестійкому граничному циклу [8;10].

Використовуючи отримані результати, дослідимо стійкість стану рівноваги системи, тобто визначимо, при яких умовах можливе виникнення автоколивань.

Знайдемо з виразу

$$q(a) = \frac{110}{100} = \frac{110}{K}.$$

Залежність амплітуди автоколивань від коефіцієнта підсилення розімкнутої системи  $K$  (рис.99). Так як  $q(a) \leq \frac{2C}{\pi b}$ , умова виникнення автоколивань

$$K > \frac{\pi b}{2C} 110 = K_{гр}.$$

Якщо величину  $a$  трактувати ширше (як амплітуду коливань в перехідному процесі), то стрілками можна показати напрямок зміни амплітуди в різних областях значень  $K$ .

При  $K < K_{гр}$  стан рівноваги системи абсолютно стійким (автоколивання не виникнуть).

При  $K > K_{гр}$  рівновага стійка лише при малих відхиленнях (менших  $a_1$ ), а при відхиленнях, більших  $a_1$ , виникають автоколивання з амплітудою  $a_2$ , тобто для системи з нелінійністю типу зони нечуттєвості спостерігається «жорстке» збудження автоколивань, тобто потрібний попередній толчок (заброс), щоб відхилення  $a$  перевищувало  $a_1$ .