МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
(МАДИ)

Кафедра технологии конструкционных материалов

Утверждаю
Зав. кафедрой, чл.-кор. РАН,
д-р техн. наук, проф. Приходько В.М.
_________________ (подпись)
«____»_______________2013 г.

Т.М. РАКОВЩИК, А.Н. ШАЛАМОВ

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ МНОГОКРАТНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Методические указания к лабораторно-практической работе
по курсу «Метрология, стандартизация и сертификация»

МОСКВА
МАДИ
2013

УДК 006.9
ББК 30.10
Р193

Раковщик, Т.М.
Р193 Обработка результатов прямых измерений при многократных наблюдениях: метод. указан. к лаб.-практ. работе по курсу «Метрология, стандартизация и сертификация» / Т.М. Раковщик, А.Н. Шаламов. – М.: МАДИ, 2013. – 52 с.

Настоящее издание является частью учебно-методического комплекса по общепрофессиональной дисциплине «Метрология, стандартизация и сертификация», включающего учебную программу, учебное пособие, методические указания по практическим и лабораторным работам.

В методических указаниях рассмотрены основные сведения по выполнению статистической обработки прямых измерений с многократными наблюдениями для определения количественного значения измеряемой физической величины и оценки погрешностей результата измерения.

Методические указания предназначены для обучения студентов общепрофессиональной дисциплине «Метрология, стандартизация и сертификация» в рамках подготовки бакалавров по профилям подготовки 100100.62 «Сервис транспортных средств», 190600.62 «Автомобильный сервис» и «Сервис дорожно-строительных машин и оборудования», а так же могут быть использованы для обучения студентов других направлений при изучении дисциплины «Метрология, стандартизация и сертификация».

Печатается по решению кафедры технологии конструкционных материалов МАДИ от 21.02.2013 г., протокол № 1.

УДК 006.9
ББК 30.10

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение практических навыков статистической обработки результатов прямых равноточных измерений физической величины с многократными наблюдениями и оценки погрешностей результата измерения и представление результата измерения.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Основные термины и определения, которые использованы в настоящей работе, установлены в Рекомендациях по международной стандартизации РМГ 29-99 [7], ГОСТ 8.207-76 [9].

Термины и определения по РМГ 29-99:

Измерение (измерение физической величины) - совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу физической величины, обеспечивающих нахождение соотношения (в явном или неявном виде) измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины.

Примечания.

1. Приведенное определение понятия «измерение» удовлетворяет общему уравнению измерений, что имеет существенное значение в деле упорядочения системы понятий в метрологии. В нем учтена техническая сторона (совокупность операций), раскрыта метрологическая суть измерений (сравнение с единицей) и показан гносеологический аспект (получение значения величины).

2. От термина «измерение» происходит термин «измерять», которым широко пользуются на практике. Все же нередко применяются такие термины, как «мерить», «обмерять», «замерять», «промерять», не вписывающиеся в систему метрологических терминов. Их применять не следует.

Не следует также применять такие выражения, как «измерение значения» (например, мгновенного значения напряжения или его среднего квадратического значения), так как значение величины - это уже результат измерений.

3. В тех случаях, когда невозможно выполнить измерение (не выделена величина как физическая и не определена единица измерений этой величины) практикуется *оценивание* таких величин по условным шкалам.

Наблюдение при измерении - операции, проводимые при измерении и имеющие целью своевременно и правильно произвести *отсчет.*

Примечание.

Не следует заменять термин «*измерение»* термином «*наблюдение».*

Отсчет показаний средства измерений - фиксация значения величины или числа по показывающему устройству средства измерений в заданный момент времени.

Пример.

Зафиксированное в данный момент времени по табло бытового электрического счетчика значение, равное 505,9 кВт·ч, является отсчетом его показаний на этот момент.

Измеряемая физическая величина - физическая величина, подлежащая измерению, измеряемая или измеренная в соответствии с основной целью измерительной задачи.

Аддитивная величина - физическая величина, разные значения которой могут быть суммированы, умножены на числовой коэффициент, разделены друг на друга.

Пример.

К аддитивным величинам относятся: длина, масса, сила, давление, время, скорость и др.

Неаддитивная физическая величина - физическая величина, для которой суммирование, умножение на числовой коэффициент или деление друг на друга ее значений не имеет физического смысла.

Пример.

Термодинамическая температура.

Однократное измерение - измерение физической величины, выполненное один раз.

Многократное измерение - измерение физической величины одного и того же размера, результат которого получен из нескольких следующих друг за другом измерений, т.е. состоящее из ряда однократных измерений.

Прямое измерение - измерение, при котором искомое значение физической величины получают непосредственно.

Примеры:

1. Измерение длины детали микрометром.

2. Измерение силы тока амперметром.

Примечание.

Термин «*прямое измерение*» возник как противоположный термину «*косвенное измерение*». Строго говоря, измерение всегда прямое и рассматривается как сравнение величины с ее единицей. В этом случае лучше применять термин «*прямой метод измерений*».

Равноточные измерения - ряд измерений какой-либо физической величины, выполненных одинаковыми по точности средствами измерений в одних и тех же условиях с одинаковой тщательностью[1].

Примечание.

Прежде чем обрабатывать ряд измерений, необходимо убедиться в том, что все измерения этого ряда являются равноточными.

Неравноточные измерения - ряд измерений какой-либо величины, выполненных различающимися по точности средствами измерений и (или) в разных условиях.

Примечание.

Ряд неравноточных измерений обрабатывают с учетом веса отдельных измерений, входящих в ряд.

Промах - погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда.

Примечание.

Иногда вместо термина *«промах»* применяют термин «*грубая погрешность измерений».*

Метрологическая характеристика средства измерений - характеристика одного из свойств средства измерений, влияющая на результат измерений и на его погрешность.

Примечания.

1. Для каждого типа средств измерений устанавливают свои метрологические характеристики.

---

[1] В понятие «одинаковые условия», на наш взгляд, необходимо включать и требование выполнения измерений одним и тем же оператором.

2. Метрологические характеристики, устанавливаемые нормативно-техническими документами, называют «*нормируемыми метрологическими характеристиками*», а определяемые экспериментально – «*действительными метрологическими характеристиками*».

***Цена деления шкалы (цена деления)* -** разность значений величины, соответствующая двум соседним отметкам шкалы средства измерений.

Диапазон показаний средства измерений - область значений шкалы средства измерения, ограниченная начальным и конечным значениями шкалы.

Диапазон измерений средства измерений - область значений физической величины, в пределах которой нормированы допускаемые пределы погрешности средства измерений.

Примечание.

Значения величины, ограничивающие диапазон измерений снизу и сверху (слева и справа), называют соответственно «*нижним пределом измерений*» или «*верхним пределом измерений*».

«Диапазон измерений средства измерения»* меньше или равен *«диапазону показания средства измерения».

Результат измерения физической величины - значение физической величины, полученное путем ее измерения.

Неисправленный результат измерения – значение физической величины, полученное при измерении до введения в него поправок, учитывающих систематические погрешности.

Исправленный результат измерения – полученное при измерении значение физической величины и уточненное путем введения в него необходимых поправок на действие систематических погрешностей.

Систематическая погрешность измерения – составляющая погрешности результата измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же физической величины.

Примечание.

В зависимости от характера измерения систематические погрешности подразделяют на «*постоянные», «прогрессивные», «периодические»* и «*погрешности, изменяющиеся по сложному закону»*.

Постоянные погрешности - погрешности, которые длительное время сохраняют свое значение, например, в течение времени выполнения всего ряда измерений. Они встречаются наиболее часто.

Прогрессивные погрешности - непрерывно возрастающие или убывающие погрешности. К ним относятся, например, погрешности вследствие износа измерительных наконечников, контактирующих с деталью при контроле ее прибором активного контроля.

Периодические погрешности - погрешности, значение которых является периодической функцией времени или перемещения указателя измерительного прибора.

Погрешности, изменяющиеся по сложному закону, происходят вследствие совместного действия нескольких систематических погрешностей.

Инструментальная погрешность измерения – составляющая погрешности измерения, обусловленная погрешностью применяемого средства измерений

Неисключенная систематическая погрешность (НСП) – составляющая погрешности результата измерений, обусловленная погрешностями вычисления и введения поправок на влияние систематических погрешностей или систематической погрешностью, поправка на действие которой не введена вследствие ее малости.

Примечания.

1. Иногда этот вид погрешности называют «*неисключенный (ные) остаток (остатки) систематической погрешности»*.

2. Неисключенная систематическая погрешность характеризуется ее границами.

Термины и определения по ГОСТ 8.207-76:

Неисправленный результат наблюдения - результат наблюдения до введения поправок с целью устранения систематических погрешностей.

Исправленный результат наблюдения - результат наблюдения, получаемый после внесения поправок в неисправленный результат наблюдения.

3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

В инженерной и экспериментальной практике для повышения качества измерений широко используются прямые измерения одной и той же физической величины с многократными наблюдениями, т.е. выполненные одним и тем же оператором в одинаковых условиях, с использованием одного и того же средства измерений.

Статистическая обработка полученных результатов наблюдений позволяет уменьшить влияние случайной составляющей погрешности на результат измерений и получить результат измерения физической величины, наиболее близкий к истинному значению измеряемой физической величины. При статистической обработке могут быть использованы различные процедуры обработки [1, 3, 4, 5].

ГОСТ Р 8.563-2009 требует (рекомендует) применять для нормативно-технической документации (НТД) стандартную методику обработки результатов прямых измерений с много-кратными наблюдений, которая регламентируется ГОСТ 8.207-76.

При статистической обработке группы результатов наблюдений и оценивания погрешностей результата измерений при выполнении прямых равноточных измерений с многократными независимыми наблюдениями ГОСТ 8.207-76 устанавливает следующие операции:

- исключить известные систематические погрешности из результатов наблюдений;
- вычислить среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений, принимаемое за результат измерения;
- вычислить оценку среднего квадратического отклонения результата наблюдения;
- вычислить оценку среднего квадратического отклонения результата измерения;

- проверить гипотезу о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению;
- вычислить доверительные границы случайной составляющей погрешности результата измерения;
- вычислить границы неисключенной систематической погрешности результата измерения;
- вычислить доверительные границы погрешности результата измерения;
- представить результат измерения в соответствии с установленными требованиями.

При выполнении этих операций ГОСТ 8.207-76 установлены следующие общие правила:

1. Проверку гипотезы о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению, следует проводить с уровнем значимости q от 2 до 10%[2].

2. Для определения доверительных границ погрешности результата измерения доверительную вероятность P принимают равной 0,95[3].

Принципиальный алгоритм последовательности выполнения операций при статистической обработки прямых измерений с многократными наблюдениями, с учетом требований ГОСТ 8.207-76, представлен на рис.1.

---

[2] Конкретные значения уровней значимости должны быть указаны в конкретной методике выполнения измерений (МВИ), разработанной в соответствии с требованиями ГОСТ 8.563-2009.

[3] В тех случаях, когда измерение нельзя повторить, помимо границ, соответствующих доверительной вероятности P = 0,95, допускается указывать границы для доверительной вероятности P = 0,99 [9].

В особых случаях, например при измерениях, результаты которых имеют значение для здоровья людей, допускается вместо P = 0,99 принимать более высокую доверительную вероятность [9].

Рис. 1. Алгоритм последовательности операций статистической обработки совокупности результатов многократных наблюдений при прямых измерениях

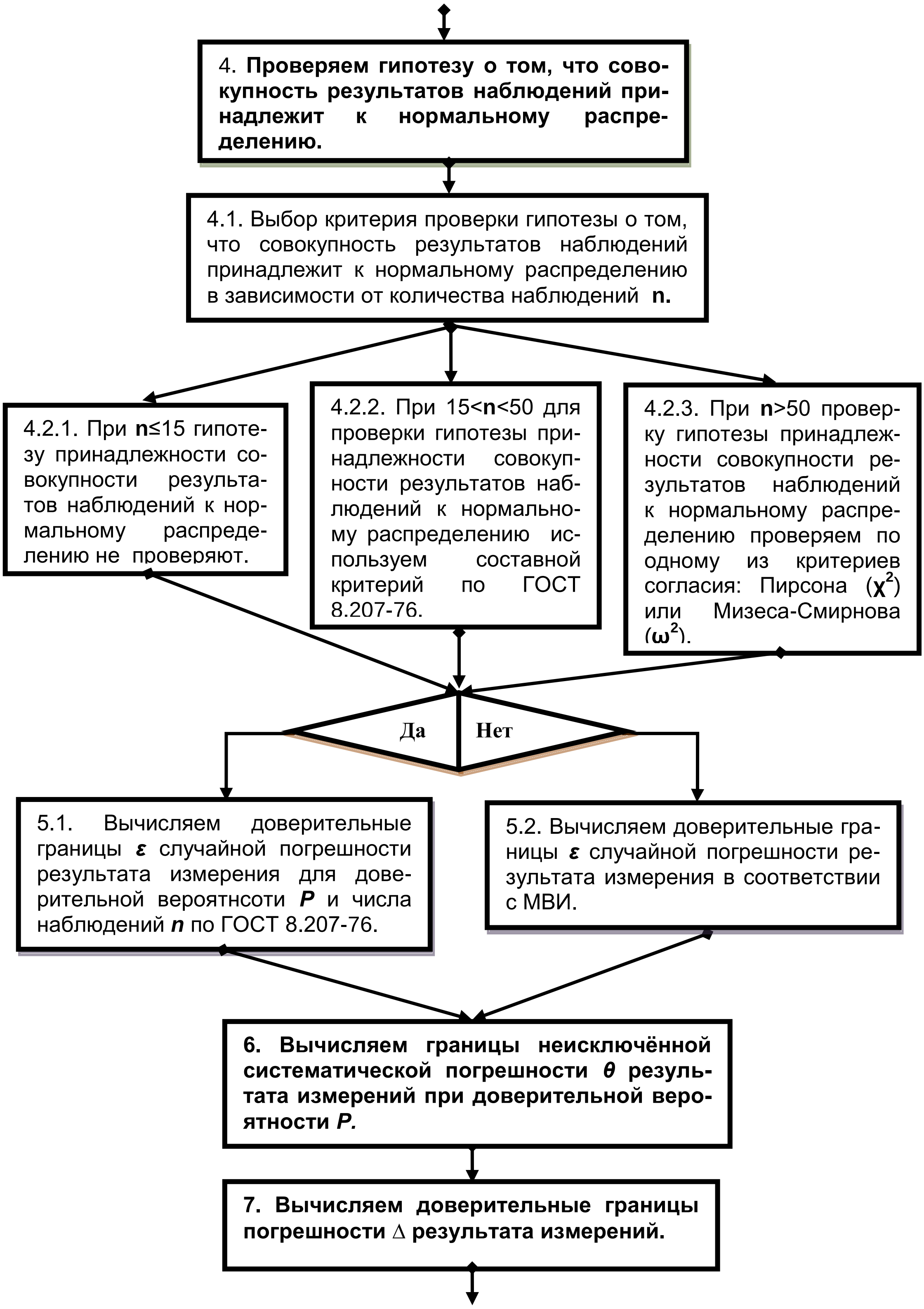

Рис. 1. Продолжение

8. Оформляем результат измерений в соответствии с установленными правилами (по МИ 1317-2004).

8.1. При симметричных доверительных границах погрешности результаты измерений представляют в форме:

$\bar{A} \pm \Delta, P.$

8.2. При отсутствии данных о виде функции распределения составляющих погрешности результата и (или) необходимости дальнейшей обработки результатов или анализа погрешностей, результаты измерений представляют в форме:

$\bar{A};\ S\bar{A};\ n;\ \Theta$

или

$\bar{A};\ S\bar{A};\ n;\ \Theta;\ P.$

Рис. 1. Окончание

4. ЭТАПЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

4.1. Получение задания и формирование совокупности результатов наблюдений

Задание содержит:

1. Совокупность результатов наблюдений, численностью *n* от 4 до 75, выполненных с помощью определенного средства измерения.

Совокупность результатов наблюдений устанавливается преподавателем из массива результатов наблюдений, приведенных в Приложении 1.

Пример задания.

Выполнены прямые равноточные измерения диаметра детали Ф 51 мм при многократных наблюдениях. Наблюдения в количестве n = 60 выполнены с помощью оптиметра вертикального. Значения результатов наблюдений принять из прил. 1 (графа 3) с № 3 по № 62 включительно.

Принимаем, что:

– постоянная систематическая погрешность в результатах наблюдений отсутствует или ничтожно мала, т.е. $\Delta_{сист j(A)} = 0$;

– доверительная вероятность P=0,95.

Требуется произвести статистическую обработку совокупности результатов наблюдения и:

1. Определить результат измерения.

2. Оценить погрешность результата измерения.

3. Представить результат измерения в соответствии с нормативными требованиями из условия необходимости дальнейшей обработки результата измерения и анализа погрешностей.

Результаты обработки совокупности результатов наблюдений представить в виде отчета по форме, приведенной в прил. 4.

4.2. Выполнение процедуры проверки совокупности результатов наблюдений на соответствие однородности выборки

Выдвигаем гипотезу о том, что полученная совокупность результатов наблюдений[4] (A_1, A_2, …, A_n) принадлежит к нормальному закону распределения.

Проверку гипотезы об отсутствии в выборке наблюдения, содержащего грубую погрешность (промах), проводим в соответсвии с предлагаемым на рис. 2 алгоритмом.

В зависимости от числа наблюдений в выборке принимаем решение о том, какой из критериев будет использован для проверки гипотезы.

Принимаем уровень значимости $q = 5\%$ (что соответствует доверительной вероятности $P = 0,95$, которая считается вполне достаточной для инженерных и метрологических измерений).

Анализируем всю совокупность результатов наблюдений и выявляем результаты наблюдений, которые могут содержать грубую погрешность. Например, принимаем в качестве результатов наблю-

---

[4] Совокупность результатов наблюдений (A_1, A_2, …, A_n) – это выборка объемом n случайной величины A, где A_1, A_2, …, A_n значения этой случайной величины, полученные в результате n независимых экспериментов (измерений) [12].

дений, которые могут содержать грубую погрешность, наибольший или наименьший результат наблюдений.

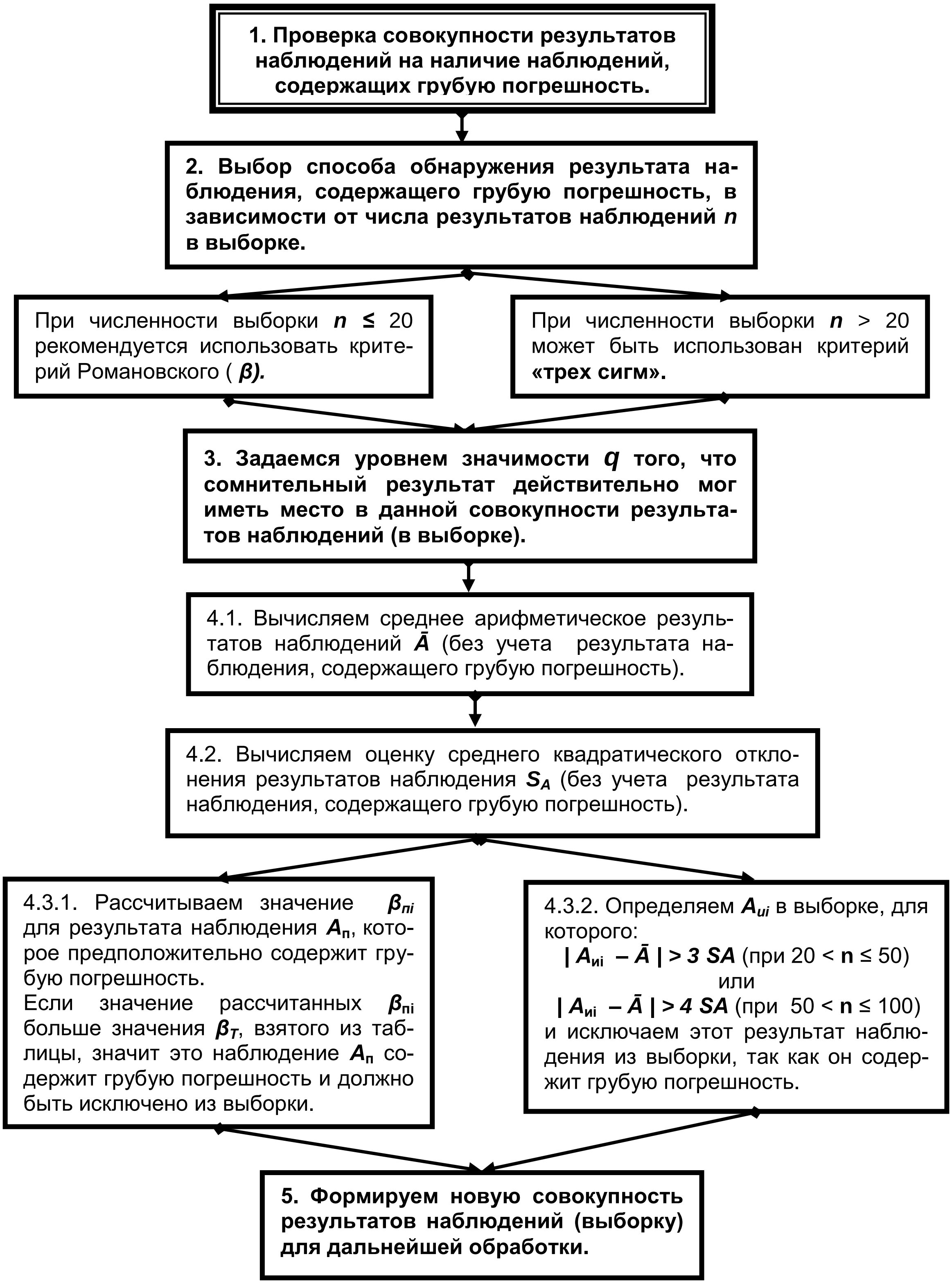

Рис. 2. Алгоритм проверки гипотезы об отсутствии в совокупности результатов наблюдений результата наблюдения, содержащего грубую погрешность

Вычисляем значение среднего арифметического результатов наблюдений для $\overline{A}$ выборки без учета результата наблюдения, содержащего грубую погрешность, по формуле

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n_н}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\boldsymbol{n_н}} \boldsymbol{A_{и\mathrm{i}}}\ , \qquad (1)$$

где $A_{и\mathrm{i}}$ – *i*-й исправленный результат наблюдений, т.е. результат наблюдения, уточненный путем введения в него необходимых поправок на устранение систематических погрешностей; $n_{н}$ - число результатов наблюдений в группе без учета результата наб-людений, содержащего грубую погрешность; $n_{н}=n-1$ – если принимается в качестве результата наблюдения, содержащего грубую погрешность, либо минимальный, либо максимальный результат наблюдения; $n_{н}=n-2$ **–** если принимается в качестве результатов наблюдения, содержащих грубую погрешность, минимальный и максимальный результаты наблюдения.

Вычисляем оценку среднего квадратического отклонения результатов наблюдений S_A выборки [1, 3, 5] (без учета результата наб-людения, содержащего грубую погрешность) по формуле

$$\boldsymbol{S_A} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n_н} - \mathbf{1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\boldsymbol{n_н}}(\boldsymbol{A_{u\mathrm{i}}} - \overline{\boldsymbol{A}})^2}\ , \qquad (2)$$

где $\overline{A}$ – среднее арифметическое по формуле (1).

А. Если число наблюдений равно $4 \le n \le 20$, то для выявления результата наблюдения, содержащего грубую погрешность, используем критерий Романовского.

При проведении проверки результата наблюдения на наличие грубой погрешности по критерию Романовского [3] целесообразно вычислять значение критерия $\beta_п$ для минимального или максимального результатов наблюдений[5] выборки по формуле

$$\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{n}} = \left|(\boldsymbol{A_n} - \overline{\boldsymbol{A}})/\boldsymbol{S_A}\right| , \quad (3)$$

где A_n - максимальный или минимальный результат наблюдения выборки, который возможно содержит грубую погрешность; $\overline{A}$ – среднее арифметическое по формуле (1); S_A - оценка среднего квадратического отклонения результатов наблюдений по формуле (2).

Полученное значение $\beta_п$ сравниваем с табличным значением $\beta_т$ (см. табл. 1) и если $\beta_п \geq \beta_т$, то данный результат измерения считается содержащим грубую погрешность и должен быть исключен из выборки.

Таблица 1

Значения критерия Романовского $\beta_т$ [3]

q/100%	**n =4**	**n = 6**	**n = 8**	**n = 10**	**n = 12**	**n = 15**	**n = 20**
0,01	1,73	2,16	2,43	2,62	22,75	2,90	3,08
0,02	1,72	2,13	2,37	2,54	2,66	2,80	2,96
0,05	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,78
0,10	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,49	2,62

Б. Если число наблюдений *n > 20*, то для выявления результата наблюдения, содержащего грубую погрешность, используем критерий «*трех сигм*» [3].

Проверяем максимальный (или минимальный) результат наблюдений по одному из следующих соотношений:

[5] Критерием выбора минимального или максимального результата наблюдения для проверки, как результата, возможно содержащего грубую погрешность, является значение максимального отклонения этого результата от ближайшего результата наблюдения ($\Delta_1 = x_{min} – x_2$, или $\Delta_2 = x_{max} - x_n$). Если эти отклонения примерно равны $\Delta_1 \approx \Delta_2$ (расхождение составляет не более 15-20%), то оба результата наблюдения принимают для проверки как результаты, возможно, содержащие грубую погрешность, В противном случае принимается результат наблюдения, имеющий максимальное отклонение от ближайшего результата наблюдения.

$$\left|\left(\boldsymbol{A_n}-\overline{\boldsymbol{A}}\right)\right| > \boldsymbol{3S_A} \quad \text{(при 20 < } \mathbf{n} \le 50\text{)}$$

или (4)

$$\left|\left(\boldsymbol{A_n}-\overline{\boldsymbol{A}}\right)\right| > \boldsymbol{4S_A} \quad \text{(при 50 < } \mathbf{n} \le 100\text{)},$$

где A_n - максимальный или минимальный результат наблюдения выборки, который возможно содержит грубую погрешность; $\overline{A}$ – среднее арифметическое по формуле (1); S_A - оценка среднего квадратического отклонения результатов наблюдений по формуле (2).

И если эти соотношения подтверждаются, то данный результат наблюдения считается содержащим грубую погрешность и должен быть исключен из выборки.

После исключения результата наблюдения, содержащего грубую погрешность (если такой был обнаружен), из совокупности результатов наблюдений, формируем новую выборку результатов наблюдений. Полученные данные расчетов заносим в отчет (табл. 4.3 прил. 4).

Не рекомендуется проводить процедуру проверки дважды, т.е. удалять результат, содержащий грубую погрешность, из совокупности результатов наблюдений (выборки) более одного раза [1, 3, 5].

Кроме указанных выше критериев, для выявления результатов наблюдения, содержащих грубую погрешность, могут быть использованы и другие критерии, подробно рассмотренные в специальной литературе [3]: критерий Шарлье – $K_ш$ (для $5 \le n < 100$); критерий Диксона – $K_д$ (для $3 \le n \le 25$); критерий Шовене – Z (для $9 \le n \le 50$).

4.3. Расчет основных статистических показателей для новой совокупности результатов наблюдений, полученной после удаления наблюдения, содержащего грубую погрешность

Вычисляем среднее арифметическое $\overline{A}$ для исправленной (с учетом п. 4.2) совокупности результатов наблюдений (выборки) по формуле (1).

Принимаем полученное среднее арифметическое $\overline{A}$ за *результат измерений*.

Вычисляем оценку среднего квадратического отклонения результатов наблюдений S_A для исправленной (с учетом параграфа 4.2) совокупности результатов наблюдений (выборки) по формуле (2).

Вычисляем оценку среднего квадратического отклонения результата измерения $S_{\bar{A}}$ для исправленной (с учетом параграфа 4.2) совокупности результатов наблюдений (выборки) [9] по формуле

$$S_{\bar{A}} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_A = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (A_{ui} - \overline{A})^2}\,, \qquad (5)$$

где $n = n_{\text{н}}$ в этой формуле и далее.

Результаты расчетов заносятся в отчет (табл. 4.4 прил. 4).

4.4. Выполнение процедуры проверки гипотезы о принадлежности совокупности результатов многократных наблюдений к нормальному распределению

4.4.1. *При числе результатов наблюдений в выборке n ≤ 15*, принадлежность их к нормальному распределению не проверяют[6].

4.4.2. *При числе результатов наблюдений в выборке 15< n< 50* гипотезу принадлежности их к нормальному распределению проверяем при помощи составного критерия, который включает *критерий 1* и *критерий 2* [9] (см. рис. 1).

Условием подтверждения гипотезы о принадлежности совокупности результатов наблюдений (выборки) нормальному закону распределения является соблюдение обоих критериев. Если хотя бы один из критериев не соблюдается, то считается, что гипотеза не нашла своего подтверждения.

К р и т е р и й 1. В качестве *критерия 1* принята относитель-

---

[6] Принадлежность совокупности результатов наблюдений к нормальному или иному виду распределения принимается на основе априорной информации [9].

ная величина d_p, которая вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{d_p} = \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{A_{иi}} - \overline{\boldsymbol{A}}| \Big/ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{S}_{\text{см}} \,, \qquad (6)$$

где $\bar{A}$ – среднее арифметическое – результат измерения; $S_{\text{см}}$ - смещенная оценка среднего квадратического отклонения результатов наблюдений, вычисляемая по формуле

$$\boldsymbol{S_{см}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{A_{ui}} - \overline{\boldsymbol{A}}\right)^2} \,. \qquad (7)$$

Результаты наблюдений выборки можно считать распределенными нормально, если выполняется соотношение

$$\boldsymbol{d_{1-q_1/2}} < \boldsymbol{d_p} \le \boldsymbol{d_{q_1/2}} \,, \qquad (8)$$

где $d_{1-q_1/2}$ и $d_{q_1/2}$ - квантили распределения, получаемые из табл. 2 в зависимости от *n* (числа наблюдений в группе) и $q_1/2$ и $(1 - q_1)/2)$; q_1 - заранее выбранный уровень значимости *критерия 1*.

Таблица 2

Статистика *d* [9]

N	**q_1/2 ·100%**		**(1-q_1/2) · 100%**	
	1 %	**5 %**	**95 %**	**99 %**
16	0,9137	0,8884	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,7304	0,6950
26	0,8901	0,8686	0,7360	0,7040
31	0,8826	0,8625	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,7518	0,7291

ГОСТ 8.207-76 рекомендует принять величину $q_1 = 5\%$, так же, как и в параграфе 4.2.

К р и т е р и й 2. Можно считать, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению, если не более *m* разностей удовлетворяют соотношению

$$|\boldsymbol{A_{\mathrm{i}}} - \overline{\boldsymbol{A}}| > \boldsymbol{z}_{\mathrm{P}/2} \cdot \boldsymbol{S_A} \,, \qquad (9)$$

где S_{A}– оценка среднего квадратического отклонения наблюдения из параграфа 4.3; $z_{P/2}$ – верхний квантиль распределения нормированной функции Лапласа, отвечающий доверительной вероятности $P/2$.

Значения доверительной вероятности P и m определяются по табл. 3 в зависимости от выбранного уровня значимости q_2 и числа результатов наблюдений в выборке n.

Рекомендуется [9] уровень значимости q_2 принять равным q_1 .

Таблица 3

Значения доверительной вероятности P для вычисления верхнего квантиля распределения нормированной функции Лапласа $z_{p/2}$ [9]

n	**M**	**q_2·100 %**		
		1 %	**2 %**	**5 %**
10	**1**	0,98	0,98	0,96
11-14	**1**	0,99	0,98	0,97
15-20	**1**	0,99	0,99	0,98
21-22	**2**	0,98	0,97	0,96
23	**2**	0,98	0,98	0,96
24-27	**2**	0,98	0,98	0,97
28-32	**2**	0,99	0,98	0,97
33-35	**2**	0,99	0,98	0,98
36-49	**2**	0,99	0,99	0,98

Значение $z_{P/2}$ определяется в зависимости от значения доверительной вероятности P либо с помощью табл. 3.1 прил. 3, либо с помощью табл. 3.2 прил. 3 с учетом следующего соотношения [5]:

$$\boldsymbol{z_{P/2} = u^c_{(1+P)/2}} , \qquad (10)$$

где $u^c_{(1+P)/2}$ - квантиль стандартного нормального распределения[7].

Для вычисления квантили u^c_P при доверительной вероятности $P < 0,5$ нужно учитывать свойство симметричности стандартного нормального распределения [3, 4, 5]:

$$\boldsymbol{u^c_p = -u^c_{1-p}} \; . \qquad (11)$$

[7] *Квантилем порядка P (P-квантилем)* закона распределения случайной величины называется такое значение этой случайной величины, которое с вероятностью P не превзойдет все остальные возможные значения этой случайной величины.

При уровне значимости, отличном от предусмотренных в прил. 3, значение доверительной вероятности *P* находят путем линейной интерполяции[8].

В случае если при проверке соответствия распределения результатов наблюдений группы нормальному закону распределения, для *критерия 1* выбран уровень значимости q_1, а для *критерия 2* уровень значимости q_2, то результирующий уровень значимости составного критерия [9] определяют по формуле

$$\boldsymbol{q_{\Sigma} \le q_1 + q_2} \,. \qquad (12)$$

Результаты расчетов заносим в отчет (табл. 4.5.1, прил. 4).

4.4.3. *При числе результатов наблюдений n ≥ 50* гипотезу принадлежности их к нормальному распределения проверяем по одному из критериев: критерию согласия Пирсона (χ^2) или критерию согласия Мизеса-Смирнова (ω^2). В данном случае воспользуемся как наиболее распространненым в практике и требующим меньшего количества вычислений критерием согласия Пирсона.

Суть использования критерия согласия Пирсона (χ^2) состоит в сравнении гистограммы экспериментальных данных с гистограммой с таким же числом интервалов, построенной на основе распределения, совпадение с которым определяется в данном случае с принятым нормальном распределением. На основе величин отклонений экспериментальной гистограммы от теоретической гистограммы, делается вывод: о принадлежности результатов наблюдений выбранному в качестве теоретического распределения либо нет. Этот вывод делается на основе использования критерия согласия Пирсона (χ^2).

Для использования критерия согласия Пирсона (χ^2) необходимо, чтобы в каждый интервал статистического экспериментального распределения попадало не меньше 5 значений результатов на-

---

[8] Интерполяция – это восстановление функции *f* на отрезке *[a, b]* по известным значениям этой функции в точках x_i *(i = 0, 1, …, n)*. Интерполяцию при помощи обобщенных многочленов называют еще «линейной интерполяцией» в широком смысле [12].

блюдений. В противном случае следует объединить несколько расположенных рядом интервалов в один [3].

Критерий согласия Пирсона (χ^2 - «хи-квадрат») [3] вычисляется по формуле

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{(n_{jk} - N_{jk})^2}{N_{jk}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{(n_{jk} - kP_{jk})^2}{k \cdot P_{jk}}\ , \qquad (13)$$

где n_{jk}, N_{jk} – соответственно экспериментальные и теоретические значения частот (количества наблюдений) в j-м интервале разбиения совокупности результатов наблюдений, j = 1, 2, ..., m ; m – число интервалов разбиения совокупности результатов наблюдений; P_{jk} – значения доверительной вероятности в том же интервале разбиения, которое соответствует теоретической модели распределения; k – количество наблюдений в ранжированной совокупности результ атов наблюдений, которое должно соответствовать:

$$k = \sum_{j=1}^{m} n_j = n\,, \qquad (14)$$

где n_j – число результатов наблюдений в каждом интервале от 1 до m.

При $n \to \infty$ случайная величина χ^2 имеет вид распределения Пирсона с числом степеней свободы, которая расчитывается по формуле

$$v = m - 1 - r\ , \qquad (15)$$

где r – число определяемых по статистике параметров, необходимых для совмещения модели и гистограммы (для нормального закона распределения r = 2, так как этот закон однозначно характеризуется указанием двух его параметров: математического ожидания ($\bar{A}$) и СКО (S_A)); m – число интервалов разбиения совокупности результатов наблюдений.

Если бы выбранная модель распределения в центрах всех m интервалов (столбцов) совпадала с экспериментальными данными, то все m разностей (n_{jk} – N_{jk}) были бы равны нулю, а следовательно, и значение критерия согласия Пирсона (χ^2) также было бы равно нулю. Таким образом, критерий согласия Пирсона (χ^2) есть мера суммарного отклонения между теоретическим распределением и экспериментальным распределением.

Последовательность проверки гипотезы о принадлежности совокупности результатов наблюдений к нормальному распределению по критерию согласия Пирсона (χ^2) может быть представлена в виде следующего алгоритма [3]:

1. Выбираем значение доверительной вероятности *P* (по [9] или по заданию).

2. Выполняем ранжирование результатов наблюдений в порядке возрастания: $A_1, A_2, A_{k-1}, ..., A_k$, где $A_{k-1} \leq A_k$ (при этом соблюдается условие (14), что $k = n$).

В ранжированном ряду может быть несколько одинаковых значений A_k. В этом случае A_k называется *«вариантой».* Последовательность вариант, расположенных в порядке возрас-тания их значений $A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A_k$, называется *«вариационным рядом» («упорядоченной выборкой»).*

3. Вычисляем диапазон изменения результатов наблюдений:

$$\boldsymbol{H_k = A_k + A_1}. \tag{16}$$

4. Разделяем совокупность наблюдений на интервалы одинаковой длины, для чего находим оптимальное количество интервалов группирования результатов наблюдений.

Оптимальное количество *m* интервалов зависит от объема выборки *n(k)* [1, 5] и может быть вычислено по формуле Старджесса:

$$\boldsymbol{m = 1 + 3,31 \cdot \log k}. \tag{17}$$

Полученное значение округляется до целого в большую сторону. Рекомендуется выбирать нечетное количество интервалов[9] *m* [3, 5].

5. Вычисляем ширину интервалов группирования наблюдений:

$$\boldsymbol{h = H_k/m = (A_1 + A_k)/m}. \tag{18}$$

---

[9] По рекомендацим некоторых авторов [3], при *k* > 100 следует принимать *m* = 9…15, а при *k* < 100 следует принимать *m* =7.

6. Определяем интервалы группирования экспериментальных данных в виде:

$$\Delta_1 = (\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{h});\ \Delta_2 = (\boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{h}, \boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{2h}); \dots;\ \Delta_m = (\boldsymbol{A_k} - \boldsymbol{h},\ \boldsymbol{A_k}). \quad (19)$$

7. Выполняем подсчет числа попаданий n_{jk} *(частоты)* результатов наблюдений в каждый интервал группирования. Сумма этих чисел должна равняться числу наблюдений – k (см. формулу (14)).

По полученным значениям n_{jk} рассчитывают вероятности попадания результатов измерений *(частости)* в каждый из интервалов группирования по формуле

$$\boldsymbol{p_k} = \boldsymbol{n_{jk}}/\boldsymbol{k}, \quad (20)$$

где j = l, 2,..., m.

8. Вычисляем середину интервала по формуле

$$\boldsymbol{A_{j0}} = \boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}/\boldsymbol{2}\ . \quad (21)$$

9. На основе выполненных рассчетов строим эмпирическую функцию плотности вероятности распределения группы результатов наблюдения (называемую «*гистограммой»* (рис. 3)) и эмпирическую функцию распределения группы результатов наблюдений (называемую «*кумулятивной кривой*» (рис. 4)).

Для построения *гистограммы* по оси абцисс (см. рис. 3) откладываются интервалы Δ_j результатов наблюдений ($A_{иi}$) в порядке возрастания номеров.

По оси ординат откладываются вероятности попаданий[10] p_{jk}. На каждом интервале строится прямоугольник высотой. Площадь, заключенная под графиком, пропорциональна числу наблюдений k.

Результаты выполненных расчетов по п. 1-8 настоящего алгоритма целесообразно свести в отдельную таблицу.

При увеличении числа интервалов и соответственно уменьшении их длины гистограмма все более будет приближается к гладкой кривой - графику плотности распределения вероятности.

---

[10] Иногда высоту прямоугольника откладывают равной эмпирической плотности вероятности $p_{jk} = P_{jk} / \Delta_{jk} = n_{jk}/(n\Delta_{jk})$, которая является оценкой средней плотности в интервале Δ_{jk}. В этом случае площадь под гистограммой будет равна единице.

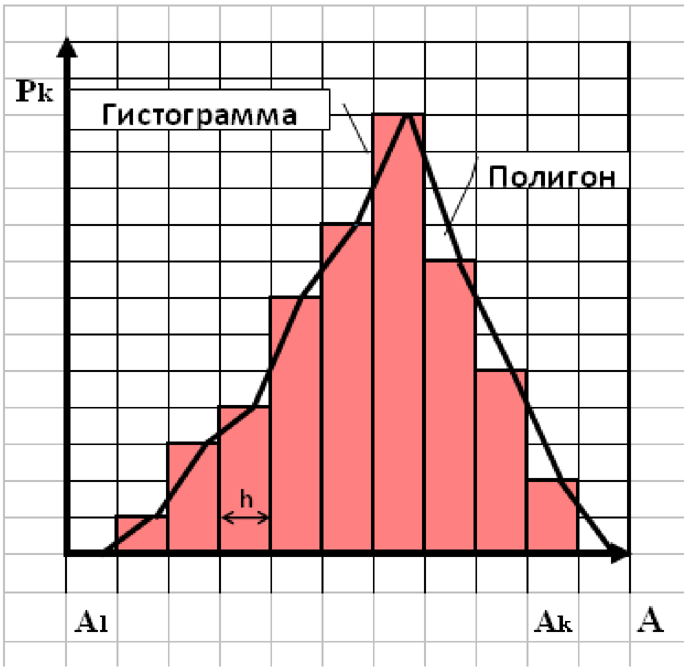

Рис. 3. Эмпирическая функция плотности вероятности распределения группы результатов наблюдения (гистограмма и полигон)

Рис. 4. Эмпирическая функция распределения группы результатов наблюдений (кумулятивная кривая)

Эти точки при построении полигона соединяют между собой отрезками прямых линий. В результате совместно с осью *x* образуется замкнутая фигура, площадь которой в соответствии с правилом нормирования должна быть равна единице (или числу наблюдений при использовании частостей).

Для построения *кумулятивной кривой* по оси абцисс (см. рис. 4) откладывают интервалы Δ_m в порядке возрастания номеров и на каждом интервале строят прямоугольник.

Высота прямоугольников по оси ординат определяется по формуле

$$\boldsymbol{F_{jk}} = \sum_{j=1}^{m} p_{jk} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{n_{jk}}, \tag{22}$$

где F_{jk} – кумулятивная частость; n_{jk} – кумулятивная частота; p_{jk} **–** частость, определяемая по формуле (20).

По результатам расчетов строим зависимости (гистограмма/полигон и камулятивная кривая) (рис.4.1- 4.2, прил. 4).

По виду построенных зависимостей (гистограммы/полигона и камулятивной кривой) делается предварительное заключение о виде закона распределения экспериментальных данных (ряда результатов наблюдений) и соответственно о численных характеристиках этого закона.

10. Вычисляем критерий согласия Пирсона (χ^2) для экспериментальных данных по формуле (13).

Для этого вычисляем число наблюдений для каждого из интервалов, теоретически соответствующее выбранному виду распределения по формуле

$$\boldsymbol{N_{jk}} = \boldsymbol{n_{jk} h f(z_j) / S_A}, \tag{23}$$

где n_{jk} — экспериментальное число наблюдений в j – м интервале по п. 7 п.4.4.2; h **-** ширина интервалов группирования наблюдений (по п. 5 п. 4.4.2, по формуле (18)); S_A - оценка среднего квадратического отклонения наблюдения из параграфа 4.3 (табл. 4.4 прил. 4); $f(z_j)$ - значения *функции плотности вероятностей для нормального закона распределения* для теоретических середин интервалов z_{0j}

$$\boldsymbol{f(z_j)} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\pi}}} \boldsymbol{e}^{-z_j^2/2} . \tag{24}$$

Нормированные середины интервалов определяем через реальные (экспериментальные) середины интервалов A_{0j} по формуле

$$z_{0j} = \left(A_{0j} - \overline{A}\right)/S_A\,, \qquad (25)$$

где $\overline{A}$ **–** среднее арифметическое результатов наблюдений из параграфа 4.3 (табл. 4.4 прил. 4); S_A - оценка среднего квадратического отклонения результатов наблюдений из параграфа 4.3 (табл. 4.2 прил. 4).

Для каждого значения z_{0j} с помощью аналитической модели или по табл. 3.3 прил. 3 находим значения функции плотности вероятностей для нормального закона распределения - $f\left(z_{0j}\right)$.

Подставляя полученные значения в формулу (13), находим $\chi^2_{эксп}$ для экспериментальных данных.

11. Выбираем уровень значимости q для критерия. Он должен быть небольшим, чтобы была мала вероятность совершить ошибку первого рода. По уровню значимости и числу степеней свободы v по табл. 3.4 прил. 3 находим границу критической области χ_q^2, такую, что $P\{\chi^2 > \chi_q^2\} = q$. Вероятность того, что полученное значение χ^2 превышает χ_q^2, равна q и мала. Поэтому, если оказывается, что $\chi^2 \geq \chi_q^2$, то гипотеза о совпадении экспериментального и теоретического законов распределения отвергается. Если же $\chi^2 < \chi_q^2$, то гипотеза принимается.

Результаты расчетов заносим в отчет (табл. 4.5.2 прил. 4).

4.5. Вычисление доверительных границ погрешности результата измерения

4.5.1. При подтверждении гипотезы принадлежности совокупности результататов наблюдений к нормальному распределению[11] (см. параграф 4.4), доверительные границы ε (без учета знака) случайной погрешности результата измерения [9] вычисляем по формуле

[11] При числе результатов наблюдений в выборке $n \leq 15$ нахождение доверительных границ случайной погрешности результата измерения по методике, предусмотренной ГОСТ 8.207-76, возможно в том случае, если заранее известно, что результаты наблюдений принадлежат к нормальному распределению.

$$\boldsymbol{\varepsilon = \ t_{P,n} \ \cdot \ S_{\overline{A}}} \quad , \tag{26}$$

где $t_{P,n}$ – коэффициент Стьюдента, который в зависимости от доверительной вероятности P и числа результатов наблюдений n в группе находят из табл. 4; $S_{\overline{A}}$ – оценка среднего квадратического отклонения результата измерения по формуле (5).

Значение доверительной вероятности Р вычисляем через уровень значимости q [1, 3] по формуле

$$\boldsymbol{P = (1 - q) \ / \ 100\%} \ . \tag{27}$$

Величину уровня значимости при вычислении ε рекомендуется иметь такой же, как и при выполнении действий в параграфе 4.2, q = 5%.

Таблица 4

Значение коэффициента t для случайной величины Y, имеющей распределение Стьюдента с n-1 степенями свободы [9]

***n*-1**	***P*=0,95**	***P*=0,99**	***n*-1**	***P*=0,95**	***P*=0,99**
3	3,182	5,841	**16**	2,120	2,921
4	2,776	4,604	**18**	2,101	2,878
5	2,571	4,032	**20**	2,086	2,845
6	2,447	3,707	**22**	2,074	2,819
7	2,365	3,499	**24**	2,064	2,797
8	2,306	3,355	**26**	2,056	2,779
9	2,262	3,250	**28**	2,048	2,763
10	2,228	3,169	**30**	2,043	2,750
12	2,179	3,055	∞	1,960	2,576
14	2,145	2,977			

4.5.2. Неисключенная систематическая погрешность (далее по тексту «НСП») результата измерения образуется из составляющих, в качестве которых могут быть приняты неисключенные систематические погрешности, вызванные несовершенством (или допущениями):

- метода выполнения измерений (МВИ);
- средства измерений (СИ);
- вызванные другими источниками.

В качестве границ составляющих НСП принимают, например, пределы допускаемой основной и дополнительной погрешностей

СИ, если случайные составляющие погрешности пренебрежимо малы.

При суммировании составляющих НСП результата измерения НСП средства измерений и погрешности поправок рассматривают как случайные величины. При отсутствии данных о виде распределения случайных величин их распределения принимают за равномерные [9].

В общем случае границы НСП Θ результата измерения вычисляются путем построения композиции неисключенных систематических погрешностей средств измерений, метода измерений и погрешностей, вызванных другими источниками.

НСП средства измерения принимаются по метрологическим характеристика СИ (по паспортным данным или данные свидетельства о поверке), при отсутствии документации на СИ отдельные НСП СИ могут быть рассчитаны по следующим формулам [3, 4, 8]:

– погрешность отсчета СИ:

$$\boldsymbol{\Theta_{отс.}} = \sqrt{\boldsymbol{l^2/12}}\,, \tag{28}$$

где l – цена деления СИ;

– погрешность показания СИ:

$$\boldsymbol{\Theta_{пок.}} = \boldsymbol{\Theta_a/3}\,, \tag{29}$$

где $\boldsymbol{\Theta_a}$ – предельная приборная погрешность СИ.

Для СИ с односторонней шкалой (нуль в начале шкалы)

$$\boldsymbol{\Theta_a} = \frac{\boldsymbol{K_п a_{max}}}{\boldsymbol{100}}\,. \tag{30}$$

Для СИ с двусторонней шкалой (нуль в середине шкалы, например, оптиметр или миниметр):

$$\boldsymbol{\Theta_a} = \frac{\boldsymbol{2K_п a_{max}}}{\boldsymbol{100}}\,, \tag{31}$$

где $K_п$ – класс точности средства измерения[12] в соответствии с ГОСТ 8.401-80; a_{max} – верхний предел измерения СИ.

[12] Для СИ, предназначенных для измерения линейных величин, таких, как штангенциркуль, микрометр гладкий, оптиметр и миниметр, класс точности не установлен.

При равномерном распределении неисключенных систематических погрешностей границы НСП Θ результата измерения (без учета знака) [9], вычисляем по формуле:

$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{k_m} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\Theta_i^2}}\ , \qquad (32)$$

где Θ_i – граница *i*-й НСП, *i=1,2,…, m*; *m* – число суммированных НСП Θ_i ; k_m – коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью.

Коэффициент k_m принимают равным 1,1 при доверительной вероятности P = 0,95[13] [9].

Доверительную вероятность *P* для вычисления границ НСП принимают той же, что и при вычислении доверительных границ случайной погрешности результата измерения, т.е. принимаем *P* = 0,95.

4.5.3. Границу погрешности результата Δ измерения находим (вычисляем) в зависимости от соотношения между границей НСП (Θ) результата измерения и оценкой среднего квадратического отклонения результата измерения ($S_{\overline{A}}$) (табл. 5).

Таблица 5

Значения границы погрешности результата Δ в зависимости от величины соотношения между Θ и $S_{\overline{A}}$

Соотношение	Принятое допущение	Значение Δ	Примечание
$\frac{\boldsymbol{\Theta}}{\boldsymbol{S_{\overline{A}}}} < 0{,}8$	Пренебрегают НСП $\boldsymbol{\Theta}$	$\Delta = \varepsilon$	Погрешность, возникающая из-за пренебрежения одной из составляющих погрешности результата измерения при выполнении указанных неравенств, не превышает 15% (ГОСТ 8.207-76).
$\frac{\boldsymbol{\Theta}}{\boldsymbol{S_{\overline{A}}}} > 8$	Пренебрегают случайной погрешностью $\boldsymbol{\varepsilon}$	$\Delta = \Theta$	

[13] При доверительной вероятности Р = 0,99 коэффициент k_m принимают равным 1,4, если число суммируемых неисключенных систематических погрешностей более четырех (m > 4). Если же число суммируемых погрешностей равно четырем или менее четырех ($m \le 4$), то коэффициент k_m определяют по графику зависимости, приведенной в [9].

4.5.4. В случае, если соотношения между Θ и $S_{\overline{A}}$, приведенные в табл. 5 не выполняются, т.е. его значение попадает в интервал

$$\mathbf{0.8} \leq \boldsymbol{\Theta}/\boldsymbol{S}_{\overline{A}} \leq \mathbf{8}\,, \tag{33}$$

то границу погрешности результата измерения необходимо находить одним из следующих способов:

1) границы погрешности результата измерения Δ находят путем построения композиции распределений случайной и неисключенных систематических погрешностей [14];

2) границы погрешности результата измерения Δ (без учета знака) вычисляются[15] по формуле [9]

$$\Delta = \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{S}_{\Sigma}\,. \tag{34}$$

где K - коэффициент, зависящий от соотношения случайной и неисключенной систематической погрешностей; S_{Σ} - оценка суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения.

Оценку суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения S_{Σ} вычисляют по формуле [9]

$$\boldsymbol{S}_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{m}} \frac{\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{i}}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{3}} + \boldsymbol{S}_{\overline{A}}^{\mathbf{2}}}\,. \tag{35}$$

Коэффициент K вычисляют по эмпирической формуле [9]

$$\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Theta}) \Big/ (\boldsymbol{S}_{\overline{A}}^{\mathbf{2}} + \sqrt{\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{m}} \frac{\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{i}}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{3}}}). \tag{36}$$

4.5.5. Результаты расчета заносятся в отчет (табл. 4.6 прил. 4).

---

[14] При условии, что случайная погрешность ε и неисключенные систематические погрешности Θ рассматриваются как случайные величины в соответствии с п. 4.3 ГОСТ 8.207-76.

[15] При условии, что доверительные границы случайной погрешности ε найдены в соответствии с разд. 3 ГОСТ 8.207-76.

5. ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

Используя рекомендованную литературу, студент должен изучить следующие вопросы:

- процедуры обработки результатов измерений, наиболее широко используемые в практике прямых измерений с многократными наблюдениями;
- критерии обнаружения грубой погрешности в совокупности результатов наблюдений;
- методы обнаружения и исключения грубых погрешностей;
- критерии, используемые для проверки принадлежности совокупности результатов наблюдений к нормальному закону распределения при малом ($4 < n < 20$) и большом ($n > 20$) количестве наблюдений;
- правила суммирования погрешностей измерений.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое грубые погрешности? Как устранить их влияние на результат измерений?
2. Какие критерии согласия используют при обработке результатов многократных наблюдений, если предполагается наличие грубых погрешностей в совокупности результатов измерений?
3. Каковы преимущества и недостатки правила *«трех сигм»*?
4. Сколько раз рекомендуется устранять грубые погрешности из совокупности результатов измерений (выборки)?
5. Как обрабатывают результаты наблюдений после устранения грубых погрешностей?
6. Почему число случайных ошибок зависит от числа измерений и какова эта зависимость?
7. Как производится проверка принадлежности совокупности результатов наблюдений к нормальному закону распределению?

8. По каким критериям согласия производится проверка принадлежности совокупности результатов наблюдений к нормальному закону распределения?

9. Какое значение доверительной вероятности *P* рекомендуется принимать при проведении статистической обработки совокупности результатов измерений?

10. По каким причинам необходимо увеличивать количество наблюдений в выборке?

11. Из каких составляющих образуется неисключаемая систематическая погрешность результата измерений?

ЛИТЕРАТУРА

1. Методы планирования и обработки результатов инженерного эксперимента: конспект лекций (отдельные главы из учебника для вузов) / Н.А. Спирин, В.В. Лавров; под общ. ред. Н. А. Спирина. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2004. – 257 с.

2. Метрология, стандартизация и сертификация: учебник для студ. высш. учеб. заведений / А.И. Аристов, Л.И. Карпов, В.М. Приходько, Т.М. Раковщик.– 4-е изд., стер. – М.: Академия, 2008. –384 с.

3. Сергеев, А.Г. Метрология / А.Г. Сергеев, В.В. Крохин. – М.: Логос, 2001. – 408 с.

4. Светозаров, В.В. Основы статистической обработки результатов измерений: учебное пособие / В.В. Светозаров. – М.: МИФИ, 2005. - 40 с.

5. Никитин, О.Р. Обработка экспериментальных данных: конспект лекций / О.Р. Никитин. – Владимир: ФГБОУ ВПО «ВГУ им. Столетовых», 2011. – 229 с.

6. Рекомендации по метрологии. Государственная система обеспечения единства измерений. Результаты измерений и характеристики погрешностей измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров [Текст]: МИ 1317-2004: утв. ФГУП ВНИИМС 20.12.04 : зарегистрирована ФГУП ВНИИМС 28.12.04: взамен МИ 1317-86.

7. Рекомендации по межгосударственной стандартизации. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения [Текст]: РМГ 29-99: утв. Государственным комитетом Российской Федерации по стандартизации и метрологии 17.05.2000: ввод в действие с 01.01.01: Минск: – Межгос. совет по стандартизации, метрологии и сертификации; М.: Изд-во стандартов, 2000. — 134 с.

8. Руководящий нормативный документ. Методические указания. Характеристики погрешности средств измерений в реальных условиях эксплуатации. Методы расчета [Текст]: РД 50-453-84: утв.

Пост. Государственного комитета СССР по стандартам 08.02.84: ввод. в действие с 01.01.86. – М.: Изд-во стандартов, 1986.– 12 с.

9. ГОСТ 8.207-76. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения [Текст]: введ. 1977–01–01. – М.: Изд-во стандартов, 2001.– 8 с. – (Государственная система обеспечения единства измерений).

10. ГОСТ Р 50779.21-2004. Статистические методы. Правила определения и методы расчета статистических характеристик по выборочным данным. Часть 1. Нормальное распределение [Текст]: введ. 2004–06–01:взамен ГОСТ Р 50779.21-96. – М.: Изд-во стандартов, 2004.– 47 с. – (Государственная система обеспечения единства измерений).

11. StatSoft, Inc. (2001). Электронный учебник по статистике. Москва, StatSoft. WEB: http://www.statsoft.ru/home/textbook/ default.htm.

12. Математический словарь высшей школы: общая часть / В.Т. Воднев, А.Ф. Наумович, Н.Ф. Наумович; под. ред. Ю.С. Богданова. – 2-е изд. – М.: Изд-во МПИ, 1988. – 527 с.

Приложение 1

Таблица

Результаты многократных независимых наблюдений

№ п./п.	Результаты наблюдений, выполненные определенным СИ		
	Линейный размер, мм (миниметр)	Линейный размер, мм (штангенциркуль с цифровым отсчетным устройством)	Напряжение в сети, В (вольтметр)
1	2	3	4
1	29,884	29,98	222,0
2	29,876	29,97	223,0
3	29,876	29,95	223,0
4	29,874	29,94	220,0
5	29,878	29,98	222,0
6	29,876	29,96	223,0
7	29,886	29,96	221,0
8	29,900	30,00	219,0
9	29,908	29,97	221,0
10	29,906	29,97	220,0
11	29,908	29,98	220,0
12	29,886	29,97	222,0
13	29,898	29,98	221,0
14	29,898	29,98	220,0
15	29,896	29,96	222,0
16	29,892	29,97	221,0
17	29,900	29,99	221,0
18	29,898	29,98	221,0
19	29,898	29,98	222,0
20	29,910	29,97	221,0
21	29,982	30,02	222,0
22	30,002	30,01	222,0
23	29,978	29,97	220,0
24	30,004	30,03	222,0
25	29,968	29,96	221,0
26	30,002	30,00	220,0
27	29,968	29,96	219,0
28	29,978	29,97	220,0
29	29,970	29,97	220,0
30	29,986	29,86	223,0
31	29,926	29,92	222,0
32	29,985	29,85	223,0
33	29,894	29,89	220,0
34	29,866	29,86	221,0
35	29,942	29,94	218,0
36	29,948	29,94	220,0
37	29,978	29,97	221,0
38	29,940	29,92	221,0
39	29,868	29,86	220,0
40	29,898	29,98	220,0
41	29,978	29,97	221,0
42	29,998	29,99	219,0

Продолжение табл.

1	2	3	4
43	29,916	29,91	218,0
44	29,880	29,86	217,0
45	29,894	29,84	218,0
46	29.968	29.90	218,0
47	29,966	29,90	218,0
48	29,886	29,86	218,0
49	29,898	29,88	219,0
50	29,986	29,86	218,0
51	29,892	29,89	220,0
52	29,896	29,89	222,0
53	29,914	29,91	218,0
54	29,938	29,93	220,0
55	29,894	29,84	218,0
56	29,888	29,83	219,0
57	29,788	29,78	220,0
58	29,878	29,78	221,0
59	29,872	29,77	218,0
60	29,786	29,78	221,0
61	29,870	29,87	218,0
62	29,880	29,80	218,0
63	29,914	29,91	21,8,0
64	29,928	29,92	217,0
65	29,918	29,91	216,0
66	29,880	29,88	220,0
67	29,890	29,89	215,0
68	29,870	29,87	221,0
69	29,880	29,88	219,0
70	29,860	29,84	220,0
71	29,858	29,85	221,0
72	29,856	29,85	220,0
73	29,912	29,91	221,0
74	29,879	29,79	220,0
75	29,788	29,75	224,0

Приложение 2

Таблица

Метрологические характеристики средств измерений

№ п./п.	Наименование характе-ристик СИ	Миниметр	Штангенциркуль с цифровым отсчет-ным устройством	Вольтметр
1	Цена деления шкалы	0,002 мм	0,01 мм	1,0 В
2	Диапазон показания	0,120 мм	150 мм	0 ... 500 В
3	Диапазон измерения	± 0,060 мм	0…150 мм	0 …500 В
4	Класс точности	-----	------	0,2

Приложение 3

Таблица 3.1

Значения интегральной функции Лапласа $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[2]{\mathbf{2\pi}}} \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{z}} \boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{z}^2}{2}} \boldsymbol{dz}$ (стандартизированное нормальное распределение) [3]

Z	**0**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4813	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4874	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4886
3,0	0,4986									
3,5	0,4998									
4,0	0,4999									

Примечания.

1. Квантиль, соответствующий уровню доверительной вероятности *P = 0,95,* находится из соотношения *2F (x) = P.* Для этого по табл. 3.1 находим *F(x) = P/2*.

2. Квантиль уровня *P/2* по определению является функцией, инверсной функции распределения. Следовательно, при *P = 0,95* необходимо найти квантиль уровня $z_{p/2} = U_{0,475}$.

Выбираем в поле табл. 3.1 значение вероятности, равное *0,4750*. Ему соответствует квантиль $U_{0,475}$ = 1,96. Для того, чтобы от доверительной вероятности перейти к вероятности распределения, необходимо к *P/2* прибавить *0,5* (левую половину распределения). То есть вероятность, соответствующая квантили *1,96*, равна *0,975*.

Таблица 3.2

Значения функции стандартного нормального закона распределения [10]

Z	*Φ*(*z*)	*Φ*(0,5 + *z*)	*Φ*(1,0 + *z*)	*Φ*(l,5 + *z*)	*Φ*(2,0 + *z*)	*Φ*(2,5 + *z*)	*Φ*(3,0 + *z*)
0,00	0,50000	0,69146	0,84134	0,93319	0,97725	0,99379	0,99865
0,01	0,50399	0,69497	0,84375	0,93448	0,97778	0,99396	0,99869
0,02	0,50798	0,69847	0,84614	0,93574	0,97831	0,99413	0,99874
0,03	0,51197	0,70194	0,84850	0,93699	0,97882	0,99430	0,99878
0,04	0,51595	0,70540	0,85083	0,93822	0,97932	0,99446	0,99882
0,05	0,51994	0,70884	0,85314	0,93943	0,97982	0,99461	0,99886
0,06	0,52392	0,71226	0,85543	0,94062	0,98030	0,99477	0,99889
0,07	0,52790	0,71566	0,85769	0,94179	0,98077	0,99492	0,99893
0,08	0,53188	0,71904	0,85993	0,94295	0,98124	0,99506	0,99896
0,09	0,53586	0,72240	0,86214	0,94408	0,98169	0,99520	0,99900
0,10	0,53983	0,72575	0,86433	0,94520	0,98214	0,99534	0,99903
0,11	0,54380	0,72907	0,86650	0,94630	0,98257	0,99547	0,99906
0,12	0,54776	0,73237	0,86864	0,94738	0,98300	0,99560	0,99910
0,13	0,55172	0,73565	0,87076	0,94845	0,98341	0,99573	0,99913
0,14	0,55567	0,73891	0,87286	0,94950	0,98382	0,99585	0,99916
0,15	0,55962	0,74215	0,87493	0,95053	0,98422	0,99598	0,99918
0,16	0,56356	0,74537	0,87698	0,95154	0,98461	0,99609	0,99921
0,17	0,56750	0,74857	0,87900	0,95254	0,98500	0,99621	0,99924
0,18	0,57142	0,75175	0,88100	0,95352	0,98537	0,99632	0,99926
0,19	0,57535	0,75490	0,88298	0,95449	0,98574	0,99643	0,99929
0,20	0,57926	0,75804	0,88493	0,95543	0,98610	0,99653	0,99931
0,21	0,58317	0,76115	0,88686	0,95637	0,98645	0,99664	0,99934
0,22	0,58706	0,76424	0,88877	0,95728	0,98679	0,99674	0,99936
0,23	0,59095	0,76731	0,89065	0,95818	0,98713	0,99683	0,99938
0,24	0,59483	0,77035	0,89251	0,95907	0,98745	0,99693	0,99940
0,25	0,59871	0,77337	0,89435	0,95994	0,98778	0,99702	0,99942
0,26	0,60257	0,77637	0,89617	0,96080	0,98809	0,99711	0,99944
0,27	0,60642	0,77935	0,89796	0,96164	0,98840	0,99720	0,99946
0,28	0,61026	0,78230	0,89973	0,96246	0,98870	0,99728	0,99948
0,29	0,61409	0,78524	0,90147	0,96327	0,98899	0,99736	0,99950
0,30	0,61791	0,78814	0,90320	0,96407	0,98928	0,99744	0,99952
0,31	0,62172	0,79103	0,90490	0,96485	0,98956	0,99752	0,99953
0,32	0,62552	0,79389	0,90658	0,96562	0,98983	0,99760	0,99955
0,33	0,62930	0,79673	0,90824	0,96638	0,99010	0,99767	0,99957
0,34	0,63307	0,79955	0,90988	0,96712	0,99036	0,99774	0,99958
0,35	0,63683	0,80234	0,91149	0,96784	0,99061	0,99781	0,99960
0,36	0,64058	0,80511	0,91308	0,96856	0,99086	0,99788	0,99961
0,37	0,64431	0,80785	0,91466	0,96926	0,99111	0,99795	0,99962
0,38	0,64803	0,81057	0,91621	0,96995	0,99134	0,99801	0,99964
0,39	0,65173	0,81327	0,91774	0,97062	0,99158	0,99807	0,99965
0,40	0,65542	0,81594	0,91924	0,97128	0,99180	0,99813	0,99966
0,41	0,65910	0,81859	0,92073	0,97193	0,99202	0,99819	0,99968
0,42	0,66276	0,82121	0,92220	0,97257	0,99224	0,99825	0,99969
0,43	0,66640	0,82381	0,92364	0,97320	0,99245	0,99831	0,99970
0,44	0,67003	0,82639	0,92507	0,97381	0,99266	0,99836	0,99971
0,45	0,67364	0,82894	0,92647	0,97441	0,99286	0,99841	0,99972
0,46	0,67724	0,83147	0,92785	0,97500	0,99305	0,99846	0,99973
0,47	0,68082	0,83398	0,92922	0,97558	0,99324	0,99851	0,99974
0,48	0,68439	0,83646	0,93056	0,97615	0,99343	0,99856	0,99975
0,49	0,68793	0,83891	0,93189	0,97670	0,99361	0,99861	0,99976

Примечания.

1. В табл. 3.2 даны значения функции стандартного нормального закона распределения:

$$\boldsymbol{\Phi}\,(\boldsymbol{u}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}} \int_{-\infty}^{u} e^{\frac{-1}{2}t^2}\,dt\,,$$

т. е. значения площади под кривой

$$\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}}\, e^{-\,t_i^2/2}\ ,$$

лежащей левее точки *u.*

2. В левой колонке табл. 3.2 приведены значения аргумента *u* от 0,00 до 0,49, обозначенные буквой *z.* Во второй колонке приведены значения функции *Ф* для этих значений аргумента. В последующих колонках табл. 3.2 даны значения функции *Ф* для значении аргумента *u* от 0,50 и выше. При этом значение аргумента *u* находят как сумму значения *z* и величин: 0,50; 1,00; 1,50; 2,00; 2,50; 3,00.

Пример. Для *u* = 1,86 = (1,5 + 0,36) находим: *Ф* (1,86) = 0,96856.

3. Значения функции *Ф* (*u*) для отрицательных *u* рассчитывают по формуле

$$\boldsymbol{\Phi}\,(-\boldsymbol{u}) = 1 - \boldsymbol{\Phi}\,(\boldsymbol{u}).$$

4. Значение квантили *Ua* уровня *a* находится как значение аргумента *U*, соответствующего значению функции *Ф* (*u*) = *a.*

Пример. Значению *a* = 0,99 соответствует ближайшее табличное значение *Ф* = 0,99010. По табл. 3.2 для этого значения функции находят значение аргумента *u*:

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{2{,}0 + 0{,}33 = 2{,}33}.$$

5. Функция нормированного нормального распределения связана с функцией Лапласа соотношением:

$$\boldsymbol{\Phi\,(z) = 2\,F\,(z) - 1}.$$

Таблица 3.3

Таблица значений плотности стандартного нормального распределения [11] $f\ (z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\ z_i^2/2}$

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,398942	0,398922	0,398862	0,398763	0,398623	0,398444	0,398225	0,397966	0,397668	0,397330
0,1	0,396953	0,396536	0,396080	0,395585	0,395052	0,394479	0,393868	0,393219	0,392531	0,391806
0,2	0,391043	0,390242	0,389404	0,388529	0,387617	0,386668	0,385683	0,384663	0,383606	0,382515
0,3	0,381388	0,380226	0,379031	0,377801	0,376537	0,375240	0,373911	0,372548	0,371154	0,369728
0,4	0,36827	0,366782	0,365263	0,363714	0,362135	0,360527	0,358890	0,357225	0,355533	0,353812
0,5	0,352065	0,350292	0,348493	0,346668	0,344818	0,342944	0,341046	0,339124	0,337180	0,335213
0,6	0,333225	0,331215	0,329184	0,327133	0,325062	0,322972	0,320864	0,318737	0,316593	0,314432
0,7	0,312254	0,310060	0,307851	0,305627	0,303389	0,301137	0,298872	0,296595	0,294305	0,292004
0,8	0,289692	0,287369	0,285036	0,282694	0,280344	0,277985	0,275618	0,273244	0,270864	0,268477
0,9	0,266085	0,263688	0,261286	0,258881	0,256471	0,254059	0,251644	0,249228	0,246809	0,24439
1,0	0,241971	0,239551	0,237132	0,234714	0,232297	0,229882	0,227470	0,22506	0,222653	0,220251
1,1	0,217852	0,215458	0,213069	0,210686	0,208308	0,205936	0,203571	0,201214	0,198863	0,196520
1,2	0,194186	0,19186	0,189543	0,187235	0,184937	0,182649	0,180371	0,178104	0,175847	0,173602
1,3	0,171369	0,169147	0,166937	0,164740	0,162555	0,160383	0,158225	0,15608	0,153948	0,151831
1,4	0,149727	0,147639	0,145564	0,143505	0,14146	0,139431	0,137417	0,135418	0,133435	0,131468
1,5	0,129518	0,127583	0,125665	0,123763	0,121878	0,120009	0,118157	0,116323	0,114505	0,112704
1,6	0,110921	0,109155	0,107406	0,105675	0,103961	0,102265	0,100586	0,098925	0,097282	0,095657
1,7	0,094049	0,092459	0,090887	0,089333	0,087796	0,086277	0,084776	0,083293	0,081828	0,08038
1,8	0,07895	0,077538	0,076143	0,074766	0,073407	0,072065	0,070740	0,069433	0,068144	0,066871
1,9	0,065616	0,064378	0,063157	0,061952	0,060765	0,059595	0,058441	0,057304	0,056183	0,055079
2,0	0,053991	0,052919	0,051864	0,050824	0,04980	0,048792	0,047800	0,046823	0,045861	0,044915
2,1	0,043984	0,043067	0,042166	0,041280	0,040408	0,039550	0,038707	0,037878	0,037063	0,036262
2,2	0,035475	0,034701	0,033941	0,033194	0,03246	0,031740	0,031032	0,030337	0,029655	0,028985
2,3	0,028327	0,027682	0,027048	0,026426	0,025817	0,025218	0,024631	0,024056	0,023491	0,022937
2,4	0,022395	0,021862	0,021341	0,020829	0,020328	0,019837	0,019356	0,018885	0,018423	0,017971
2,5	0,017528	0,017095	0,016670	0,016254	0,015848	0,015449	0,015060	0,014678	0,014305	0,01394
2,6	0,013583	0,013234	0,012892	0,012558	0,012232	0,011912	0,011600	0,011295	0,010997	0,010706
2,7	0,010421	0,010143	0,009871	0,009606	0,009347	0,009094	0,008846	0,008605	0,00837	0,00814
2,8	0,007915	0,007697	0,007483	0,007274	0,007071	0,006873	0,006679	0,006491	0,006307	0,006127
2,9	0,005953	0,005782	0,005616	0,005454	0,005296	0,005143	0,004993	0,004847	0,004705	0,004567
3,0	0,004432	0,004301	0,004173	0,004049	0,003928	0,003810	0,003695	0,003584	0,003475	0,00337
3,1	0,003267	0,003167	0,00307	0,002975	0,002884	0,002794	0,002707	0,002623	0,002541	0,002461
3,2	0,002384	0,002309	0,002236	0,002165	0,002096	0,002029	0,001964	0,001901	0,001840	0,001780
3,3	0,001723	0,001667	0,001612	0,001560	0,001508	0,001459	0,001411	0,001364	0,001319	0,001275
3,4	0,001232	0,001191	0,001151	0,001112	0,001075	0,001038	0,001003	0,000969	0,000936	0,000904

Продолжение табл. 3.3

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,5	0,000873	0,000843	0,000814	0,000785	0,000758	0,000732	0,000706	0,000681	0,000657	0,000634
3,6	0,000612	0,00059	0,000569	0,000549	0,000529	0,000510	0,000492	0,000474	0,000457	0,000441
3,7	0,000425	0,000409	0,000394	0,000380	0,000366	0,000353	0,000340	0,000327	0,000315	0,000303
3,8	0,000292	0,000281	0,000271	0,000260	0,000251	0,000241	0,000232	0,000223	0,000215	0,000207
3,9	0,000199	0,000191	0,000184	0,000177	0,000170	0,000163	0,000157	0,000151	0,000145	0,000139
4,0	0,000134	0,000129	0,000124	0,000119	0,000114	0,000109	0,000105	0,000101	0,000097	0,000093

Примечание.

Значения, приведенные в табл. 3.3, представляют собой величину площади под стандартной нормальной (гауссовой) кривой от 0 до соответствующего z-значения. Например, величина этой площади между значениями 0 и 2,36 показана в ячейке, находящейся на пересечении строки 2,30 и столбца 0,06, и составляет 0,4909. Значение площади между 0 и отрицательным значением находится на пересечении строки и столбца, которые в сумме соответствуют абсолютному значению заданной величины. Например, площадь под кривой от -1,3 до 0 равна площади под кривой между 1,3 и 0,00 поэтому ее значение находится на пересечении строки 1,3 и столбца 0,00 (и составляет 0,4032).

Таблица 3.4

Значения критерия согласия Пирсона (χ^2) при различном уровне значимости $q = 1\text{-}P$ и числе степеней свободы v [10]

V	**Значения квантилей χ^2-распределения при доверительной вероятности *P***												
	0,01	**0,02**	**0,05**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,5**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**
1	0,0157	0,0628	0,0393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,160	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,233	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,358	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,821	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,585	26,873	29,141
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,333	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	6,408	7,255	8,672	10,035	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932

V	Значения квантилей χ^2-распределения при доверительной вероятности *P*												
	0,01	**0,02**	**0,05**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,5**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Примечания.

1. В табл. 3.4 приведены значения квантилей $\chi^2_a\,(v)$, т. е. квантилей χ^2-распределения уровня *P* с *v* степенями свободы.

Пример. Для *v* = 9 и *P* = 0,98 квантиль $\chi^2_{0,98}$ = 19,679.

2. Для промежуточных значений *P*, лежащих между двумя соседними табличными значениями P_1 и P_2:

$$P_1 < P < P_2,$$

значение квантиля χ^2_P может быть вычислено приближенно по формуле (метод линейной интерполяции):

$$\chi^2_\alpha = (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot (\chi^2_{\alpha_2} - \chi^2_{\alpha_1})/(\,\alpha - \alpha_1) + \,\chi^2_{\alpha_1}\,.$$

Пример. Для *v* = 14 требуется найти квантиль уровня 0,988. Полагаем: P_1 = 0,98; P_2 = 0,99, находим по табл. 3.4 $\chi^2_{0,98}$ = 26,873; $\chi^2_{0,99}$ = 29,141 и вычисляем:

$$\chi^2_{0,988} = (0,988 - 0,98) \cdot \frac{(29,141 - 26,873)}{0,99 - 0,98} + \,26,873 = 28,6874$$

для *v* = 14 степеней свободы.

Приложение 4

ОТЧЕТ[16]

о выполнении лабораторно-практической работы на тему «Обработка результатов прямых измерений при многократных наблюдениях»

1. Исходные данные и задание на выполнение работы

1.1. Исходные данные.

Выполнены прямые равноточные измерения ______________.

Результаты наблюдений в количестве n=____ , выполненных при помощи ________________, принять по прил. 1 графа __ с № __ по № ___ включительно данных Методических указаний.

Принять: доверительную вероятность Р= _____;

Принять: постоянные систематические погрешности $\Delta_{сист.1}$ = ________ ; $\Delta_{сист.2}$ = ________ ; $\Delta_{сист.3}$ = ________ .

Исходные данные занести в таблицы 4.1 и 4.2.

Таблица 4.1

Исходные данные - результаты наблюдений (экспериментальные данные)

Результаты наблюдений, полученные при помощи СИ ____________________ Наименование СИ					
№ п./п.	Результаты, мм/В	№ п./п.	Результаты, мм/В	№ п./п.	Результаты, мм/В
1		11		21	
2		12		22	
3		13		23	
4		14		24	
5		15		25	
6		16		26	
7		17		27	
8		18		28	
9		19		29	
10		20		30	

[16] Отчет может быть представлен на бумажном носителе, или в электронном виде, например, в виде файла, созданного в среде MS Excel, MS Word.

Отчет должен быть оформлен в соответствии с требованиями ГОСТ 2.105-95 ЕСКД. «Общие требования к текстовым документам».

Таблица 4.2

Метрологические характеристики средств измерений

№ п./п.	Наименование характеристик СИ	Ед. изм.	Значение
1	Цена деления шкалы		
2	Диапазон показания		
3	Диапазон измерения		
4	Класс точности		
5	Погрешность от подключения вольтметра в цепь (изменение напряжения)		

1.2. Задание на работу.

Требуется произвести статистическую обработку совокупности результатов наблюдения и:

1) определить результат измерения;

2) оценить погрешность результата измерения;

3) представить результат измерения в соответствии с нормативными требованиями из условия необходимости дальнейшей обработки результата измерения и анализа погрешностей.

2. Результаты обработки[17] совокупности результатов многократных наблюдений

Таблица 4.3

Результаты проверки группы результатов наблюдений на соответствие однородности выборки (на наличие наблюдений, содержащих грубую погрешность)

№ п./п.	Наименование показателя	Условное обозначение	Значение показателя
1	2	3	4
1	Установленное заданием число многократных наблюдений	n	
2	Уровень значимости	**q**	__%

[17] Статистическую обработку результатов прямых измерений при многократных наблюдениях можно произвести с использованием известных пакетов компьютерных программ: *MS Exel, STATISTICA, Mathcad и MatLAB*.

Продолжение табл. 4.3

1	2	3	4
3	Результат наблюдения выборки, который возможно содержит грубую погрешность [1]	$\boldsymbol{A_п}$	
4	Среднее арифметическое исправленного совокупности результатов наблюдений	$\bar{\boldsymbol{A}}$	
5	Оценка среднего квадратического отклонения результатов наблюдений	$\boldsymbol{S_A}$	
6	Принятый критерий проверки [2]	--	
7	Расчетное значение критерия ($\beta_т$ или $3S_A$ ($4S_A$))		
8	Заключение о наличие или отсутствии результата наблюдения, содержащего грубую погрешность [3]	---	
9	Полученное по результатам проверки число многократных наблюдений	$\boldsymbol{n_н}$	

Примечания.

1. Указывается номер результата наблюдения и его характеристика (A_{imax} или A_{imin}).

2. Указывается используемый критерий: $\beta_т$ или $3S_A$ ($4S_A$). Для критерия $\beta_т$ – приводится табличное значение.

3. Если да, то в графе 3 указывается номер исключаемого результата наблюдения.

Таблица 4.4

Параметры статистических распределений исправленной совокупности результата измерений

№ п./п.	Наименование показателя	Условное обозначение	Значение показателя
1	2	3	4
1	Среднее арифметическое исправленного ряда наблюдений – *результат измерения*	$\bar{\boldsymbol{A}}$	
2	Оценка среднего квадратического отклонения результатов наблюдений	$\boldsymbol{S_A}$	
3	Оценка среднего квадратического отклонения результатов измерений	$\boldsymbol{S_{\bar{A}}}$	

Таблица 4.5.1

Результаты проверки гипотезы о принадлежности совокупности результатов наблюдений к нормальному распределению по составному критерию

№ п./п.	Наименование показателя	Условное обозначение	Значение показателя
1	Среднее арифметическое исправленного ряда наблюдений	$\bar{A}$	
2	Оценка среднего квадратического отклонения результатов наблюдений	S_A	
3	Смещенная оценка среднего квадратического отклонения результатов наблюдений	$S_{см}$	
4	Уровень значимости *критерия 1*	q_1	
5	Расчетный параметр	d_p	
5.1	Табличный параметр по табл. 2	$d_{1-q_1/2}$	
5.2	Табличный параметр по табл. 2	$d_{q_1/2}$	
6	Вывод о принадледлежности совокупности результатов наблюдений к нормальному распределению по *критерию 1*		
6	Уровень значимости *критерия 2*	q_2	
8	Значение доверительной вероятности в зависимости от q_2 и n	P	
9	Допустимое количество разностей	$k_{доп}$	
10	Верхний квантиль распределения нормированной функции Лапласа, отвечающий вероятности $P/2$	$z_{p/2}$	
11	Количество разностей, превышающих расчетную величину $z_{p/2} \cdot S_A$	$k_п$	
11.1	Номера наблюдений, для которых превышается расчетная величина	$A_{1...n}$	
11.2			
...			
11.5			
12	Результирующий уровень значимости	q_Σ	
13	Вывод о принадледлежности совокупности результатов наблюдений к нормальному распределению по критерию 2		
14	Вывод о принадледлежности ряда наблюдений к нормальному распределению по составному критерию		

.

Таблица 4.5.2

Результаты проверки гипотезы о принадлежности результатов наблюдений к нормальному распределению по критерию согласия Пирсона (χ^2)

№ п./п.	Наименование показателя	Условное обозначение	Значение показателя
1	Среднее арифметическое исправленного ряда наблюдений	$\bar{A}$	
2	Оценка среднего квадратического отклонения результатов наблюдений	S_A	
3	Уровень значимости	q	
4	Значение доверительной вероятности	P	
5	Оптимальное количество интервалов	M	
6	Число степеней свободы	V	
7	Расчетное значение критерия согласия Пирсона	$\chi^2_{эксп}$	
8	Табличное значение критерия согласия Пирсона	χ^2_q	
9	Вывод о принадледлежности ряда наблюдений к нормальному распределению	***Да/нет***	

Графический материал (гистограмма / полигон, кумулятивная кривая)

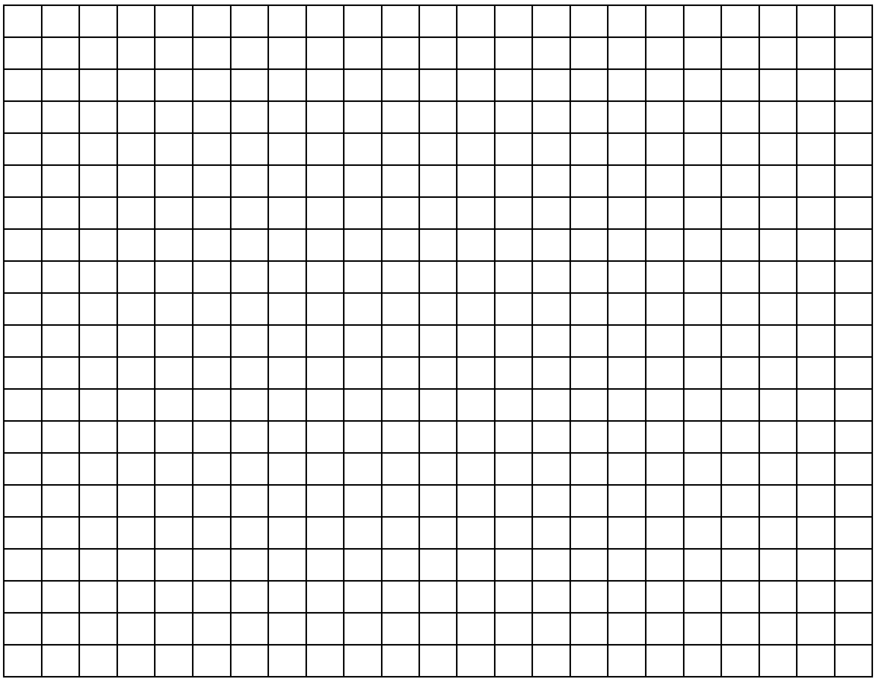

Рис. 4.1. Гистограмма/полигон

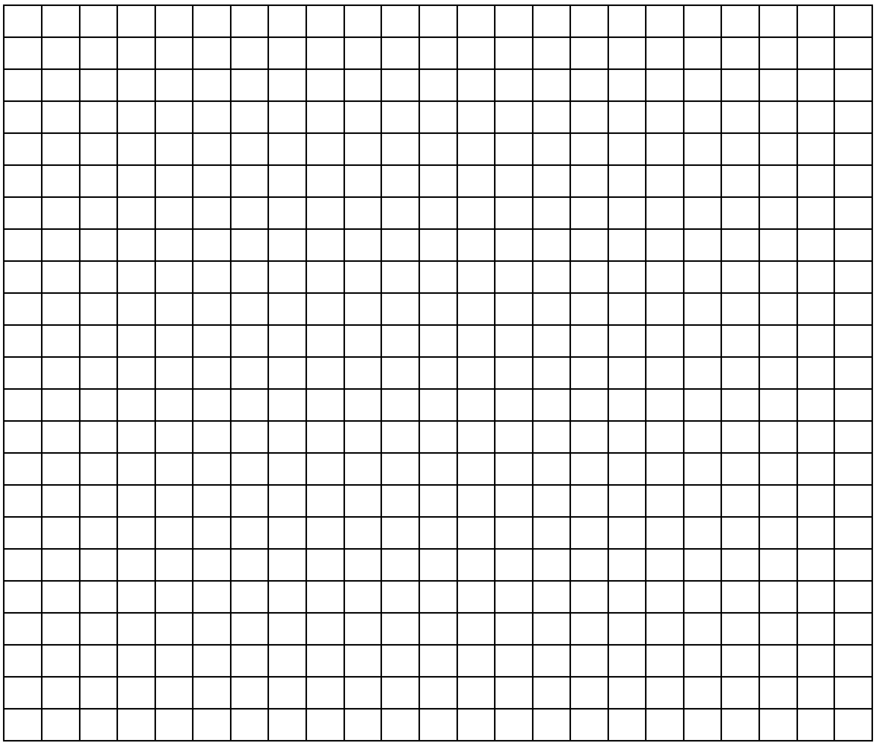

Рис. 4.2. Кумулятивная кривая

Таблица 4.6

Результаты вычисления доверительных границ
погрешности результата измерения

№ п./п.	Наименование показателя	Условное обозначение	Значение показателя
1	2	3	4
1	Уровень значимости	$\boldsymbol{q}$	
2	Доверительная вероятность	$\boldsymbol{P}$	
3	Оценка среднего квадратического отклонения результатов измерений	$\boldsymbol{S_{\bar{A}}}$	
4	Коэффициент Стьюдента	$\boldsymbol{t_{P,n}}$	
5	Доверительная граница (без учета знака) случайной погрешности результата измерения	$\boldsymbol{E}$	
6	Погрешности средства измерения:		
6.1	погрешность отсчета	$\boldsymbol{\Theta_{отс}}$	
6.2	погрешность показания	$\boldsymbol{\Theta_{пок}}$	
6.3	дополнительная погрешность (температурная или др.)	$\boldsymbol{\Theta_{др}}$	

Продолжение табл. 4.6

1	2	3	4
7	Доверительная граница НСП результата измерения	Θ	
8	Величина отношения доверительной границы НСП к оценке среднего квадратического отклонения результатов измерений	$\Theta / S_{\bar{A}}$	
9	Граница погрешности результата измерения	Δ	
	Оформление результатов измерения (в соответствии с заданием)		

Отметка о выполнении работы		**Отметка о защите работы**	
Дата	Подпись преподавателя	Дата	Подпись преподавателя

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

РАКОВЩИК Татьяна Михайловна,
ШАЛАМОВ Александр Николаевич

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ МНОГОКРАТНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Методические указания к лабораторно-методической работе по курсу «Метрология, стандартизация и сертификация»

Редактор И.А. Короткова

Подписано в печать 27.11.2013 г. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 3,2 . Уч.-изд. л. 2,6. Тираж 200 экз. Заказ . Цена 52 руб.
МАДИ, Москва, 125319, Ленинградский пр-т, 64.