

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2008

УДК 620.1(075.8)
С 232

***Инновационная образовательная программа НГТУ
«Высокие технологии»***

Коллектив авторов:

*В.Г. Атапин, К.А. Матвеев,
А.Н. Пель, Г.И. Расторгуев,
А.И. Темников*

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор *И.П. Олегин*,
д-р техн. наук, профессор *В.М. Тихомиров*

Работа подготовлена на кафедрах теоретической механики
и сопротивления материалов, прочности летательных аппаратов
для студентов машиностроительных, авиационных
и транспортных специальностей

С 232 **Сборник заданий по сопротивлению материалов** : учеб.
пособие / В.Г. Атапин, К.А. Матвеев, А.Н. Пель, Г.И. Расторгуев,
А.И. Темников. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2008. – 288 с.

ISBN 978-5-7782-1090-5

Сборник содержит: в первом разделе – задания по основным темам учебной дисциплины “Сопротивление материалов” в соответствии с программой для направлений подготовки (специальностей) в области техники и технологии. Отдельное задание представляет собой комплексную задачу и сопровождается примером ее выполнения с подробным объяснением всех действий; во втором разделе рассматривается решение задач в среде MathCAD и методом конечных элементов.

Адресовано студентам машиностроительных, авиационных и транспортных специальностей.

УДК 620.1(075.8)

ISBN 978-5-7782-1090-5

© Атапин В.Г., Матвеев К.А.,
Пель А.Н., Расторгуев Г.И., Темников А.И., 2008
© Новосибирский государственный
технический университет, 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Раздел I. Расчетно-проектировочные задания	9
1. Растяжение и сжатие прямолинейных стержней	11
Задача 1. Расчет статически определимого ступенчатого стержня	11
Задача 2. Расчет статически неопределимого ступенчатого стержня	21
Задача 3. Расчет статически неопределимой стержневой системы	31
2. Напряженно-деформированное состояние материала в локальной области. Модели статического разрушения	45
Задача 4. Расчет напряженного и деформированного состояния, оценка прочности малого элемента твердого деформируемого тела	45
3. Кручение стержней	52
Задача 5. Расчет статически неопределимого стержня на прочность и жесткость при кручении	52
4. Плоский изгиб прямолинейных стержней	64
Задача 6. Построение эпюр перерезывающих сил и изгибающих моментов	64
Задача 7. Расчет прямолинейных стержней при плоском изгибе	86
5. Сложное сопротивление стержней	105
Задача 8. Расчет вала редуктора с цилиндрическими косозубыми колесами.....	105
Задача 9. Расчет пространственной стержневой конструкции	112
6. Статически неопределимые стержневые системы	122
Задача 10. Расчет статически неопределимой плоской рамы методом сил	122

7. Расчет кривого стержня	139
Задача 11. Расчет кривого стержня на прочность	139
8. Устойчивость прямолинейных стержней	153
Задача 12. Расчет стержня, сжатого центральной продольной силой.....	153
9. Расчет упругих стержневых систем при динамическом нагружении	172
Задача 13. Расчет систем с учетом сил инерции.....	172
Задача 14. Расчет упругих систем на ударную нагрузку	179
Задача 15. Учет колебаний упругих систем	186
Раздел II. Задачи, решаемые с применением ЭВМ	193
10. Решение задач с применением пакета MathCad	195
11. Решение задач с приведением исходных данных к безразмерному виду	229
12. Решение задач с использованием метода конечных элементов (МКЭ)	246
Список литературы	271
Приложение	272

ВВЕДЕНИЕ

Задачи дисциплины “Сопротивление материалов” формулируются следующим образом:

- овладение теоретическими основами и практическими методами расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций и машин;
- ознакомление с современными подходами к расчету и рациональному проектированию сложных стержневых конструкций.

Опыт в проведении таких инженерных расчетов студент получает на практических занятиях (решение задач), а также при выполнении курсовых работ (индивидуальных домашних заданий).

Предлагаемый сборник заданий охватывает основные темы, предусмотренные программой по дисциплине “Сопротивление материалов” для направлений подготовки (специальностей) в области техники и технологии, и структурно включает два раздела.

I. Расчетно-проектировочные задания. Каждое задание представляет собой, как правило, комплексную задачу и сопровождается примером ее выполнения с подробным объяснением всех действий.

II. Задачи, решаемые с применением ЭВМ. Рассматривается решение задач в среде MathCAD и методом конечных элементов (МКЭ).

Настоящий сборник заданий:

- позволяет существенно сократить время, затрачиваемое преподавателем на подготовку, выдачу и объяснение заданий, а также на консультации, так как подробно приведены решения этих заданий;
- способствует развитию навыков самостоятельной работы студентами при выполнении практических работ, так как в рассмотренных примерах содержатся ответы на вопросы практического характера, на которые в большинстве случаев студенты не могут найти ответов ни в учебниках и сборниках задач, ни в лекционных материалах.

Общие методические указания

- Данные для выполнения задания следует выбирать из соответствующей таблицы согласно своему шифру зачетной книжки и первым **шести** буквам русского алфавита, расположенным в определенном порядке. Так, записав шифр и под каждой его цифрой буквы

шифр – 38104725

буквы – **абвгде,

выбирают из таблицы, приведенной в задании, число, которое находится на пересечении столбца (буква) и строки (цифра шифра). Причем вначале берется буква, а затем находится цифра.

ПРИМЕР ВЫБОРА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

В табл. 1.1 (задача 1.1) в последней строке по горизонтали первая буква "е". На пересечении этого столбца со строкой, соответствующей цифре 5 шифра, получаем следующие значения сил:

$$F_1 = 130 \text{ кН}, F_2 = -60 \text{ кН}, F_3 = -20 \text{ кН}.$$

Затем по следующей букве "д" и соответствующей ей цифре 2 шифра на пересечении столбца "д" и строки "2" получаем:

$$l_1 = 0,2 \text{ м}; l_2 = 0,6 \text{ м}; l_3 = 0,9 \text{ м}; a_1 = 0,1 \text{ м}; a_2 = 0,4 \text{ м}; a_3 = 0,9 \text{ м}$$

и т. д.

- Все задания должны быть выполнены самостоятельно после изучения соответствующего раздела курса “Соппротивление материалов” (см. список литературы).
- Задания выполняются на стандартных листах писчей бумаги формата А4 (297×210 мм).
- Все расчеты и пояснения к ним выполняются чернилами, записи ведутся только на одной стороне листа.
- Графическая часть задания выполняется в масштабе с использованием чертежного инструмента.
- При решении каждой задачи необходимо:
 - написать полное условие задачи, численные данные и вычертить заданную схему, соответствующую варианту;

- начертить с соблюдением масштаба расчетную схему;
 - привести решение в общем виде, подставив численные значения только в конечные буквенные выражения (соблюдается последовательность подстановки и единицы измерения соответствующих величин);
 - записать численное значение результата с точностью до трех–четырёх значащих цифр (независимо от положения запятой) и указать единицу измерения;
 - эпюры внутренних усилий строить под расчетной схемой на одном листе с соблюдением масштаба и указанием значений характерных ординат;
 - каждый этап расчета следует сопровождать краткими пояснениями.
- Титульный лист (рис. 01) оформляется согласно ГОСТ 2.105-95. ЕСКД. Общие требования к текстовым документам.

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ КАФЕДРА _____	
УТВЕРЖДАЮ Преподаватель _____ Фамилия И.О. _____ 2008 г.	
ЗАДАНИЕ № ____ «Название задания» Шифр зачетной книжки _____	
РАЗРАБОТАЛ: Студент _____ Группа _____ Факультет _____	
Новосибирск 2008	

Рис. 0.1. Образец титульного листа

РАЗДЕЛ I

Расчетно-проектировочные задания

- *Растяжение и сжатие прямолинейных стержней*
- *Напряженно-деформированное состояние материала в локальной области*
- *Кручение стержней*
- *Плоский изгиб прямолинейных стержней*
- *Сложное сопротивление стержней*
- *Статически неопределимые стержневые системы*
- *Расчет кривого стержня*
- *Устойчивость прямолинейных стержней*
- *Расчет упругих стержневых систем при динамическом нагружении*

1

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Задача
1

Расчет
статически определимого
ступенчатого стержня

Ступенчатый стержень изготовлен из серого чугуна марки СЧ24 с пределами прочности при растяжении $\sigma_{вр} = 240$ МПа и сжатии

$\sigma_{вс} = 1000$ МПа, модулем упругости $E = 1,2 \cdot 10^5$ МПа (рис. 1.1).

Требуется при исходных данных, приведенных в табл. 1.1:

- построить эпюры нормальных (продольных) сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений;
- определить перемещение свободного торца стержня, используя принцип независимости действия сил;
- проверить прочность стержня.

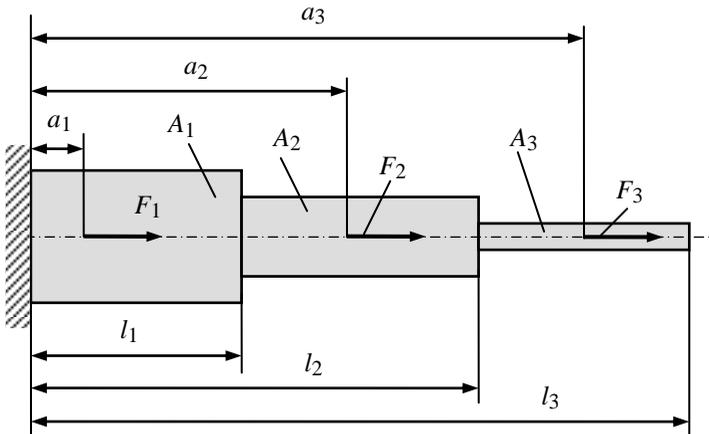


Рис. 1.1. Расчетная схема к задаче 1

Указание. Направление сил на расчетной схеме для рассматриваемого варианта изобразить в соответствии с их знаками, приведенными в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Исходные данные к задаче 1

Номер строки	Сила, кН			Линейный размер, м						Площадь поперечного сечения, см ²			Нормативный коэффициент запаса прочности
	F_1	F_2	F_3	l_1	l_2	l_3	a_1	a_2	a_3	A_1	A_2	A_3	
1	120	-50	-40	0,3	0,7	1,0	0,1	0,4	1,0	3	2	1	3,0
2	-40	80	-70	0,2	0,6	0,9	0,1	0,4	0,9	3	1	2	3,5
3	90	-70	30	0,4	0,6	0,8	0,1	0,5	0,8	5	4	3	3,2
4	50	-60	20	0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,7	3	1	2	3,6
5	130	-60	-20	0,3	0,7	1,0	0,3	0,6	0,8	4	2	1	3,3
6	40	-70	30	0,4	0,7	0,9	0,2	0,6	0,9	2	4	3	3,7
7	-60	110	-90	0,2	0,5	0,8	0,1	0,5	0,7	4	2	3	3,4
8	-80	70	30	0,3	0,7	0,9	0,1	0,6	0,9	6	4	3	3,8
9	60	-70	20	0,4	0,7	1,0	0,1	0,5	1,0	2	3	2	3,2
0	60	-90	10	0,2	0,5	0,8	0,1	0,3	0,8	3	2	1	4,0
	е			д						г			е

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

Ступенчатый стержень (рис. 1.1) изготовлен из серого чугуна марки СЧ32 с пределами прочности при растяжении $\sigma_{вр} = 320$ МПа и сжатии $\sigma_{вс} = 1200$ МПа, модулем упругости $E = 1,2 \cdot 10^5$ МПа.

Исходные данные к задаче

F_1	F_2	F_3	l_1	l_2	l_3	a_1	a_2	a_3	A_1	A_2	A_3	[n]
кН			м						см ²			-
150	-50	-40	0,2	0,5	1,0	0,1	0,3	0,8	2	3	1	2,0

Требуется:

- 1) построить эпюры нормальных (продольных) сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений;
- 2) определить перемещение свободного торца стержня, используя принцип независимости действия сил;
- 3) проверить прочность стержня.

Решение

Расчетная схема. Расчетная схема стержня согласно исходным данным к задаче изображена на рис. 1.2. Начало системы координат x поместим в точке B (заделка). Ось x направим вдоль стержня (горизонтально), ось y – перпендикулярно оси x (вертикально).

Определение реакции опоры. Предполагаем, что реакция опоры (заделки) R_B направлена в положительном направлении оси x (рис. 1.2). Для нахождения реакции составляем уравнение равновесия:

$$\sum x = 0 \quad R_B + F_1 - F_2 - F_3 = 0 \quad \rightarrow$$

$$R_B = -F_1 + F_2 + F_3 = -150 + 50 + 40 = -60 \text{ кН},$$

т. е. реакция опоры направлена в противоположную сторону. Зачеркивая двумя штрихами первоначальное направление реакции, изображаем ее истинное направление.

Эпюра нормальных сил. Разобьем стержень на отдельные (силовые) участки, начиная от свободного торца. Границами участков при построении эпюры нормальных сил являются сечения, в которых приложены внешние сосредоточенные силы, а также торцы стержня (сечения B и O). Таким образом, заданный стержень имеет четыре участка – OM , MK , KC , CB (рис. 1.2).

При применении метода сечений принципиально безразлично, равновесие какой из отсеченных частей (левой или правой) стержня рассматривать. В данном случае, применяя метод сечений, будем оставлять правую и отбрасывать левую отсеченную часть стержня.

При растяжении нормальную силу принято считать положительной.

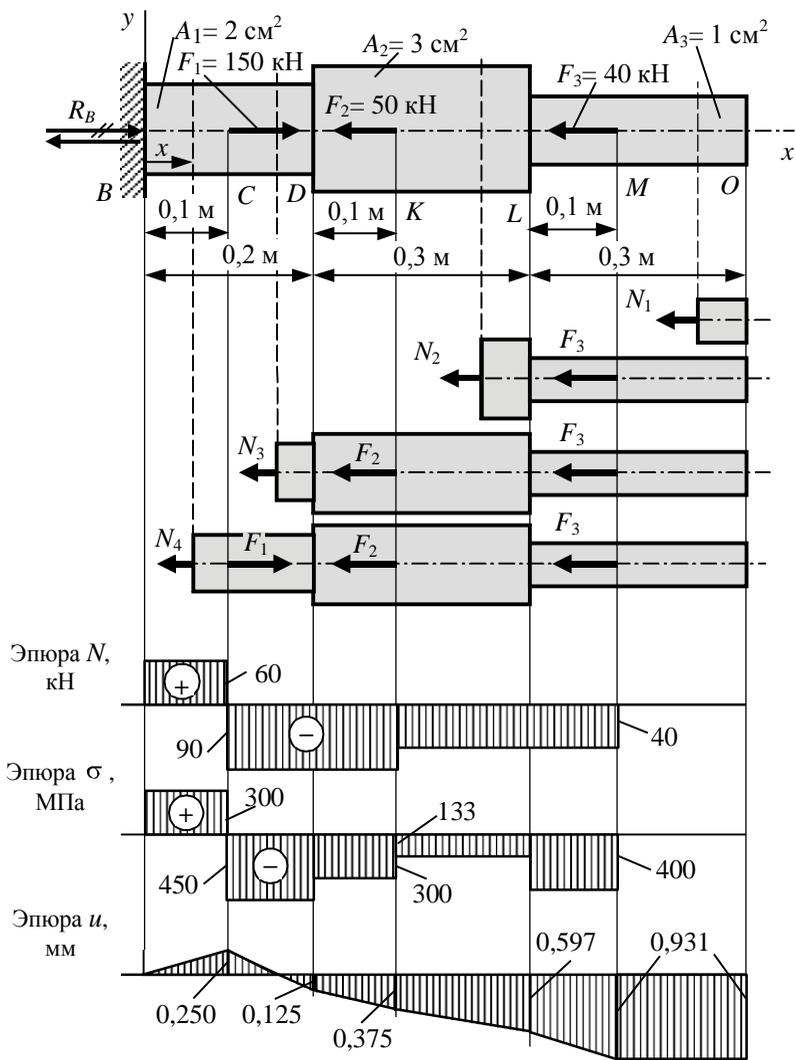


Рис. 1.2. Расчетная схема стержня и эпюры

- **Правило знаков:** при рассмотрении равновесия оставленной части стержня будем всегда предполагать нормальную силу N положительной, т. е. направленной от сечения, независимо от действия внешней нагрузки.

Проведем произвольные сечения на указанных участках OM , MK , KC , CB и рассмотрим равновесие оставленных частей (рис. 1.2):

- *участок OM*

$$\sum x = 0 \quad N_1 = 0; \quad \text{Ответ}$$

- *участок MK*

$$\sum x = 0 \quad -N_2 - F_3 = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = -F_3 = -40 \text{ кН}; \quad \text{Ответ}$$

знак минус показывает, что на участке MK действует не растягивающая сила, а сжимающая;

- *участок KC*

$$\sum x = 0 \quad -N_3 - F_3 - F_2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$N_3 = -F_3 - F_2 = -90 \text{ кН}, \quad \text{Ответ}$$

знак минус показывает, что на участке KC также действует не растягивающая сила, а сжимающая;

- *участок CB*

$$\sum x = 0 \quad -N_4 - F_3 - F_2 + F_1 = 0 \quad \rightarrow$$

$$N_4 = -F_3 - F_2 + F_1 = 60 \text{ кН}, \quad \text{Ответ}$$

знак плюс показывает, что на участке CB действует растягивающая сила.

- **Замечание.** Реакция R_B заделки равна $R_B = N_4 = 60 \text{ кН}$, что совпадает с результатом, полученным ранее из решения уравнения равновесия. Таким образом, если определять значения нормальных сил, оставляя каждый раз после проведения сечения левую часть стержня, то получим те же результаты.

Для построения эпюры N проведем ось абсцисс графика параллельно оси x стержня и отложим в произвольно выбранном масштабе значения нормальных сил по оси ординат y . Так как в пределах одного участка нормальная сила не меняется, то эпюра ограничена прямыми линиями, параллельными оси абсцисс (рис. 1.2). Полученные графики принято штриховать, при этом штриховка должна быть перпендикулярна оси стержня. Каждая линия штриховки в соответ-

ствующем масштабе выражает величину нормальной силы в лежащем против нее поперечном сечении.

Эпюра нормальных напряжений. При построении эпюры нормальных напряжений границами участков являются сечения, в которых приложены внешние сосредоточенные силы и изменяются размеры поперечного сечения. Следовательно, в этом случае имеем шесть участков – OM , ML , LK , KD , DC , CB (рис. 1.2). Напряжения для этих участков получим, разделив значения N на соответствующие площади поперечных сечений стержня, т. е. используем формулу

$$\sigma = N/A:$$

- *участок OM* $\sigma = 0;$
- *участок ML* $\sigma = \frac{-40 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -400 \text{ МПа};$
- *участок LK* $\sigma = \frac{-40 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -133 \text{ МПа};$
- *участок KD* $\sigma = \frac{-90 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -300 \text{ МПа};$
- *участок DC* $\sigma = \frac{-90 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -450 \text{ МПа};$
- *участок CB* $\sigma = \frac{60 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 300 \text{ МПа}.$

Эпюра перемещений. Эпюру перемещений следует строить, начиная от заземленного торца B , для которого $u_B = 0$.

Перемещение произвольного сечения, взятого в пределах участка BC на расстоянии x , равно удлинению части стержня длиной x (см. рис.1.2)

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_4 x}{EA_1}.$$

Полученное выражение показывает, что перемещения возрастают (по мере удаления сечения от заделки) по линейному закону. При

нагружении стержня сосредоточенными силами в пределах каждого участка эпюра перемещений будет линейной; поэтому для ее построения достаточно определить перемещения сечений, совпадающих с границами участков.

Абсолютное перемещение сечения C (u_C) равно перемещению сечения B плюс удлинение участка BC , так как нормальная сила N_4 положительна:

$$u_C = u_B + \Delta l_{BC} = u_B + \frac{N_4 l_{BC}}{EA_1} =$$

$$= 0 + \frac{60 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot 0,1 \text{ м}}{1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 2,50 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,250 \text{ мм.} \quad \text{Ответ}$$

Абсолютное перемещение сечения D равно перемещению сечения C плюс удлинение (или укорочение, если N отрицательно) участка CD :

$$u_D = u_C + \Delta l_{CD} = u_C + \frac{N_3 l_{CD}}{EA_1} = 2,50 \cdot 10^{-4} \text{ м} +$$

$$+ \frac{-90 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot 0,1 \text{ м}}{1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -1,250 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,125 \text{ мм.} \quad \text{Ответ}$$

Абсолютное перемещение сечения K равно перемещению сечения D плюс удлинение (укорочение) участка DK :

$$u_K = u_D + \Delta l_{DK} = u_D + \frac{N_3 l_{DK}}{EA_2} = -1,250 \cdot 10^{-4} \text{ м} +$$

$$+ \frac{-90 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot 0,1 \text{ м}}{1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -3,750 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,375 \text{ мм.} \quad \text{Ответ}$$

Абсолютное перемещение сечения L равно перемещению сечения K плюс удлинение (укорочение) участка KL :

$$u_L = u_K + \Delta l_{KL} = u_K + \frac{N_2 l_{KL}}{EA_2} = -3,750 \cdot 10^{-4} \text{ м} +$$

$$+ \frac{-40 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot 0,2 \text{ м}}{1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -5,972 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx -0,597 \text{ мм.}$$

Ответ

Абсолютное перемещение сечения M равно перемещению сечения L плюс удлинение (укорочение) участка LM :

$$u_M = u_L + \Delta l_{LM} = u_L + \frac{N_1 l_{LM}}{EA_3} = -5,972 \cdot 10^{-4} \text{ м} +$$

$$+ \frac{-40 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot 0,1 \text{ м}}{1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -9,305 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx -0,931 \text{ мм.}$$

Ответ

Абсолютное перемещение сечения O равно перемещению сечения M плюс удлинение (укорочение) участка MO

$$u_O = u_M + \Delta l_{MO} = u_M + \frac{N_1 l_{MO}}{EA_3} =$$

$$= -9,305 \cdot 10^{-4} \text{ м} + 0 = -9,305 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx -0,931 \text{ мм.}$$

Ответ

Построенная по полученным данным эпюра перемещений показана на рис. 1.2.

Вычисление перемещения свободного торца O стержня на основе принципа независимости действия сил. На основе принципа независимости действия сил перемещение свободного торца u_O стержня от нагрузок F_1 , F_2 и F_3 равно сумме перемещений $u_O(F_1)$, $u_O(F_2)$, $u_O(F_3)$ от действия каждой силы в отдельности, т. е.

$$u_O = u_O(F_1) + u_O(F_2) + u_O(F_3).$$

Вычисляем перемещения $u_O(F_1)$, $u_O(F_2)$, $u_O(F_3)$, u_O :

$$u_O \text{ } F_1 = \frac{F_1 l_{BC}}{EA_1} =$$

$$= \frac{150 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot 0,1 \text{ м}}{1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 6,250 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,625 \text{ мм},$$

сила F_1 вызывает деформацию растяжения, поэтому в расчете поставлен знак плюс;

$$u_O F_2 = \frac{-F_2 l_{DK}}{EA_2} + \frac{-F_2 l_{BD}}{EA_1} = \frac{-50 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot 0,1 \text{ м}}{1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} +$$

$$+ \frac{-50 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot 0,2 \text{ м}}{1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \approx -5,556 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx -0,556 \text{ мм};$$

сила F_2 вызывает деформацию сжатия, поэтому в расчете поставлен знак минус;

$$u_O F_3 = \frac{-F_3 l_{LM}}{EA_3} + \frac{-F_3 l_{DL}}{EA_2} + \frac{-F_3 l_{BD}}{EA_1} =$$

$$= \frac{-40 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot 0,1 \text{ м}}{1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} + \frac{-40 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot 0,3 \text{ м}}{1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} +$$

$$+ \frac{-40 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot 0,2 \text{ м}}{1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -9,999 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx -1,00 \text{ мм};$$

сила F_3 вызывает деформацию сжатия, поэтому в расчете поставлен знак минус;

$$u_O = u_O(F_1) + u_O(F_2) + u_O(F_3) =$$

$$= 0,625 - 0,556 - 1,00 = -0,931 \text{ мм}. \quad \text{Ответ}$$

Заметим, что полученный результат совпадает с результатом, полученным при построении полной эпюры перемещений (см. рис. 1.2).

Проверка прочности стержня. В связи с тем, что стержень изготовлен из материала, имеющего разные пределы прочности при рас-

тяжении и сжатии, проверка прочности проводится для участков, испытывающих растяжение и сжатие. При этом выделяются участки, имеющие наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения (рис. 1.2, эпюра σ):

- участок BC – $\sigma_{\max p} = 300$ МПа (растяжение),
- участок CD – $\sigma_{\max c} = 450$ МПа (сжатие).

Вычисляем допускаемые напряжения:

- при растяжении – $\sigma_p = \sigma_{Bp} / n = 320/2 = 160$ МПа,
- при сжатии – $\sigma_c = \sigma_{Bc} / n = 1200/2 = 600$ МПа.

Стержень считается прочным, если выполняется условие прочности

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Для заданного стержня имеем:

- участок BC (растяжение):

$$\sigma_{\max p} = 300 \text{ МПа} > \sigma_p = 160 \text{ МПа}, \quad \text{Ответ}$$

т. е. прочность стержня на растяжение недостаточная;

- участок CD (сжатие):

$$\sigma_{\max c} = 450 \text{ МПа} < \sigma_c = 600 \text{ МПа}, \quad \text{Ответ}$$

т. е. стержень при сжатии имеет достаточную прочность.

Так как условие прочности стержня на растяжение не выполняется, то в целом прочность стержня недостаточна.

.....

Задача
2

Расчет статически неопределимого ступенчатого стержня

Для стального (чугунного) стержня (рис. 1.3) определить:

- 1) коэффициент запаса прочности;
- 2) перемещение сечения 1-1 стержня.

При решении задачи для всех вариантов принять следующие данные (см. таблицу).

Сила F	Площадь поперечного сечения A	Длина участка стержня a	Модуль продольной упругости E	
			сталь	чугун
кН	м^2	м	МПа	
100	$2 \cdot 10^{-3}$	0,5	$2 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^5$

Остальные данные, необходимые для решения задачи, выбрать в табл. 1.2 в соответствии с заданным вариантом.

Таблица 1.2

Исходные данные к задаче 2

Номер строки	Схема по рис. 1.3	Сила F_i		Площадь A_i		Материал стержня	Предельные напряжения		
		F_1	F_2	A_1	A_2		Предел текучести σ_T , МПа	Предел прочности σ_B , МПа	
								растяжение	сжатие
1	I	F	$2F$	A	$2A$	Сталь 20	250	–	–
2	II	$3F$	F	A	A	Сталь 30	300	–	–
3	III	$2F$	F	$2A$	A	Чугун СЧ 12	–	120	500
4	IV	F	$3F$	A	$2A$	Чугун СЧ 38	–	380	1400
5	V	$3F$	F	F	F	Сталь 40	340	–	–
6	VI	F	$2F$	$2A$	A	Чугун СЧ 28	–	280	1000
7	VII	$2F$	$3F$	$2A$	A	Сталь 50	380	–	–
8	VIII	$3F$	F	A	$2A$	Чугун СЧ 12	–	120	500
9	IX	F	$2F$	$2A$	A	Сталь 40ХН	900	–	–
0	X	F	$3F$	A	$2A$	Сталь 40Х	800	–	–
		е		д		г			

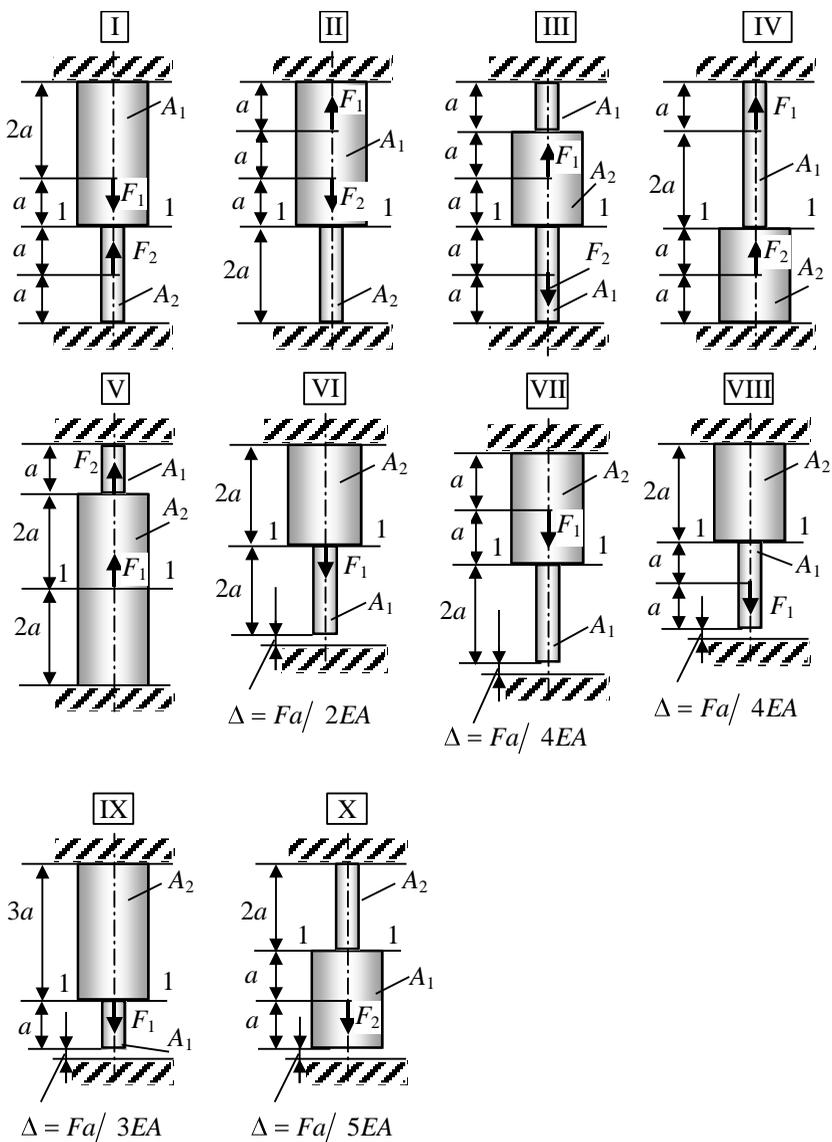


Рис. 1.3. Расчетные схемы к задаче 2

А. СТЕРЖНЕВАЯ СИСТЕМА БЕЗ ЗАЗОРА

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для стального (чугунного) стержня (рис. 1.4, а) определить:

- 1) коэффициент запаса прочности;
- 2) перемещение сечения 1-1 стержня.

При решении задачи принять:

$$F = 60 \text{ кН}, \quad A = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \quad a = 0,8 \text{ м}, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Исходные данные к задаче

F_1	F_2	A_1	A_2	Материал стержня	Предел текучести σ_T , МПа
$2F$	F	A	$2A$	Сталь Ст3	240

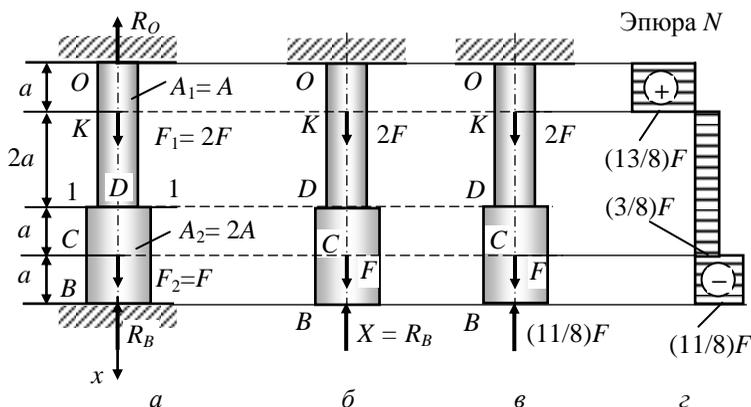


Рис. 1.4. Расчетная схема (а) и результаты расчета (б, в, з)

Решение

Определение степени статической неопределенности системы.

Нагрузка от двух сил F_1 и F_2 воспринимается частично верхней заделкой и частично нижней. Для определения двух реакций в заделках (рис. 1.4, а) используем одно уравнение равновесия (имеем систему сил, направленных по одной прямой):

$$\sum x = 0 \quad -R_B + F + 2F - R_O = 0 \rightarrow R_B + R_O = 3F.$$

Так как имеем одно уравнение равновесия и два неизвестных усилия R_B и R_O , то система один раз статически неопределима. Для раскрытия статической неопределимости системы необходимо дополнительно к уравнению равновесия составить уравнение перемещений, учитывающее действительные условия деформирования системы.

Уравнение перемещений. Для составления уравнения перемещений отбросим одну из заделок, например, нижнюю. Ее действие на стержень заменим соответствующей силой реакции R_B . В результате получим стержень, защемленный одним концом (статически определимая система) и нагруженный, кроме заданных сил F_1 и F_2 , неизвестной пока силой $X = R_B$ (рис. 1.4, б).

По условию задачи перемещение сечения B равно нулю, так как это сечение жестко закреплено:

$$u_B = 0.$$

Применив принцип независимости действия сил, представим уравнение перемещений $u_B = 0$ в виде

$$u_B = u_B(X) + u_B(F_2) + u_B(F_1) = 0,$$

т. е. перемещение от совместного действия всех сил равно алгебраической сумме перемещений от действия каждой силы в отдельности:

$$u_B \quad X = -\left(\frac{X \cdot 2a}{E \cdot 2A} + \frac{X \cdot 3a}{EA}\right) - \text{сумма укорочений участков } BD \text{ и } DO;$$

$$u_B \quad F_2 = \frac{Fa}{E \cdot 2A} + \frac{F \cdot 3a}{EA} - \text{сумма удлинений участков } CD, DO;$$

$$u_B \quad F_1 = \frac{2Fa}{EA} - \text{удлинение участка } KO.$$

Подставив найденные значения $u_B(X)$, $u_B(F_2)$, $u_B(F_1)$ в уравнение перемещений, получим

$$-\left(\frac{X \cdot 2a}{E \cdot 2A} + \frac{X \cdot 3a}{EA}\right) + \frac{Fa}{E \cdot 2A} + \frac{F \cdot 3a}{EA} + \frac{2Fa}{EA} = 0,$$

откуда $X = (11/8)F$.

Ответ

Из уравнения равновесия получаем $R_O = (13/8)F$.

Эпюра нормальных сил. После определения реакции $X = R_B$ стержень представляет собой статически определимый стержень, нагруженный известными силами (рис. 1.4, в). Поэтому методика построения эпюры нормальных сил ничем не отличается от рассмотренной методики в задаче 1. Эпюра нормальных сил представлена на рис. 1.4, г.

Коэффициент запаса прочности. Коэффициент запаса прочности для стального стержня определяется по формуле

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{max}}}.$$

Наибольшее нормальное напряжение в случае стального стержня вычисляется по формуле

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N_{\text{max}}}{A} = \frac{13/8 F}{A_1} = \frac{13 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{8 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 32,5 \text{ МПа},$$

где $N_{\text{max}} = (13/8)F$ – наибольшее по абсолютной величине значение нормальной силы с эпюры N .

Коэффициент запаса прочности для стального стержня

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{240}{32,5} = 7,38. \quad \text{Ответ}$$

■ **Замечание.** Коэффициент запаса прочности для чугунного стержня определяется по формуле

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}},$$

где принимают для чугунного стержня $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{B_p}$, т. е. пределу прочности на растяжение или $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{B_c}$, т. е. пределу прочности

на сжатие. Коэффициент запаса прочности определяется для участков стержня, испытывающих:

$$\text{растяжение} - n_p = \frac{\sigma_{вp}}{\sigma_p \max}, \quad \text{сжатие} - n_c = \frac{\sigma_{вс}}{\sigma_c \max}.$$

Для вычисления $\sigma_p \max$ и $\sigma_c \max$ с эпюры N для участков стержня, испытывающих растяжение, выбирается $N_p \max$, а сжатие – $N_c \max$. Далее из двух коэффициентов выбирают наименьшее значение.

Перемещение сечения 1-1. При вычислении перемещения сечения 1-1 используется эпюра N и методика вычисления перемещений, изложенная в задаче 1.

Перемещение сечения K :

$$u_K = \Delta l_{OK} = \frac{N_{OK} l_{OK}}{EA_1} = \frac{13/8 Fa}{EA} = \frac{13 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 13 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Перемещение сечения 1-1:

$$u_{1-1} = u_K + \Delta l_{KD} = u_K + \frac{N_{KD} l_{KD}}{EA_1} = 13 \cdot 10^{-5} + \frac{-3/8 F 2a}{EA} =$$

$$= 13 \cdot 10^{-5} + \frac{-3 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 0,8}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Ответ

Б. СТЕРЖНЕВАЯ СИСТЕМА С ЗАЗОРОМ

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для стального (чугунного) стержня (рис. 1.5, а) определить:

- 1) коэффициент запаса прочности;
- 2) перемещение сечения 1-1 стержня.

При решении задачи принять:

$$F = 60 \text{ кН}, \quad A = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \quad a = 0,8 \text{ м}, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Исходные данные к задаче

F_1	F_2	A_1	A_2	Материал стержня	Предел текучести σ_T , МПа
$2F$	F	A	$2A$	Сталь Ст3	240

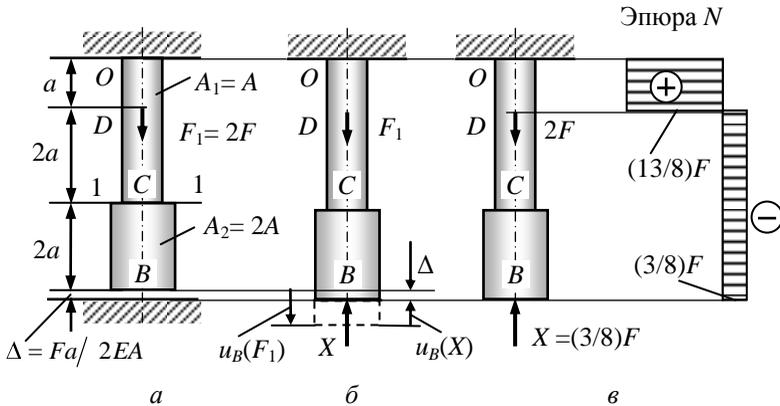


Рис. 1.5. Расчетная схема (а) и результаты решения (б, в)

Решение

Варианты работы заданной системы. В зависимости от величины зазора возможны два варианта работы заданной системы.

1. При нагружении стержня заданной системой сил (рис.1.5, а) сечение B не соприкасается с заделкой, т. е. зазор не закрывается. Стержень представляет в этом случае статически определимую систему. То же будет при условии, что сечение B и заделка лишь сомкнутся, но сил взаимодействия между ними не возникнет.

2. При нагружении стержня зазор закрывается и между стержнем и заделкой возникают силы взаимодействия. В этом случае система окажется статически неопределимой – получается стержень, жестко защемленный обоими концами; из предыдущего (см. задачу А. СТЕРЖНЕВАЯ СИСТЕМА БЕЗ ЗАЗОРА) известно, что такая система статически неопределима.

Для выяснения вопроса о том, какой из двух указанных вариантов работы системы имеет место в действительности, определим пе-

ремещение сечения B , полагая, что заделка отсутствует, и сравним с величиной зазора Δ :

$$u_B F_1 = \frac{F_1 a}{EA_1} = \frac{2Fa}{EA} > \Delta = \frac{Fa}{2EA},$$

т. е. зазор закрывается и между стержнем и заделкой возникает сила взаимодействия, которую обозначим X . Для определения силы X составим уравнение перемещений.

Уравнение перемещений. Для составления уравнения перемещений рассмотрим стержень, нагруженный заданной силой $F_1 = 2F$ и силой X (рис. 1.5, б). На рис. 1.5, б штриховыми линиями показана деформация стержня.

Уравнение перемещений для рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

$$u_B F_1 + u_B X = \Delta.$$

Составим выражения для определения искомых перемещений:

$$u_B F_1 = \frac{F_1 a}{EA_1} = \frac{2Fa}{EA} \quad (\text{растяжение}),$$

$$u_B X = -\left(\frac{X}{E} \frac{2a}{2A} + \frac{X}{EA} \frac{3a}{EA} \right) \quad (\text{сжатие}).$$

Подставив эти значения в уравнение перемещений, с учетом $\Delta = \frac{Fa}{2EA}$ получим:

$$\frac{2Fa}{EA} - \left(\frac{X}{E} \frac{2a}{2A} + \frac{X}{EA} \frac{3a}{EA} \right) = \frac{Fa}{2EA},$$

откуда $X = (3/8)F$.

Ответ

Эпюра нормальных сил. Методика построения эпюры нормальных сил аналогична методике, рассмотренной в задаче 1. Эпюра нормальных сил представлена на рис. 1.5, в.

Коэффициент запаса прочности. Коэффициент запаса прочности для стального стержня определяется по формуле

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{\sigma_{\text{T}}}{\sigma_{\text{max}}}.$$

Наибольшее нормальное напряжение в случае стального стержня вычисляется по формуле

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N_{\text{max}}}{A} = \frac{13/8 F}{A_1} = \frac{13 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{8 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 32,5 \text{ МПа},$$

где $N_{\text{max}} = (13/8)F$ – наибольшее по абсолютной величине значение нормальной силы с эпюры N .

Коэффициент запаса прочности

$$n = \frac{\sigma_{\text{T}}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{240}{32,5} = 7,38. \quad \text{Ответ}$$

■ **Замечание.** Коэффициент запаса прочности для чугунного стержня определяется по формуле

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}},$$

где принимают для чугунного стержня $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{вp}}$ (пределу прочности на растяжение) или $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{вс}}$ (пределу прочности на сжатие). Коэффициент запаса прочности определяется для участков стержня, испытывающих:

$$\text{растяжение} - n_{\text{p}} = \frac{\sigma_{\text{вp}}}{\sigma_{\text{p max}}}, \quad \text{сжатие} - n_{\text{c}} = \frac{\sigma_{\text{вс}}}{\sigma_{\text{c max}}}.$$

Для вычисления σ_{max} с эпюры N берется N_{max} для участков стержня, испытывающих как растяжение, так и сжатие. Далее из двух коэффициентов выбирают наименьшее значение.

Перемещение сечения 1-1. При вычислении перемещения сечения 1-1 используется эпюра N и методика вычисления перемещений, изложенная в задаче 1.

Перемещение сечения D :

$$u_D = \Delta l_{OD} = \frac{N_{OD} l_{OD}}{EA_1} = \frac{13/8 Fa}{EA} = \frac{13 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 13 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Перемещение сечения 1-1:

$$u_{1-1} = u_D + \Delta l_{DC} = u_D + \frac{N_{DC} l_{DC}}{EA_1} = 13 \cdot 10^{-5} + \frac{-3/8 F 2a}{EA} =$$
$$= 13 \cdot 10^{-5} - \frac{3 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 0,8}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Ответ

Задача

3

**Расчет
статически неопределимой
стержневой системы**

Плоская стержневая система нагружена в соответствии с заданной расчетной схемой (рис. 1.6). Стержни изготовлены из разных материалов, механические характеристики которых приведены в табл. 1.3. Исходные данные приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.3

Материал стержня и его механические характеристики

Но- мер стерж- ня	Материал	Модуль упругости	Предел прочности	Предел текучести	Нормативный коэффициент запаса прочности	
		$E, 10^5$	σ_B	σ_T	$[n_B]$	$[n_T]$
		МПа			—	
1	Сталь Ст3	2,0	380	220	—	1,5
2	Сплав Д16Т	0,7	470	320	3,5	—
3	Латунь Л68	1,0	300	—	4,0	—

Таблица 1.4

Исходные данные к задаче 3

Номер строки	Схема	Сила F , кН	Длина l , м	Отношение площадей поперечного сечения стержней $A_1: A_2: A_3$	Угол, град	
					α	β
1	1	10	1,0	1:4:3	30	60
2	2	20	1,1	2:1:4	40	50
3	3	30	1,2	3:2:1	50	40
4	4	40	1,3	4:3:1	60	30
5	5	10	1,4	1:3:2	30	60
6	6	20	1,5	2:1:3	40	50
7	7	30	1,6	3:4:1	50	40
8	8	40	1,7	4:2:3	45	45
9	9	20	1,8	1:2:4	40	50
0	10	40	1,0	2:4:3	30	60
	е	д	г	е	д	

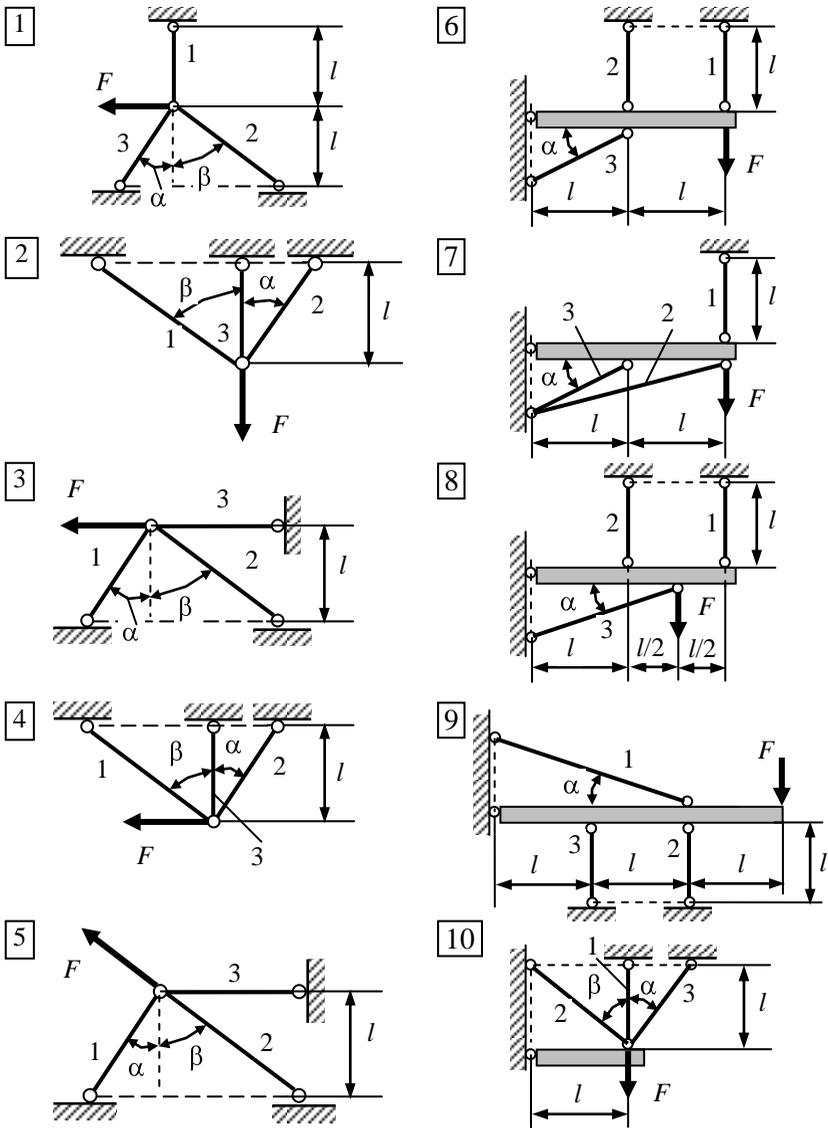


Рис. 1.6. Расчетные схемы к задаче 3

Требуется определить:

- 1) площади поперечных сечений стержней;
- 2) коэффициент запаса прочности каждого стержня.

Указание. Затемненные на расчетных схемах элементы конструкции считать абсолютно жесткими.

А. СТЕРЖНЕВАЯ СИСТЕМА БЕЗ ЖЕСТКОГО ЭЛЕМЕНТА

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

Плоская стержневая система нагружена в соответствии с заданной расчетной схемой (рис. 1.7, а). Стержни изготовлены из разных материалов, механические характеристики которых приведены в табл. 1.3. Исходные данные приведены в табл. 1.5.

Требуется определить:

- 1) площади поперечных сечений стержней;
- 2) коэффициент запаса прочности каждого стержня.

Таблица 1.5

Исходные данные к задаче

Сила F , кН	Длина l , м	Отношение площадей поперечного сечения стержней $A_1:A_2:A_3$	Угол, град	
			α	β
10	1,0	1:4:2	30	60

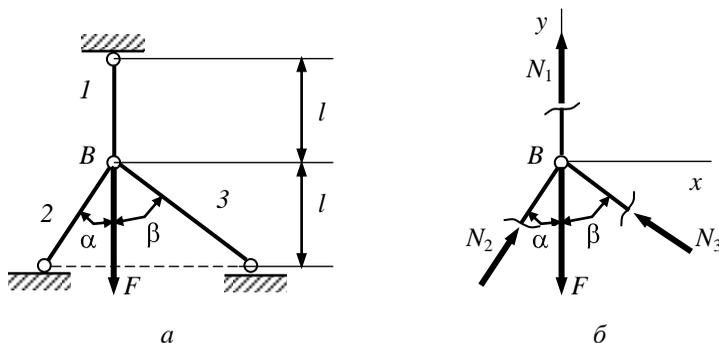


Рис. 1.7. Стержневая система (а) и ее расчетная схема (б)

Решение

Уравнения равновесия. Рассекаем стержни и рассматриваем равновесие узла B под действием силы F и усилий в стержнях (рис. 1.7, б). Первоначально предполагаем, что стержень 1 растянут, а стержни 2, 3 сжаты.

Составляем уравнения равновесия. Начало системы координат $xу$ поместим в узле B . Для узла B :

$$\sum x = 0 \quad N_2 \sin \alpha - N_3 \sin \beta = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = 1,732N_3; \quad (1)$$

$$\sum y = 0 \quad N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \beta - F = 0 \quad \rightarrow$$
$$N_1 + 0,866N_2 + 0,5N_3 = F. \quad (2)$$

Неизвестных усилий – три (N_1, N_2, N_3), число уравнений статики для плоской системы сходящихся сил – два, следовательно, система один раз статически неопределима.

Уравнение перемещений. Составим уравнение перемещений, выражающее связь между изменениями длин стержней, которая графически изображается *диаграммой перемещений*. Диаграмма перемещений может строиться в произвольном масштабе, не связанном с масштабом чертежа самой стержневой системы.

■ При построении диаграммы перемещений предположение о характере деформации необходимо согласовать с направлением усилий в стержнях на силовой диаграмме (рис. 1.7, б). Это означает: если при составлении уравнений равновесия полагают стержень растянутым, то на диаграмме перемещений этот стержень должен иметь удлинение, если сжатым, то – укорочение.

Ранее мы предположили, что стержень 1 растянут, а стержни 2, 3 сжаты (рис. 1.7, б). Следовательно, шарнир B опустится вниз, допустим, вправо от линии действия нагрузки в точку B^* (рис. 1.8). Из точки B^* опускаем перпендикуляры на направления стержней. Здесь обозначено:

отрезок $BB_1 = \Delta l_1$ – удлинение стержня 1,

отрезок $BB_2 = \Delta l_2$ – укорочение стержня 2,

отрезок $BB_3 = \Delta l_3$ – укорочение стержня 3.

Обозначим через u , v проекции вектора перемещений узла $B B^*$ на оси x , y . Тогда из рис. 1.8 получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= v, \\ \Delta l_2 &= v \cos \alpha - u \sin \alpha, \\ \Delta l_3 &= v \cos \beta + u \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Исключая u , v из (3), с учетом $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ приходим к следующему уравнению перемещений:

$$0,866 \Delta l_2 + 0,5 \Delta l_3 = \Delta l_1. \quad (4)$$

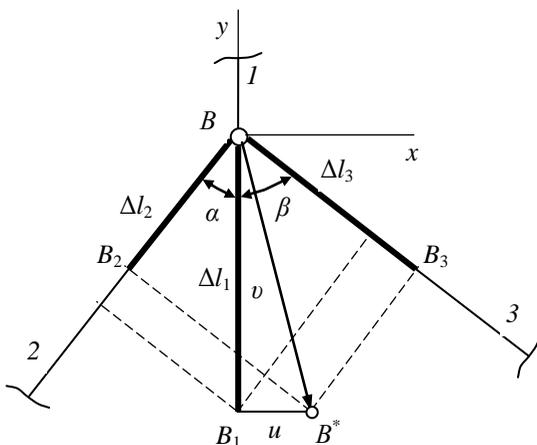


Рис. 1.8. Предполагаемая диаграмма перемещений

Выразим удлинения Δl_i ($i = 1, 2, 3$) через усилия в стержнях, используя формулу

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}.$$

Учитывая заданное соотношение площадей (табл. 1.5), принимаем

$$A_2 = 4A_1, \quad A_3 = 2A_1.$$

Из табл. 1.3 следует, что

$$E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad E_2 = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad E_3 = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Длины стержней определяются из рис. 1.6, а

$$l_1 = l, \quad l_2 = l/\cos\alpha, \quad l_3 = l/\cos\beta.$$

Подставляя полученные выражения в (4), получаем с учетом $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $l = 1,0$ м уравнение перемещений, выраженное через внутренние силы N_i :

$$0,7N_2 + N_3 = N_1. \quad (5)$$

Усилия в стержнях. Система уравнений (1), (2), (5) позволяет определить усилия в стержнях. Эта система будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} N_2 &= 1,732N_3, \\ N_1 + 0,866N_2 + 0,5N_3 &= F, \\ 0,7N_2 + N_3 &= N_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Решая систему (6) с учетом $F = 10$ кН, получаем:

$$N_1 = 5,26 \text{ кН (стержень растянут);}$$

$$N_2 = 4,12 \text{ кН (стержень сжат);}$$

$$N_3 = 2,38 \text{ кН (стержень сжат).}$$

Определение площадей поперечных сечений стержней при расчете по допускаемым напряжениям.

$$A_i = \frac{N_i}{\sigma_i}, \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$\sigma_1 = \sigma_T / n_T = 220/1,5 = 147 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_2 = \sigma_B / n_B = 470/3,5 = 134 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_3 = \sigma_B / n_B = 300/4,0 = 75 \text{ МПа.}$$

Площади поперечных сечений стержней с учетом заданного соотношения площадей $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 4 : 2$ или $A_1 = A$, $A_2 = 4A$, $A_3 = 2A$:

$$A_1 = A \geq \frac{N_1}{\sigma_1} = \frac{5,26 \cdot 10^{-3}}{147} = 0,358 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \rightarrow A \geq 0,358 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_2 = 4A \geq \frac{N_2}{\sigma_2} = \frac{4,12 \cdot 10^{-3}}{134} = 0,307 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \rightarrow A \geq 0,077 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_3 = 2A \geq \frac{N_3}{\sigma_3} = \frac{2,38 \cdot 10^{-3}}{75} = 0,317 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \rightarrow A \geq 0,159 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

За допускаемое значение A принимаем максимальное из всех полученных $A = 0,358 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. Так как максимум A реализуется для стержня I , то напряжение в нем будет равно допускаемому, а напряжения в других стержнях будут меньше допускаемых. Действительные площади стержней:

$$A_1^* = A = 0,358 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad \text{Ответ}$$

$$A_2^* = 4A = 1,432 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad \text{Ответ}$$

$$A_3^* = 2A = 0,716 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2. \quad \text{Ответ}$$

Построение действительной диаграммы перемещений. Для проверки правильности полученного решения строим действительную диаграмму перемещений (рис. 1.9). Предварительно найдем длины и удлинения (укорочения) стержней:

$$l_1 = l = 1 \text{ м}; \quad l_2 = l/\cos\alpha = 1/0,866 = 1,155 \text{ м};$$

$$l_3 = l/\cos\beta = 1/0,5 = 2,0 \text{ м};$$

$$\Delta l_1 = \frac{5,26 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,358 \cdot 10^{-4}} = 7,346 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx 0,735 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{4,12 \cdot 10^{-3} \cdot 1,155}{0,7 \cdot 10^5 \cdot 1,432 \cdot 10^{-4}} = 4,746 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx 0,475 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{2,38 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{1 \cdot 10^5 \cdot 0,716 \cdot 10^{-4}} = 6,648 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx 0,665 \text{ мм}.$$

Для построения действительной диаграммы перемещений отложим от точки B по направлениям соответствующих стержней удлинение Δl_1 , укорочения Δl_2 , Δl_3 и получим точки B_1 , B_2 , B_3 соответственно (рис.1.9). Если теперь из точек B_1 , B_2 , B_3 восстановить перпендику-

ляры к стержням 1, 2, 3 соответственно, то эти перпендикуляры должны пересечься в одной точке B^* .

Определение коэффициентов запаса прочности стержней. Вычислим действительные коэффициенты запаса прочности n_i каждого стержня:

$$n_1 = \frac{\sigma_T}{\sigma_1} = \frac{\sigma_T}{N_1/A_1} = \frac{220}{5,26 \cdot 10^{-3} / 0,358 \cdot 10^{-4}} = 1,5 = [n_T]_1;$$

Ответ

$$n_2 = \frac{\sigma_B}{\sigma_2} = \frac{\sigma_B}{N_2/A_2} = \frac{470}{4,12 \cdot 10^{-3} / 1,432 \cdot 10^{-4}} = 16,3 > [n_B]_2 = 3,5;$$

Ответ

$$n_3 = \frac{\sigma_B}{\sigma_3} = \frac{\sigma_B}{N_3/A_3} = \frac{300}{2,38 \cdot 10^{-3} / 0,716 \cdot 10^{-4}} = 9,0 > [n_B]_3 = 4,0.$$

Ответ

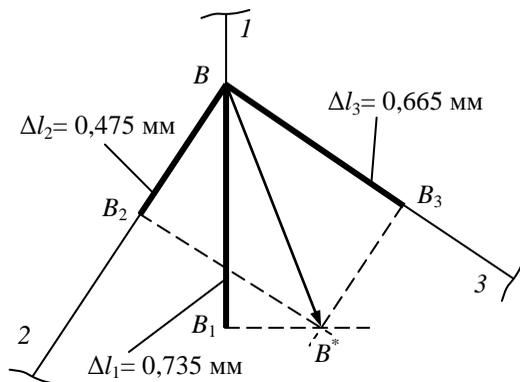


Рис. 1.9. Действительная диаграмма перемещений

Б. СТЕРЖНЕВАЯ СИСТЕМА С ЖЕСТКИМ ЭЛЕМЕНТОМ

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

Плоская стержневая система нагружена в соответствии с заданной расчетной схемой (рис. 1.10). Стержни изготовлены из разных материалов, механические характеристики которых приведены в табл. 1.3. Исходные данные к задаче приведены в табл. 1.6.

Требуется определить:

- 1) площади поперечных сечений стержней;
- 2) коэффициент запаса прочности каждого стержня.

Таблица 1.6

Исходные данные к задаче

Сила F , кН	Длина l , м	Отношение площадей поперечного сечения стержней $A_1:A_2:A_3$	Угол, град	
			α	β
10	1,0	1:4:2	30	60

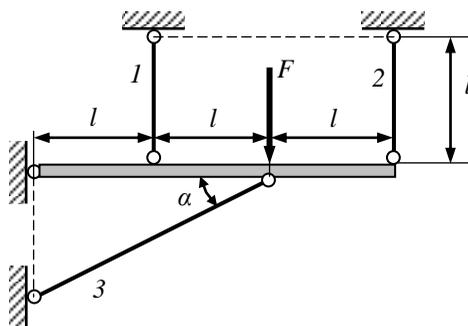


Рис. 1.10. Стержневая система с жестким элементом

Решение

Уравнения равновесия. Выбираем систему координат x , y (рис. 1.10). Рассекаем стержни и рассматриваем равновесие жестко-

го (твёрдого) тела под действием силы F , усилий в стержнях N_i ($i = 1, 2, 3$) и реакций в шарнире Y_B, X_B (рис. 1.11). Предполагаем, что стержни 1, 2 растянуты, стержень 3 сжат.

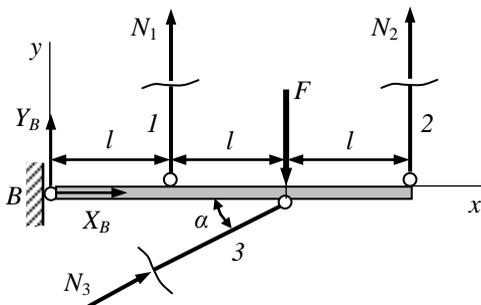


Рис. 1.11. Расчетная схема системы для определения усилий в стержнях

Для плоской системы можно составить три уравнения равновесия:

$$\sum x = 0 \quad X_B + N_3 \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum y = 0 \quad Y_B + N_1 + N_2 + N_3 \sin \alpha - F = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_B = 0 \quad N_1 l + N_2 \cdot 3l + N_3 \sin \alpha \cdot 2l - F \cdot 3l = 0 \rightarrow$$

$$N_1 + 3N_2 + N_3 = 2F. \quad (3)$$

Имеем число неизвестных – пять (N_1, N_2, N_3, Y_B, X_B), число уравнений статики – три. Следовательно, система два раза статически неопределима. Необходимо дополнительно составить два уравнения перемещений.

Уравнения перемещений. Составим уравнения перемещений, выражающие связи между изменениями длин стержней, которые графически изображаются диаграммой перемещений. Для этого дадим системе возможное перемещение, совместимое с наложенными ограничениями (связями). В рассматриваемом случае – это поворот жесткого элемента вниз вокруг шарнира B (рис.1.12). В этом случае диаграмма перемещений находится в соответствии с силовой диаграммой (рис. 1.11) – стержни 1, 2 растянуты, а стержень 3 сжат. Для

определения укорочения стержня 3 из точки C_1 опускаем перпендикуляр на направление стержня 3 (рис. 1.12). Здесь обозначено:

- отрезок $KK_1 = \Delta l_1$ – удлинение стержня 1,
- отрезок $DD_1 = \Delta l_2$ – удлинение стержня 2,
- отрезок $CC_2 = \Delta l_3$ – укорочение стержня 3.

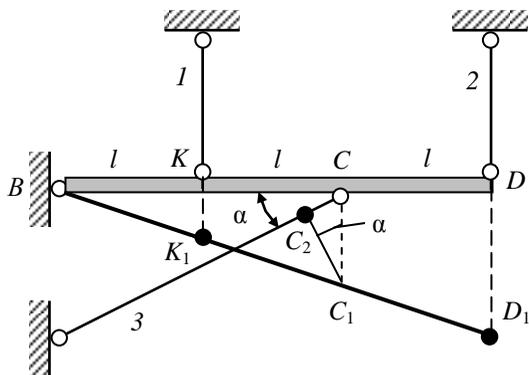


Рис. 1.12. Предполагаемая диаграмма перемещений

Учитывая заданные размеры, из геометрических соображений имеем:

$$\frac{KK_1}{DD_1} = \frac{1}{3}, \quad \frac{CC_1}{DD_1} = \frac{2}{3}. \quad (4)$$

Из рис. 1.12 следует:

$$\Delta l_1 = KK_1, \quad \Delta l_2 = DD_1, \quad \Delta l_3 = CC_2 = CC_1 \sin \alpha. \quad (5)$$

Из (4) с учетом (5) получим два уравнения перемещений:

$$\Delta l_2 = 3\Delta l_1, \quad 3\Delta l_3 = 2\Delta l_2 \sin \alpha. \quad (6)$$

Выразим удлинения (укорочения) Δl_i ($i = 1, 2, 3$) через усилия в стержнях, используя формулу

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}.$$

Учитывая заданное соотношение площадей (табл. 1.6), принимаем

$$A_2 = 4A_1, \quad A_3 = 2A_1.$$

Из табл. 1.3 следует, что

$$E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad E_2 = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad E_3 = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Длины стержней определяются из рис. 1.10:

$$l_1 = l, \quad l_2 = l, \quad l_3 = 2l/\cos\alpha.$$

Подставляя полученные выражения в (6) с учетом $\alpha = 30^\circ$, $l = 1,0$ м, получаем уравнения перемещений, выраженные через внутренние силы N_i :

$$0,238N_2 = N_1, \quad N_3 = 0,103N_2. \quad (7)$$

Усилия в стержнях. Для определения усилий N_i в стержнях используем систему уравнений, состоящую из уравнений (3), (7). Эта система будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} N_1 + 3N_2 + N_3 &= 2F, \\ 0,238N_2 &= N_1, \\ N_3 &= 0,103N_2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Решая систему (8), с учетом $F = 10$ кН, получаем:

$$N_1 = 1,425 \text{ кН (стержень растянут);}$$

$$N_2 = 5,986 \text{ кН (стержень растянут);}$$

$$N_3 = 0,617 \text{ кН (стержень сжат).}$$

Определение площадей поперечных сечений стержней при расчете по допускаемым напряжениям.

$$A_i = \frac{N_i}{\sigma_i}, \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$\sigma_1 = \sigma_T / n_T = 220/1,5 = 147 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \sigma_B / n_B = 470/3,5 = 134 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \sigma_B / n_B = 300/4,0 = 75 \text{ МПа}.$$

Площади поперечных сечений стержней с учетом заданного соотношения площадей $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 4 : 2$ или $A_1 = A$, $A_2 = 4A$, $A_3 = 2A$:

$$A_1 = A \geq \frac{N_1}{\sigma_1} = \frac{1,425 \cdot 10^{-3}}{147} = 0,969 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2; \rightarrow A \geq 0,969 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2;$$

$$A_2 = 4A \geq \frac{N_2}{\sigma_2} = \frac{5,986 \cdot 10^{-3}}{134} = 4,467 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2; \rightarrow A \geq 1,117 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2;$$

$$A_3 = 2A \geq \frac{N_3}{\sigma_3} = \frac{0,617 \cdot 10^{-3}}{75} = 0,823 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2; \rightarrow A \geq 0,411 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

За допускаемое значение A принимаем максимальное из всех полученных $A = 1,117 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$. Так как максимум A реализуется для стержня 2, то напряжение в нем будет равно допускаемому, а напряжения в других стержнях будут меньше допускаемых. Действительные площади стержней:

$$A_1^* = A = 1,117 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2; \quad \text{Ответ}$$

$$A_2^* = 4A = 4,468 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2; \quad \text{Ответ}$$

$$A_3^* = 2A = 2,234 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2. \quad \text{Ответ}$$

Построение действительной диаграммы перемещений. Для проверки правильности полученного решения строим действительную диаграмму перемещений (рис. 1.13). Предварительно найдем длины и удлинения (укорочения) стержней:

$$l_1 = l = 1 \text{ м}; \quad l_2 = l = 1 \text{ м}; \quad l_3 = 2l/\cos\alpha = 2 \cdot 1/0,866 = 2,31 \text{ м};$$

$$\Delta l_1 = \frac{1,425 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 1,117 \cdot 10^{-5}} = 0,638 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,638 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{5,986 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{0,7 \cdot 10^5 \cdot 4,468 \cdot 10^{-5}} = 1,914 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,914 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{0,617 \cdot 10^{-3} \cdot 2,31}{1 \cdot 10^5 \cdot 2,234 \cdot 10^{-5}} = 0,638 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,638 \text{ мм}.$$

Для построения действительной диаграммы перемещений отложим по направлениям соответствующих стержней удлинения Δl_1 , Δl_2 , укорочение Δl_3 и получим точки K_1 , D_1 , C_2 соответственно (рис. 1.13). Далее из точки C проведем перпендикуляр к жесткому элементу до пересечения с прямой BK_1D_1 – получаем точку C_1 . Если из точки C_1 восстановить перпендикуляр на направление стержня 3,

то перпендикуляр должен пересечь направление стержня 3 в точке C_2 .

Определение коэффициентов запаса прочности стержней. Вычислим действительные коэффициенты запаса прочности n_i каждого стержня:

$$n_1 = \frac{\sigma_T}{\sigma_1} = \frac{\sigma_T}{N_1/A_1} = \frac{220}{1,425 \cdot 10^{-3} / 1,117 \cdot 10^{-5}} = 1,7 > [n_T]_1 = 1,5;$$

Ответ

$$n_2 = \frac{\sigma_B}{\sigma_2} = \frac{\sigma_B}{N_2/A_2} = \frac{470}{5,986 \cdot 10^{-3} / 4,468 \cdot 10^{-5}} = 3,5 = [n_B]_2;$$

Ответ

$$n_3 = \frac{\sigma_B}{\sigma_3} = \frac{\sigma_B}{N_3/A_3} = \frac{300}{0,617 \cdot 10^{-3} / 2,234 \cdot 10^{-5}} = 10,9 > [n_B]_3 = 4,0.$$

Ответ

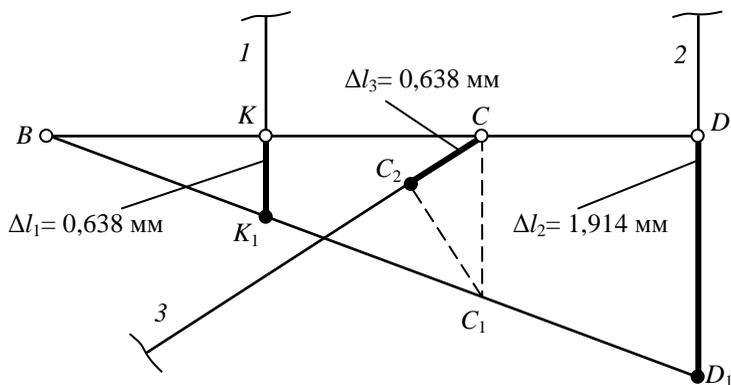


Рис. 1.13. Действительная диаграмма перемещений

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МАТЕРИАЛА В ЛОКАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ. МОДЕЛИ СТАТИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ

Задача

4

**Расчет напряженного
и деформированного состояния,
оценка прочности малого элемента
твердого деформируемого тела**

В окрестности точки твердого деформируемого тела выделен бесконечно малый элемент в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.1). Значения напряжений на площадках параллелепипеда и линейные деформации в направлениях координатных осей приведены в табл. 2.1. При расчете принять:

- модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа;
- коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$;
- предел текучести материала $\sigma_T = 300$ МПа;
- допускаемый коэффициент запаса прочности $[n] = 2$.

Требуется:

- 1) определить:
 - недостающее значение одного из нормальных напряжений;
 - главные напряжения и положение главных площадок; изобразить элемент графически повернутым так, чтобы все его грани стали главными площадками, и показать главные напряжения;
 - наибольшее касательное напряжение;
 - объемную деформацию;
- 2) проверить прочность материала в окрестности рассматриваемой точки тела, используя критерии прочности для пластичных материалов.

Указание. Направления сил, действующих на исходных площадках параллелепипеда, изобразить в соответствии с их знаками для рассматриваемого варианта (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Исходные данные к задаче 4

Номер строки	Напряжение, МПа				Деформация, 10^{-4}		
	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	ϵ_x	ϵ_y	ϵ_z
1	50	-30		-20	4,15		
2	60	50		30		3,70	
3	40	-60		-40			1,50
4		20	-70	20	-0,75		
5		-40	50	-30		-3,20	
6		60	40	40			-1,95
7	-30		80	30	-3,30		
8	50		-60	-20		-1,85	
9	-70		40	40			2,45
0		80	-50	-50	2,25		
	е			г	д		

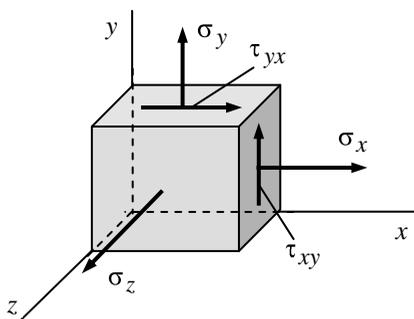


Рис. 2.1. Напряженное состояние в точке к задаче 4

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

В окрестности точки твердого деформируемого тела выделен бесконечно малый элемент в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.1). Значения напряжений на площадках параллелепипеда и линейные деформации в направлениях координатных осей приведены в табл. 2.2.

При расчете принять: модуль упругости материала $E = 2 \times 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, предел текучести материала $\sigma_T = 300$ МПа, допускаемый коэффициент запаса прочности $[n] = 2$.

Таблица 2.2

Исходные данные к задаче

Напряжение, МПа				Деформация, 10^{-4}		
σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	ε_x	ε_y	ε_z
40	30		20	3,50		

Требуется:

1) определить:

- недостающее значение одного из нормальных напряжений;
- главные напряжения и положение главных площадок; изобразить элемент графически повернутым так, чтобы все его грани стали главными площадками, и показать главные напряжения;
- наибольшее касательное напряжение;
- объемную деформацию.

2) проверить прочность материала в окрестности рассматриваемой точки тела, используя критерии прочности для пластичных материалов.

Решение

Расчетная схема. Изображаем малый элемент в соответствии с исходными данными к задаче (рис. 2.2).

Недостающее значение одного из нормальных напряжений. Для определения недостающего значения нормального напряжения σ_z используем одно из уравнений обобщенного закона Гука. Так как известна деформация $\varepsilon_x = 3,5 \cdot 10^{-4}$, то имеем

$$\varepsilon_x = 1/E \left[\sigma_x - \mu \left(\sigma_y + \sigma_z \right) \right],$$

$$3,5 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \left[40 - 0,3 \left(30 + \sigma_z \right) \right],$$

$$\sigma_z = -130 \text{ МПа.}$$

Ответ

В результате решения напряжение σ_z получилось с отрицательным знаком. Поэтому первоначально заданное направление этого напряжения меняем на противоположное направление (рис. 2.2).

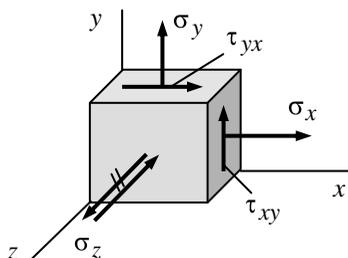


Рис. 2.2. Напряженное состояние элемента

Главные напряжения. Главные площадки. В рассматриваемом случае все площадки не свободны от напряжений, т. е. заданное напряженное состояние является объемным (трехосным). Однако особенностью данной задачи является то, что одна из исходных площадок, а именно площадка действия σ_z , главная. Следовательно, одно из главных напряжений (σ_z) известно.

Площадки действия остальных двух главных напряжений принадлежат серии площадок, параллельных оси z . Напряжения, возникающие на площадках указанной серии, очевидно, не зависят от σ_z , и для их определения возможно применение формул плоского напряженного состояния.

Среди площадок рассматриваемой серии есть две главные площадки, направления нормалей к которым определяются по формуле (значения напряжений следует подставлять со своими знаками)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot +20}{+40 - +30} = 4.$$

$$2\alpha_0 = 76^\circ \rightarrow \alpha_0 = 38^\circ.$$

Ответ

Для определения недостающих главных напряжений воспользуемся формулой (значения напряжений следует подставлять со своими знаками)

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{40+30}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{40-30^2 + 4 \cdot 20^2} = 35 \pm 20,6 \text{ (МПа)}.$$

Окончательно имеем следующие значения главных напряжений:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = 55,6 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = 14,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = -130 \text{ МПа}.$$

Ответ

На рис. 2.3 показаны положения главных площадок и главных напряжений.

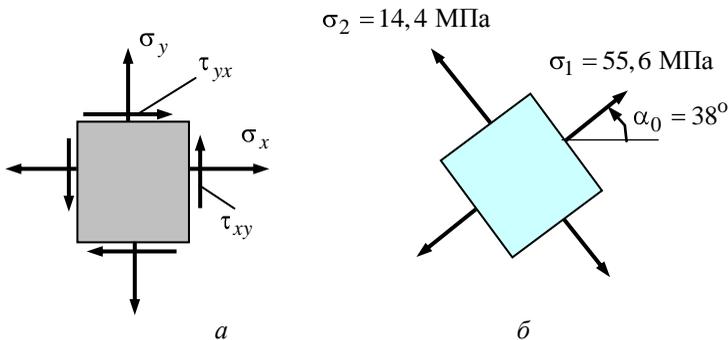


Рис. 2.3. Заданное напряженное состояние элемента (а) и площадки действия главных напряжений (б)

Наибольшие касательные напряжения. Используем следующую формулу (значения напряжений следует подставлять со своими знаками):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{55,6 - (-130)}{2} = 92,8 \text{ МПа.} \quad \text{Ответ}$$

Объемная деформация. Объемную деформацию (относительное изменение объема) при малых линейных деформациях определяют по одной из следующих формул:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad (1)$$

$$e = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z); \quad (2)$$

$$e = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K}, \quad (3)$$

где $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ – объемный модуль упругости.

Воспользуемся, например, формулой (1). Используя обобщенный закон Гука, получим следующие результаты (значения напряжений следует подставлять со своими знаками):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 1/E [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)] = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^5} [40 - 0,3 (30 - 130)] = 35 \cdot 10^{-5}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= 1/E [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)] = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^5} [30 - 0,3 (-130 + 40)] = 28 \cdot 10^{-5}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= 1/E [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-130 - 0,3 (40 + 30)] = -75,5 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Окончательно объемная деформация

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z =$$

$$= 35 \cdot 10^{-5} + 28,5 \cdot 10^{-5} - 75,5 \cdot 10^{-5} = -12 \cdot 10^{-5}.$$

Ответ

Проверка прочности материала по критериям прочности для пластичных материалов. При расчете с применением критериев прочности условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} \leq \sigma .$$

Допускаемое напряжение

$$\sigma = \frac{\sigma_T}{n} = \frac{300}{2} = 150 \text{ МПа.}$$

Для оценки прочности пластичных материалов применяются следующие критерии прочности.

- Критерий наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 55,6 - (-130) = 185,6 \text{ МПа} > \sigma ,$$

т. е. прочность недостаточна.

Ответ

- Критерий удельной потенциальной энергии формоизменения:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_1 - \sigma_2 \quad ^2 + \sigma_2 - \sigma_3 \quad ^2 + \sigma_3 - \sigma_1 \quad ^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{55,6 - 14,4 \quad ^2 + 14,4 - (-130) \quad ^2 + (-130) - 55,6 \quad ^2} = \\ &= 169,3 \text{ МПа} > \sigma , \end{aligned}$$

т. е. прочность недостаточна.

Ответ

Таким образом, оба критерия показали, что прочность материала в окрестности рассматриваемой точки тела недостаточна.

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

Задача
5

Расчет статически неопределимого стержня на прочность и жесткость при кручении

Стальной стержень постоянного поперечного сечения жестко зашпемлен по торцам и нагружен двумя скручивающими моментами (рис. 3.1). Модуль сдвига материала $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа. Исходные данные приведены в табл. 3.1.

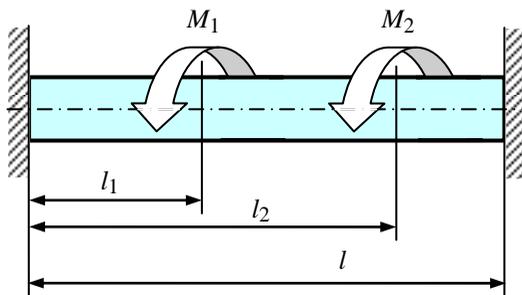


Рис. 3.1. К задаче 5

Требуется:

- 1) определить размеры поперечного сечения стержня из условий прочности и жесткости при кручении для следующих случаев:
 - круглое сплошное сечение диаметром d ;
 - кольцевое сечение с отношением внутреннего и наружного диаметров d/D ;
 - прямоугольное сечение с отношением сторон h/b ;
- 2) изобразить графически для каждой из этих форм сечения закон распределения касательных напряжений в опасном сечении и указать их наибольшее значение;

- 3) сопоставить массы стержней с различной формой сечения по п. 1;
- 4) построить эпюры углов поворота φ поперечных сечений стержня с круглым сплошным поперечным сечением диаметром d .

Указание. Направление сил на расчетной схеме для рассматриваемого варианта изобразить в соответствии с их знаками, приведенными в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Исходные данные к задаче 5

Номер строки	Момент, кН·м		Линейный размер, м			[τ], МПа	[θ], град/м	d/D	h/b
	M_1	M_2	l	l_1	l_2				
1	1	-10	1,0	0,2	0,6	50	0,2	0,6	1,5
2	-2	9	1,1	0,3	0,7	60	0,3	0,7	2,0
3	3	-8	1,2	0,4	0,8	70	0,4	0,8	2,5
4	4	7	1,3	0,3	0,6	80	0,5	0,9	3,0
5	-5	6	1,4	0,4	1,0	50	0,6	0,6	3,5
6	6	5	1,5	0,5	1,0	60	0,2	0,7	4,0
7	-7	4	1,6	0,6	1,2	70	0,3	0,8	1,5
8	8	3	1,8	0,8	1,2	80	0,4	0,9	2,0
9	9	2	1,9	0,9	1,5	50	0,5	0,6	2,5
0	10	1	2,0	0,8	1,4	60	0,6	0,8	3,0
	е		д			г	д	е	г

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

Стальной стержень постоянного поперечного сечения жестко заземлен по торцам и нагружен двумя скручивающими моментами (рис.3.1). Модуль сдвига материала $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа.

Исходные данные к задаче

Момент, кН·м		Линейный размер, м			[τ], МПа	[θ], град/м	d/D	h/b
M_1	M_2	l	l_1	l_2				
12	-8	1,0	0,3	0,7	50	0,5	0,8	1,5

Требуется:

- 1) определить размеры поперечного сечения стержня из условий прочности и жесткости при кручении для следующих случаев:
 - круглое сплошное сечение диаметром d ;
 - кольцевое сечение с отношением внутреннего и наружного диаметров d/D ;
 - прямоугольное сечение с отношением сторон h/b ;
- 2) изобразить графически для каждой из этих форм сечения закон распределения касательных напряжений в опасном сечении и указать их наибольшее значение;
- 3) сопоставить массы стержней с различной формой сечения по п. 1;
- 4) построить эпюры углов поворота φ поперечных сечений стержня с круглым сплошным поперечным сечением диаметром d .

Решение

Расчетная схема. Изображаем расчетную схему стержня в соответствии с исходными данными к задаче (рис. 3.2).

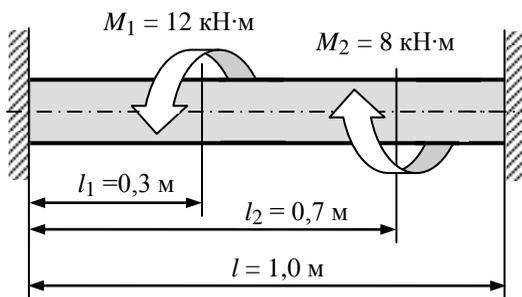


Рис. 3.2. Расчетная схема стержня

Уравнения равновесия. В заделках возникают реактивные пары сил с моментами M_B и M_O (рис. 3.3, а). Для системы пар сил, лежащих в параллельных плоскостях, статика дает только одно уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \sum m_x = 0; \quad M_B - M_1 + M_2 - M_O = 0 \rightarrow \\ M_B - M_O = M_1 - M_2 \end{aligned} \quad (1)$$

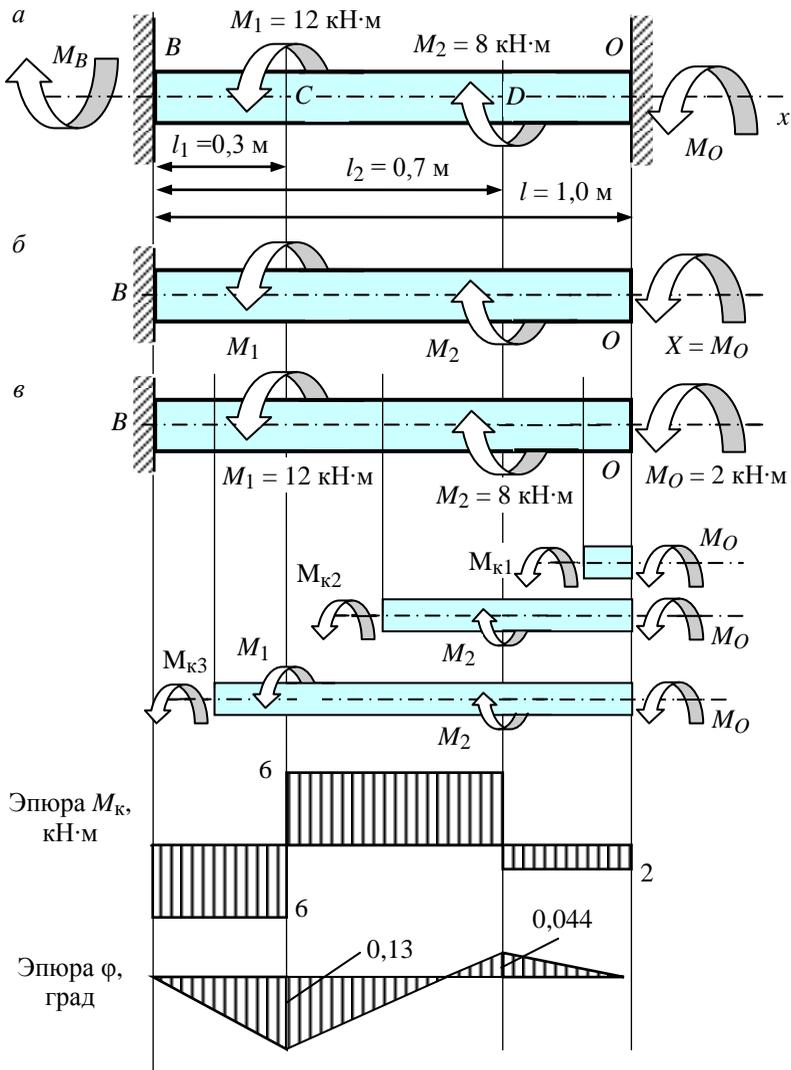


Рис. 3.3. Расчетная схема (а) и результаты решения задачи (б, в)

Неизвестных реактивных моментов два, следовательно, система один раз статически неопределима. Для определения неизвестных необходимо дополнительно составить уравнение перемещений.

Уравнение перемещений. Для составления уравнения перемещений отбросим правую заделку и заменим ее действие на стержень соответствующим реактивным моментом $X = M_O$ (рис. 3.3, б). Полученный таким образом статически определимый стержень эквивалентен заданному и поэтому угол поворота сечения O равен нулю, так как по условию задачи это сечение жестко заделано:

$$\varphi_O = 0.$$

Применяя принцип независимости действия сил, запишем уравнение перемещений $\varphi_O = 0$ в виде

$$\varphi_O M_1 + \varphi_O M_2 + \varphi_O X = 0, \quad (2)$$

где $\varphi_O M_1 = -\frac{M_1 l_1}{GI_p} = -\frac{12 \cdot 0,3}{GI_p} = -\frac{3,6}{GI_p}$ – угол поворота сечения O

от действия момента M_1 ;

$\varphi_O M_2 = \frac{M_2 l_2}{GI_p} = \frac{12 \cdot 0,3}{GI_p} = \frac{5,6}{GI_p}$ – то же от действия момента M_2 ;

та M_2 ;

$\varphi_O X = -\frac{Xl}{GI_p} = -\frac{X \cdot 1,0}{GI_p} = -\frac{X}{GI_p}$ – то же от действия момента $X = M_O$.

■

Знаки в выражениях углов поворота приняты такими же, как знаки соответствующих моментов в уравнении равновесия.

Подставляя значения углов поворота $\varphi_O M_1$, $\varphi_O M_2$ и $\varphi_O X$ в уравнение перемещений (2), получаем:

$$-\frac{3,6}{GI_p} + \frac{5,6}{GI_p} - \frac{X}{GI_p} = 0,$$

откуда $X = M_O = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Знак плюс указывает, что направление момента M_O выбрано правильно.

Из уравнения равновесия (1) получаем $M_B = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Построение эпюры крутящих моментов. Методика построения эпюры крутящего момента аналогична методике построения эпюры нормальных сил N .

■ **Правило знаков:** считаем крутящий момент в сечении положительным, если при взгляде на поперечное сечение со стороны внешней нормали к нему этот момент действует по часовой стрелке.

На рис. 3.3, в в сечениях стержня показаны положительные направления крутящих моментов M_K .

Применяя метод сечений (рис. 3.3, в), получаем следующие результаты:

• *участок OD*

$$\sum x = 0 \quad M_{K1} + M_O = 0 \quad \rightarrow \quad M_{K1} = -M_O = -2 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

так как внешний момент вращает отсеченную часть по часовой стрелке;

• *участок DC*

$$\sum x = 0 \quad M_{K2} - M_2 + M_O = 0 \quad \rightarrow \quad M_{K2} = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

• *участок CB*

$$\sum x = 0 \quad M_{K3} + M_1 - M_2 + M_O = 0 \quad \rightarrow \quad M_{K3} = -6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Из построенной эпюры M_K (рис.3.3, в) следует, что наибольшие по абсолютной величине крутящие моменты возникают в сечениях участков BC и CD . Следовательно, расчетный крутящий момент по абсолютной величине равен

$$|M_{K \max}| = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Определение размеров поперечного сечения стержня.

1. Круглое сплошное поперечное сечение диаметра d .

• Определяем диаметр вала из расчета на прочность: условие прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K \max}}{W_p} \leq \tau ,$$

полярный момент сопротивления

$$W_p \geq \frac{M_{\text{к max}}}{\tau} = \frac{6 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м}}{50 \text{ МПа}} = 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16 W_p}{\pi}},$$

$$d W_p \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,12 \cdot 10^{-3}}{3,14}} \geq 0,0849 \text{ м} \geq 84,9 \text{ мм}.$$

• Определяем диаметр вала из расчета на жесткость:
условие жесткости

$$\theta = \frac{M_{\text{к max}}}{GI_p} \frac{180^\circ}{\pi} \leq \theta,$$

полярный момент инерции

$$I_p \geq \frac{M_{\text{к max}}}{G \theta} \frac{180^\circ}{\pi} =$$
$$= \frac{6 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м} \cdot 180^\circ}{0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 0,5 \text{ град/м} \cdot 3,14} = 0,86 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4,$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{32 I_p}{\pi}},$$

$$d I_p \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,86 \cdot 10^{-5}}{3,14}} \geq 0,0968 \text{ м} \geq 96,8 \text{ мм}.$$

Округляя по ГОСТ 6636–69, окончательно принимаем

$$d = 100 \text{ мм}.$$

Ответ

2. Кольцевое сечение с отношением внутреннего и наружного диаметров $\alpha = d/D = 0,8$.

• Определяем диаметры вала из расчета на прочность:
полярный момент сопротивления (см. п. 1)

$$W_p \geq 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi (1 - \alpha^4)}},$$

$$D W_p \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,12 \cdot 10^{-3}}{3,14 (1 - 0,8^4)}} \geq 0,1012 \text{ м} \geq 101,2 \text{ мм},$$

$$d = 0,8D = 81 \text{ мм}.$$

• Определяем диаметры вала из расчета на жесткость: полярный момент инерции (см. п. 1)

$$I_p \geq 0,86 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4,$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \rightarrow D = \sqrt[4]{\frac{32I_p}{\pi (1 - \alpha^4)}},$$

$$D I_p \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,86 \cdot 10^{-5}}{3,14 (1 - 0,8^4)}} \geq 0,1105 \text{ м} \geq 110,5 \text{ мм},$$

$$d = 0,8D = 88,4 \text{ мм}.$$

Округляя по ГОСТ 6636–69, окончательно принимаем

$$D = 112 \text{ мм}, \quad d = 90 \text{ мм}.$$

Ответ

3. Прямоугольное сечение с отношением сторон $h/b = 1,5$.

• Определяем размеры вала из расчета на прочность: полярный момент сопротивления (см. п. 1)

$$W_k = W_p \geq 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

$$h = 1,5b; \quad W_k = \alpha b^2 h = 1,5\alpha b^3; \rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{W_k}{1,5\alpha}},$$

коэффициент α , зависящий от отношения сторон ($h:b$), принимается по таблице (см. [1, 4]):

$$\text{для } h/b = 1,5 \quad \alpha = 0,231,$$

$$b W_k \geq \sqrt[3]{\frac{0,12 \cdot 10^{-3}}{1,5 \cdot 0,231}} \geq 0,0703 \text{ м} \geq 70,3 \text{ мм},$$

$$h = 1,5b = 105,5 \text{ мм}.$$

• Определяем размеры вала из расчета на жесткость: полярный момент инерции (см. п.1)

$$I_K = I_p \geq 0,86 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4,$$

$$h = 1,5b; \quad I_K = \beta b^3 h = 1,5\beta b^4; \quad \rightarrow b = \sqrt[4]{\frac{I_K}{1,5\beta}},$$

коэффициент β , зависящий от отношения сторон ($h:b$), принимается по таблице (см. [1, 4]):

$$\text{для } h/b = 1,5 \quad \beta = 0,1955,$$

$$b \geq \sqrt[4]{\frac{0,86 \cdot 10^{-5}}{1,5 \cdot 0,1955}} \geq 0,0736 \text{ м} \geq 73,6 \text{ мм},$$

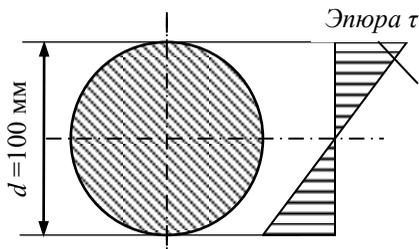
$$h = 1,5b = 110,4 \text{ мм}.$$

Округляя по ГОСТ 6636–69, окончательно принимаем

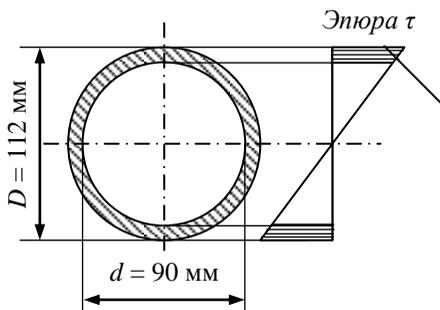
$$b = 75 \text{ мм}, \quad h = 112 \text{ мм}.$$

Ответ

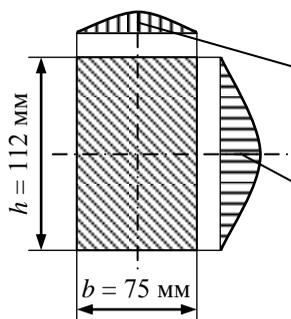
Закон распределения касательных напряжений в опасном сечении вала для заданных сечений.



$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{M_{\text{к max}}}{W_p} = \\ &= \frac{6 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,1^3 / 16} = 30,6 \text{ МПа}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{M_{\text{к max}}}{W_p} = \\ &= \frac{6 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,112^3 \cdot 1 - 0,8^4 / 16} = \\ &= 36,9 \text{ МПа}. \end{aligned}$$



$$\tau'_{\max} = \gamma \tau_{\max} = 0,855 \cdot 41,2 = 35,2 \text{ МПа,}$$

где $\gamma(h:b = 1,5) = 0,855 [1, 4];$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к max}}}{W_{\text{к}}} =$$

$$= \frac{6 \cdot 10^{-3}}{0,231 \cdot 0,075^2 \cdot 0,112} = 41,2 \text{ МПа.}$$

Сопоставление стержней с различной формой сечения по массе.

Масса стержня вычисляется по формуле

$$m = \rho A l,$$

где ρ – плотность материала стержня, A – площадь поперечного сечения стержня, l – длина стержня. В нашей задаче ρ и l постоянны, следовательно, при сравнении стержня по массе переменной является площадь поперечного сечения.

- Сравнение по массе стержней со сплошным круглым и кольцевым поперечным сечением:

$$\frac{m_{\text{кольц}}}{m_{\text{спл}}} = \frac{A_{\text{кольц}}}{A_{\text{спл}}} = \frac{\pi D^2 (1 - \alpha^2) / 4}{\pi d^2 / 4} = \frac{D^2 (1 - \alpha^2)}{d^2} =$$

$$= \frac{112^2 (1 - 0,8^2)}{100^2} = 0,45.$$

Ответ

- Сравнение по массе стержней со сплошным круглым и прямоугольным поперечным сечением:

$$\frac{m_{\text{прямоуг}}}{m_{\text{спл}}} = \frac{A_{\text{прямоуг}}}{A_{\text{спл}}} = \frac{bh}{\pi d^2 / 4} = \frac{75 \cdot 112}{3,14 \cdot 100^2 / 4} = 1,07.$$

Ответ

- Сравнение по массе стержней с кольцевым и прямоугольным поперечным сечением:

$$\frac{m_{\text{прямоуг}}}{m_{\text{кольц}}} = \frac{A_{\text{прямоуг}}}{A_{\text{кольц}}} = \frac{bh}{\pi D^2 (1 - \alpha^2) / 4} =$$

$$= \frac{75 \cdot 112}{3,14 \cdot 112^2 \cdot 1 - 0,8^2} / 4 = 2,37.$$

Ответ

Вывод: наиболее рациональной формой поперечного сечения стержня при кручении является кольцевое (трубчатое) поперечное сечение.

Построение эпюры углов поворота φ поперечных сечений стержня с круглым сплошным поперечным сечением $d = 100$ мм. Построение эпюры углов поворота поперечных сечений стержня (эпюры угловых перемещений) принципиально ничем не отличается от построения эпюры линейных перемещений при растяжении и сжатии (см. задачу 1). На каждом из участков эпюра будет линейной, поэтому для ее построения достаточно вычислить перемещения сечений, являющихся границами участков.

Построение эпюры начинаем от заделки, т. е. от неподвижного сечения,

$$\varphi_B = 0.$$

Угол поворота сечения C

$$\begin{aligned} \varphi_C &= \frac{-M_{кBC} l_{BC}}{GI_p} = \\ &= -\frac{6 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м} \cdot 0,3 \text{ м}}{0,784 \text{ МН} \cdot \text{м}^2} = -0,002296 \text{ рад} = -0,13^\circ. \end{aligned}$$

Угол поворота сечения D равен алгебраической сумме углов поворота сечения C и сечения D относительно сечения C (φ_{CD}):

$$\begin{aligned} \varphi_D &= \varphi_C + \varphi_{CD} = \varphi_C + \frac{M_{кCD} l_{CD}}{GI_p} = -0,002296 + \\ &+ \frac{6 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м} \cdot 0,4 \text{ м}}{0,784 \text{ МН} \cdot \text{м}^2} = 0,000765 \text{ рад} = 0,044^\circ. \end{aligned}$$

Аналогично определяется угол поворота сечения O :

$$\varphi_O = \varphi_D + \varphi_{DO} = \varphi_D + \frac{-M_{кDO} l_{DO}}{GI_p} = 0,000765 -$$
$$-\frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м} \cdot 0,3 \text{ м}}{0,784 \text{ МН} \cdot \text{м}^2} = 0,000765 - 0,000765 = 0.$$

Полученный в результате решения задачи угол поворота в сечении O , равный нулю, подтверждает правильность решения задачи, так как по условию задачи (рис. 3.3, *a*) в сечении O находится заделка и, следовательно, угол поворота в этом сечении равен нулю. На рис. 3.3, *в* по этим данным построена эпюра угловых перемещений.

ПЛОСКИЙ ИЗГИБ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

**Задача
6**

**Построение эюр
перерезывающих сил
и изгибающих моментов**

Построить эюры внутренних сил для комплекта расчетных схем, приведенных ниже. Исходные данные содержатся в табл. 4.1.

Указание. Сосредоточенные силы и моменты на расчетных схемах выразить через соответствующие величины по заданному отношению силовых факторов:

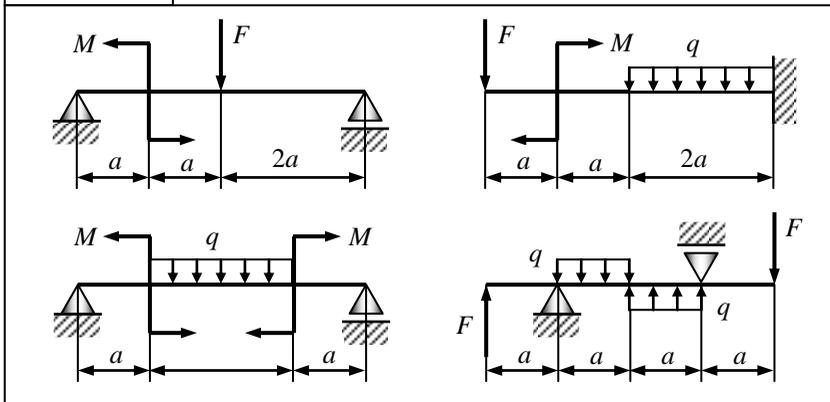
$$F = \alpha qa, \quad M = \beta qa^2.$$

Таблица 4.1

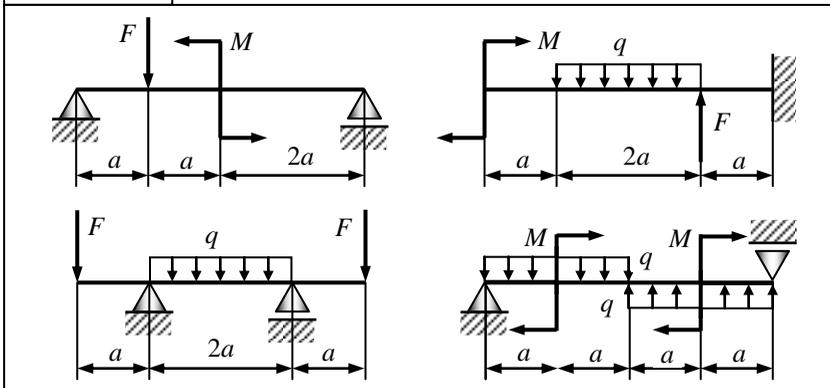
Исходные данные к задаче 6

Номер строки	Номер комплекта	Коэффициенты	
		α	β
1	I	1	1
2	II	2	2
3	III	3	3
4	IV	4	4
5	V	5	5
6	VI	6	6
7	VII	7	7
8	VIII	8	8
9	IX	9	9
0	X	10	10
	е	д	г

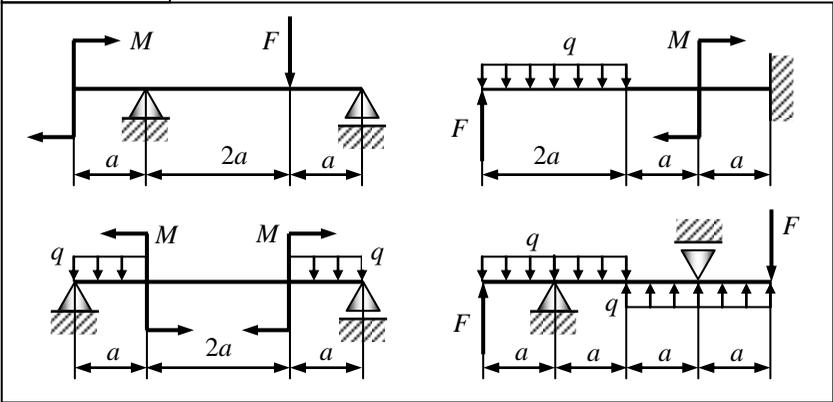
Комплект I



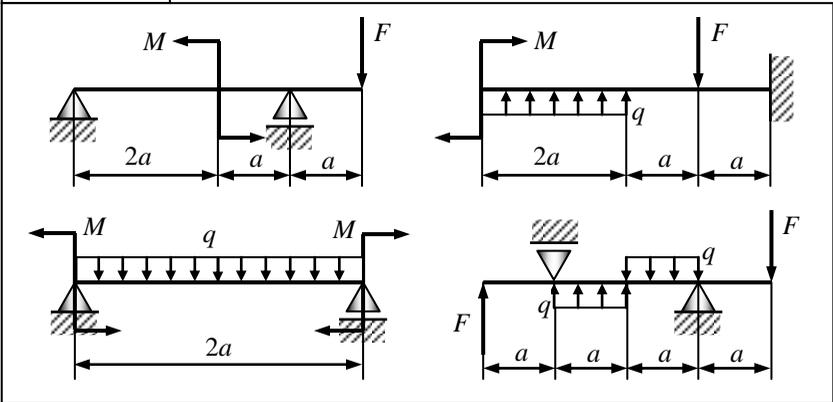
Комплект II



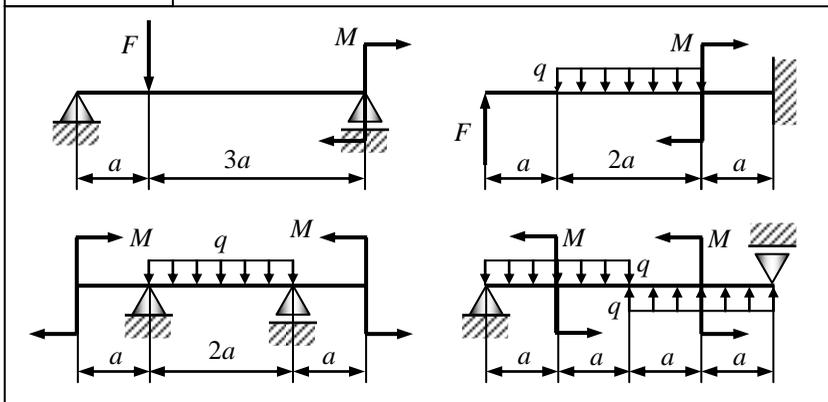
Комплект III



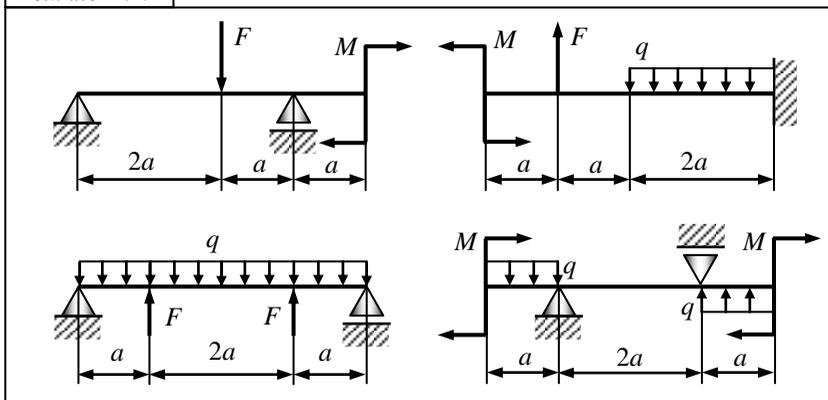
Комплект IV



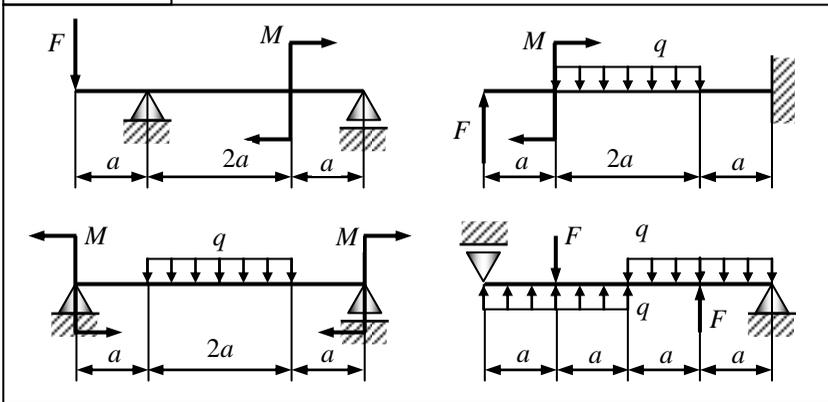
Комплект V



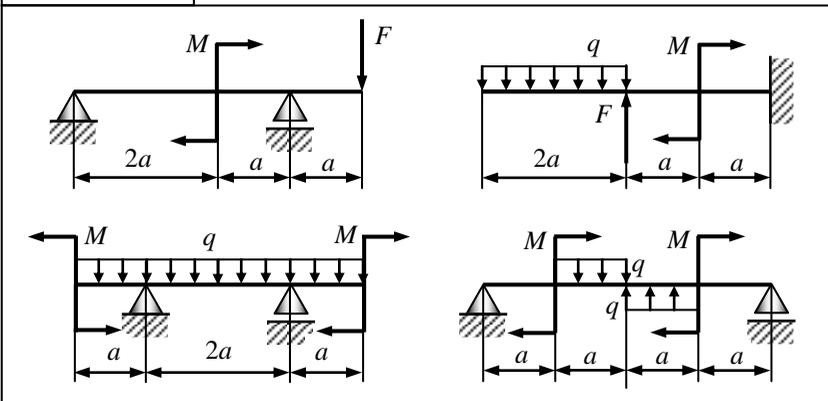
Комплект VI



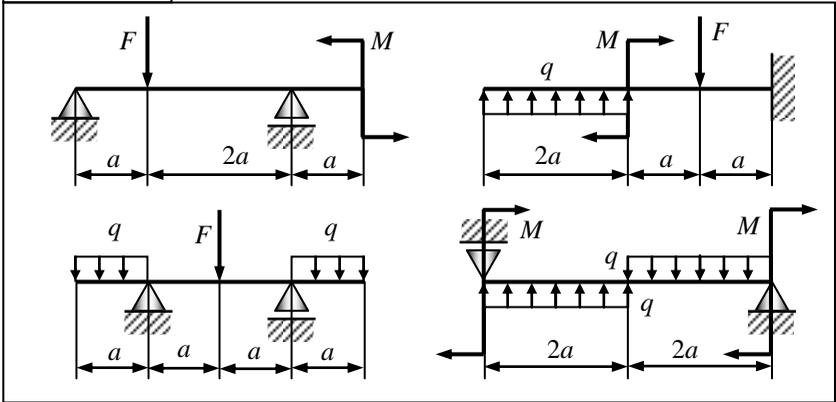
Комплект VII



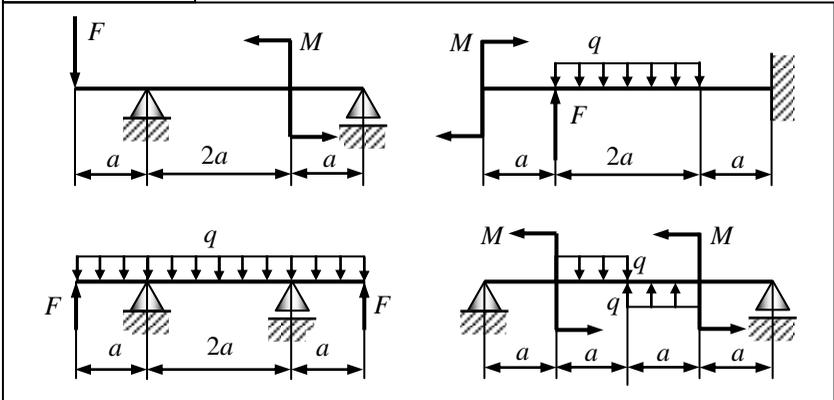
Комплект VIII



Комплект IX



Комплект X

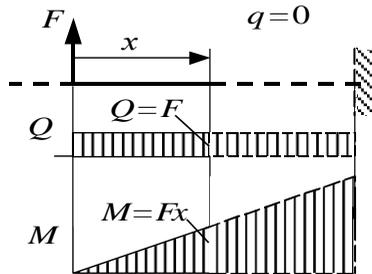


► Важные моменты

При построении эпюр полезно использовать ряд правил. Эти правила вытекают как непосредственно из метода сечений, так и из дифференциальных зависимостей между q , Q , M :

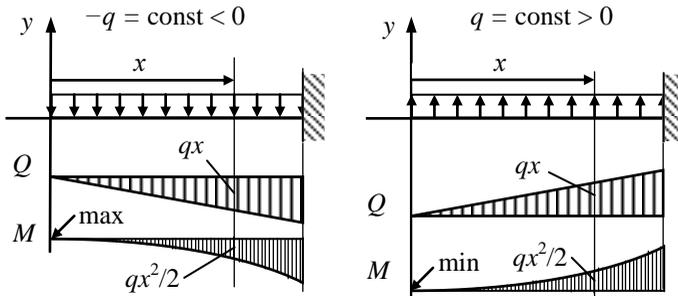
$$dQ/dx = q, \quad dM/dx = Q, \quad d^2M/dx^2 = q.$$

- Если на участке стержня не действует распределенная нагрузка ($q = 0$), то $Q = \text{const}$, а M – линейная функция от координаты x .

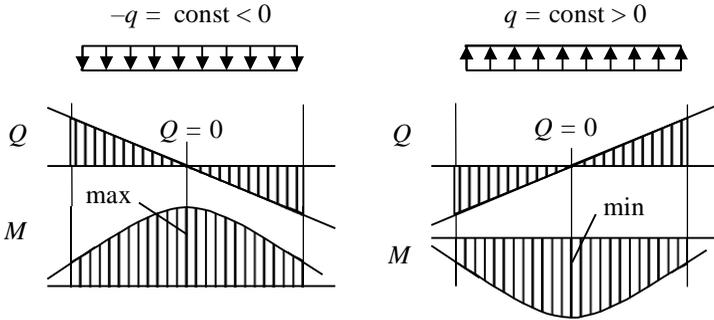


- Если на участке стержня действует равномерно распределенная нагрузка ($q = \text{const}$), то Q – линейная функция, а M – квадратная парабола, направленная выпуклостью навстречу распределенной нагрузке. Если при этом график Q пересекает ось x ($Q = 0$), то график M в этой точке имеет экстремальное значение: максимальное, если q отрицательно ($d^2M/dx^2 = -q < 0$), и минимальное, если q положительно ($d^2M/dx^2 = q > 0$).

Ситуация 1



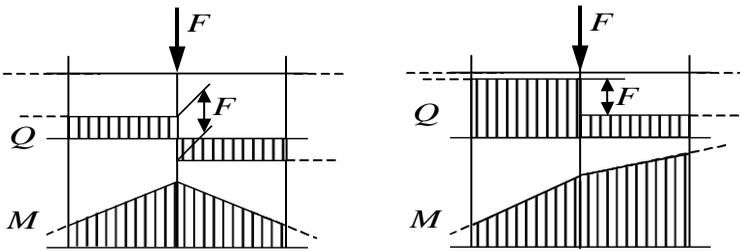
Ситуация 2



- В месте приложения сосредоточенной силы F эпюра Q терпит разрыв (скачок) на величину этой силы, а эпюра M имеет излом, направленный “острием” навстречу вектору силы.

Ситуация 1

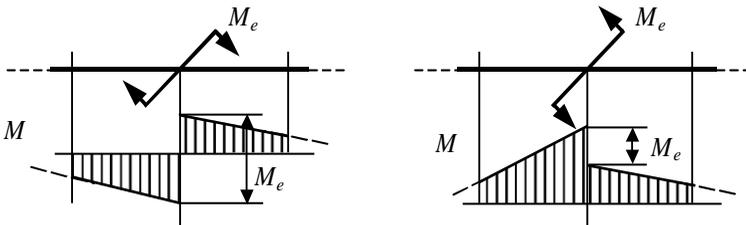
Ситуация 2



- В месте приложения внешнего сосредоточенного момента M_e эпюра M терпит разрыв на величину этого момента.

Ситуация 1

Ситуация 2



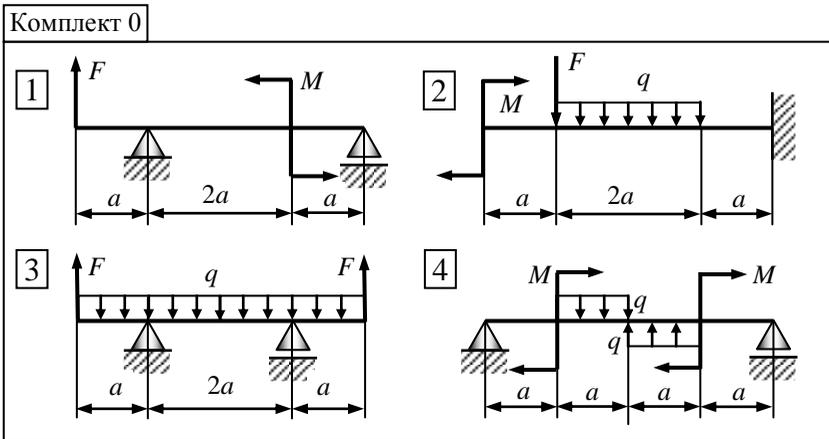
ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

Построить эпюры внутренних сил для комплекта расчетных схем, приведенных ниже.

Сосредоточенные силы и моменты на расчетных схемах выразить через соответствующие величины по заданному отношению силовых факторов: $F = \alpha qa$, $M = \beta qa^2$.

Исходные данные к задаче

Коэффициенты	
α	β
1	2



Решение

Расчетная схема 1

Определение реакций опор. Принимаем начало системы координат x на левом конце балки так, чтобы вся расчетная схема разместилась в первом квадранте (рис. 4.1).

Так как направления реакций опор R_B и R_C неизвестны, то предполагаем их направления положительными (направленными вверх). Далее составляем два уравнения равновесия:

$$\sum m_B = 0 \quad Fa - M - R_C(3a) = 0,$$

$$R_C = \frac{Fa - M}{3a} = \frac{qa^2 - 2qa^2}{3a} = -\frac{1}{3}qa.$$

Знак минус означает, что исходное направление реакции R_C выбрано неправильно, в действительности, оно противоположно. Рекомендуется вектор R_C зачеркнуть, что нами сделано, и показать рядом истинное направление реакции со знаком плюс:

$$\sum m_C = 0 \quad F(4a) + R_B(3a) - M = 0,$$

$$R_B = \frac{-F \cdot 4a + M}{3a} = \frac{-4qa^2 + 2qa^2}{3a} = -\frac{2}{3}qa.$$

В связи с отрицательным значением R_B поступаем аналогично действиям с реакцией R_C .

Для проверки правильности нахождения реакций опор используем уравнение

$$\sum y = 0 \quad F - R_B - R_C = 0 \rightarrow qa - (2/3)qa - (1/3)qa = 0,$$

т. е. опорные реакции определены правильно.

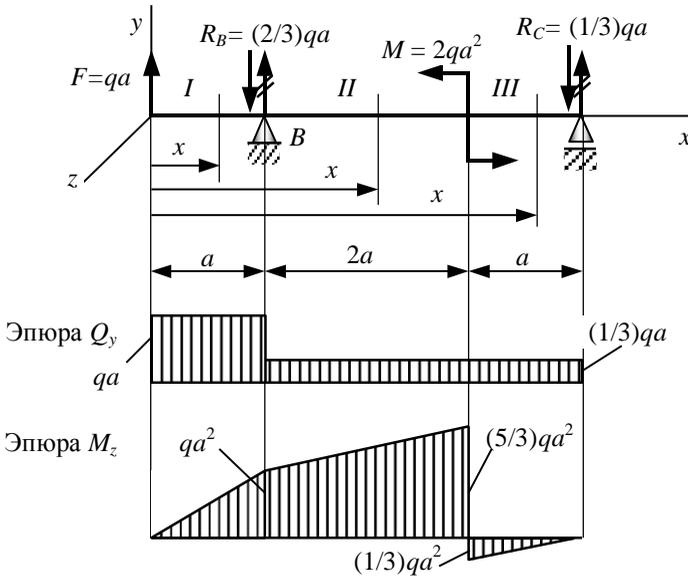


Рис. 4.1. Расчетная схема и эпюры

Построение эпюр перерезывающих сил Q_y и изгибающих моментов M_z . Предварительно разбиваем балку на силовые участки. Границами силовых участков являются точки приложения сосредоточенных нагрузок (сил и моментов), начало и конец участка с распределенной нагрузкой. На рис. 4.1 эти участки обозначены цифрами I, II, III. Далее рассматриваем последовательно силовые участки и, используя метод сечений, определяем внутренние силовые факторы Q_y и M_z .

■ **Правило знаков:** при составлении уравнений равновесия для отсеченной части балки всегда будем предполагать положительное направление внутренних силовых факторов Q_y и M_z , как показано на рис. 4.2.

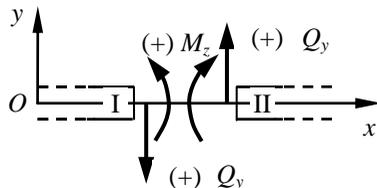


Рис. 4.2. Правило знаков

• **Участок I ($0 \leq x \leq a$)**

$$\sum y = 0 \quad F - Q_y = 0 \rightarrow Q_y = F = qa;$$

$$\sum m_O = 0 \quad Fx - M_z = 0 \rightarrow M_z = Fx = qax;$$

при $x = 0 \quad M_z = 0,$
 $x = a \quad M_z = qa^2.$

• **Участок II ($a \leq x \leq 3a$)**

$$\sum y = 0 \quad F - R_B - Q_y = 0 \rightarrow Q_y = F - R_B = qa - (2/3)qa = (1/3)qa;$$

$$\sum m_O = 0 \quad Fx - R_B(x - a) - M_z = 0 \rightarrow$$

$$M_z = Fx - R_B(x - a) = qax - (2/3)qa(x - a):$$

$$\text{при } x = a \quad M_z = qa^2,$$

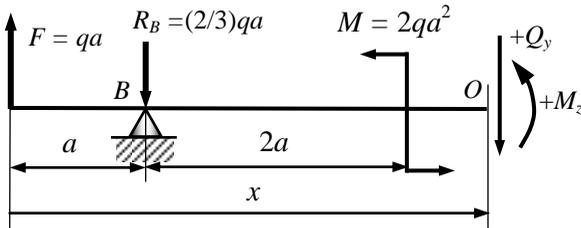
$$x = 3a \quad M_z = (5/3)qa^2.$$

- *Участок III* ($3a \leq x \leq 4a$)

■ При использовании метода сечений рекомендуется оставлять ту часть балки, которая нагружена меньшим числом нагрузок.

В связи с этим для участка *III* можно использовать два подхода.

1) Рассматривается левая отсеченная часть балки так же, как для участков *I* и *II*.



$$\sum y = 0 \quad F - R_B - Q_y = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = F - R_B = qa - (2/3)qa = (1/3)qa;$$

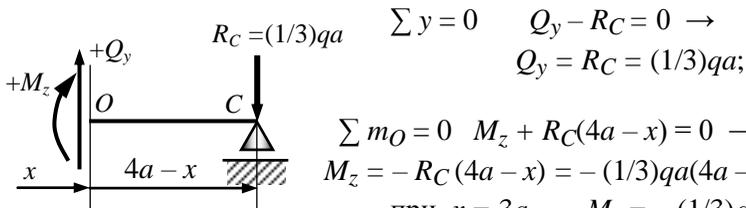
$$\sum m_O = 0 \quad Fx - R_B(x - a) - M - M_z = 0 \rightarrow$$

$$M_z = Fx - R_B(x - a) - M = qax - (2/3)qa(x - a) - 2qa^2:$$

$$\text{при } x = 3a \quad M_z = -(1/3)qa^2,$$

$$x = 4a \quad M_z = 0.$$

2) Рассмотрим правую отсеченную часть:



$$\sum y = 0 \quad Q_y - R_C = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = R_C = (1/3)qa;$$

$$\sum m_O = 0 \quad M_z + R_C(4a - x) = 0 \rightarrow$$

$$M_z = -R_C(4a - x) = -(1/3)qa(4a - x):$$

$$\text{при } x = 3a \quad M_z = -(1/3)qa^2,$$

$$x = 4a \quad M_z = 0.$$

Следовательно, для участка *III* удобнее рассматривать правую отсеченную часть балки, содержащую меньшее число нагрузок.

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 4.1.

Расчетная схема 2

Определение реакций опор. Принимаем начало системы координат x у на левом конце балки так, чтобы вся расчетная схема разместилась в первом квадранте (рис. 4.3).

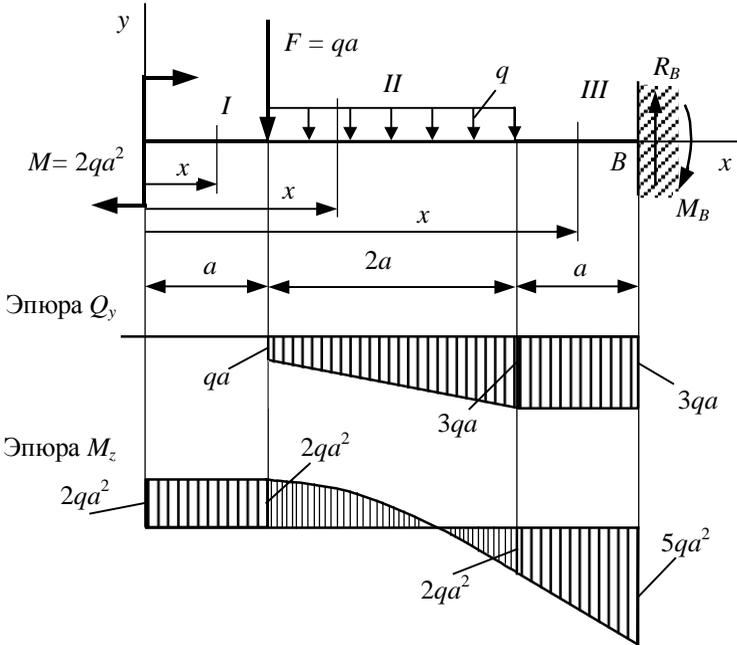


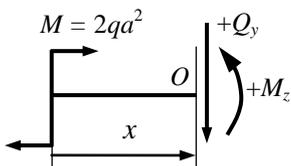
Рис. 4.3. Расчетная схема балки и эпюры

Для данной расчетной схемы можно не определять реакции в заделке B , если рассматривать участки, начиная от свободного торца и отбрасывая при использовании метода сечений каждый раз часть балки, содержащую заделку.

Построение эпюр перерезывающих сил Q_y и изгибающих моментов M_z . Предварительно разбиваем балку на силовые участки. Границами силовых участков являются точки приложения сосредоточенных нагрузок (сил и моментов), начало и конец участка с распределенной нагрузкой. На рис. 4.3 эти участки обозначены цифрами I , II , III . Далее рассматриваем последовательно силовые участки и, используя метод сечений, определяем внутренние силовые факторы Q_y и M_z .

■ При составлении уравнений равновесия для отсеченной части балки всегда будем предполагать положительное направление внутренних силовых факторов Q_y и M_z .

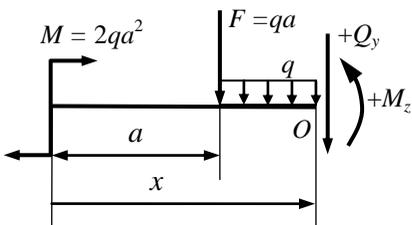
• Участок I ($0 \leq x \leq a$)



$$\sum y = 0 \quad Q_y = 0;$$

$$\sum m_O = 0 \quad M - M_z = 0 \rightarrow M_z = M = 2qa^2.$$

• Участок II ($a \leq x \leq 3a$)



$$\sum y = 0$$

$$-F - q(x - a) - Q_y = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = -F - q(x - a) =$$

$$= -qa - q(x - a):$$

$$\text{при } x = a \quad Q_y = -qa,$$

$$x = 3a \quad Q_y = -3qa;$$

здесь $q(x - a)$ – равнодействующая равномерно распределенной нагрузки; на участке II перерезывающая сила Q_y изменяется по линейному закону;

$$\sum m_O = 0 \quad M - F(x - a) - q(x - a) \frac{x - a}{2} - M_z = 0 \rightarrow$$

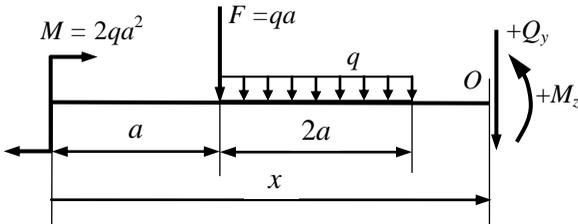
$$M_z = M - F(x - a) - q \frac{x - a}{2} = 2qa^2 - qa(x - a) - q \frac{x - a}{2} :$$

$$\text{при } x = a \quad M_z = 2qa^2,$$

$$x = 3a \quad M_z = -2qa^2.$$

Здесь $q(x - a) \frac{x - a}{2} = q \frac{x - a}{2}^2$ – момент относительно точки O равнодействующей распределенной нагрузки $q(x - a)$. При построении эпюры следует учесть, что на участке II изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы.

- Участок III ($3a \leq x \leq 4a$)



$$\sum y = 0 \quad -F - q(2a) - Q_y = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = -F - q(2a) = -qa - q(2a) = -3qa;$$

для участка III перерезывающая сила постоянна:

$$\sum m_O = 0 \quad M - F(x-a) - q(2a)(x-2a) - M_z = 0 \rightarrow$$

$$M_z = M - F(x-a) - 2qa(x-2a) = 2qa^2 - qa(x-a) - 2qa(x-2a);$$

$$\text{при } x = 3a \quad M_z = -2qa^2,$$

$$x = 4a \quad M_z = -5qa^2;$$

на участке III момент изменяется по линейному закону.

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 4.3.

■ *Замечание.* В результате построения эпюр внутренних силовых факторов Q_y и M_z определены также величина и направление реакций в заделке B:

- $R_B = 3qa$ и направлена согласно правилу знаков для левой отсеченной части вверх,
- $M_B = 5qa^2$ и направлен согласно правилу знаков для левой отсеченной части так, что изгибает стержень выпуклостью вверх.

Для проверки указанных значений определим реакции в заделке B на основе уравнений равновесия:

$$\sum y = 0 \quad -F - q(2a) + R_B = 0$$

$$-qa - 2qa + R_B = 0 \quad \rightarrow R_B = 3qa,$$

$$\sum m_B = 0 \quad M - F(3a) - q(2a)2a + M_B = 0$$

$$2qa^2 - 3qa^2 - 4qa^2 + M_B = 0 \quad \rightarrow M_B = 5qa^2.$$

Полученные результаты полностью совпадают с ранее проведенными вычислениями при построении эпюр без определения реакций в заделке B.

Таким образом, если вначале определить реакции в заделке B , а затем определять значения перерезывающих сил и изгибающих моментов, оставляя каждый раз после проведения сечения правую часть стержня, то получим те же результаты. Однако в этом случае в задаче необходимо выполнить больше действий (дополнительно составляются два уравнения равновесия).

Расчетная схема 3

Определение реакций опор. Принимаем начало системы координат xu на левом конце балки (рис. 4.4).

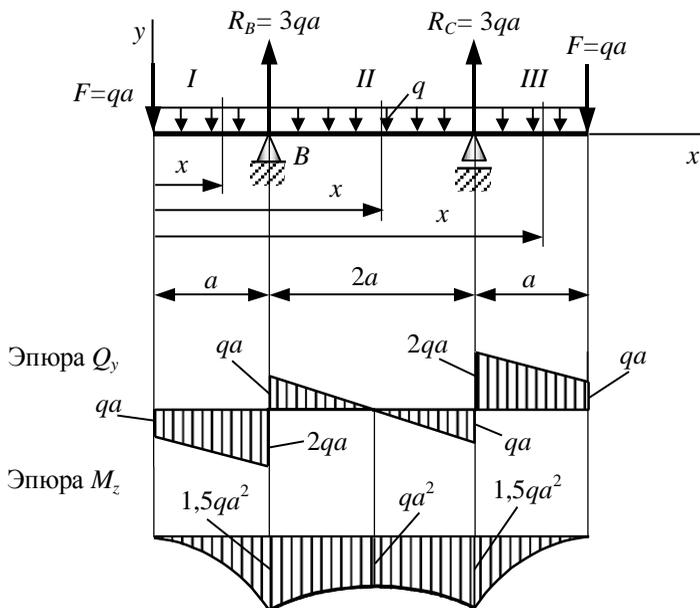


Рис. 4.4. Расчетная схема и эпюры

Так как направления реакций опор R_B и R_C неизвестны, то предполагаем их направления положительными (направленными вверх). Далее составляем два уравнения равновесия:

$$\sum m_B = 0 \quad Fa - (q \cdot 4a)a + R_C \cdot 2a - F \cdot 3a = 0,$$

$$R_C = \frac{-Fa + 4qa^2 + 3Fa}{2a} = \frac{-qa^2 + 4qa^2 + 3qa^2}{2a} = 3qa.$$

$$\sum M_C = 0 \quad F \cdot 3a - R_B \cdot 2a + (q \cdot 4a)a - Fa = 0,$$

$$R_B = \frac{3Fa + 4qa^2 - Fa}{2a} = \frac{3qa^2 + 4qa^2 - qa^2}{2a} = 3qa.$$

Для проверки правильности нахождения реакций опор используем уравнение

$$\sum y = 0 \quad -F + R_B + R_C - q \cdot 4a - F = 0,$$

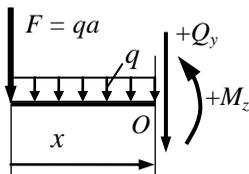
$$-qa + 3qa + 3qa - 4qa - qa = 0,$$

т. е. опорные реакции определены правильно.

Построение эпюр перерезывающих сил Q_y и изгибающих моментов M_z . Предварительно разбиваем балку на силовые участки. Границами силовых участков являются точки приложения сосредоточенных нагрузок (сил и моментов), начало и конец участка с распределенной нагрузкой. На рис. 4.4 эти участки обозначены цифрами I, II, III. Далее рассматриваем последовательно силовые участки и, используя метод сечений, определяем внутренние силовые факторы Q_y и M_z .

■ При составлении уравнений равновесия для отсеченной части балки всегда будем предполагать положительное направление внутренних силовых факторов Q_y и M_z .

- Участок I ($0 \leq x \leq a$)



$$\sum y = 0 \quad -F - qx - Q_y = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = -F - qx = -qa - qx:$$

$$\text{при } x = 0 \quad Q_y = -qa,$$

$$x = a \quad Q_y = -2qa;$$

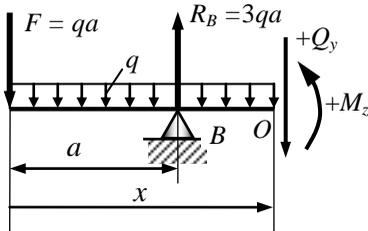
$$\sum m_O = 0 \quad -Fx - (qx)(x/2) - M_z = 0 \rightarrow$$

$$M_z = -Fx - qx^2/2 = -qax - qx^2/2:$$

$$\text{при } x = 0 \quad M_z = 0,$$

$$x = a \quad M_z = -1,5qa^2.$$

- Участок II ($a \leq x \leq 3a$)



$$\sum y = 0 \quad -F + R_B - qx - Q_y = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = -F + R_B - qx =$$

$$= -qa + 3qa - qx :$$

при $x = a \quad Q_y = qa,$

$x = 3a \quad Q_y = -qa;$

$$\sum m_O = 0 \quad -Fx - (qx)(x/2) + R_B(x - a) - M_z = 0 \rightarrow$$

$$M_z = -Fx - qx^2/2 + R_B(x - a) = -qax - qx^2/2 + 3qa(x - a):$$

при $x = a \quad M_z = -1,5qa^2,$

$x = 3a \quad M_z = -1,5qa^2.$

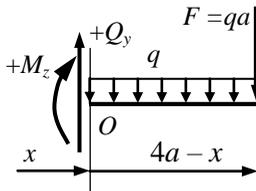
Так как на участке II эюра Q_y пересекает ось x , то в точке пересечения эюра M_z будет иметь экстремальное значение. Для определения этого значения найдем точку пересечения x_0 из уравнения

$$Q_y = -F + R_B - qx_0 =$$

$$= -qa + 3qa - qx_0 = 2qa - qx_0 = 0 \rightarrow x_0 = 2a;$$

$$M_z|_{x_0=2a} = -qa(2a) - q(2a)^2/2 + 3qa(2a - a) = -qa^2.$$

- Участок III ($3a \leq x \leq 4a$)



$$\sum y = 0 \quad Q_y - q(4a - x) - F = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = q(4a - x) + qa$$

при $x = 3a \quad Q_y = 2qa,$

$x = 4a \quad Q_y = qa;$

$$\sum m_O = 0 \quad M_z + q(4a - x)^2/2 + F(4a - x) = 0 \rightarrow$$

$$M_z = -q(4a - x)^2/2 - F(4a - x) = -q(4a - x)^2/2 - qa(4a - x):$$

при $x = 3a \quad M_z = -1,5qa^2,$

$x = 4a \quad M_z = 0.$

Эюры Q_y и M_z приведены на рис. 4.4.

Расчетная схема 4

Определение реакций опор. Принимаем начало системы координат x на левом конце балки (рис. 4.5).

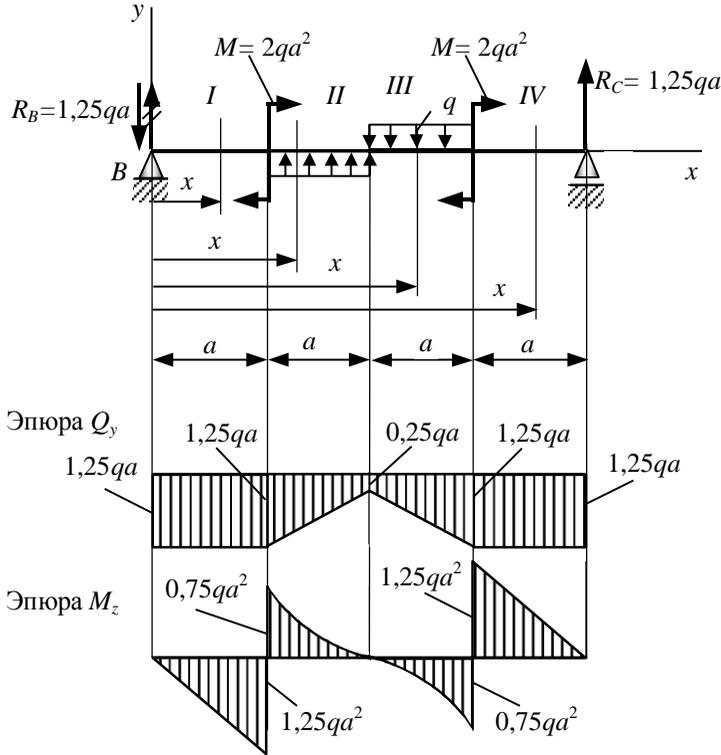


Рис. 4.5. Расчетная схема и эпюры

Так как направления реакций опор R_B и R_C неизвестны, то предполагаем их направления положительными (направленными вверх). Далее составляем два уравнения равновесия:

$$\sum m_B = 0 \quad R_C 4a - M - (qa)2,5a + (qa)1,5a - M = 0,$$

$$R_C = \frac{M + 2,5qa^2 - 1,5qa^2 + M}{4a} = \frac{2qa^2 + qa^2 + 2qa^2}{4a} = 1,25qa.$$

$$\sum m_C = 0 \quad R_B 4a + M + (qa)2,5a - (qa)1,5a + M = 0,$$

$$R_B = \frac{-M - 2,5qa^2 + 1,5qa^2 - M}{4a} = \frac{-2qa^2 - qa^2 - 2qa^2}{4a} = -1,25qa.$$

Так как реакция R_B получилась отрицательной, на схеме (рис. 4.5) меняем ее направление на противоположное.

Для проверки правильности нахождения реакций опор используем уравнение

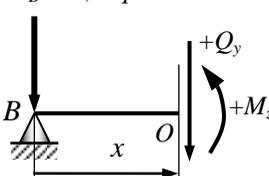
$$\begin{aligned} \sum y = 0 \quad -R_B + qa - qa + R_C = 0 & \rightarrow \\ -1,25qa + qa - qa + 1,25qa = 0, & \end{aligned}$$

т. е. опорные реакции определены правильно.

Построение эпюр перерезывающих сил Q_y и изгибающих моментов M_z . Предварительно разбиваем балку на силовые участки. Границами силовых участков являются точки приложения сосредоточенных нагрузок (сил и моментов), начало и конец участка с распределенной нагрузкой. На рис. 4.5 эти участки обозначены цифрами I, II, III, IV. Далее рассматриваем последовательно силовые участки и, используя метод сечений, определяем внутренние силовые факторы Q_y и M_z .

■ При составлении уравнений равновесия для отсеченной части балки всегда будем предполагать положительное направление внутренних силовых факторов Q_y и M_z .

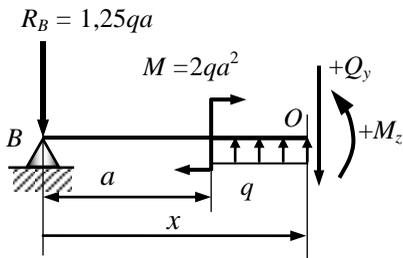
- Участок I ($0 \leq x \leq a$)



$$\begin{aligned} R_B = 1,25qa \quad \sum y = 0 \quad -R_B - Q_y = 0 & \rightarrow \\ Q_y = -R_B = -1,25qa; & \\ \sum m_O = 0 \quad -R_B x - M_z = 0 & \rightarrow \\ M_z = -R_B x = -1,25qax; & \\ \text{при } x = 0 \quad M_z = 0, & \\ x = a \quad M_z = -1,25qa^2. & \end{aligned}$$

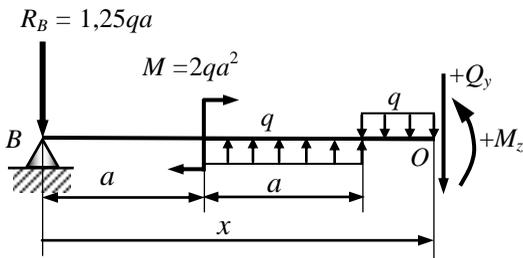
- Участок II ($a \leq x \leq 2a$)

$$\begin{aligned} \sum y = 0 \quad -R_B + q(x - a) - Q_y = 0 & \rightarrow \\ Q_y = -R_B + q(x - a) = -1,25qa + q(x - a) & ; \\ \text{при } x = a \quad Q_y = -1,25qa, & \\ x = 2a \quad Q_y = -0,25qa; & \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum m_O = 0 \quad -R_B x + M + q(x-a)(x-a)/2 - M_z = 0 &\rightarrow \\ M_z = -R_B x + M + q(x-a)^2/2 = & \\ = -1,25qax + 2qa^2 + q \frac{x-a}{2} &: \\ \text{при } x = a \quad M_z = -0,75qa^2, & \\ x = 2a \quad M_z = 0. & \end{aligned}$$

- Участок III ($2a \leq x \leq 3a$)



$$\begin{aligned} \sum y = 0 \quad -R_B + qa - q(x-2a) - Q_y = 0 &\rightarrow \\ Q_y = -R_B + qa - q(x-2a) = -1,25qa + qa - q(x-2a): & \\ \text{при } x = 2a \quad Q_y = -0,25qa, & \\ x = 3a \quad Q_y = -1,25qa; & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum m_O = 0 \\ -R_B x + M + qa(x-1,5a) - q(x-2a)(x-2a)/2 - M_z = 0 &\rightarrow \\ M_z = -R_B x + M + qa(x-1,5a) - q(x-2a)^2/2 = & \end{aligned}$$

$$= -1,25qax + 2qa^2 + qa \cdot x - 1,5a - q \frac{x-2a}{2}^2 :$$

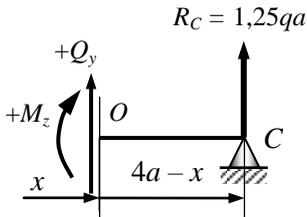
$$\text{при } x = 2a \quad M_z = 0,$$

$$x = 3a \quad M_z = -0,75qa^2.$$

- Участок IV ($3a \leq x \leq 4a$)

$$\sum y = 0 \quad Q_y + R_C = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = -R_C = -1,25qa;$$



$$\sum m_O = 0 \quad R_C(4a-x) - M_z = 0 \rightarrow$$

$$M_z = R_C(4a-x) = 1,25qa(4a-x):$$

$$\text{при } x = 3a \quad M_z = 1,25qa^2,$$

$$x = 4a \quad M_z = 0.$$

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 4.5.

Задача
7

Расчет прямолинейных стержней при плоском изгибе

I. Расчет на прочность: определение допускаемой нагрузки

Чугунная балка нагружена в соответствии с заданной расчетной схемой (рис. 4.6). Исходные данные приведены в табл. 4.2. При расчете принять: допускаемое напряжение на растяжение $\sigma_p = 40$ МПа, на сжатие $\sigma_c = 120$ МПа.

Определить допускаемую нагрузку q из условия прочности по нормальным напряжениям при рациональном расположении заданного поперечного сечения (рис. 4.7).

II. Расчет на изгиб двутавровой балки

Для стальной балки (Ст3) при заданной расчетной схеме и найденной нагрузке (по п. I):

- из условия полной проверки на статическую прочность подобрать по ГОСТу требуемый номер двутаврового профиля;
- построить эпюры углов поворота (в градусах) и прогибов (в миллиметрах).

При расчете принять: допускаемое напряжение $\sigma = 160$ МПа, модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Таблица 4.2

Исходные данные к задаче 7

Номер строки	Схема рис. 4. 6	Сечение рис. 4.7	Соотношение силовых факторов		l , м	r , мм
			F/ql	M/ql^2		
1	1	1	1	1	1,0	40
2	2	2	2	2	0,9	35
3	3	3	3	3	0,8	30
4	4	4	3	1	0,7	25
5	5	5	2	2	0,6	20
6	6	6	1	3	1,0	15
7	7	1	1	1	0,9	20
8	8	3	2	2	0,8	25
9	9	5	3	3	0,7	30
0	10	6	3	2	0,6	40
		е	д		г	е

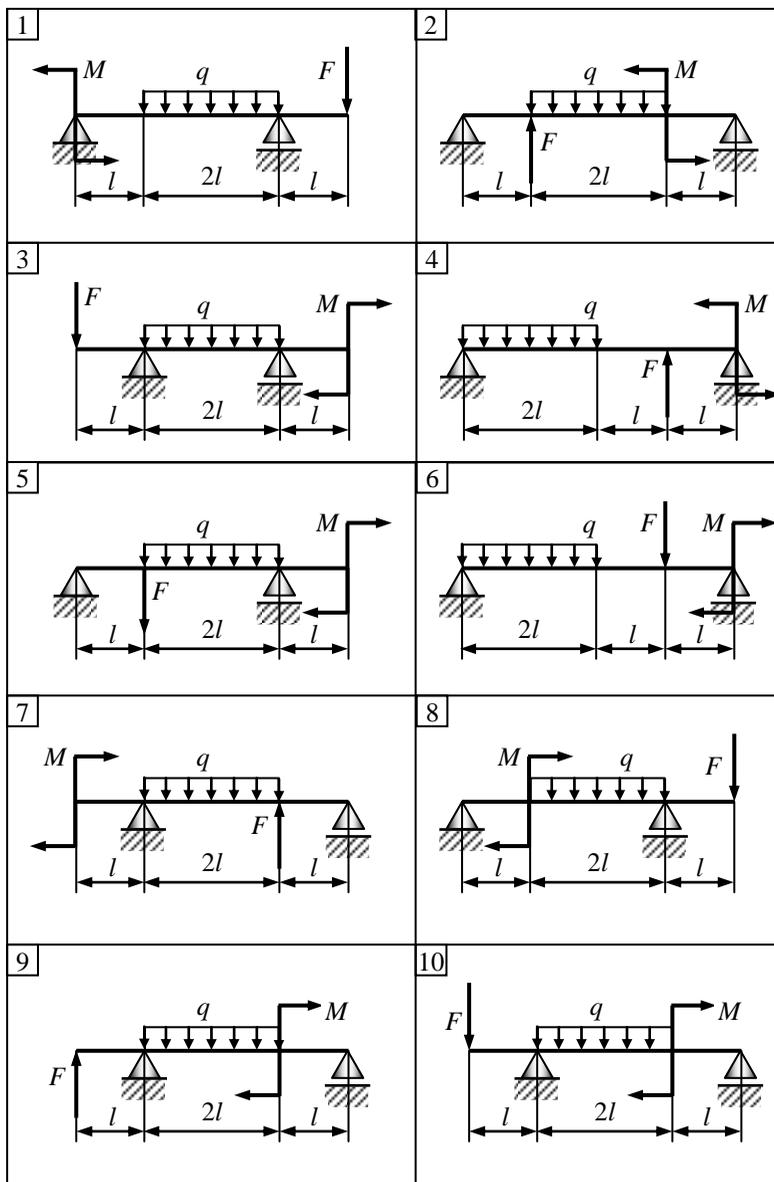


Рис. 4.6. Расчетные схемы к задаче 7

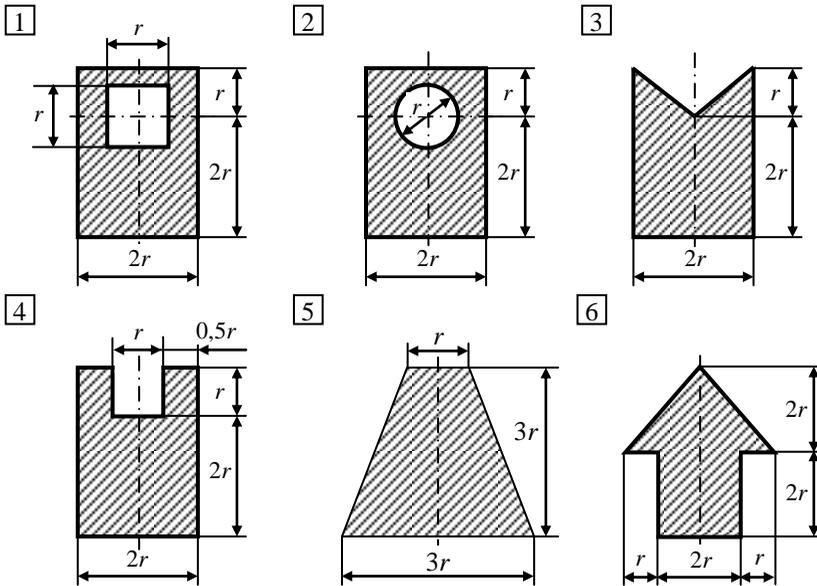


Рис. 4.7. Поперечные сечения стержня к задаче 7

**ПРИМЕР РАСЧЕТА
И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ**

I. Расчет на прочность: определение допускаемой нагрузки

Чугунная балка нагружена в соответствии с заданной расчетной схемой (рис. 4.8, а). При расчете принять: допускаемое напряжение на растяжение $\sigma_p = 40$ МПа, допускаемое напряжение на сжатие $\sigma_c = 120$ МПа.

Исходные данные к задаче

Схема	Сечение	Соотношение силовых факторов		l , м	r , мм
		F/ql	M/ql^2		
рис. 4.8, а	рис. 4.8, б	1,0	1,0	1,0	30

Определить допускаемую нагрузку q из условия прочности по нормальным напряжениям при рациональном расположении заданного поперечного сечения (рис. 4.8, б).

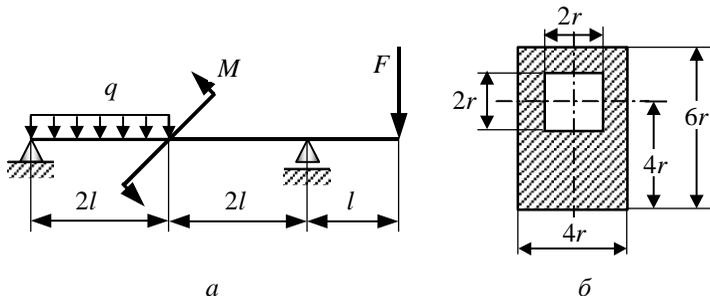


Рис. 4.8. Расчетная схема (а) и поперечное сечение (б) балки

II. Расчет на изгиб двутавровой балки

Для стальной балки (Ст3) при заданной расчетной схеме (рис. 4.8, а) и найденной нагрузке q (по п. I):

- из условия полной проверки на статическую прочность подобрать по ГОСТу требуемый номер двутаврового профиля;
- построить эпюры углов поворота (в градусах) и прогибов (в миллиметрах).

При расчете принять: допускаемое напряжение $\sigma = 160$ МПа, модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение

I. Расчет на прочность: определение допускаемой нагрузки

Определение реакций опор. Принимаем начало системы координат x на левом конце балки (рис. 4.9).

Так как направления реакций опор R_B и R_K неизвестны, то предполагаем их направления положительными (направленными вверх). Далее составляем два уравнения равновесия:

$$\sum m_B = 0 \quad -F(5l) + R_K(4l) + M - (q \cdot 2l)l = 0,$$

$$R_K = \frac{5Fl - M + 2ql^2}{4l} = \frac{5ql^2 - ql^2 + 2ql^2}{4l} = 1,5ql.$$

$$\sum m_K = 0 \quad R_B(4l) - (q \cdot 2l)3l - M + Fl = 0,$$

$$R_B = \frac{6ql^2 + M - Fl}{4l} = \frac{6ql^2 + ql^2 - ql^2}{4l} = 1,5ql.$$

Для проверки правильности нахождения реакций опор используем уравнение

$$\begin{aligned} \sum y = 0 \quad R_B - q(2l) + R_K - F = 0, \\ 1,5ql - 2ql + 1,5ql - ql = 0, \end{aligned}$$

т. е. опорные реакции определены правильно.

Построение эюр перерезывающих сил Q_y и изгибающих моментов M_z . Предварительно разбиваем балку на силовые участки. Границами силовых участков являются точки приложения сосредоточенных нагрузок (сил и моментов), начало и конец участка с распределенной нагрузкой. На рис. 4.9 эти участки обозначены цифрами I, II, III. Далее рассматриваем последовательно силовые участки и, используя метод сечений, определяем внутренние силовые факторы Q_y и M_z .

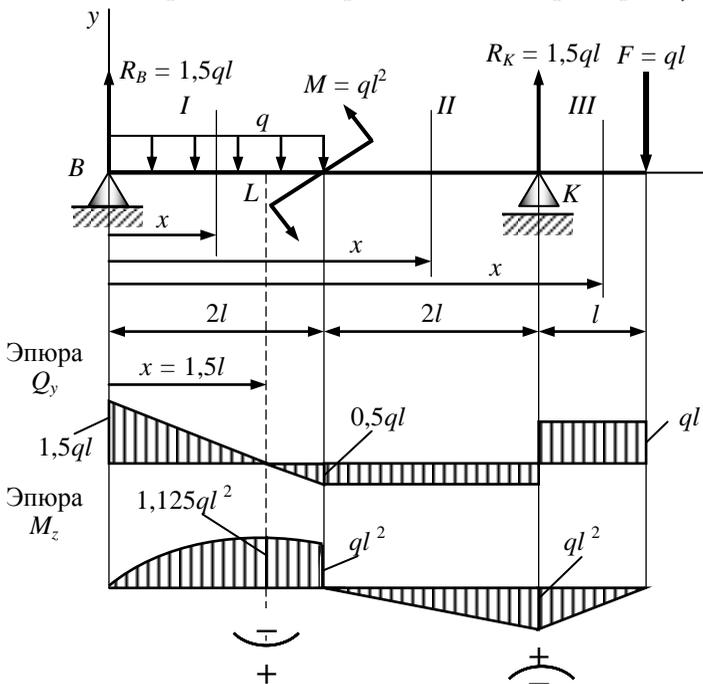
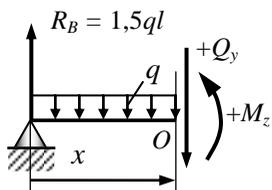


Рис. 4.9. Расчетная схема балки и эюры внутренних силовых факторы

■ При составлении уравнений равновесия для отсеченной части балки всегда будем предполагать положительное направление внутренних силовых факторов Q_y и M_z .

- Участок I ($0 \leq x \leq 2l$)



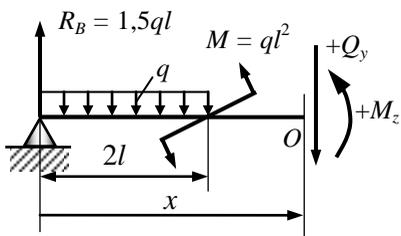
$$\begin{aligned} \sum y = 0 \quad R_B - qx - Q_y = 0 &\rightarrow \\ Q_y = R_B - qx = 1,5ql - qx & \\ \text{при } x = 0 \quad Q_y = 1,5ql, & \\ x = 2l \quad Q_y = -0,5ql; & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum m_O = 0 \quad R_B x - (qx)(x/2) - M_z = 0 &\rightarrow \\ M_z = R_B x - qx^2/2 = 1,5qlx - qx^2/2 & \\ \text{при } x = 0 \quad M_z = 0, & \\ x = 2l \quad M_z = ql^2. & \end{aligned}$$

Так как на участке I эпюра Q_y пересекает ось x , то в точке пересечения эпюра M_z будет иметь экстремальное значение. Для определения этого значения найдем точку пересечения x_0 из уравнения

$$\begin{aligned} Q_y = R_B - qx_0 = 1,5ql - qx_0 = 0 &\rightarrow x_0 = 1,5l; \\ M_z|_{x_0=1,5l} = 1,5ql(1,5l) - q(1,5l)^2/2 &= 1,125ql^2. \end{aligned}$$

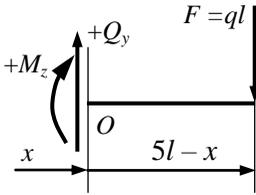
- Участок II ($2l \leq x \leq 4l$)



$$\begin{aligned} \sum y = 0 \quad R_B - q(2l) - Q_y = 0 &\rightarrow \\ Q_y = R_B - 2ql = & \\ = 1,5ql - 2ql = -0,5ql; & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum m_O = 0 \\ R_B x - q(2l)(x-l) - M - M_z = 0 &\rightarrow \\ M_z = R_B x - 2ql(x-l) - M = 1,5qlx - 2ql(x-l) - ql^2 & \\ \text{при } x = 2l \quad M_z = 0, & \\ x = 4l \quad M_z = -ql^2. & \end{aligned}$$

- Участок III ($4l \leq x \leq 5l$)



$$\sum y = 0 \quad Q_y - F = 0 \rightarrow Q_y = F = ql;$$

$$\sum m_O = 0 \quad M_z + F(5l - x) = 0 \rightarrow$$

$$M_z = -F(5l - x) = -ql(5l - x);$$

$$\text{при } x = 4l \quad M_z = -ql^2,$$

$$x = 5l \quad M_z = 0.$$

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 4.9.

Геометрические характеристики поперечного сечения

1. Для определения центра тяжести сложного поперечного сечения разбиваем сложное сечение на простые фигуры, для которых известно положение их центров тяжести. В нашем случае это прямоугольник без отверстия и квадрат (отверстие) с центрами тяжести C_1 и C_2 соответственно (рис. 4.10).

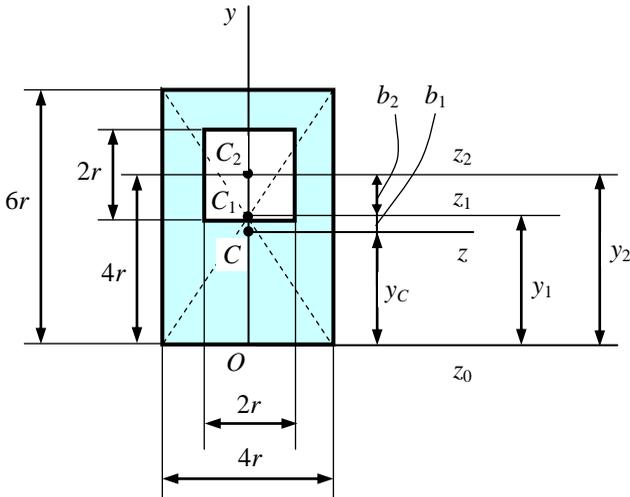


Рис. 4.10. Определение центра тяжести C сложного сечения

Так как сечение имеет одну ось симметрии (ось y), то в качестве исходной принимаем систему координат yOz_0 . Ось y является одной из главных осей, вторая главная ось z проходит через центр тяжести C сечения перпендикулярно к первой. Центр тяжести сечения будет располагаться на оси симметрии y . Координата y_C центра тяжести C сечения (рис. 4.10) вычисляется по формуле

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_{C_i} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i},$$

где y_{C_i} – расстояние от центра тяжести C_i сечения i -й фигуры до оси z , n – число простых фигур, A_i – площадь i -й фигуры.

В нашем случае, полагая, что прямоугольник имеет положительную площадь A_1 , а квадрат (отверстие) – отрицательную A_2 , имеем:

$$\sum_{i=1}^n y_{C_i} A_i = y_1 A_1 + y_2 A_2 = 3r \cdot 4r \cdot 6r - 4r \cdot 2r \cdot 2r = 56r^3,$$

$$\sum_{i=1}^n A_i = A_1 - A_2 = 4r \cdot 6r - 2r \cdot 2r = 20r^2.$$

Таким образом, координата центра тяжести C определится как

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_{C_i} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{56r^3}{20r^2} = 2,8r = 2,8 \cdot 30 = 84 \text{ мм}.$$

2. Осевой момент инерции сложного поперечного сечения относительно нейтральной оси z :

$$I_z = I_z^1 + I_z^2.$$

Моменты инерции составляющих фигур I_z^1, I_z^2 вычисляются по формуле перехода к осям, параллельным центральным осям, т. е.

$$I_z^1 = I_{z_1}^1 + b_1^2 A_1 = \frac{4r \cdot 6r^3}{12} + 0,2r^2 \cdot 24r^2 = 72,96r^4 =$$

$$= 72,96 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = 5909,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_z^2 = - I_{z_2}^2 + b_2^2 A_2 = - \left(\frac{2r \cdot 2r^3}{12} + 1,2^2 \cdot 4r^2 \right) = -7,093r^4 =$$

$$= -7,093 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = -574,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_z = 5909,8 \cdot 10^{-8} - 574,5 \cdot 10^{-8} = 5335,3 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 .$$

Здесь для вычисления осевого момента инерции простой фигуры в форме прямоугольника (квадрата) использовалась формула

$$I_{z_i} = \frac{bh^3}{12},$$

где b – сторона, параллельная оси, относительно которой вычисляется момент инерции.

Момент инерции I_z является главным моментом инерции поперечного сечения балки (рис. 4.10).

Рациональное расположение сечения. Наибольший изгибающий момент действует в сечении L и равен $M_z^{(L)}_{\max} = 1,125ql^2$ (рис. 4.9). Так как значение момента положительно, то нижние волокна сечения растягиваются, а верхние – сжимаются.

■ В связи с тем, что материал балки лучше работает на сжатие

$\sigma_c > \sigma_p$ и поперечное сечение является несимметричным относительно оси z , то рациональным расположением сечения будет такое, при котором наиболее удаленные от нейтральной оси волокна оказываются в сжатой зоне.

В нашем случае рациональное расположение сечения показано на рис. 4.11.

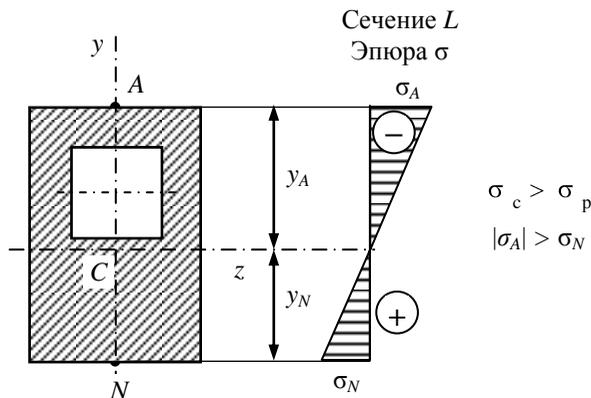


Рис. 4.11. Рациональное расположение сечения

Определение допускаемой нагрузки из условия прочности. Так как сечение балки несимметрично относительно оси z , то расчет на прочность необходимо провести для точки N , расположенной в растянутой зоне, и точки A , расположенной в сжатой зоне. Предварительно определим осевые моменты сопротивления:

$$W_z^N = \frac{I_z}{y_N} = \frac{5335,3 \cdot 10^{-8}}{84 \cdot 10^{-3}} = 63,515 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3;$$

$$W_z^A = \frac{I_z}{y_A} = \frac{5335,3 \cdot 10^{-8}}{180 - 84 \cdot 10^{-3}} = 55,576 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

В растянутой зоне (точка N):

$$\sigma_N = \frac{M_{z \max}^L}{W_z^N} = \frac{1,125ql^2}{W_z^N} \leq \sigma_p;$$

$$q \leq \frac{\sigma_p W_z^N}{1,125l^2} \leq \frac{40 \cdot 63,515 \cdot 10^{-5}}{1,125 \cdot 1^2} \leq 22,6 \cdot 10^{-3} \text{ МН/м.}$$

В сжатой зоне (точка A):

$$\sigma_A = \frac{M_{z \max}^L}{W_z^A} = \frac{1,125ql^2}{W_z^A} \leq \sigma_c;$$

$$q \leq \frac{\sigma_c W_z^A}{1,125l^2} \leq \frac{120 \cdot 55,576 \cdot 10^{-5}}{1,125 \cdot 1^2} \leq 59,3 \cdot 10^{-3} \text{ МН/м.}$$

Для окончательного выбора значения нагрузки необходимо провести расчет на прочность по наибольшим растягивающим напряжениям в сечении K (рис. 4.9). Хотя в сечении K изгибающий момент меньше максимального, но сечение балки расположено нерационально – растянуты верхние волокна (рис. 4.12):

сечение K, точка A (растяжение)

$$\sigma_A = \frac{M_{z \max}^K}{W_z^A} = \frac{ql^2}{W_z^A} \leq \sigma_p;$$

$$q \leq \frac{\sigma_p W_z^A}{l^2} \leq \frac{40 \cdot 55,576 \cdot 10^{-5}}{1^2} \leq 22,2 \cdot 10^{-3} \text{ МН/м.}$$

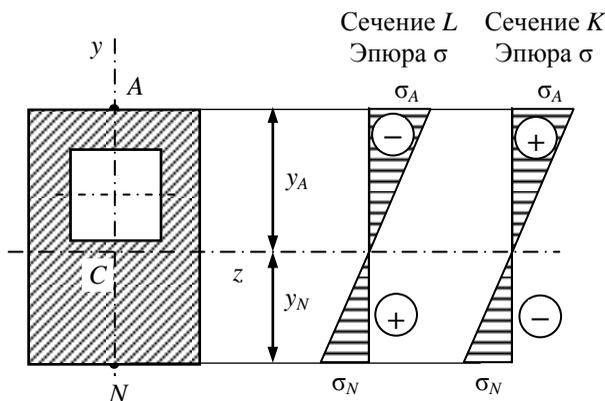


Рис. 4.12. К расчету на прочность сечения K

Следовательно, окончательно принимаем

$$q = 22,2 \text{ кН/м.}$$

Ответ

II. Расчет на изгиб двутавровой балки

На рис. 4.13 представлена расчетная схема балки и эпюры Q_y , M_z (см. рис. 4.9) с учетом результатов расчета, полученных в п. I, для $q = 22,2 \text{ кН/м}$.

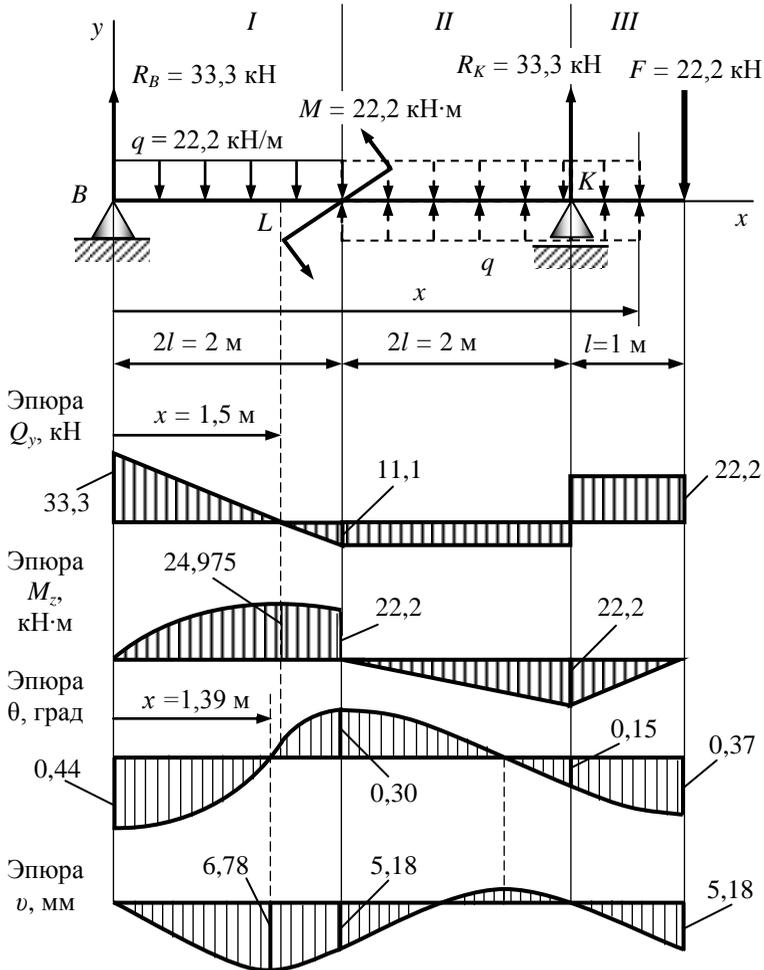


Рис. 4.13. Расчетная схема балки и эпюры

Расчет балки на полную статическую прочность. Материал балки (сталь) одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, в связи с чем $[\sigma_p] = \sigma_c = \sigma$. Согласно исходным данным задачи $[\sigma] = 160$ МПа.

■ Номер двутаврового сечения балки определяем из расчета на прочность по максимальным нормальным напряжениям. Для опасного сечения L (рис. 4.13) из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} \leq \sigma$$

определяем требуемый осевой момент сопротивления

$$W_z \geq \frac{M_{z\max}}{\sigma} \geq \frac{24,975 \cdot 10^{-3}}{160} \geq 0,156 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \geq 156 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента (ГОСТ 8239-89) определяем номер двутаврового сечения, который имеет момент сопротивления, равный или больше расчетного. Принимаем двутавр № 18а, имеющий $W_{z\text{табл}} = 159 \text{ см}^3 > 156 \text{ см}^3$. В этом случае наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_{z\text{табл}}} = \frac{24,975 \cdot 10^{-3}}{159 \cdot 10^{-6}} = 157 \text{ МПа} < \sigma = 160 \text{ МПа}.$$

Схематично поперечное сечение изображено на рис. 4.14. Характеристики двутаврового профиля № 18а следующие:

Номер профиля	Размеры, мм				$I_z, \text{ см}^4$	$W_z, \text{ см}^3$	$S_z, \text{ см}^3$
	h	b	d	t			
18а	180	100	5,1	8,3	1430	159	89,8

■ Выполняем проверку прочности двутавра № 18а по максимальным касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y\max} S_{z\max}^*}{I_z b} \leq \tau.$$

В сечении B с максимальным значением перерезывающей силы $Q_y = 33,3$ кН проверяем прочность в точке 3 поперечного сечения балки (рис. 4.14):

$$[\tau] = 0,6[\sigma] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа},$$

$$b = d = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ м,}$$

$$S_{z \max}^* = S_{z \text{табл}} = 89,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$\tau_{\max} = \frac{33,3 \cdot 10^{-3} \cdot 89,8 \cdot 10^{-6}}{1430 \cdot 10^{-8} \cdot 5,1 \cdot 10^{-3}} = 41 \text{ МПа} < \tau = 96 \text{ МПа} .$$

Условие прочности по максимальным касательным напряжениям в точке 3 выполняется.

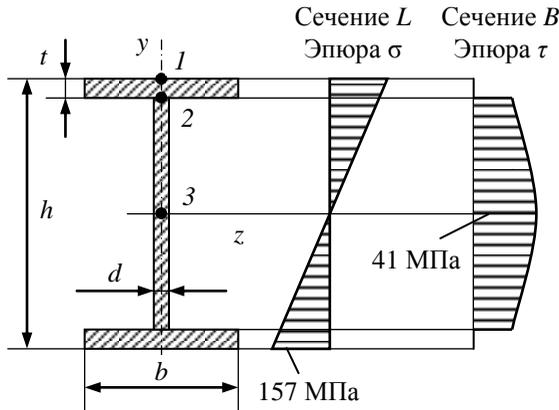


Рис. 4.14. Поперечное сечение

■ Проверяем прочность поперечного сечения в точке 2, где σ и τ одновременно достигают больших значений (рис. 4.14). Для их вычисления берутся значения M_z и Q_y для сечения K (рис. 4.13), где M_z и Q_y достигают значений, несколько меньших наибольших значений: $M_z = 22,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $Q_y = 22,2 \text{ кН}$. Расчет ведем по критерию удельной потенциальной энергии формоизменения:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma .$$

Вычисляем:

- статический момент отсеченной части (полки), расположенной выше т. 2:

$$S_{z \ 2}^* = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) =$$

$$= 100 \cdot 10^{-3} \cdot 8,3 \cdot 10^{-3} \left(\frac{180}{2} - \frac{8,3}{2} \right) 10^{-3} = 71,26 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

где величина $\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$ есть расстояние от центра тяжести полки до оси z ;

- расстояние т. 2 до оси z :

$$y_2 = h/2 - t = 180/2 - 8,3 \cdot 10^{-3} = 81,7 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

- нормальное и касательное напряжения в т. 2:

$$\sigma_2 = \frac{M_z^K}{I_z} y_2 = \frac{22,2 \cdot 10^{-3}}{1430 \cdot 10^{-8}} 81,7 \cdot 10^{-3} = 126,83 \text{ МПа},$$

$$\tau_2 = \frac{Q_y^K S_z^*}{I_z d} = \frac{22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 71,26 \cdot 10^{-6}}{1430 \cdot 10^{-8} \cdot 5,1 \cdot 10^{-3}} = 21,69 \text{ МПа}.$$

Эквивалентное напряжение в т. 2:

$$\sigma_{\text{эKB}} = \sqrt{126,83^2 + 3 \cdot 21,69^2} = 132,2 \text{ МПа} < \sigma = 160 \text{ МПа},$$

т. е. прочность поперечного сечения в точке 2 обеспечена.

Таким образом, расчет балки на полную статическую прочность показал, что выбранный двутавр № 18а может быть оставлен в конструкции балки.

Ответ

Расчет углов поворота и прогибов балки. Для определения углов поворота и прогибов балки воспользуемся универсальным уравнением упругой линии, которое для балки с постоянным поперечным сечением имеет вид

$$EI_z v'' = M_z(x).$$

Составляем уравнение изгибающих моментов $M_z(x)$ для участка III балки (рис. 4.13). При этом считаем:

- распределенная нагрузка продлена до конца балки и на участках II, III приложена компенсирующая нагрузка, как показано на рис. 4.13;

- сосредоточенный момент умножается на плечо в нулевой степени.

Тогда

$$M_z \cdot x = R_B x - q \frac{x^2}{2} - M \cdot x - 2l^0 + q \frac{x - 2l^2}{2} + R_K \cdot x - 4l \cdot$$

Дифференциальное уравнение упругой линии имеет вид

$$EI_z v'' = R_B x - q \frac{x^2}{2} - M \cdot x - 2l^0 + q \frac{x - 2l^2}{2} + R_K \cdot x - 4l \cdot \quad (1)$$

Интегрируем (1) без раскрытия скобок и получаем уравнение для углов поворота сечений:

$$\begin{aligned} EI_z v' &= EI_z \theta = \\ &= R_B \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6} - M \cdot x - 2l + q \frac{x - 2l^3}{6} + R_K \frac{x - 4l^2}{2} + C. \end{aligned} \quad (2)$$

Интегрируя (1) второй раз, получаем уравнение прогибов:

$$\begin{aligned} EI_z v &= R_B \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} - \\ &- M \frac{x - 2l^2}{2} + q \frac{x - 2l^4}{24} + R_K \frac{x - 4l^3}{6} + Cx + D. \end{aligned} \quad (3)$$

Значения постоянных C и D определяем из граничных условий:
при $x = 0 \quad v = 0;$
 $x = 4l \quad v = 0.$

Подставляя первое граничное условие в уравнение (3), получаем $D = 0$. Подставляя второе условие в (3), имеем

$$0 = R_B \frac{4l^3}{6} - q \frac{4l^4}{24} - M \frac{4l - 2l^2}{2} + q \frac{4l - 2l^4}{24} + C \cdot 4l \cdot,$$

откуда $C = -ql^3$.

Окончательно имеем:

- уравнение углов поворота сечений балки

$$EI_z \theta = -ql^3 + R_B \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6} -$$

$$-M \left. x - 2l \right|_{x>2l} + q \left. \frac{x - 2l^3}{6} \right|_{x>2l} + R_K \left. \frac{x - 4l^2}{2} \right|_{x>4l} ; \quad (4)$$

- уравнение прогибов сечений балки

$$EI_z v = -ql^3 x + R_B \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} - M \left. \frac{x - 2l^2}{2} \right|_{x>2l} + q \left. \frac{x - 2l^4}{24} \right|_{x>2l} + R_K \left. \frac{x - 4l^3}{6} \right|_{x>4l} . \quad (5)$$

Для построения эпюр углов поворота и прогибов балки следует в полученные уравнения (4), (5) подставить характерные значения абсцисс сечений (рис. 4.13).

Эпюра углов поворота сечений балки на основе уравнения (4):

- $x = 0 \rightarrow EI_z \theta = -ql^3 \rightarrow$

$$\theta = -\frac{ql^3}{EI_z} = -\frac{22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = -0,00776 \text{ рад} = -0,44^\circ;$$

- $x = 2l \rightarrow EI_z \theta = -ql^3 + R_B \frac{2l^2}{2} - q \frac{2l^3}{6} = 0,667ql^3 \rightarrow$

$$\theta = \frac{0,667ql^3}{EI_z} = \frac{0,667 \cdot 22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = 0,00518 \text{ рад} = 0,30^\circ;$$

на участке I определим сечение, где эпюра пересекает ось абсцисс

$$EI_z \theta = -ql^3 + R_B \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6} = 0 \rightarrow x = 1,39l = 1,39 \text{ м};$$

- $x = 4l \rightarrow$

$$EI_z \theta = -ql^3 + R_B \frac{4l^2}{2} - q \frac{4l^3}{6} - M \left. 4l - 2l \right|_{x>2l} + q \left. \frac{4l - 2l^3}{6} \right|_{x>2l} = -0,333ql^3 \rightarrow$$

$$\theta = -\frac{0,333ql^3}{EI_z} = -\frac{0,333 \cdot 22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = -0,00258 \text{ рад} = -0,15^\circ;$$

• $x = 5l \rightarrow$

$$EI_z \theta = -ql^3 + R_B \frac{5l^2}{2} - q \frac{5l^3}{6} - M \left. 5l - 2l \right|_{x>2l} +$$

$$+ q \left. \frac{5l - 2l^3}{6} \right|_{x>2l} + R_K \left. \frac{5l - 4l^2}{2} \right|_{x>4l} = -0,833ql^3 \rightarrow$$

$$\theta = -\frac{0,833ql^3}{EI_z} = -\frac{0,833 \cdot 22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = -0,00647 \text{ рад} = -0,37^\circ.$$

Эпюра прогибов сечений балки на основе уравнения (5):

• $x = 0 \rightarrow EI_z v = 0 \rightarrow v = 0;$

• $x = 1,39l \rightarrow$

$$EI_z v = -ql^3 \cdot 1,39l + R_B \frac{1,39l^3}{6} - q \frac{1,39l^4}{24} = -0,874ql^4 \rightarrow$$

$$v = -\frac{0,874ql^4}{EI_z} = -\frac{0,874 \cdot 22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = -0,00678 \text{ м} = -6,78 \text{ мм};$$

• $x = 2l \rightarrow$

$$EI_z v = -ql^3 \cdot 2l + R_B \frac{2l^3}{6} - q \frac{2l^4}{24} = -0,667ql^4 \rightarrow$$

$$v = -\frac{0,667ql^4}{EI_z} = -\frac{0,667 \cdot 22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = -0,00518 \text{ м} = -5,18 \text{ мм};$$

• $x = 4l \rightarrow$

$$EI_z v = -ql^3 \cdot 4l + R_B \frac{4l^3}{6} - q \frac{4l^4}{24} - M \frac{4l - 2l^2}{2} + q \frac{4l - 2l^4}{24} = 0$$

$$\rightarrow v = 0;$$

• $x = 5l \rightarrow$

$$EI_z v = -ql^3 \cdot 5l + R_B \frac{5l^3}{6} - q \frac{5l^4}{24} - M \frac{5l - 2l^2}{2} +$$
$$+ q \frac{5l - 2l^4}{24} + R_K \frac{5l - 4l^3}{6} = -0,667ql^4 \rightarrow$$

$$v = -\frac{0,667ql^4}{EI_z} = -\frac{0,667 \cdot 22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = -0,00518 \text{ м} = -5,18 \text{ мм.}$$

Эпюры углов поворота и прогибов сечений балки приведены на рис. 4.13.

.....

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

**Задача
8**

Расчет вала редуктора с цилиндрическими косозубыми колесами

Промежуточный вал (материал – сталь) косозубой цилиндрической передачи опирается на два подшипника (рис. 5.1) и при равномерном вращении передает заданную мощность. При работе в месте зацепления зубчатых колес возникает усилие, составляющие которого показаны на расчетной схеме. Исходные данные приведены в табл. 5.1.

Требуется определить диаметр вала сплошного сечения из условия статической прочности. При определении диаметра вала продольной силой и перерезывающими силами пренебречь.

Таблица 5.1

Исходные данные к задаче 8

Номер строки	Схема, рис. 5.1	Допус- каемое напря- жение	Мощ- ность	Ско- рость враще- ния	Осевое усилие	Ради- альное усилие	Диаметры зубчатых колес		Линейные размеры		
		[σ]	N	n	F_a	F_r	D_1	D_2	a	b	c
		МПа	кВт	мин ⁻¹	–	–	м		м		
1	1	60	30	200	$0,1F_t$	$0,3F_t$	0,2	0,4	0,2	0,4	0,3
2	2	70	35	240	$0,2F_t$	$0,3F_t$	0,5	0,3	0,3	0,4	0,3
3	3	80	40	280	$0,1F_t$	$0,4F_t$	0,4	0,5	0,2	0,3	0,2
4	4	90	45	300	$0,2F_t$	$0,4F_t$	0,5	0,4	0,3	0,4	0,2
5	5	60	50	340	$0,2F_t$	$0,3F_t$	0,3	0,4	0,3	0,3	0,3
6	6	70	55	380	$0,1F_t$	$0,3F_t$	0,5	0,2	0,4	0,4	0,4
7	7	80	60	400	$0,2F_t$	$0,4F_t$	0,4	0,3	0,2	0,2	0,2
8	8	90	40	420	$0,1F_t$	$0,3F_t$	0,2	0,3	0,4	0,3	0,2
9	9	70	45	450	$0,1F_t$	$0,4F_t$	0,3	0,2	0,4	0,2	0,3
0	10	80	50	250	$0,1F_t$	$0,3F_t$	0,4	0,2	0,4	0,3	0,4
	е	г	д		е		д		е		

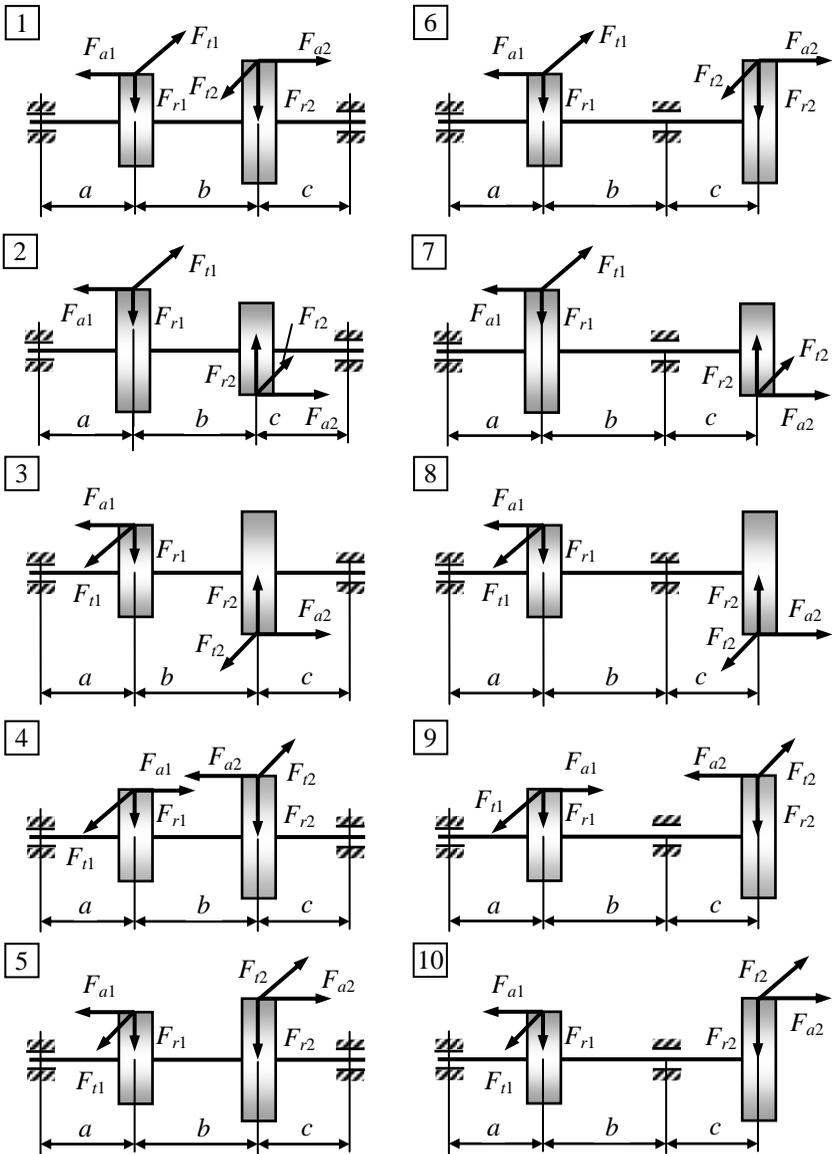


Рис. 5.1. Расчетные схемы к задаче 8

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

Промежуточный вал (материал – сталь) косозубой цилиндрической передачи опирается на два подшипника и при равномерном вращении передает заданную мощность. При работе в месте зацепления зубчатых колес возникает усилие, составляющие которого показаны на расчетной схеме (рис.5.2, а). Исходные данные приведены в таблице:

Допускаемое напряжение	Мощность	Скорость вращения	Осевое усилие	Радиальное усилие	Диаметры зубчатых колес		Линейные размеры		
					D_1	D_2	a	b	c
[σ]	P	n	F_a	F_r	м		м		
МПа	кВт	мин ⁻¹	–	–	м		м		
60	47	258	$0,1F_t$	$0,4F_t$	0,5	0,4	0,2	0,3	0,2

Требуется определить диаметр вала сплошного сечения из условия статической прочности. При определении диаметра вала продольной силой и перерезывающими силами пренебречь.

Решение

Определение внешней нагрузки. Определяем момент, передаваемый валом:

$$M_e = 9554 \frac{P}{n} = 9554 \frac{47}{258} = 1740 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Определяем усилия, действующие на зубчатые колеса:

- окружные усилия:

$$F_{t1} = \frac{M}{D_1/2} = \frac{1740}{0,5/2} = 6960 \text{ Н},$$

$$F_{t2} = \frac{M}{D_2/2} = \frac{1740}{0,4/2} = 8700 \text{ Н},$$

- радиальные и осевые усилия:

На первом колесе	На втором колесе
$F_{a1} = 0,1F_{t1} = 696 \text{ Н}$	$F_{a2} = 0,1F_{t2} = 870 \text{ Н}$
$F_{r1} = 0,4F_{t1} = 2784 \text{ Н}$	$F_{r2} = 0,4F_{t2} = 3480 \text{ Н}$

На рис. 5.2, б изображена расчетная схема вала, на которой все внешние нагрузки приведены к оси вала. При приведении нагрузок к оси вала от осевых сил дополнительно возникают сосредоточенные моменты, приложенные в местах крепления колес:

$$M_1 = F_{a1}D_1 / 2 = 174 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$M_2 = F_{a2}D_2 / 2 = 174 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Определение опасного сечения. Для данной расчетной схемы (рис. 5.2, б) рассматриваем раздельно:

- кручение от моментов M_e (внутренний силовой фактор – крутящий момент M_x);
 - изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях:
 - *вертикальной плоскости* xy от сил F_r и моментов M_1, M_2 (внутренний силовой фактор – изгибающий момент M_z);
 - *горизонтальной плоскости* xz от сил F_t (внутренний силовой фактор – изгибающий момент M_y ; при построении эпюры M_y горизонтальная плоскость xz повернута в вертикальную),
- и строим эпюры перечисленных выше внутренних силовых факторов.

Для определения опасного сечения строим эпюру эквивалентного момента, используя формулу

$$M_{\text{эКВ}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_x^2}.$$

По эпюре эквивалентного момента определяем (рис.5.2):

$$M_{\text{эКВ max}} = 2105 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

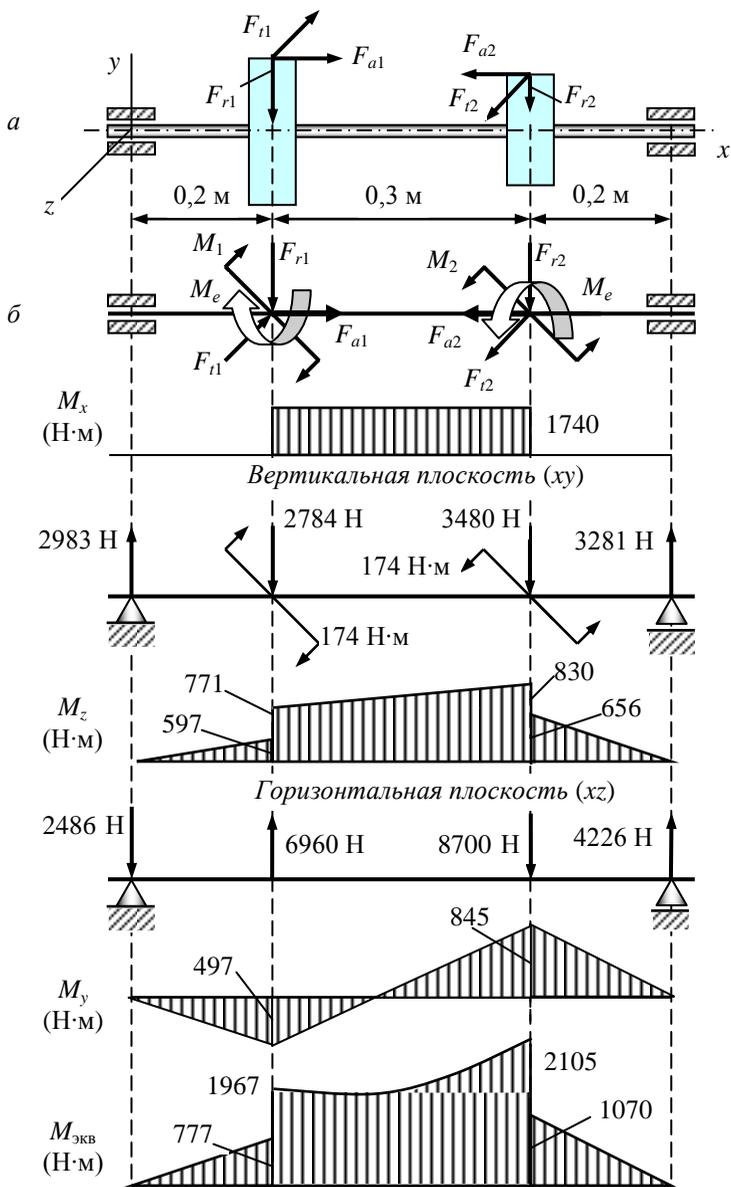


Рис. 5.2. Расчетная схема вала и эпюры

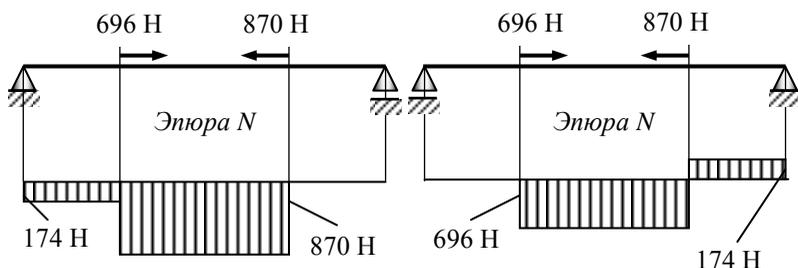
Расчет на прочность (определение диаметра вала). Из условия прочности

$$\sigma_{\text{эквmax}} = \frac{M_{\text{эквmax}}}{W_z} \leq \sigma$$

с учетом $W_z = \pi d^3/32 \approx 0,1d^3$ определяем диаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{эквmax}}}{0,1 \sigma}} \geq \sqrt[3]{\frac{2105 \cdot 10^{-6}}{0,1 \cdot 80}} \geq 0,064 \text{ м} = 64 \text{ мм.} \quad \text{Ответ}$$

Оценка влияния нормальной силы. Размер вала $d = 64$ мм получен без учета нормальной (продольной) силы, вызываемой силой F_a . Для оценки влияния нормальной силы рассмотрим две схемы опирания вала с целью выбора наиболее неблагоприятного расположения опор (рис. 5.3).



Неблагоприятное положение

Рис. 5.3. Расчетные схемы вала для учета влияния нормальной силы

Как видно из рис. 5.3, для наиболее неблагоприятного расположения опор имеем $N_{\text{max}} = 870$ Н.

Определяем нормальные напряжения с учетом деформаций изгиба и растяжения (сжатия) для наиболее опасного сечения:

$$\sigma = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W_z} + \frac{N}{A} = \frac{\sqrt{830^2 + 845^2} \cdot 10^{-6}}{0,1 \cdot 0,064^3} + \frac{870 \cdot 10^{-6}}{3,14 \cdot 0,064^2 / 4} =$$

$$= 45,2 + 0,27 = 45,47 \text{ МПа} .$$

Касательные напряжения от кручения:

$$\tau = \frac{M_x}{W_p} = \frac{1740 \cdot 10^{-6}}{0,2 \cdot 0,064^3} = 33,2 \text{ МПа} .$$

Эквивалентные напряжения по критерию наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 80,5 \text{ МПа} > \sigma = 80 \text{ МПа} . \quad \text{Ответ}$$

Перегрузка составляет:

$$[(80,5 - 80)/80]100 \% = 0,6 \%,$$

что допустимо.

.....

**Задача
9**

Расчет пространственной стержневой конструкции

Пространственная стальная стержневая конструкция состоит из стержней прямоугольного поперечного сечения с размерами $b \times h$ (рис. 5.4). Стержни образуют в местах сопряжения прямые углы. Допускаемое напряжение материала $\sigma = 200$ МПа, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, модуль сдвига $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа. Исходные данные к задаче приведены в табл. 5.2.

Требуется определить:

- 1) допускаемую интенсивность нагрузки q при рациональном расположении поперечного сечения стержня;
- 2) вертикальное перемещение свободного торца конструкции при действии этой нагрузки.

Указание. Искомое перемещение определить энергетическим методом с учетом всех внутренних усилий, оценив влияние каждого из них на результат.

Таблица 5.2

Исходные данные к задаче 9

Номер строки	Схема	Соотношение силовых факторов		Длина, м	Размеры поперечного сечения, мм	
		F/ql	M/ql^2		l	b
1	1	1	6	0,2	40	60
2	2	2	5	0,3	45	70
3	3	3	4	0,4	50	80
4	4	4	3	0,5	55	80
5	5	5	2	0,2	60	90
6	6	6	1	0,3	65	100
7	7	4	1	0,4	70	120
8	8	3	2	0,5	35	60
9	9	2	3	0,3	40	80
0	10	1	4	0,4	50	100
	е	д	г	д	е	

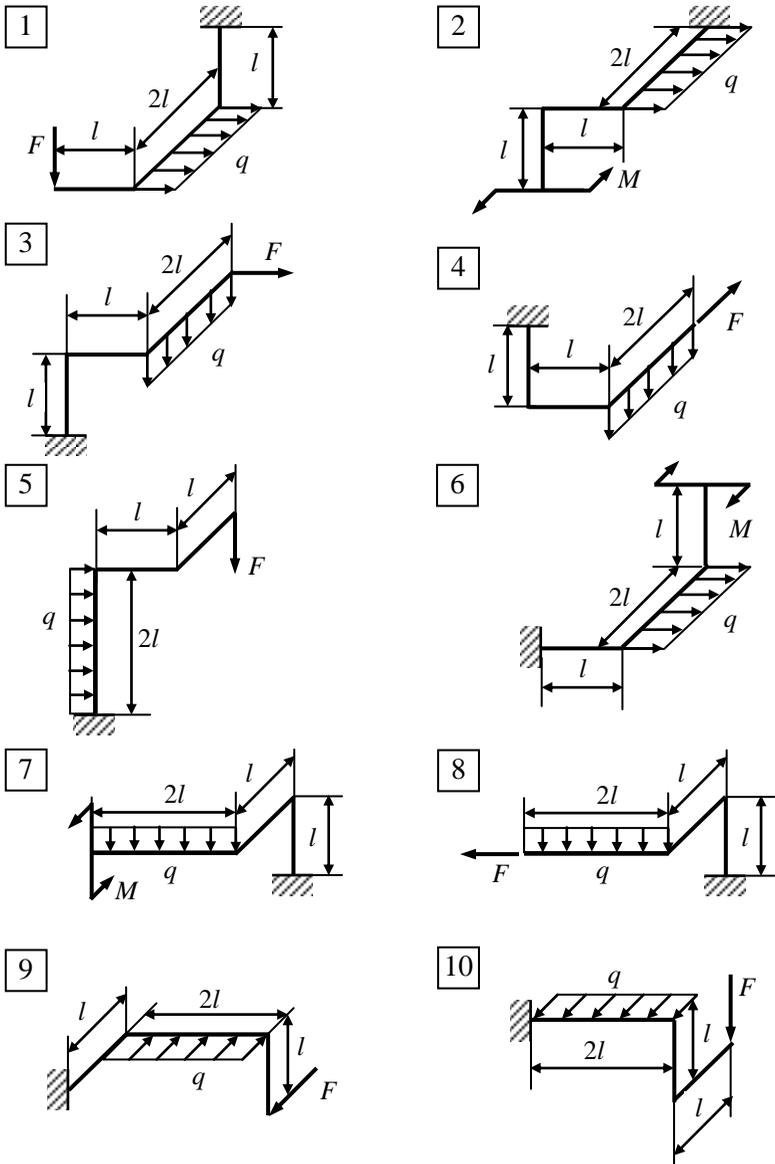


Рис. 5.4. Расчетные схемы к задаче 9

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пространственная стержневая конструкция (рис. 5.5, а) изготовлена из стали и состоит из стержней прямоугольного поперечного сечения с размерами $b \times h$, которые образуют в местах сопряжения прямые углы. Допускаемое напряжение материала $\sigma = 160$ МПа, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, модуль сдвига $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа.

Исходные данные приведены в таблице.

Отношение силовых факторов		Длина, м	Размеры поперечного сечения, мм	
F/ql	M/ql^2	l	b	h
1	1	0,5	60	100

Требуется определить:

- 1) допускаемую интенсивность нагрузки q при рациональном расположении поперечного сечения стержня;
- 2) вертикальное перемещение свободного торца конструкции при действии этой нагрузки.

Указание. Искомое перемещение определить энергетическим методом с учетом всех внутренних усилий, оценив влияние каждого из них на результат.

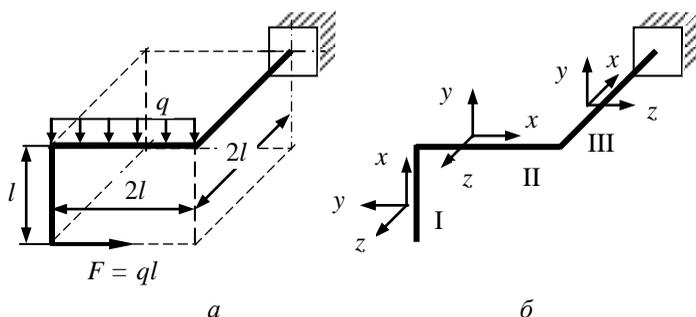


Рис. 5.5. Расчетная схема конструкции

Решение

Система координат. Выбираем скользящую систему координат (рис. 5.5, б). Расположение осей принимаем аналогично ранее принятому их расположению для балки с горизонтальной осью. Сначала наносим оси на горизонтальном участке (втором, считая от свободного торца стержня), затем переходим к первому (вертикальному) участку, поворачивая систему координат вокруг оси z ; переход к третьему участку совершается путем поворота системы координат вокруг оси y .

Эпюры внутренних сил

■ **Правило знаков:**

- нормальная сила имеет знак плюс при растяжении и знак минус при сжатии; ординаты эпюры N откладываются по оси y ;
- значения перерезывающих сил и крутящих моментов указываются по абсолютной величине; ординаты эпюр Q_y , Q_z откладываются по осям y , z соответственно в направлении внешних сил, приложенных к отсеченной части, примыкающей к свободному концу стержня; ординаты эпюры M_x – в направлении оси y ;
- ординаты эпюр изгибающих моментов M_y , M_z откладываются в плоскости действия этих моментов со стороны сжатых волокон; при наличии в их выражениях нескольких слагаемых знак плюс приписывается тем членам, которые соответствуют изгибу вогнутостью в сторону положительного направления данной координатной оси (для M_y – оси z , а для M_z – оси y).

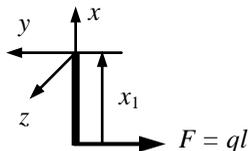
Составим выражения внутренних силовых факторов по участкам с учетом введенного выше правила знаков:

- *участок I* ($0 \leq x_1 \leq l$):

$$N = 0 \quad M_x = 0$$

$$Q_y = F = ql \quad M_y = 0$$

$$Q_z = 0 \quad M_z = -Fx_1 = -qlx_1$$

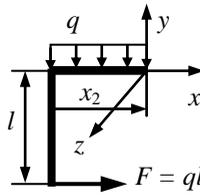


- участок II ($0 \leq x_2 \leq 2l$):

$$N = -ql \quad M_x = 0$$

$$Q_y = qx_2 \quad M_y = 0$$

$$Q_z = 0 \quad M_z = -ql^2 - qx_2^2/2$$



- участок III ($0 \leq x_3 \leq 2l$):

$$N = 0$$

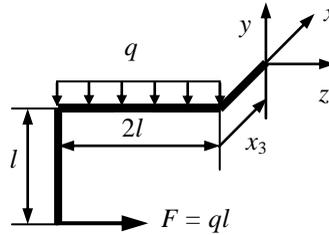
$$Q_y = 2ql$$

$$Q_z = 0$$

$$M_x = ql^2 + 2ql^2 = 3ql^2$$

$$M_y = qlx_3$$

$$M_z = -2qlx_3$$



Эпюры внутренних силовых факторов приведены на рис.5.6.

Опасное сечение – заделка, так как здесь имеем пять внутренних силовых факторов из шести.

Рациональное расположение сечения. В связи с тем, что $M_z > M_y$, то в опасном сечении поперечное сечение стержня следует расположить так, как показано на рис. 5.7.

Анализ опасных точек. На рис. 5.7 построены эпюры распределения напряжений от внутренних силовых факторов в опасном сечении – заделке. Опасными являются точки *B, C, D*:

- в точке *B* суммируются касательные напряжения τM_x кручения и τQ_z изгиба и действуют нормальные напряжения σM_z изгиба;
- в точке *C* суммируются касательные напряжения τM_x кручения и τQ_y изгиба и действуют нормальные напряжения σM_y изгиба;
- в точке *D* суммируются нормальные напряжения изгиба (положительные) σM_z , σM_y .

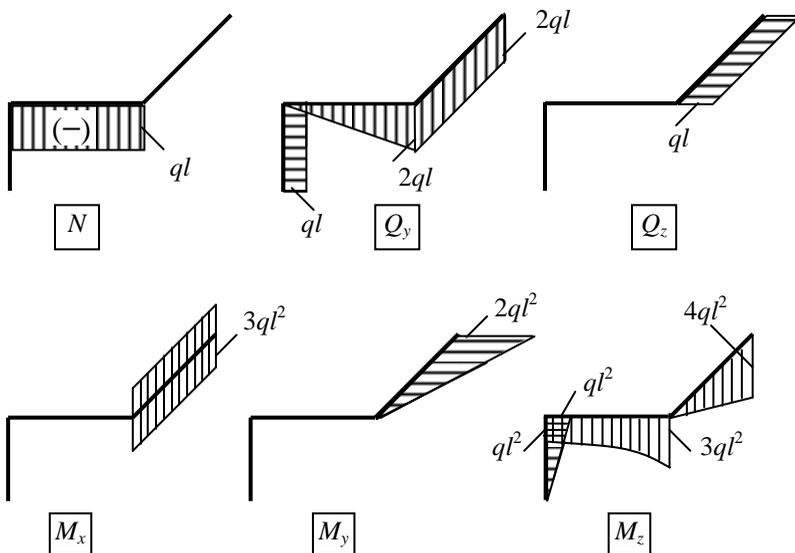


Рис. 5.6. Эпюры внутренних силовых факторов

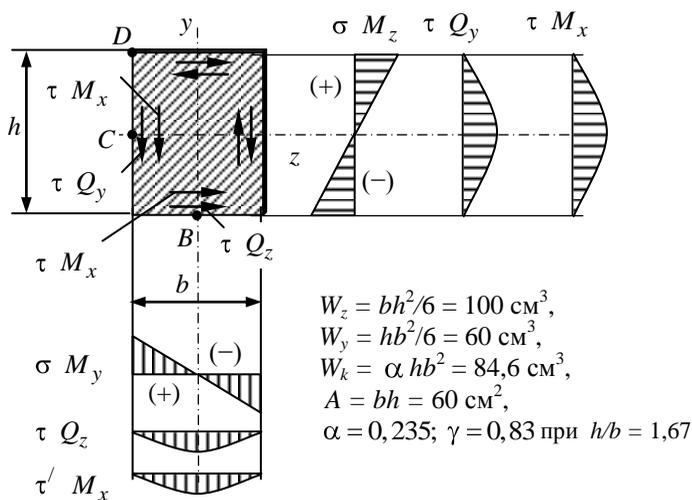


Рис. 5.7. Рациональное расположение сечения

Вычислим напряжения в указанных точках:

- *точка D*: линейное напряженное состояние

$$\begin{aligned}\sigma_D &= \sigma M_z + \sigma M_y = M_z / W_z + M_y / W_y = \\ &= 4qa^2 / 100 \cdot 10^{-6} + 2qa^2 / 60 \cdot 10^{-6} = 0,0183 \cdot 10^6 q;\end{aligned}$$

- *точка B*: плоское напряженное состояние

$\sigma = -M_z / W_z = -0,01 \cdot 10^6 q$ (*точка B* находится в сжатой области, рис. 5.7),

$$\tau = \tau Q_z + \tau' M_x = 3/2 Q_z / A + \gamma M_x / W_k = 0,0075 \cdot 10^6 q.$$

По критерию наибольших касательных напряжений имеем:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 0,018 \cdot 10^6 q;$$

- *точка C*: плоское напряженное состояние

$$\sigma = M_y / W_y = 0,0083 \cdot 10^6 q,$$

$$\tau = \tau Q_y + \tau M_x = 3/2 Q_y / A + M_x / W_k = 0,009 \cdot 10^6 q,$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 0,0198 \cdot 10^6 q.$$

Таким образом, наиболее опасной является *точка C*:

$$\sigma_{\text{max}} = 0,0198 \cdot 10^6 q.$$

Условие прочности. Из условия прочности

$$\sigma_{\text{max}} = 0,0198 \cdot 10^6 q \leq \sigma$$

определяем значение внешней распределенной нагрузки при рациональном расположении поперечного сечения стержня (рис. 5.7):

$$q = 8,08 \text{ кН/м.} \quad \text{Ответ}$$

Вертикальное перемещение свободного торца стержня. Вертикальное перемещение Δ свободного торца стержня под действием заданной нагрузки

$$\Delta = \Delta_N + \Delta_Q + \Delta_{M_x} + \Delta_{M_{\text{изг}}};$$

$$\Delta_N = \sum \int \frac{N \cdot N_1}{EA} dx, \quad \Delta_Q = \sum \int \frac{k_y Q_y Q_{y1}}{GA} dx + \sum \int \frac{k_z Q_z Q_{z1}}{GA} dx;$$

$$\Delta_{M_x} = \sum \int \frac{M_x M_{x1}}{GI_k} dx, \quad \Delta_{M_{изг}} = \sum \int \frac{M_y M_{y1}}{EI_y} dx + \sum \int \frac{M_z M_{z1}}{EI_z} dx.$$

Интегрирование ведется по всем участкам ломаного стержня.

- Определяем геометрические характеристики поперечного сечения стержня. Так как на всех участках высота поперечного сечения h ориентирована вдоль оси y (рис. 5.8), то главные центральные моменты инерции I_z, I_y постоянны для всех участков стержня:

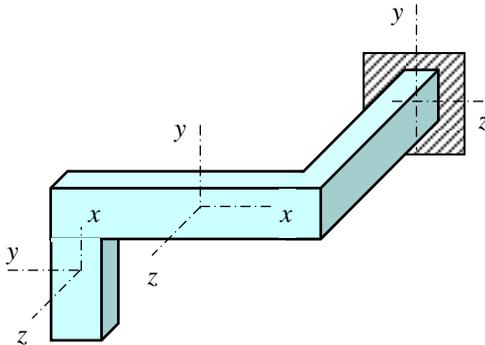


Рис. 5.8. Пространственная стержневая конструкция с рациональным расположением прямоугольного поперечного сечения

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,06 \cdot 0,1^3}{12} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{0,1 \cdot 0,06^3}{12} = 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$I_k = \beta hb^3 = 0,208 \cdot 0,1 \cdot 0,06^3 = 4,49 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$A = bh = 0,06 \cdot 0,1 = 0,006 \text{ м}^2.$$

Для прямоугольного поперечного сечения $k_y = k_z = 1,2$.

- Для определения вертикального перемещения свободного торца стержня *прикладываем* к торцу единичную силу в вертикальном направлении (по оси x участка l) вниз и строим эпюры внутренних силовых факторов от этой силы (рис. 5.9).

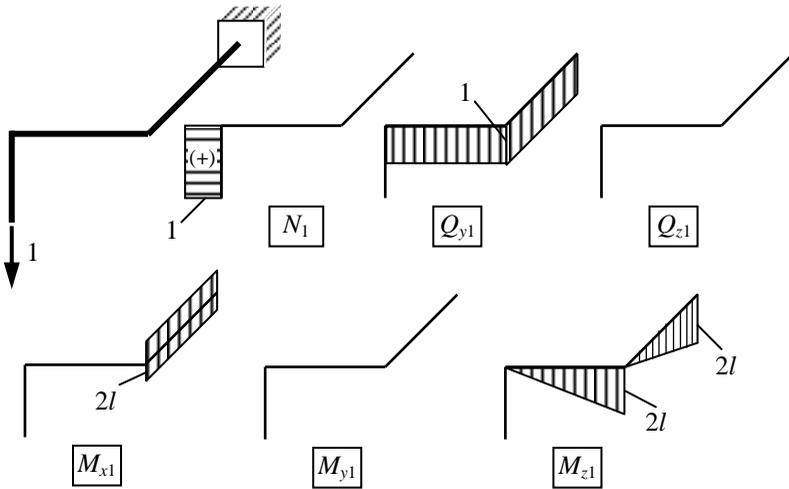


Рис. 5.9. Эпюры внутренних силовых факторов от единичной силы

- Определяем вертикальное перемещение, принимая нагрузку q равной допускаемой величине при рациональном расположении сечения, т. е. $q = 8,08$ кН/м. Соответствующие интегралы Мора вычисляем по способу Верещагина. Для этого перемножаем эпюры, приведенные на рис. 5.6 и 5.9:

$$\Delta_N = 0;$$

$$\begin{aligned} \Delta_Q &= \Delta_{Q_y} + \Delta_{Q_z} = \left[\frac{k_y}{GA} \left(\frac{1}{2} 2ql \cdot 2l \cdot 1 + 2ql \cdot 2l \cdot 1 \right) \right] + 0 = \\ &= \frac{k_y \cdot 6ql^2}{GA} = \frac{1,2 \cdot 6 \cdot 8,08 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5^2}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 0,006} = 3030 \cdot 10^{-8} \text{ м} \approx 0,03 \text{ мм}; \end{aligned}$$

$$\Delta_{M_x} = \frac{1}{GI_k} 3ql^2 \cdot 2l \cdot 2l = \frac{12ql^4}{GI_k} =$$

$$= \frac{12 \cdot 8,08 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5^4}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 4,49 \cdot 10^{-6}} = 1,69 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 16,9 \text{ мм};$$

$$\Delta_{M_{\text{изг}}} = \Delta_{M_y} + \Delta_{M_z} =$$

$$= 0 + \frac{1}{EI_z} \left[\frac{2l}{6} 0 + 4 \cdot 1,5ql^2 \cdot l + 3ql^2 \cdot 2l + \frac{1}{2} 4ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} 2l \right] =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \left[\frac{2 \cdot 0,5}{6} \left(0 + 6 \cdot 8,08 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5 + \right. \right. +$$

$$\left. \left. + 6 \cdot 8,08 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5 \right) + \frac{16}{3} \cdot 8,08 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \right] =$$

$$= 0,47 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4,7 \text{ мм};$$

$$\Delta = 0,03 + 16,9 + 4,7 = 21,63 \text{ мм.}$$

Ответ

Таким образом, наибольшее влияние на величину полученного перемещения оказывает крутящий момент, наименьшее – перерезывающая сила.

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

**Задача
10**

**Расчет
статически неопределимой
плоской рамы методом сил**

Стальная плоская рама, изготовленная из балок двутаврового профиля, имеет опорные устройства в точках B , C и D (рис. 6.1). Изгибная жесткость поперечных сечений вертикальных стержней равна $2EI$, горизонтальных стержней EI . Допускаемое напряжение $\sigma = 160$ МПа, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Исходные данные приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Исходные данные к задаче 10

Номер строки	Расчетная схема, рис. 6.1	Тип опоры			Длина l , м	Нагрузка		
		B	C	D		q , кН/м	F	M
1	1				1,0	5	ql	ql^2
2	2				1,2	10	$2ql$	$2ql^2$
3	3				1,4	15	$3ql$	$3ql^2$
4	4				1,6	20	$2ql$	ql^2
5	5				1,8	25	$3ql$	ql^2
6	6				2,0	30	ql	$2ql^2$
7	7				1,3	35	ql	$3ql^2$
8	8				1,5	40	$2ql$	$3ql^2$
9	9				1,8	20	$3ql$	$2ql^2$
0	10				2,0	30	$2ql$	ql^2
	е	д			г	е	д	

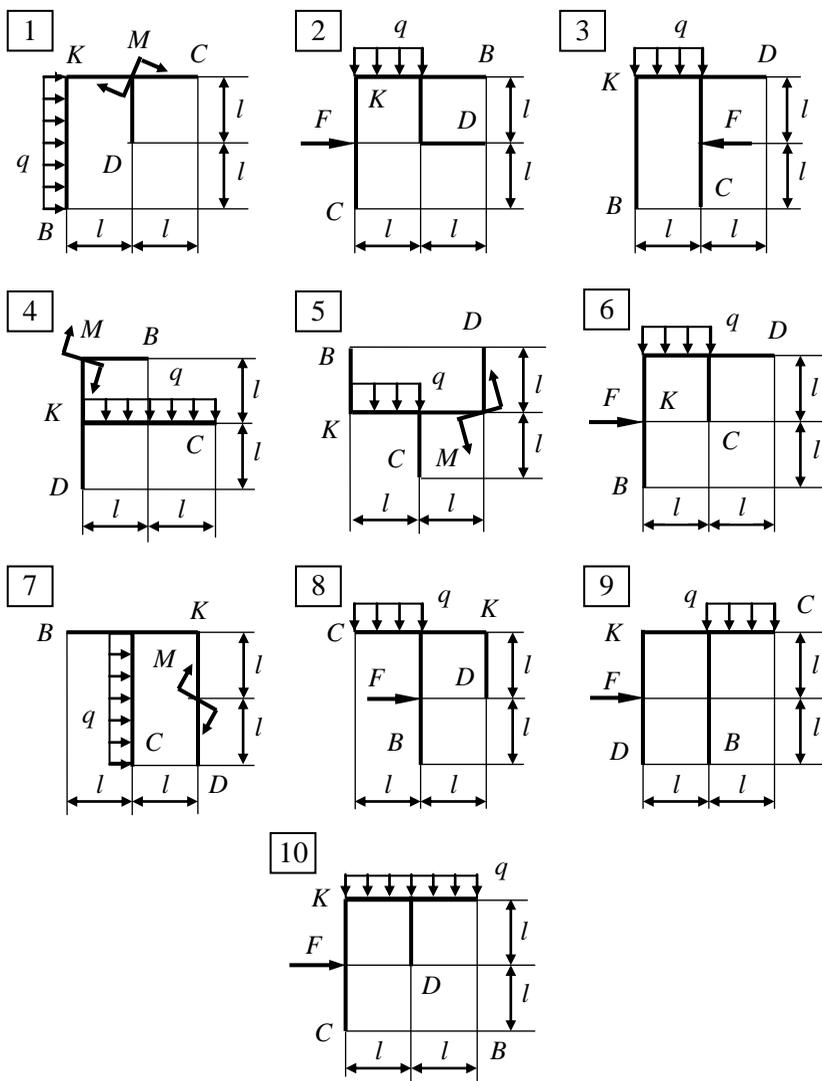


Рис. 6.1. Расчетные схемы к задаче 10

Требуется:

- 1) раскрыть статическую неопределимость рамы методом сил и построить эпюры внутренних силовых факторов;
- 2) обосновать правильность раскрытия статической неопределимости рамы статической и деформационной проверками;
- 3) подобрать номер двутавра по ГОСТ 8239-72;
- 4) определить угол поворота сечения K ;
- 5) исследовать напряженное состояние рамы при повреждении каждой из шарнирных опор.

Указание. Влиянием продольных и перерезывающих сил пренебречь.

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

Стальная плоская рама, изготовленная из балок двутаврового профиля, имеет опорные устройства в точках B , C и D (рис. 6.2). Изгибная жесткость поперечных сечений вертикальных стержней равна $2EI$, горизонтальных стержней EI . Допускаемое напряжение $\sigma = 160$ МПа, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Исходные данные приведены в таблице:

Тип опоры			Длина l , м	Нагрузка		
B	C	D		q , кН/м	F	M
			1,0	20	$2ql$	$4ql^2$

Требуется:

- 1) раскрыть статическую неопределимость рамы методом сил и построить эпюры внутренних силовых факторов;
- 2) обосновать правильность раскрытия статической неопределимости рамы статической и деформационной проверками;
- 3) подобрать номер двутавра по ГОСТ 8239-72;
- 4) определить угол поворота сечения K ;
- 5) исследовать напряженное состояние рамы при повреждении каждой из шарнирных опор.

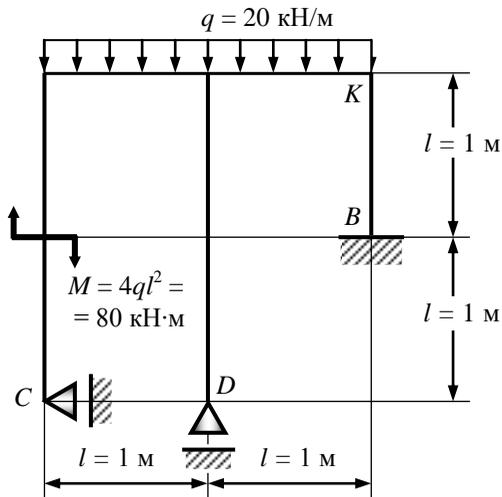


Рис. 6.2. Заданная плоская рама с опорами и внешней нагрузкой

Решение

Анализ степени статической неопределимости. Степень статической неопределимости системы равна числу лишних связей, т. е. связей, наложенных дополнительно сверх необходимых для обеспечения геометрической неизменяемости системы и ее равновесия при приложении нагрузки. Возникающие в лишних связях усилия – это лишние неизвестные.

Для определения положения плоской рамы как жесткого целого требуется

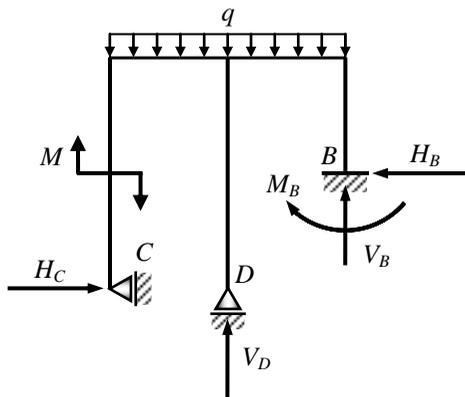


Рис. 6.3. Плоская рама с реакциями опор

наложение трех связей. В приведенном примере рама (рис. 6.3) имеет неподвижную опору B с защемлением, эквивалентную трем связям, и шарнирно-подвижные опоры C и D , эквивалентные каждая в отдельности одной связи. Следовательно, в совокупности для рамы имеем пять связей и соответственно этому пять реакций опор – H_B , V_B , M_B , H_C , V_D , а уравнений равновесия можно составить только три. Таким образом, степень статической неопределимости рамы

$$n = 5 - 3 = 2.$$

Метод сил

- Выбираем *основную систему*. За основную принимаем систему, показанную на рис. 6.4, *а*, которая получается из заданной системы путем отбрасывания двух лишних связей – шарнирно-подвижные опоры C и D .
- Построение *эквивалентной системы* (рис. 6.4, *б*). Для этого загружаем основную систему внешними нагрузками и лишними неизвестными X_1 и X_2 , действующими в направлении отброшенных связей H_C в опоре C и V_D в опоре D (рис. 6.3).

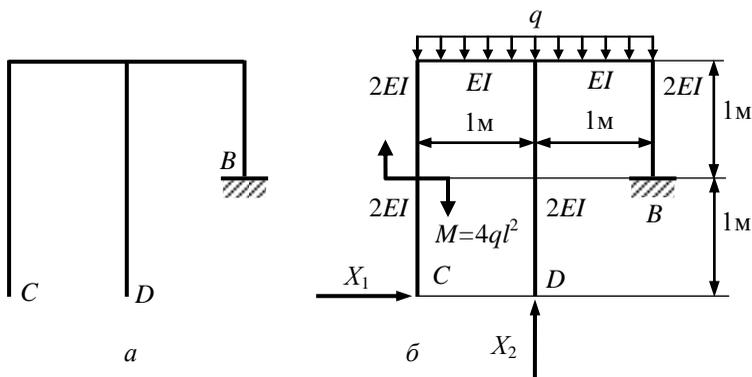


Рис. 6.4. Основная (а) и эквивалентная (б) системы

- Записываем *канонические уравнения метода сил*, которые для дважды статически неопределимых систем имеют вид:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0,$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

Коэффициенты δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22} представляют собой *перемещения* в основной системе от *единичных сил*, т. е. от $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$ в месте их приложения (рис. 6.5, а, б). Свободные члены Δ_{1F}, Δ_{2F} – это перемещения от заданной нагрузки в направлении неизвестных X_1 и X_2 в том месте, где приложены последние. Величины δ_{ik}, Δ_{iF} определяются с помощью интегралов Мора

$$\delta_{ik} = \sum_l \int \frac{M_i \ x \ M_k \ x}{EI} dx, \quad \Delta_{iF} = \sum_l \int \frac{M_i \ x \ M_F \ x}{EI} dx$$

с заменой операции интегрирования по способу Верещагина:

$$\delta = \sum \frac{1}{EI} \omega M_1^C.$$

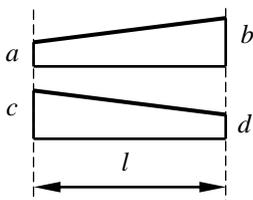
Для этой цели, используя основную систему, строим:

- эпюры изгибающих моментов ($\overline{M}_1, \overline{M}_2$) от единичных нагрузок $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$, приложенных в точках *C* и *D* соответственно (рис. 6.5, а, б);
- эпюры изгибающих моментов (\overline{M}_F) от действующей нагрузки (рис. 6.5, в).

■ *Примечание*

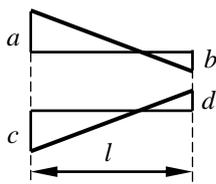
Для ускорения вычислений по способу Верещагина в данной задаче используются следующие формулы для перемножения эпюр:

- 1) перемножаются две эпюры, имеющие вид трапеции:



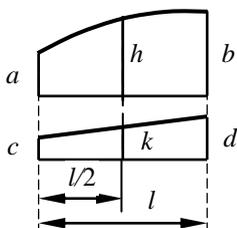
$$\omega M_1^C = \frac{l}{6} 2ac + 2bd + ad + bc .$$

Произведение ординат, имеющих одинаковые знаки, берется со знаком плюс, а разные – со знаком минус. Например:



$$\omega M_1^{(C)} = \frac{l}{6} -2ac - 2bd + ad + bc ;$$

2) одна из эпюр очерчена по квадратной параболе (от равномерно распределенной нагрузки q), другая – трапецидальная:



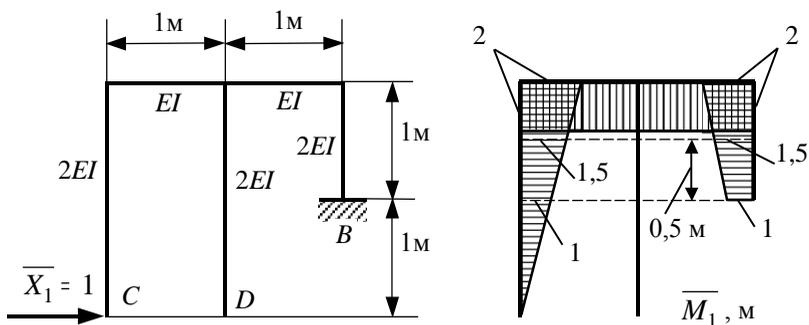
$$\omega M_1^C = l/6 \quad ac + 4hk + bd ,$$

или

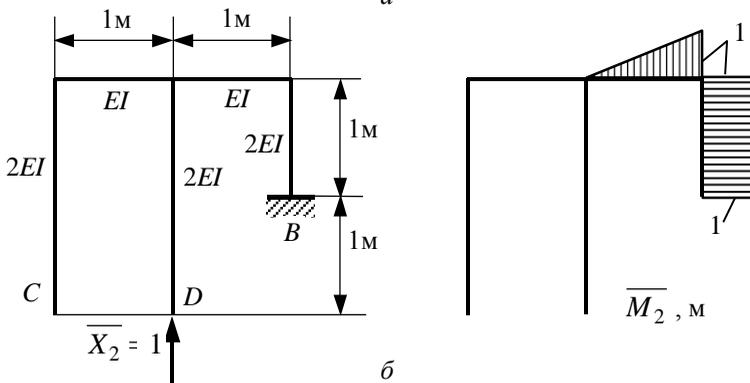
$$\omega M_1^C = \frac{l}{6} 2ac + 2bd + ad + bc - \frac{ql^3}{12} \frac{c+d}{2} .$$

Пользуясь способом Верещагина, находим значения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений:

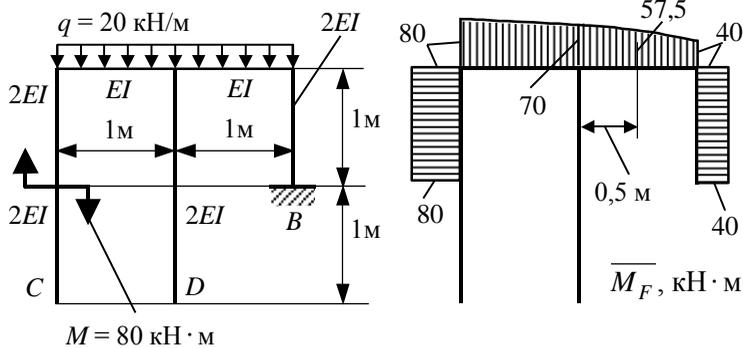
$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 2 \right] + \frac{1}{EI} 2 \cdot 2 \cdot 2 + \\ &+ \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{6} 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \right] = \frac{63}{6EI}; \end{aligned}$$



a



б



в

Рис. 6.5. Расчетные схемы и эпюры от единичных (а, б) и внешних (в) нагрузок

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] + \frac{1}{2EI} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} [2 \cdot 1 \cdot -0,5] +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{6} (-2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) \right] = -\frac{7}{4EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{2EI} [80 \cdot 1 \cdot -1,5] + \frac{1}{EI} \left[\frac{2}{6} (-80 \cdot 2 - 4 \cdot 70 \cdot 2 - 40 \cdot 2) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2EI} [40 \cdot 1 \cdot -1,5] = -\frac{1070}{3EI};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6} (70 \cdot 0 + 4 \cdot 57,5 \cdot 0,5 + 40 \cdot 1) \right] + \frac{1}{2EI} (40 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{275}{6EI}.$$

Подставляя коэффициенты в канонические уравнения метода сил, получаем следующую систему уравнений:

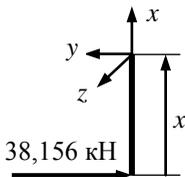
$$\frac{63}{6EI} X_1 - \frac{7}{4EI} X_2 - \frac{1070}{3EI} = 0;$$

$$-\frac{7}{4EI} X_1 + \frac{5}{6EI} X_2 + \frac{275}{6EI} = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$X_1 = 38,156 \text{ кН}, \quad X_2 = 25,128 \text{ кН}.$$

Построение эпюр внутренних силовых факторов. Используя полученные значения, строим эпюры внутренних силовых факторов. Предварительно выпишем уравнения равновесия для силовых участков рамы I – VI (рис. 6.6), используя скользящую систему координат:



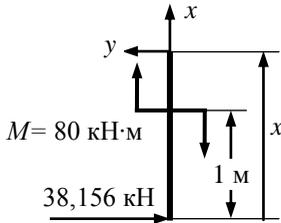
участок I ($0 \leq x \leq 1 \text{ м}$)

$$N = 0,$$

$Q_y = 38,156 \text{ кН}$ (строим по направлению внешней силы),

$M_z = -38,156 \cdot x$ (строим на сжатом волокне, т. е. справа);

участок II ($1 \leq x \leq 2$ м)



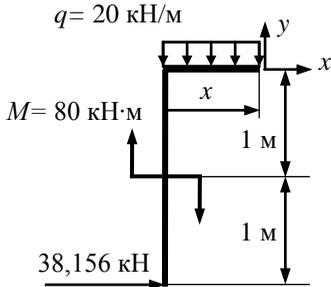
$$N = 0,$$

$$Q_y = 38,156 \text{ кН},$$

$$M_z = -38,156 \cdot x + M =$$

$$= -38,156 \cdot x + 80;$$

участок III ($0 \leq x \leq 1$ м)



$$N = -38,156 \text{ кН (сжатие)},$$

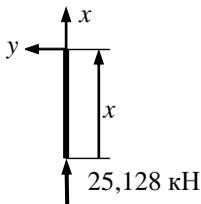
$$Q_y = qx = 20x \text{ (строим по направлению}$$

$$\text{внешней нагрузки } q),$$

$$M_z = -38,156 \cdot 2 + M - qx^2/2 =$$

$$= 3,688 - 10x^2;$$

участок IV ($0 \leq x \leq 2$ м)

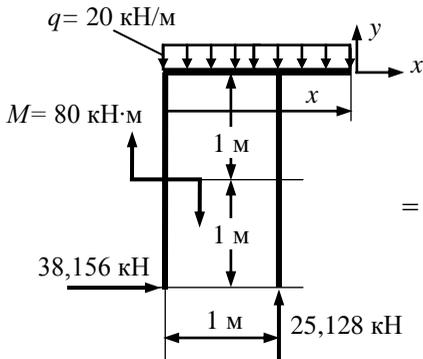


$$N = -25,128 \text{ кН},$$

$$Q_y = 0,$$

$$M_z = 0;$$

участок V ($1 \leq x \leq 2$ м)



$$N = -38,156 \text{ кН},$$

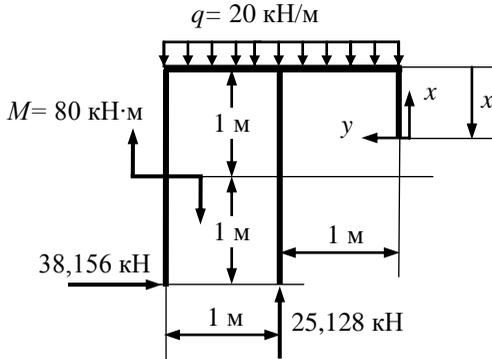
$$Q_y = 25,128 - qx,$$

$$M_z = -38,156 \cdot 2 + M -$$

$$- qx^2/2 + 25,128(x - 1) =$$

$$= 3,688 - 10x^2 + 25,128(x - 1);$$

участок VI ($0 \leq x \leq 1$ м)



$$N = 25,128 - q \cdot 2 = -14,872 \text{ кН},$$

$$Q_y = 38,156 \text{ кН},$$

$$M_z = -38,156(2 - x) + M - q \cdot 2 \cdot 1 + 25,128 \cdot 1 = \\ = -38,156(2 - x) + 65,128.$$

По полученным аналитическим выражениям построены эпюры внутренних силовых факторов, показанные на рис. 6.6.

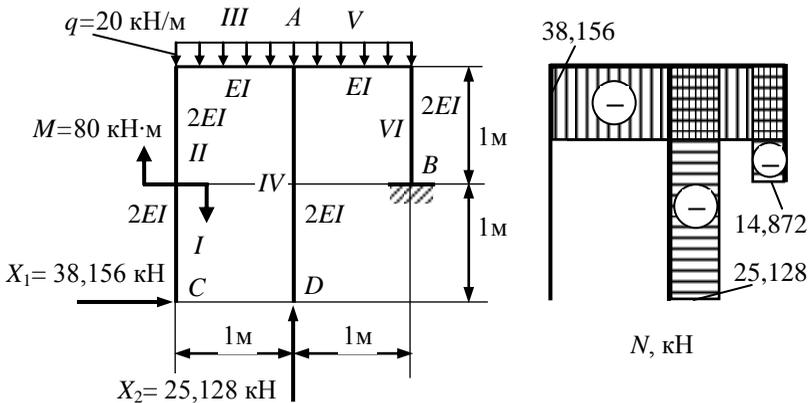


Рис. 6.6. Эпюры внутренних силовых факторов (см. также с. 133)

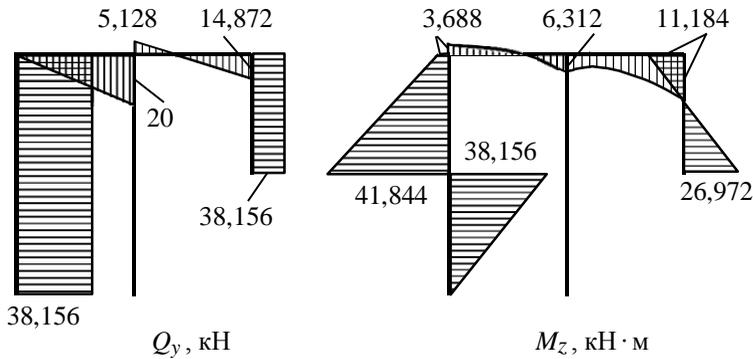


Рис. 6.6. Окончание

Проверка правильности раскрытия статической неопределимости рамы.

■ *Статическая проверка* заключается в проверке равновесия некоторой отсеченной части рамы под действием приложенных к ней внешних сил и внутренних силовых факторов (берутся с эпюр N , Q_y , M_z , рис. 6.6), заменяющих действие отброшенных частей рамы на оставленную часть.

Рассмотрим, например, равновесие узла A (рис. 6.6). Из рис. 6.7 следует, что узел A находится в равновесии: сумма проекций сил на горизонтальную и вертикальную оси, а также сумма моментов всех сил относительно точки A равны нулю.

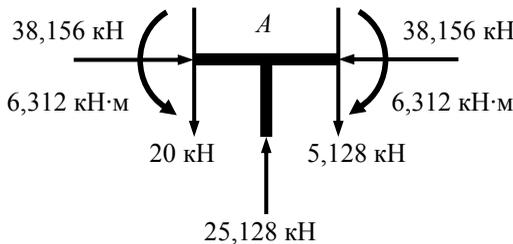


Рис. 6.7. Статическая проверка равновесия узла A

■ *Деформационная проверка* заключается в определении перемещений в заданной системе, значения которых известны.

Проверим, например, равен ли нулю угол поворота θ_B в сечении B рамы (рис. 6.6). Для этого выберем другую основную систему, в которой угол поворота в сечении B возможен, и построим единичную эпюру \overline{M}_1 (рис. 6.8). Для определения угла поворота в сечении B перемножим эпюру \overline{M}_1 (рис. 6.8) с окончательной эпюрой M_z (рис. 6.6) по способу Верещагина:

$$\begin{aligned} \theta_B &= -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6} \cdot 6,312 \cdot 0 + 4 \cdot 6,248 \cdot 0,5 + 11,184 \cdot 1 \right] + \\ &+ \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{6} \cdot -2 \cdot 11,184 \cdot 1 + 2 \cdot 26,972 \cdot 1 - 11,184 \cdot 1 + 26,972 \cdot 1 \right] = \\ &= -\frac{3,947}{EI} + \frac{3,947}{EI} = 0, \end{aligned}$$

т. е. статическая неопределимость рамы раскрыта правильно.

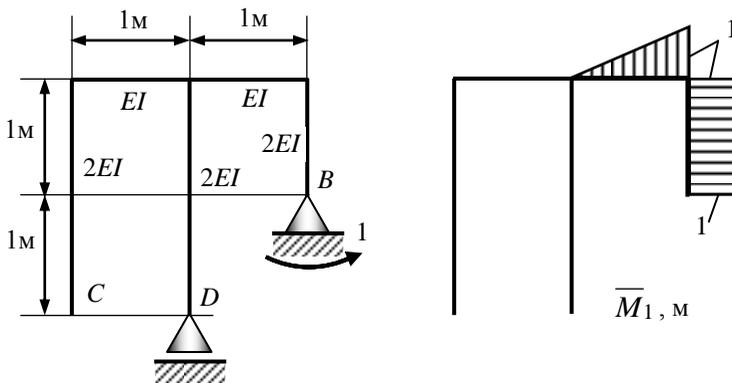


Рис. 6.8. Расчетная схема рамы при деформационной проверке и эпюра изгибающего момента от единичной нагрузки

Подбор двутаврового профиля. Подбор сечения проводится из условия прочности на изгиб

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_z} \leq \sigma$$

по формуле

$$W_z \geq \frac{M_{z \max}}{\sigma}.$$

- Вертикальные стержни выполнены из двух профилей двутаврового сечения с $W_z^{\text{верт}} = 2W_z$. Тогда

$$W_z \geq \frac{M_{z \max}^{\text{верт}}}{2 \sigma} \geq \frac{41,844 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 160} \geq 0,131 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 131 \text{ см}^3.$$

- Горизонтальные стержни выполнены из одного профиля двутаврового сечения с $W_z^{\text{гор}} = W_z$. Тогда

$$W_z \geq \frac{M_{z \max}^{\text{гор}}}{\sigma} \geq \frac{11,184 \cdot 10^{-3}}{160} \geq 0,0699 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 69,9 \text{ см}^3.$$

Из двух значений W_z выбираем наибольшее значение, соответствующее условию прочности на вертикальных стержнях. По ГОСТ 8239-72 выбираем двутавровую балку №18 с $W_z = 143 \text{ см}^3$, $I_z = 1290 \text{ см}^4$. При этом максимальные напряжения в раме будут составлять

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z \max}^{\text{верт}}}{2W_z} = \frac{41,844 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 143 \cdot 10^{-6}} = 146,3 \text{ МПа} < \sigma = 160 \text{ МПа}.$$

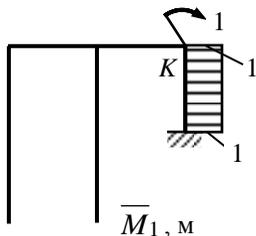


Рис. 6.9. Расчетная схема рамы для вычисления угла поворота в сечении K

Вычисление угла поворота в сечении K.

Для вычисления угла поворота рамы в сечении K используется основная система (рис. 6.9). В сечении K прикладывается единичный момент и строится эпюра \overline{M}_1 . Далее по способу Верещагина эта единичная эпюра перемножается с окончательной эпюрой M_z (рис. 6.6):

$$\theta_K = \frac{1}{2EI_z} \left[\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 11,184 \cdot 10^{-3} \cdot 1 + 2 \cdot 26,972 \cdot 10^{-3} \cdot 1 - \right. \\ \left. - 11,184 \cdot 10^{-3} \cdot 1 + 26,972 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \right] = \\ = \frac{7,894 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м}^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 1290 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 0,00153 \text{ рад} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 0,0877^\circ.$$

Так как в результате расчета получили положительное значение угла поворота, то, следовательно, направление угла поворота в сечении K совпадает с направлением единичного момента на рис. 6.9.

Исследование напряженного состояния рамы в случае повреждения опор. В процессе работы конструкции одна из опор может быть повреждена. Так как система является статически неопределимой, то в этом случае напряжения в раме перераспределятся и при заданном значении q могут превысить допускаемые. Для оценки возможности работы рамы при повреждении шарнирно-подвижных опор рассмотрим следующие ситуации.

■ **Повреждена опора D .** Расчетная схема рамы для этой ситуации приведена на рис. 6.10. В этом случае в системе канонических уравнений следует положить неизвестное $X_2 = 0$ и рассмотреть решение уравнения

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

При известных $\delta_{11} = \frac{63}{6EI}$, $\Delta_{1F} = -\frac{1070}{3EI}$ получаем

$$X_1 = 33,97 \text{ кН}.$$

На рис. 6.10 построена эпюра изгибающих моментов в случае повреждения опоры D .

Вычисляем напряжения для принятого поперечного сечения из двутаврового профиля № 18:

- вертикальные стержни

$$\sigma_{\max}^{\text{верт}} = \frac{M_{z \max}^{\text{верт}}}{2W_z} = \frac{46,03 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 143 \cdot 10^{-6}} = 160,9 \text{ МПа} > \sigma = 160 \text{ МПа};$$

- горизонтальные стержни

$$\sigma_{\max}^{\text{гор}} = \frac{M_{z \max}^{\text{гор}}}{W_z} = \frac{27,94 \cdot 10^{-3}}{143 \cdot 10^{-6}} = 195,4 \text{ МПа} > \sigma = 160 \text{ МПа}.$$

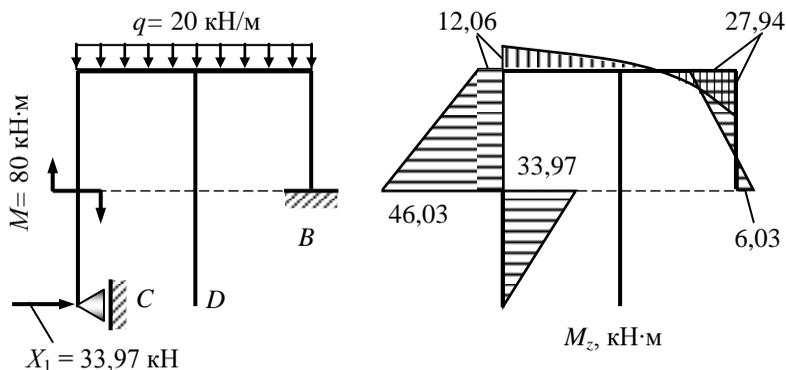


Рис. 6.10. Расчетная схема и эпюра изгибающих моментов в случае повреждения опоры D

Из расчетов видно, что при повреждении опоры D максимальные напряжения составляют 195,4 МПа, что в $195,4/160 = 1,22$ раза превышает допускаемые напряжения. Следовательно, для безопасной эксплуатации поврежденной конструкции необходимо во столько же раз снизить эксплуатационную нагрузку. При этом она будет

$$[q] = 20/1,22 = 16,4 \text{ кН/м}$$

и соответственно

$$M = 4ql^2 = 65,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

- Повреждена опора C . Расчетная схема рамы для этой ситуации приведена на рис. 6.11. В этом случае в системе канонических уравнений следует положить неизвестное $X_1 = 0$ и рассмотреть решение уравнения

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

При известных $\delta_{22} = \frac{5}{6EI}$, $\Delta_{2F} = \frac{275}{6EI}$ получаем

$$X_2 = -55 \text{ кН}.$$

На рис. 6.11 построена эпюра изгибающих моментов в случае повреждения опоры *C*.

Вычисляем напряжения для принятого поперечного сечения из двутаврового профиля № 18:

- вертикальные стержни

$$\sigma_{\max}^{\text{верт}} = \frac{M_{z\max}^{\text{верт}}}{2W_z} = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 143 \cdot 10^{-6}} = 279,7 \text{ МПа} > \sigma = 160 \text{ МПа};$$

- горизонтальные стержни

$$\sigma_{\max}^{\text{гор}} = \frac{M_{z\max}^{\text{гор}}}{W_z} = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{143 \cdot 10^{-6}} = 559,4 \text{ МПа} > \sigma = 160 \text{ МПа}.$$

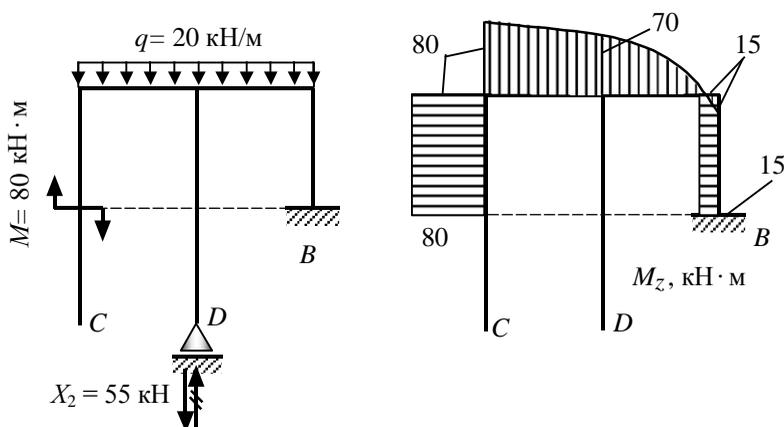


Рис. 6.11. Расчетная схема рамы и эпюра изгибающих моментов в случае повреждения опоры *D*

Таким образом, при повреждении опоры *D* максимальные напряжения составляют 559,4 МПа, что в $559,4/160 = 3,496$ раза превышает допусаемые напряжения. Поэтому допусаемая эксплуатационная нагрузка будет

$$[q] = 20/3,496 = 5,72 \text{ кН/м}$$

и соответственно

$$M = 4ql^2 = 22,88 \text{ кН·м.}$$

РАСЧЕТ КРИВОГО СТЕРЖНЯ

Задача 11

Расчет кривого стержня на прочность

Проверить прочность стального кривого стержня (рис. 7.1) при заданном поперечном сечении (рис. 7.2). Исходные данные для варианта задачи выбрать по табл. 7.1. При расчете принять предел текучести материала стержня $\sigma_T = 1200$ МПа, допускаемый коэффициент запаса прочности $[n] = 1,5$.

Таблица 7.1

Исходные данные к задаче 11

Номер строки	Схема по рис. 7.1	Сечение по рис. 7.2	Нагрузка		Размеры к схемам			Размеры сечения	
			F	M	R_1	R_2	l	a	d
			кН	кН·м	мм			мм	
1	1	1	32	5	240	220	60	50	120
2	2	2	40	6	260	240	65	55	130
3	3	3	48	7	280	260	68	60	140
4	4	4	56	8	300	280	72	65	150
5	5	5	65	9	320	300	75	70	155
6	6	6	72	10	340	320	80	75	160
7	7	5	82	11	360	340	85	80	165
8	8	4	88	12	380	360	88	85	170
9	9	3	95	13	400	380	95	90	175
0	10	2	102	14	420	400	100	95	180
		е	д		г			д	

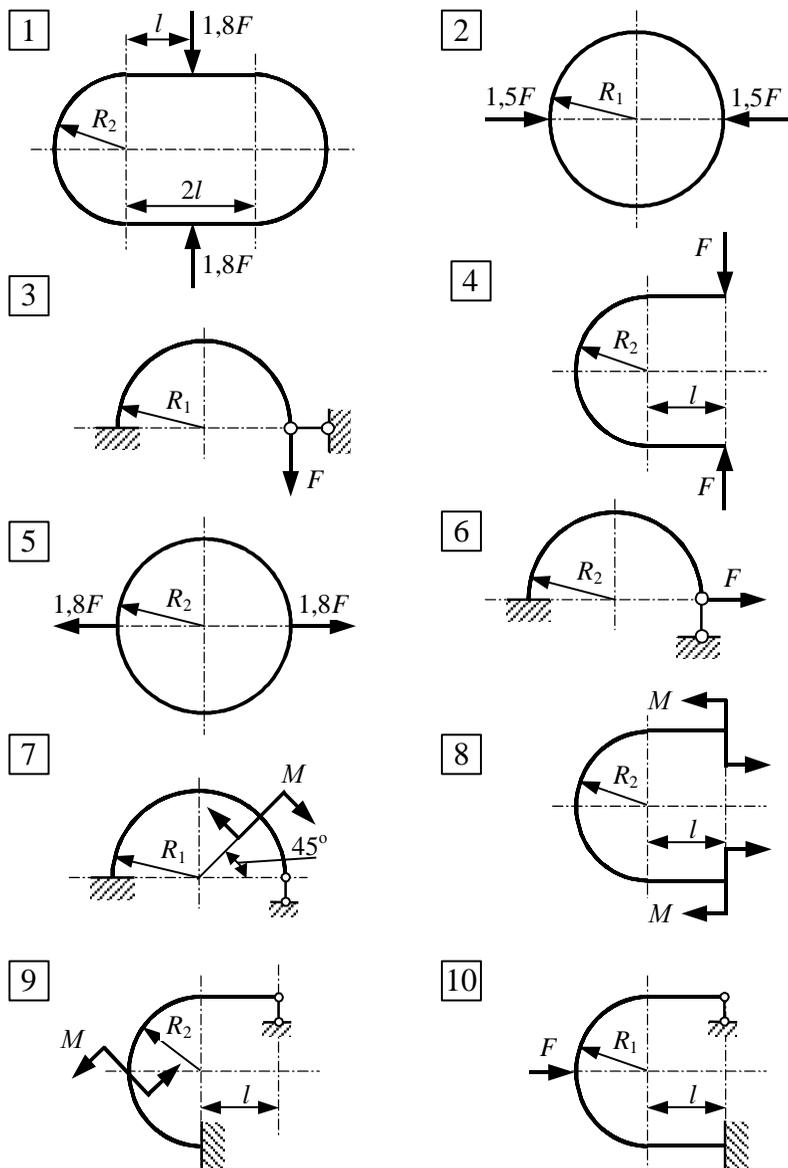


Рис. 7.1. Расчетные схемы к задаче 11

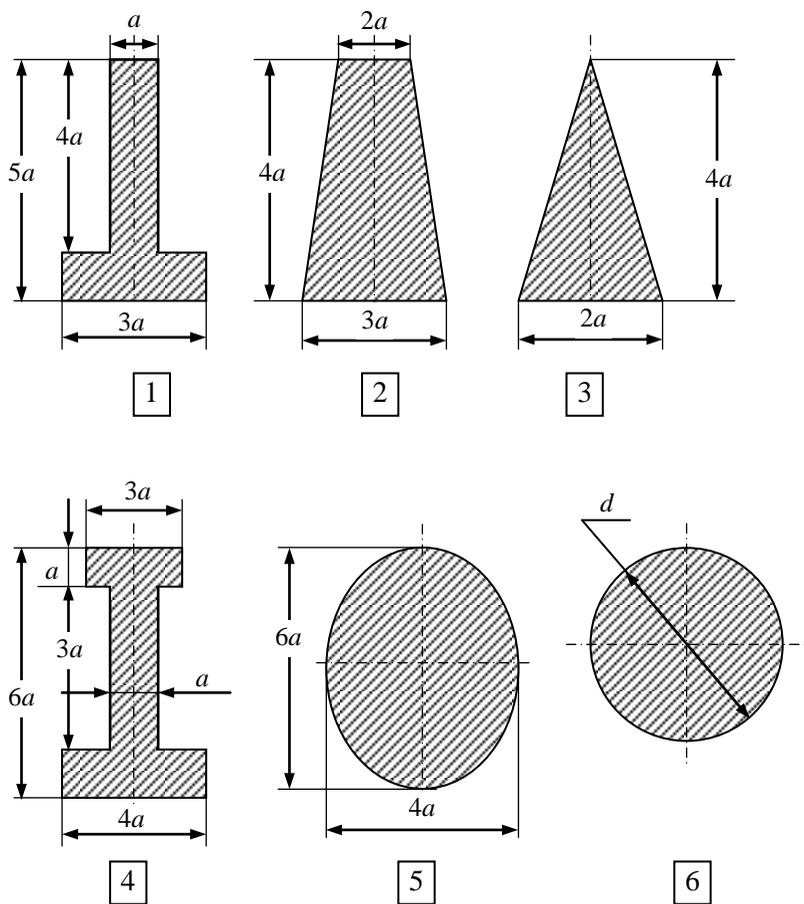
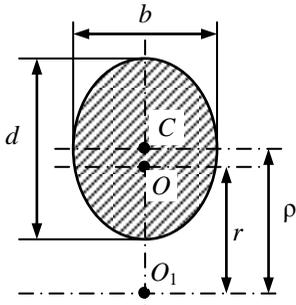
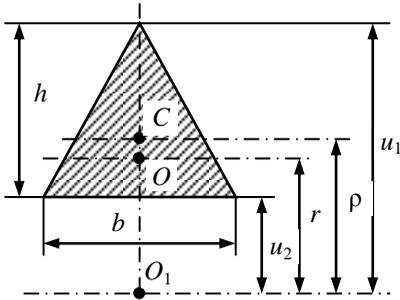


Рис. 7.2. Поперечные сечения к задаче 11

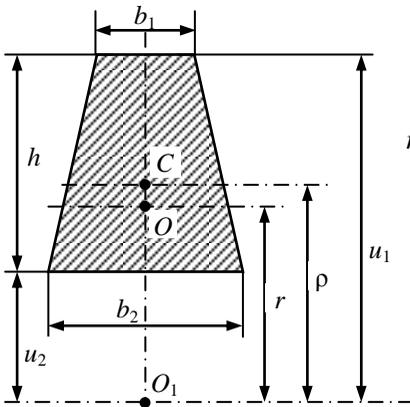
**Радиусы кривизны нейтрального слоя кривого стержня
для поперечных сечений, приведенных на рис. 7.2**



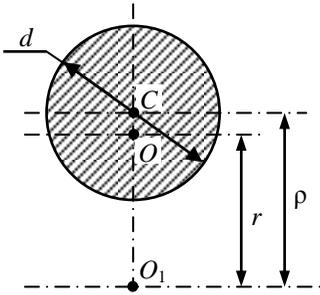
$$r = \frac{d^2}{4 \left[2\rho - \sqrt{4\rho^2 - d^2} \right]}$$



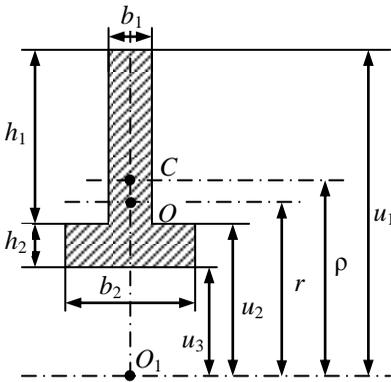
$$r = \frac{h}{2 \left[\frac{u_1}{h} \ln \frac{u_1}{u_2} - 1 \right]}$$



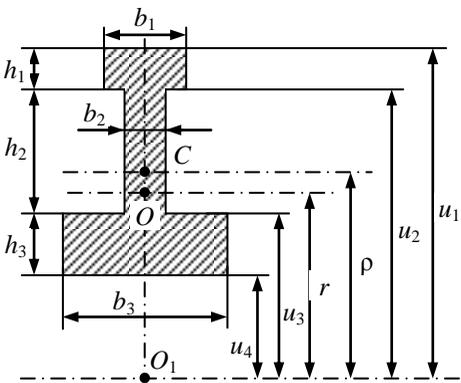
$$r = \frac{h (b_1 + b_2)}{2 \left[\frac{b_2 u_1 - b_1 u_2}{h} \ln \frac{u_1}{u_2} - b_2 - b_1 \right]}$$



$$r = \frac{d^2}{4 \left[2\rho - \sqrt{4\rho^2 - d^2} \right]}$$



$$r = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2}{b_1 \ln \frac{u_1}{u_2} + b_2 \ln \frac{u_2}{u_3}}$$



$$r = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{u_1}{u_2} + b_2 \ln \frac{u_2}{u_3} + b_3 \ln \frac{u_3}{u_4}}$$

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

Кривой стержень (динамометр) для замера тяговых усилий имеет форму звена цепи прямоугольного поперечного сечения (рис. 7.3). Исходные данные приведены в таблице.

Размеры сечения		Размеры к схеме			Нагрузка	
a	d	R_1	R_2	l	F	M
мм		мм			кН	кН·м
20	–	60	–	80	100	–

Материал стержня – кремнистая сталь 50С2, имеющая предел текучести $\sigma_T = 1200$ МПа.

Проверить прочность кривого стержня, приняв коэффициент запаса прочности $[n] = 1,6$.

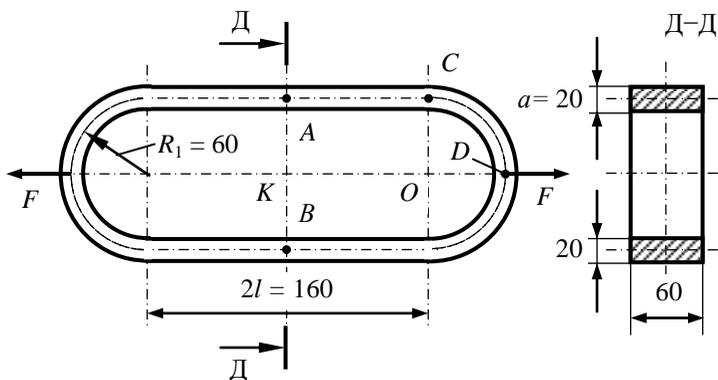


Рис. 7.3. Кривой стержень (динамометр)

Решение

Анализ расчетной схемы. Звено цепи представляет собой замкнутый контур, который, как известно, является трижды статически неопределимым. Следовательно, рассматриваемая задача является ста-

тически неопределимой и необходимо раскрыть эту неопределенность.

Раскрытие статической неопределенности. Используя свойство симметрии конструкции, разрежем кривой стержень по вертикальной оси симметрии, затем отбросим левую часть и рассмотрим правую (рис. 7.4, а). В местах разреза действуют внутренние силовые факторы N_0 и M_0 ; перерезывающая сила Q_0 здесь равна нулю в связи со свойствами симметрии.

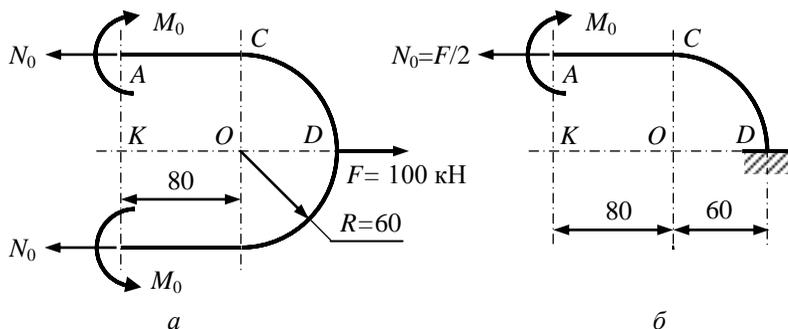


Рис. 7.4. Расчетные схемы стержня

Уравнение, выражающее сумму проекций всех сил на горизонтальную ось, имеет вид

$$-2N_0 + F = 0,$$

откуда

$$N_0 = F/2.$$

Таким образом, остается только одно неизвестное, а именно изгибающий момент M_0 в разрезе. Так как половина звена симметрична относительно продольной оси, задачу можно упростить и рассматривать только четверть звена (рис. 7.4, б), загрузив его в сечении А продольной силой $N_0 = F/2$ и моментом M_0 .

Обозначая момент как $M_0 = X_1$, запишем каноническое уравнение метода сил в форме

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Определяем коэффициенты уравнения с помощью интеграла Мора, используя расчетные схемы, приведенные на рис. 7.5. В рассматриваемом стержне основную роль играют изгибные перемещения. Перемещения вследствие растяжения и сдвига малы по сравнению с перемещениями изгиба. Поэтому из шести интегралов Мора берем один – для изгиба:

$$\delta = \int_l \frac{M_F \cdot x \cdot M_1 \cdot x \cdot dx}{EI}.$$

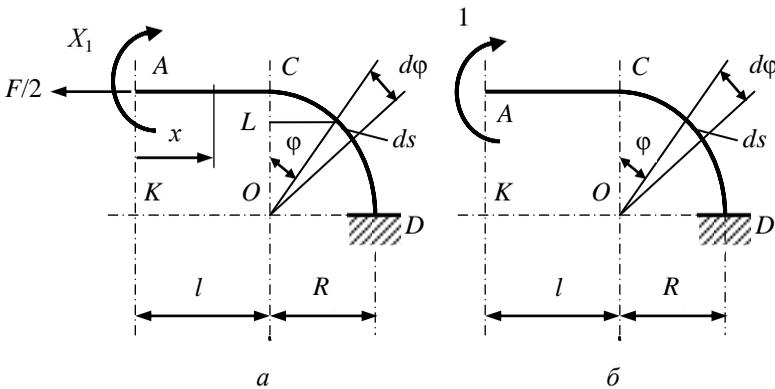


Рис. 7.5. Расчетные схемы стержня для определения $M_0 = X_1$

При вычислении коэффициентов уравнения учитываем, что рассматриваемая часть звена имеет прямолинейный и криволинейный (очерченный по окружности) участки (рис. 7.5):

$$\delta_{11} = \int_l \frac{M_1 \cdot x \cdot M_1 \cdot x \cdot dx}{EI} + \int_s \frac{M_1 \cdot \varphi \cdot M_1 \cdot \varphi \cdot ds}{EI} = \begin{vmatrix} M_1 \cdot x = 1 \\ M_1 \cdot \varphi = 1 \\ ds = R d\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^l \frac{1 \cdot 1 \cdot dx}{EI} + \int_0^{\pi/2} \frac{1 \cdot 1 \cdot R d\varphi}{EI} = \frac{2l + \pi R}{2EI};$$

$$\Delta_{1F} = - \int_s \frac{M_F \varphi M_1 \varphi ds}{EI} = - \int_0^{\pi/2} \frac{F/2 R (1 - \cos \varphi) \cdot R d\varphi}{EI} =$$

$$= - \frac{FR^2 \pi - 2}{4EI}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в каноническое уравнение метода сил, получаем:

$$\frac{2l + \pi R}{2EI} X_1 - \frac{FR^2 \pi - 2}{4EI} = 0,$$

$$X_1 = \frac{FR^2 \pi - 2}{2(2l + \pi R)}.$$

Учитывая, что $M_0 = X_1$, получим

$$M_0 = \frac{100 \cdot 60^2 \cdot 10^{-6} \cdot 3,14 - 2}{2 \cdot 2 \cdot 80 \cdot 10^{-3} + 3,14 \cdot 60 \cdot 10^{-3}} = 0,589 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры внутренних силовых факторов. Для представления о напряженном состоянии звена динамометра построим эпюры изгибающих моментов, перерезывающих сил и нормальных (продольных) сил. Составим выражения этих внутренних силовых факторов для криволинейной части звена (см. рис. 7.5):

$$M_\varphi = M_0 - \frac{FR}{2} (1 - \cos \varphi); \quad Q_\varphi = -\frac{F}{2} \sin \varphi; \quad N_\varphi = \frac{F}{2} \cos \varphi.$$

Исследуем эти выражения, определив их величины в характерных сечениях:

- при $\varphi = 0$ (точка C)

$$M_\varphi = M_0 = \frac{FR^2 \pi - 2}{2(2l + \pi R)}; \quad Q_\varphi = 0; \quad N_\varphi = N_{\max} = F/2;$$

- при $\varphi = 90^\circ$ (точка D)

$$M_\varphi = M_{\max} = M_0 - \frac{FR}{2} = \frac{FR^2 \pi - 2}{2(2l + \pi R)} - \frac{FR}{2} = -\frac{FR(R + l)}{2l + \pi R};$$

$$Q_\varphi = Q_{\max} = -F/2; \quad N_\varphi = 0.$$

После подстановки числовых значений получим

$$M_{\max} = -\frac{100 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 10^{-3} + 80 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 80 \cdot 10^{-3} + 3,14 \cdot 60 \cdot 10^{-3}} = -2,41 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q_{\max} = -\frac{100}{2} = -50 \text{ кН}.$$

Эпюры M , Q , N показаны на рис. 7.6.

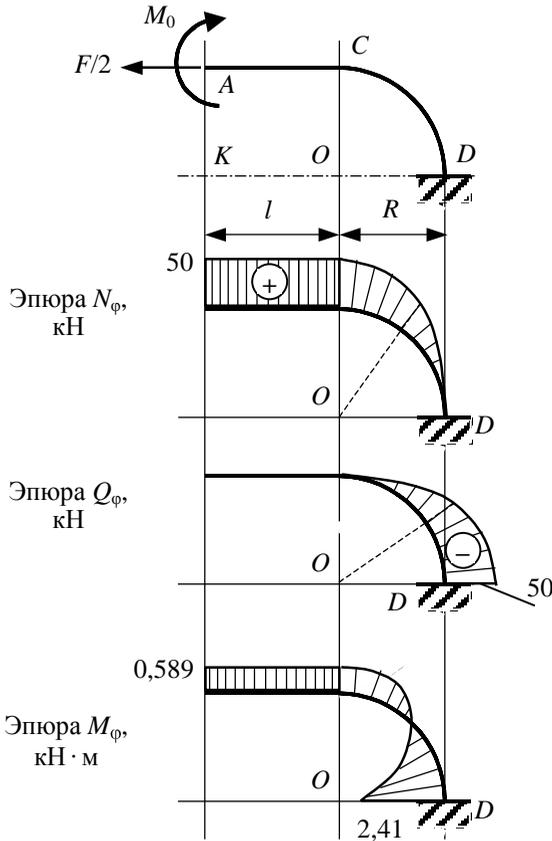


Рис. 7.6. Эпюры внутренних силовых факторов

Проверка прочности

- Наибольшие нормальные напряжения от центрального растяжения и изгиба в сечениях *A* и *B* (см. рис. 7.3) определяются по формуле

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{W_z}.$$

В данном случае:

$$N = F/2 = 100/2 = 50 \text{ кН}; \quad A = 60 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 1200 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$M = 0,589 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad W_z = bh^2/6 = 60 \cdot 10^{-3} \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2/6 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Нормальные напряжения в указанных сечениях достигают максимального значения в наиболее удаленных волокнах прямолинейных участков звена:

- с внутренней стороны звена

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= 50 \cdot 10^{-3} / (1200 \cdot 10^{-6}) + 0,589 \cdot 10^{-3} / (4 \cdot 10^{-6}) = \\ &= 41,7 + 147,3 = 189 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

- с наружной стороны

$$\sigma_{\min} = 41,7 - 147,3 = -105,6 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении стержня показана на рис. 7.7.

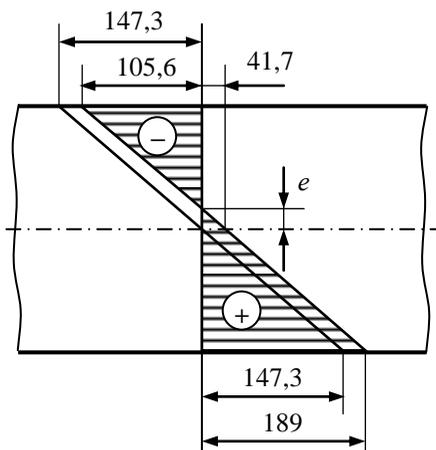


Рис. 7.7. Эпюра нормальных напряжений σ (МПа) в сечениях *A* и *B* стержня

■ Наиболее напряженным сечением криволинейной части стержня есть сечение D (см. рис. 7.4), в котором приложена внешняя сила F , растягивающая звено. В этом сечении действуют изгибающий момент $|M_{\max}| = 2,41 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и перерезывающая сила $|Q_{\max}| = 50 \text{ кН}$, нормальная сила $N = 0$ (см. рис. 7.6). Нормальные напряжения от изгиба в сечении D определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M}{Ae} \frac{y}{r_0 + y}.$$

Находим величину радиуса кривизны нейтрального слоя кривой части звена (рис.7.8):

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{h}{\ln \frac{\rho_0 + h/2}{\rho_0 - h/2}} = \frac{20}{\ln \frac{60 + 20/2}{60 - 20/2}} = \frac{20}{\ln \frac{7}{5}} = \\ &= \frac{20}{\ln 7 - \ln 5} = \frac{20}{1,9459 - 1,6094} = 59,43 \text{ мм}, \end{aligned}$$

где $\rho_0 = R = 60 \text{ мм}$ (см. рис. 7.4).

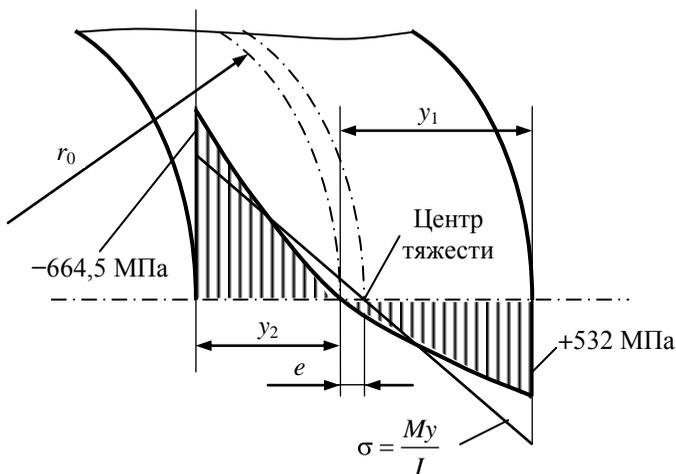


Рис. 7.8. Эпюра нормальных напряжений в сечении D криволинейной части стержня

Смещение нейтральной линии относительно центра тяжести сечения

$$e = \rho_0 - r_0 = 60 - 59,43 = 0,57 \text{ мм.}$$

Нормальные напряжения от изгиба в сечении D

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M}{Ae} \frac{y_1}{r_0 + y_1} = \\ &= \frac{2,41 \cdot 10^{-3}}{1200 \cdot 10^{-6} \cdot 0,57 \cdot 10^{-3}} \frac{10,57 \cdot 10^{-3}}{59,43 \cdot 10^{-3} + 10,57 \cdot 10^{-3}} = 532,0 \text{ МПа;} \\ \sigma_{\min} &= \frac{M}{Ae} \frac{y_2}{r_0 + y_2} = \\ &= \frac{2,41 \cdot 10^{-3}}{1200 \cdot 10^{-6} \cdot 0,57 \cdot 10^{-3}} \frac{-0,943 \cdot 10^{-3}}{59,43 \cdot 10^{-3} + -0,943 \cdot 10^{-3}} = -664,5 \text{ МПа;} \end{aligned}$$

Если напряжение в этом сечении вычислять по формуле определения нормальных напряжений в прямом стержне, имеющей вид

$$\sigma = \frac{My}{I},$$

то наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I} = \frac{My_{\max}}{bh^3/12} = \frac{2,41 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 12}{60 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3}^3} = 602,5 \text{ МПа,}$$

что на 9,33 % меньше наибольшего напряжения (664,5 МПа), полученного по формуле, применяемой для определения напряжений в кривом стержне.

Таким образом, если использовать формулу для прямого стержня, то найденное по ней нормальное напряжение по сравнению с действительным будет занижено.

Эпюра нормальных напряжений приведена на рис. 7.8.

- Определим также касательные напряжения в опасном сечении. В этом сечении наибольшие касательные напряжения от изгиба

$$\tau_{\max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{\left(60 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{3}{12}\right) 60 \cdot 10^{-3}} = 63 \text{ МПа},$$

что более чем в 10 раз меньше наибольших нормальных напряжений.

Проверка прочности. Допускаемое напряжение для стали, из которой изготовлен кривой стержень,

$$[\sigma] = \sigma_T / [n] = 1200 / 1,6 = 750 \text{ МПа}.$$

Наибольшее нормальное напряжение возникает в опасном сечении криволинейной части стержня:

$$\sigma_{\max} = 664,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 750 \text{ МПа}.$$

Касательное напряжение

$$\tau_{\max} = 63 \text{ МПа} < [\tau] = 0,6[\sigma] = 450 \text{ МПа}.$$

Таким образом, нормальные и касательные напряжения во всех опасных сечениях стержня не превышают допускаемых, и прочность стержня обеспечена.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

**Задача
12**

**Расчет стержня, сжатого
центральной продольной силой**

Задана стойка, сжатая центральной продольной силой F (рис. 8.1, *a*). Стойка имеет различную компоновку поперечного сечения (рис. 8.1, *б*). Исходные данные приведены в табл. 8.1 и 8.2.

Требуется определить:

- 1) размеры поперечного сечения;
- 2) коэффициент запаса, соответствующий принятым размерам сечения.

Указания

- При решении задачи использовать график зависимости $\sigma_{кр} = f(\lambda)$, построив его по данным своего варианта.
- Принятое сечение изобразить в масштабе, указать размеры, показать главные центральные оси и численные значения моментов инерции относительно этих осей.

Таблица 8.1

Механические характеристики материалов

Материал	Предел текучести σ_T	Предел пропорциональности $\sigma_{пц}$	Модуль упругости E , 10^5	Коэффициенты в формуле Ясинского		Коэффициент запаса прочности $[n]$
				a	b	
	МПа					–
Сталь Ст 3	240	200	2,0	310	1,14	1,7
Сталь 20	260	220	2,0	330	1,11	1,6
Сталь 45	360	300	2,1	450	1,67	1,5
Сплав Д16Т	321	256	0,7	406	2,83	1,8

Исходные данные к задаче 12

Номер строки	Материал	Расчетная схема (рис. 8.1,а)	Тип сечения (рис. 8.1,б)	Нагрузка F , кН	Длина l , м	Коэффициент запаса при расчете по устойчивости $[n_y]$
1	Ст3	1	1	50	2,0	2,4
2	Сталь 20	2	2	80	2,5	2,5
3	Сталь 45	3	3	100	3,0	2,6
4	Д16Г	4	4	120	4,0	2,7
5	Сталь 20	2	1	150	5,0	2,8
6	Д16Г	1	2	180	6,0	2,4
7	Ст3	3	3	200	2,0	2,5
8	Сталь 20	4	4	230	2,5	2,6
9	Сталь 45	1	1	250	3,0	2,7
0	Ст3	4	2	300	4,0	2,8
	г	е	д	е	д	г

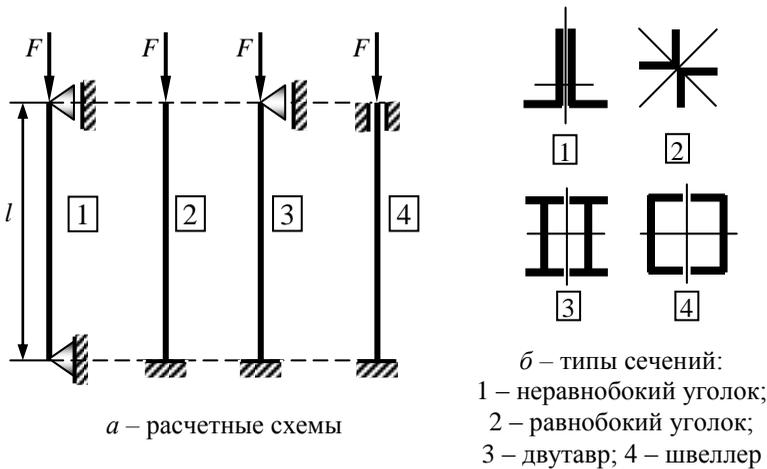


Рис. 8.1. Расчетные схемы (а) и типы сечений (б) стержня

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

Задана стойка, сжатая центральной продольной силой F (рис. 8.2). Исходные данные приведены в таблице.

Материал	Расчетная схема (рис. 8.1, <i>a</i>)	Тип сечения (рис. 8.1, <i>b</i>)	Нагрузка F , кН	Длина l , м	Коэффициент запаса при расчете по устойчивости $[n_y]$
Ст3	3	В примере рассматриваются все типы	200	4,0	3,0

Механические характеристики материалов

Материал	Предел текучести, σ_T	Предел пропорциональности, $\sigma_{пц}$	Модуль упругости E , 10^5	Коэффициенты в формуле Ясинского		Коэффициент запаса прочности $[n]$
				a	b	
МПа						—
Сталь Ст3	240	200	2,0	310	1,14	1,5

Требуется определить:

- 1) размеры поперечного сечения;
- 2) коэффициент запаса, соответствующий принятым размерам сечения.

Указания

- При решении задачи использовать график зависимости $\sigma_{кр} = f(\lambda)$, построив его по данным своего варианта.
- Принятое сечение изобразить в масштабе, указать размеры, показать главные центральные оси и численные значения моментов инерции относительно этих осей.

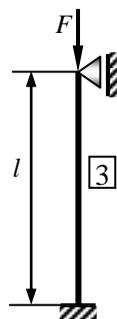


Рис. 8.2. Расчетная схема к задаче 12

Решение

Построение графика $\sigma_{кр} = f(\lambda)$. Вычисляем характерные точки графика:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 99,3 \approx 99;$$

$$\lambda_0 = \frac{a - \sigma_T}{b} = \frac{310 - 240}{1,14} = 61,4 \approx 61.$$

График $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ изображен на рис. 8.3. При построении кривой Эйлера используется формула

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

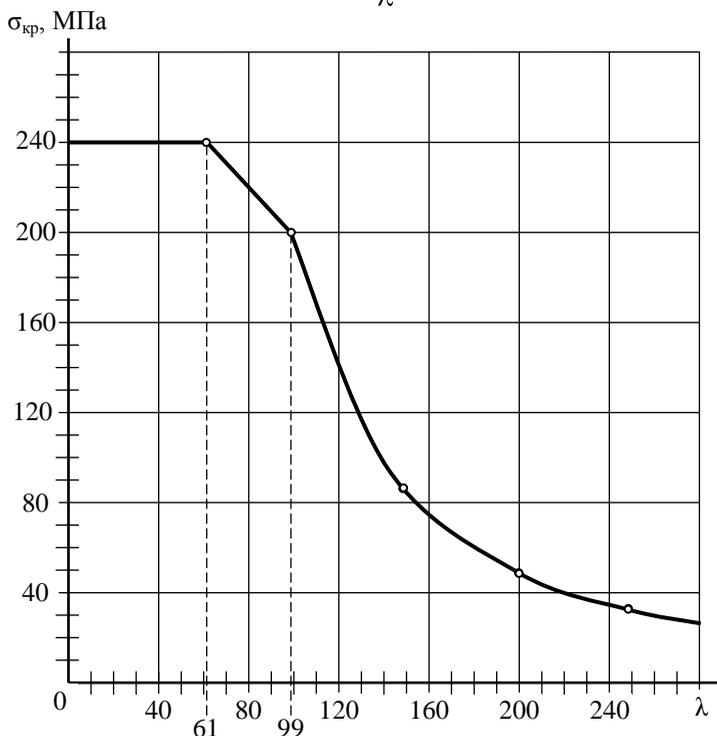


Рис. 8.3. График критических напряжений $\sigma_{кр} = f(\lambda)$

Определение размеров поперечного сечения. Для определения размеров поперечного сечения используется метод последовательных приближений.

Сечение из двух швеллеров (рис. 8.1, б)

Первое приближение:

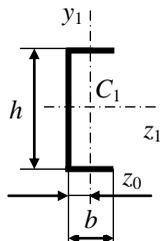
- Минимальный размер сечения определяем из условия прочности на сжатие:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma = \frac{\sigma_T}{n},$$

$$A \geq \frac{F \cdot n}{\sigma_T} \geq \frac{200 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot 1,5}{240 \text{ МПа}} \geq 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \geq 12,5 \text{ см}^2.$$

Так как сечение состоит из двух швеллеров, то площадь одного швеллера $A' \geq 6,25 \text{ см}^2$. По таблице сортамента ГОСТ 8240-72 выбираем швеллер № 6,5 с $A' = 7,51 \text{ см}^2$. Швеллер имеет следующие параметры, необходимые далее в расчете:

$$\begin{aligned} h &= 65 \text{ мм} \\ b &= 36 \text{ мм} \\ z_0 &= 1,24 \text{ см} \\ I_{z_1} &= 48,6 \text{ см}^4 \\ I_{y_1} &= 8,7 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

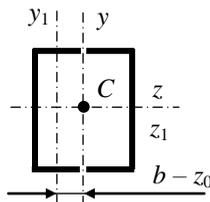


Для сложного сечения (два швеллера) моменты инерции относительно главных центральных осей y, z :

$$I_z = 2I_{z_1} = 2 \cdot 48,6 = 97,2 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2 \left[I_{y_1} + b \cdot z_0^2 A' \right] =$$

$$= 2 \left[8,7 + 3,6 - 1,24^2 \cdot 7,51 \right] = 101,06 \text{ см}^4.$$



Из двух полученных значений выбираем минимальный момент инерции поперечного сечения $I_{\min} = I_z = 97,2 \text{ см}^4$.

- Минимальный радиус инерции сечения:

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min}/A} = \sqrt{97,2/2 \cdot 7,51} = 2,54 \text{ см.}$$

- Гибкость стержня:

$$\lambda = \mu l / i_{\min} = 0,7 \cdot 400 / 2,54 = 110,2,$$

где $\mu = 0,7$ – коэффициент приведения длины для данной расчетной схемы (рис. 8.2).

- По графику $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ (рис. 8.3) для $\lambda = 110$ имеем $\sigma_{кр} = 163$ МПа.
- Действительное напряжение

$$\sigma_{д} = \frac{F}{A} = \frac{200 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{2 \cdot 7,51 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 133,2 \text{ МПа.}$$

- Действительный коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{д}} = \frac{163}{133,2} = 1,22 < [n_y] = 3,0,$$

т. е. условие устойчивости не выполняется.

Второе приближение: выбираем больший номер швеллера, например № 14, с характеристиками:

$A', \text{ см}^2$	$I_{z1}, \text{ см}^4$	$I_{y1}, \text{ см}^4$	$b, \text{ мм}$	$z_0, \text{ см}$
15,6	491	45,4	58	1,67

Далее вновь проводим расчет на устойчивость:

- моменты инерции относительно главных центральных осей для сечения из двух швеллеров:

$$I_z = 2 \cdot 491 = 982 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2[45,4 + (5,8 - 1,67)^2 \cdot 15,6] = 623 \text{ см}^4,$$

$$I_{\min} = I_y = 623 \text{ см}^4;$$

- $i_{\min} = \sqrt{623/2 \cdot 15,6} = 4,47 \text{ см};$
- $\lambda = 0,7 \cdot 400 / 4,47 = 62,6 \approx 63;$
- по графику $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ (рис. 8.3) для $\lambda = 63$ имеем $\sigma_{кр} = 238$ МПа;

- $\sigma_d = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4}} = 64,1 \text{ МПа};$
- $n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{238}{64,1} = 3,7 > [n_y] = 3,0,$

что превышает требуемый запас по устойчивости на

$$[(3,7 - 3,0)/3,0] \cdot 100 \% = 23,3 \%.$$

Третье приближение: выбираем швеллер меньшего размера – № 12:

$A', \text{ см}^2$	$I_{z1}, \text{ см}^4$	$I_{y1}, \text{ см}^4$	$b, \text{ мм}$	$z_0, \text{ см}$
13,3	304	31,2	52	1,54

Далее вновь проводим расчет на устойчивость:

- моменты инерции относительно главных центральных осей для сечения из двух швеллеров:
 $I_z = 2 \cdot 304 = 608 \text{ см}^4,$
 $I_y = 2[31,2 + (5,2 - 1,54)^2 \cdot 13,3] = 418,7 \text{ см}^4,$
 $I_{\min} = I_y = 418,7 \text{ см}^4;$
- $i_{\min} = \sqrt{418,7 / 2 \cdot 13,3} = 3,97 \text{ см};$
- $\lambda = 0,7 \cdot 400 / 3,97 = 70,5 \approx 71;$
- по графику $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ (рис. 8.3) для $\lambda = 71$ имеем $\sigma_{кр} = 230 \text{ МПа};$
- $\sigma_d = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 13,3 \cdot 10^{-4}} = 75,2 \text{ МПа};$
- $n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{230}{75,2} = 3,06 > [n_y] = 3,0.$

Полученное превышение запаса устойчивости

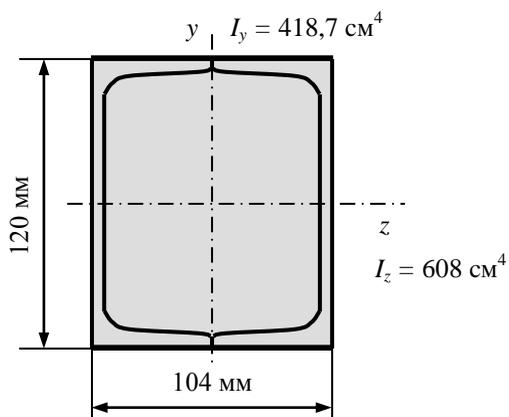
$$[(3,06 - 3,0)/3,0] \cdot 100 \% = 2 \%$$

невелико и, следовательно, принимаем окончательно поперечное сечение стержня, составленное из двух швеллеров № 12.

Основные результаты расчета сводим в таблицу.

Номер приближения	Номер швеллера	$A, \text{см}^2$	$I_z, \text{см}^4$	$I_y, \text{см}^4$	$I_{\min}, \text{см}^4$	$i_{\min}, \text{см}$	λ	$\sigma_{\text{кр}}, \text{МПа}$ (график)	$\sigma_{\text{д}}=F/A$ МПа	$n_{\text{д}}=$ $=\sigma_{\text{кр}}/\sigma_{\text{д}}$
1	6,5	2·7,51	97,2	101,1	97,2	2,54	110	162	133,2	1,2<3
2	14	2·15,6	982	623	623	4,47	63	238	64,1	3,7>3
3	12	2·13,3	608	418,7	418,7	3,97	71	230	75,2	3,06>3

Поперечное сечение – 2 швеллера № 12



Сечение из двух двутавров (рис. 8.1, б)

Первое приближение

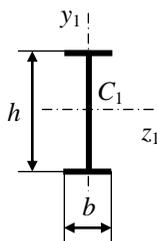
- Минимальный размер сечения определяем из условия прочности на сжатие:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma = \frac{\sigma_T}{n},$$

$$A \geq \frac{F \cdot n}{\sigma_T} \geq \frac{200 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot 1,5}{240 \text{ МПа}} \geq 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \geq 12,5 \text{ см}^2.$$

Так как сечение состоит из двух двутавров, то площадь одного двутавра $A' \geq 6,25 \text{ см}^2$. По таблице сортамента ГОСТ 8239–72 выбираем двутавр № 10 с $A' = 12 \text{ см}^2$. Двутавр имеет следующие параметры, необходимые далее в расчете:

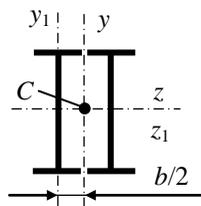
$$\begin{aligned} h &= 100 \text{ мм} \\ b &= 55 \text{ мм} \\ I_{z_1} &= 198 \text{ см}^4 \\ I_{y_1} &= 17,9 \text{ см}^4. \end{aligned}$$



Для сложного сечения (два двутавра) моменты инерции относительно главных центральных осей y, z :

$$I_z = 2I_{z_1} = 2 \cdot 198 = 396 \text{ см}^4,$$

$$\begin{aligned} I_y &= 2 \left[I_{y_1} + b/2^2 A' \right] = \\ &= 2 \left[17,9 + 5,5/2^2 \cdot 12 \right] = 217,3 \text{ см}^4. \end{aligned}$$



Из двух полученных значений выбираем минимальный момент инерции поперечного сечения $I_{\min} = I_y = 217,3 \text{ см}^4$.

- Минимальный радиус инерции сечения:

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min}/A} = \sqrt{217,3/2 \cdot 12} = 3 \text{ см}.$$

- Гибкость стержня:

$$\lambda = \mu l / i_{\min} = 0,7 \cdot 400 / 3 = 93,3 \approx 93,$$

где $\mu = 0,7$ – коэффициент приведения длины для данной расчетной схемы (рис. 8.2).

- По графику $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ (рис. 8.3) для $\lambda = 93$ имеем $\sigma_{кр} = 204$ МПа.
- Действительное напряжение

$$\sigma_d = \frac{F}{A} = \frac{200 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{2 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 83,3 \text{ МПа}.$$

- Действительный коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{204}{83,3} = 2,45 < [n_y] = 3,0,$$

т. е. условие устойчивости не выполняется.

Второе приближение: выбираем больший номер двутавра, например № 12, с характеристиками:

$A', \text{ см}^2$	$I_{z1}, \text{ см}^4$	$I_{y1}, \text{ см}^4$	$b, \text{ мм}$
14,7	350	27,9	64

Далее вновь проводим расчет на устойчивость:

- моменты инерции относительно главных центральных осей для сечения из двух двутавров:

$$I_z = 2 \cdot 350 = 700 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2[27,9 + (6,4/2)^2 \cdot 14,7] = 356,9 \text{ см}^4,$$

$$I_{\min} = I_y = 356,9 \text{ см}^4;$$

- $i_{\min} = \sqrt{356,9 / 2 \cdot 14,7} = 3,48 \text{ см};$
- $\lambda = 0,7 \cdot 400 / 3,48 = 80,5 \approx 81;$
- по графику $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ (рис. 8.3) для $\lambda = 81$ имеем $\sigma_{кр} = 218$ МПа;
- $\sigma_d = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 14,7 \cdot 10^{-4}} = 68 \text{ МПа};$

- $n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{218}{68} = 3,2 > [n_y] = 3,0.$

Превышение составляет

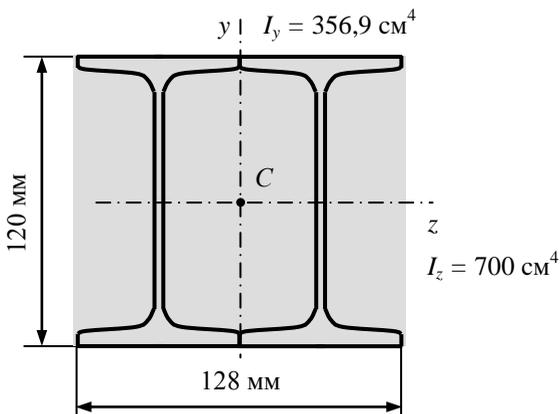
$$[(3,2 - 3,0)/3,0] \cdot 100 \% = 6,7 \%,$$

что невелико и, следовательно, принимаем окончательно поперечное сечение стержня, составленное из двух двутавров № 12.

Основные результаты расчета сводим в таблицу.

Номер приближения	Номер двутавра	$A, \text{см}^2$	$I_z, \text{см}^4$	$I_y, \text{см}^4$	$I_{\min}, \text{см}^4$	$i_{\min}, \text{см}$	λ	$\sigma_{кр}, \text{МПа}$ (график)	$\sigma_d = F/A$ МПа	$n_d = \sigma_{кр} / \sigma_d$
1	10	2·12	396	217,3	217,3	3,0	93	204	83,3	2,5 < 3
2	12	2·14,7	700	356,9	356,9	3,48	81	218	68	3,2 > 3

Поперечное сечение – 2 двутавра № 12



Сечение из двух неравнобоких уголков (рис. 8.1, б)

Первое приближение

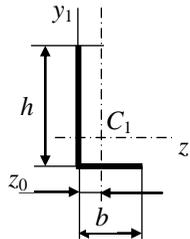
- Минимальный размер сечения определяем из условия прочности на сжатие:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma = \frac{\sigma_T}{n},$$

$$A \geq \frac{F \cdot n}{\sigma_T} \geq \frac{200 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot 1,5}{240 \text{ МПа}} \geq 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \geq 12,5 \text{ см}^2.$$

Так как сечение состоит из двух уголков, то площадь одного уголка $A' \geq 6,25 \text{ см}^2$. По таблице сортамента ГОСТ 8510-72 выбираем уголок № 8/5 с $A' = 6,36 \text{ см}^2$. Неравнобокий уголок имеет следующие параметры, необходимые далее в расчете:

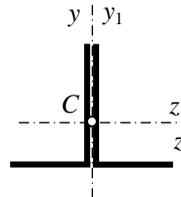
$$\begin{aligned} h &= 80 \text{ мм}, \\ b &= 50 \text{ мм}, \\ z_0 &= 1,13 \text{ см}, \\ I_{z_1} &= 41,6 \text{ см}^4, \\ I_{y_1} &= 20,8 \text{ см}^4. \end{aligned}$$



Для сложного сечения (два уголка) моменты инерции относительно главных центральных осей y, z :

$$I_z = 2I_{z_1} = 2 \cdot 41,6 = 83,2 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2I_{y_1} = 41,6 \text{ см}^4.$$



Из двух полученных значений выбираем минимальный момент инерции поперечного сечения $I_{\min} = I_y = 41,6 \text{ см}^4$.

- Минимальный радиус инерции сечения:

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A} = \sqrt{41,6 / 2 \cdot 6,36} = 1,8 \text{ см}.$$

- Гибкость стержня:

$$\lambda = \mu l / i_{\min} = 0,7 \cdot 400 / 1,8 = 155,6 \approx 156,$$

где $\mu = 0,7$ – коэффициент приведения длины для данной расчетной схемы (рис. 8.2).

- По графику $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ (рис. 8.3) для $\lambda = 156$ имеем $\sigma_{кр} = 81$ МПа.
- Действительное напряжение

$$\sigma_{д} = \frac{F}{A} = \frac{200 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{2 \cdot 6,36 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 157,2 \text{ МПа}.$$

- Действительный коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{д}} = \frac{81}{157,2} = 0,52 < [n_y] = 3,0,$$

т. е. условие устойчивости не выполняется.

Второе приближение: выбираем больший номер неравнобокого уголка, например № 14/9, с характеристиками:

$A', \text{ см}^2$	$I_{z1}, \text{ см}^4$	$I_{y1}, \text{ см}^4$	$h, \text{ мм}$	$b, \text{ мм}$
18	364	194	140	90

Далее вновь проводим расчет на устойчивость:

- моменты инерции относительно главных центральных осей для сечения из двух уголков:

$$I_z = 2 \cdot 364 = 728 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2 \cdot 194 = 388 \text{ см}^4,$$

$$I_{\min} = I_y = 388 \text{ см}^4;$$

- $i_{\min} = \sqrt{388 / 2 \cdot 18} = 3,28 \text{ см};$
- $\lambda = 0,7 \cdot 400 / 3,28 = 85,4 \approx 85;$
- по графику $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ (рис. 8.3) для $\lambda = 85$ имеем $\sigma_{кр} = 213$ МПа;

- $\sigma_{д} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 18 \cdot 10^{-4}} = 55,6 \text{ МПа};$

- $n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{213}{55,6} = 3,8 > [n_y] = 3,0,$

что превышает требуемый запас по устойчивости на

$$[(3,8 - 3,0)/3,0] \cdot 100 \% = 26,7 \%$$

Третье приближение: выбираем уголок меньшего размера, например № 12,5/8:

$A', \text{ см}^2$	$I_{z1}, \text{ см}^4$	$I_{y1}, \text{ см}^4$	$h, \text{ мм}$	$b, \text{ мм}$
16	256	137	125	80

Далее вновь проводим расчет на устойчивость:

- моменты инерции относительно главных центральных осей для сечения из двух уголков:

$$I_z = 2 \cdot 256 = 512 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2 \cdot 137 = 274 \text{ см}^4,$$

$$I_{\min} = I_y = 274 \text{ см}^4;$$

- $i_{\min} = \sqrt{274 / 2 \cdot 16} = 2,93 \text{ см};$
- $\lambda = 0,7 \cdot 400 / 2,93 = 95,6 \approx 96;$
- по графику $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ (рис. 8.3) для $\lambda = 96$ имеем $\sigma_{кр} = 203 \text{ МПа};$

- $\sigma_d = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 62,5 \text{ МПа};$

- $n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{203}{62,5} = 3,2 > [n_y] = 3,0.$

Полученное превышение запаса устойчивости

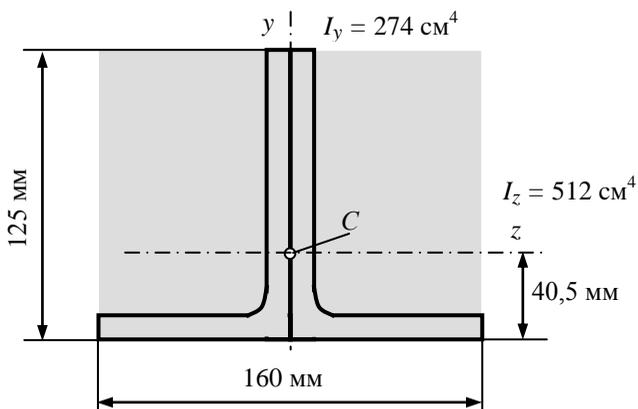
$$[(3,2 - 3,0)/3,0] \cdot 100 \% = 6,67 \%$$

невелико и, следовательно, принимаем окончательно поперечное сечение стержня, составленное из двух неравнобоких уголков № 12,5/8.

Основные результаты расчета сводим в таблицу.

Номер приближения	Номер уголка	A_2 , см ²	I_z , см ⁴	I_y , см ⁴	I_{min} , см ⁴	i_{min} , см	λ	$\sigma_{кр}$, МПа (график)	$\sigma_d = F/A$, МПа	$n_d = \sigma_{кр} / \sigma_d$
1	8/5	2·6,36	83,2	41,6	41,6	1,8	156	81	157,2	0,52 < 3
2	14/9	2·18	728	388	388	3,28	85	213	55,6	3,8 > 3
3	12,5/8	2·16	512	274	274	2,93	96	203	62,5	3,2 > 3

Поперечное сечение – 2 неравнобоких уголка № 12,5/8



Сечение из двух равнобоких уголков (рис. 8.1, б)

Первое приближение

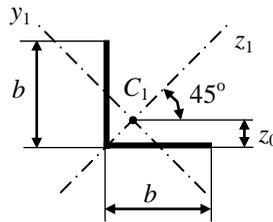
- Минимальный размер сечения определяем из условия прочности на сжатие:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma = \frac{\sigma_T}{n},$$

$$A \geq \frac{F \cdot n}{\sigma_T} \geq \frac{200 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot 1,5}{240 \text{ МПа}} \geq 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \geq 12,5 \text{ см}^2.$$

Так как сечение состоит из двух уголков, то площадь одного уголка $A' \geq 6,25 \text{ см}^2$. По таблице сортамента ГОСТ 8509-72 выбираем равнобокий уголок № 7,5 с $A' = 7,39 \text{ см}^2$. Уголок имеет следующие параметры, необходимые далее в расчете:

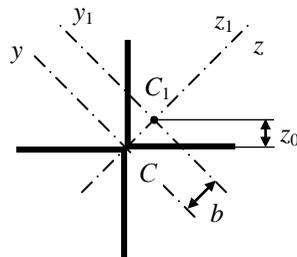
$$\begin{aligned} b &= 75 \text{ мм}, \\ z_0 &= 2,02 \text{ см}, \\ I_{z_1} &= 62,6 \text{ см}^4, \\ I_{y_1} &= 16,4 \text{ см}^4. \end{aligned}$$



Для сложного сечения (два уголка) моменты инерции относительно главных центральных осей y, z :

$$I_z = 2I_{z_1} = 2 \cdot 62,6 = 125,2 \text{ см}^4,$$

$$\begin{aligned} I_y &= 2 \left[I_{y_1} + b^2 A' \right] = \\ &= 2 \left[16,4 + \left(\frac{2,02}{\sqrt{2}/2} \right)^2 \cdot 7,39 \right] = 153,4 \text{ см}^4. \end{aligned}$$



Здесь $b = z_0 / \sin 45^\circ$.

Из двух полученных значений выбираем минимальный момент инерции поперечного сечения $I_{\min} = I_z = 125,2 \text{ см}^4$.

- Минимальный радиус инерции сечения:

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A} = \sqrt{125,2 / (2 \cdot 7,39)} = 2,91 \text{ см}.$$

- Гибкость стержня:

$$\lambda = \mu l / i_{\min} = 0,7 \cdot 400 / 2,91 = 96,$$

где $\mu = 0,7$ – коэффициент приведения длины для данной расчетной схемы (рис. 8.2).

- По графику $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ (рис. 8.3) для $\lambda = 96$ имеем $\sigma_{кр} = 202$ МПа.
- Действительное напряжение

$$\sigma_d = \frac{F}{A} = \frac{200 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{2 \cdot 7,39 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 135,3 \text{ МПа}.$$

- Действительный коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{202}{135,3} = 1,49 < [n_y] = 3,0,$$

т. е. условие устойчивости не выполняется.

Второе приближение: выбираем больший номер уголка, например № 11, с характеристиками:

$A', \text{ см}^2$	$I_{z1}, \text{ см}^4$	$I_{y1}, \text{ см}^4$	$b, \text{ мм}$	$z_0, \text{ см}$
15,2	279	72,7	110	2,96

Далее вновь проводим расчет на устойчивость:

- моменты инерции относительно главных центральных осей для сечения из двух уголков:

$$I_z = 2 \cdot 279 = 558 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2[71,7 + (2,96 \cdot 2 / \sqrt{2})^2 \cdot 15,2] = 678 \text{ см}^4,$$

$$I_{\min} = I_z = 558 \text{ см}^4;$$

- $i_{\min} = \sqrt{558 / 2 \cdot 15,2} = 4,29 \text{ см};$
- $\lambda = 0,7 \cdot 400 / 4,29 = 65;$
- по графику $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ (рис. 8.3) для $\lambda = 65$ имеем $\sigma_{кр} = 235$ МПа;

- $\sigma_d = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 15,2 \cdot 10^{-4}} = 65,8 \text{ МПа};$
- $n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{235}{65,8} = 3,6 > [n_y] = 3,0,$

что превышает требуемый запас по устойчивости на

$$[(3,6 - 3,0)/3,0] \cdot 100 \% = 20 \%$$

Третье приближение: выбираем равнобокий уголок меньшего размера, например № 10:

$A', \text{ см}^2$	$I_{z1}, \text{ см}^4$	$I_{y1}, \text{ см}^4$	$b, \text{ мм}$	$z_0, \text{ см}$
13,8	207	54,2	100	2,71

Далее вновь проводим расчет на устойчивость:

- моменты инерции относительно главных центральных осей для сечения из двух уголков:

$$I_z = 2 \cdot 207 = 414 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2[54,2 + (2,71 \cdot 2 / \sqrt{2})^2 \cdot 13,8] = 513,8 \text{ см}^4,$$

$$I_{\min} = I_z = 414 \text{ см}^4;$$

- $i_{\min} = \sqrt{414 / 2 \cdot 13,8} = 3,87 \text{ см};$
- $\lambda = 0,7 \cdot 400 / 3,87 = 72,4 \approx 72;$
- по графику $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ (рис. 8.3) для $\lambda = 72$ имеем $\sigma_{кр} = 227 \text{ МПа};$

- $\sigma_d = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 13,8 \cdot 10^{-4}} = 72,5 \text{ МПа};$

- $n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{227}{72,5} = 3,13 > [n_y] = 3,0.$

Полученное превышение запаса устойчивости

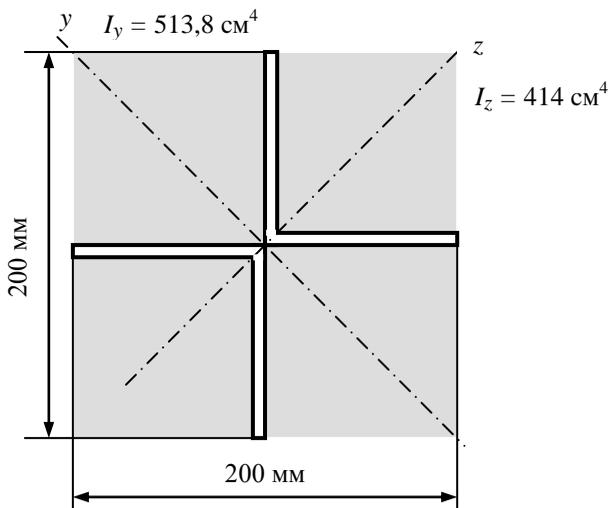
$$[(3,13 - 3,0)/3,0] \cdot 100 \% = 4,3 \%$$

невелико и, следовательно, принимаем окончательно поперечное сечение стержня, составленное из двух равнобоких уголков № 10.

Основные результаты расчета сводим в таблицу.

Номер приближения	Номер уголка	$A, \text{см}^2$	$I_z, \text{см}^4$	$I_y, \text{см}^4$	$I_{\min}, \text{см}^4$	$i_{\min}, \text{см}$	λ	$\sigma_{\text{кр}}, \text{МПа}$ (график)	$\sigma_d = F/A$ МПа	$n_d = \sigma_{\text{кр}} / \sigma_d$
1	7,5	2·7,39	125,2	153,4	125,2	2,91	96	202	135,3	1,49 < 3
2	11	2·15,2	558	678	558	4,29	65	235	65,8	3,6 > 3
3	10	2·13,8	414	513,8	414	3,87	72	227	72,5	3,13 > 3

Поперечное сечение – 2 равнобоких уголка № 10



РАСЧЕТ УПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Задача 13

Расчет систем с учетом сил инерции

С круглым стальным валом (рис. 9.1) жестко соединен ломаный стержень такого же диаметра ($d = 2R$, где R – радиус). Ломаный стержень имеет сосредоточенные массы. Вал вращается с постоянной угловой скоростью ω . Исходные данные приведены в табл. 9.1.

Требуется:

- 1) построить эпюры внутренних усилий,
- 2) определить из условия прочности на изгиб допускаемую угловую скорость вращения вала.

Указание. Учесть только инерционные нагрузки (от сосредоточенных и распределенных масс). Принять $m = \rho\pi R^2 l = \rho A l$, где $\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$ – плотность стали.

Таблица 9.1

Исходные данные к задаче 13

Номер строки	Номер схемы по рис. 9.1	Радиус сечения	Линейный размер				Сосредоточенная масса		Допускаемое напряжение σ
		R	l	b	c	m_1	m_2		
		мм				кг		МПа	
1	1	25	200	l	l	m	0	100	
2	2	30	250	$2l$	$2l$	0	m	120	
3	3	35	280	$1,5l$	$1,5l$	$0,5m$	0	140	
4	4	40	300	$1,8l$	$1,8l$	0	$0,5m$	160	
5	5	45	320	$1,2l$	$1,2l$	$0,6m$	0	180	
6	6	50	350	$0,5l$	$0,5l$	0	$0,8m$	200	
7	7	55	400	$1,5l$	l	$1,5m$	0	220	
8	8	60	450	l	$1,5l$	0	$1,5m$	240	
9	9	65	480	$2l$	l	$1,2m$	0	260	
0	10	70	500	l	$0,5l$	0	$1,2m$	280	
	е	г	д			е		д	

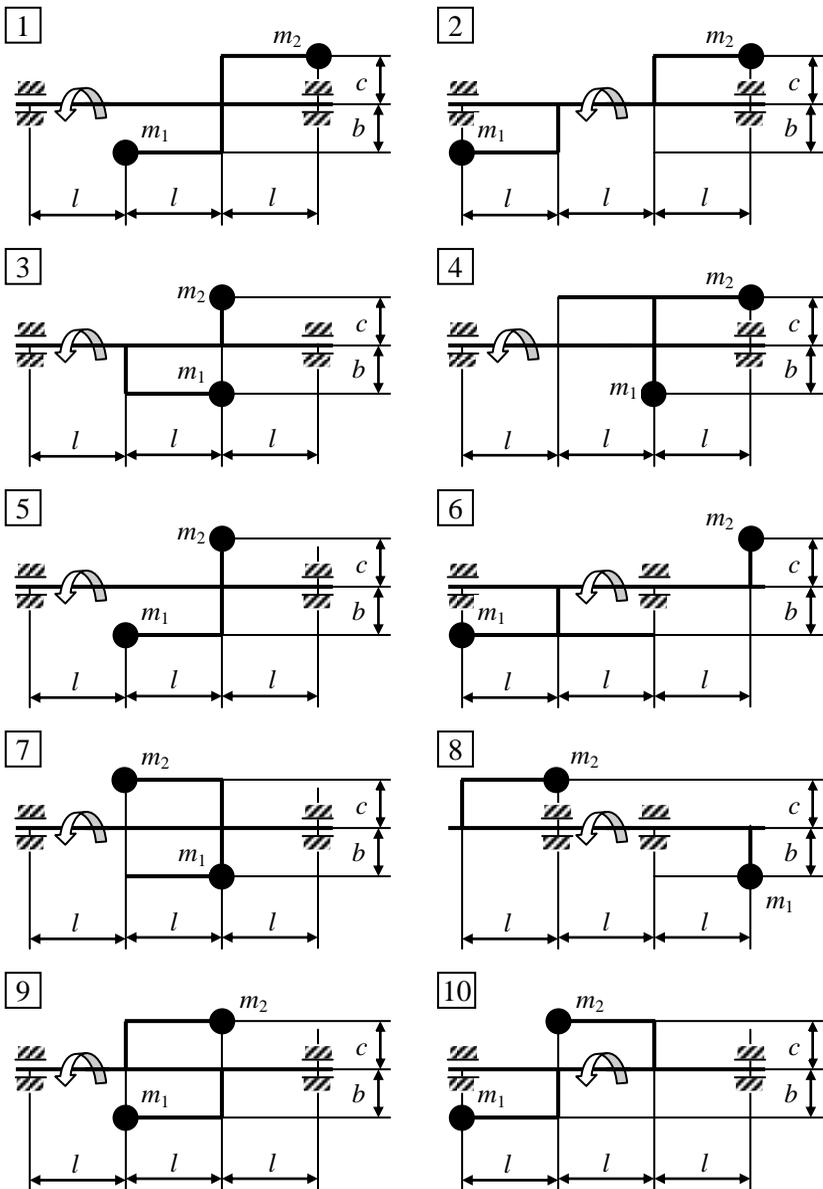


Рис. 9.1. Расчетные схемы к задаче 13

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

С круглым стальным валом (рис. 9.1) жестко соединен ломаный стержень такого же диаметра ($d = 2R$, где R – радиус). Ломаный стержень имеет сосредоточенные массы. Вал вращается с постоянной угловой скоростью ω .

Исходные данные к задаче приведены в таблице.

Радиус сечения	Линейный размер			Сосредоточенная масса		Допускаемое напряжение σ
	l	b	c	m_1	m_2	
мм				кг		МПа
20	500	l	l	0	m	150

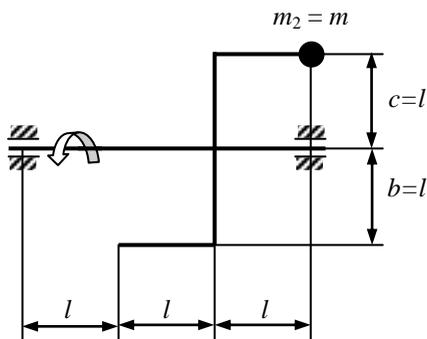


Рис. 9.2. Заданная схема конструкции

Требуется для заданной схемы конструкции (рис. 9.2):

1) построить эпюры внутренних усилий,

2) определить из условия прочности на изгиб допускаемую угловую скорость вращения вала.

Указание. Учесть только инерционные нагрузки (от сосредоточенных и распределенных масс). Принять $m = \rho \pi R^2 l = \rho A l$, где $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ – плотность стали.

Решение

Определение сил инерции. При решении задачи используется принцип Даламбера. Силы инерции при вращательном движении сосредоточенной массы m определяются по формуле

$$F_{\text{и}} = ma_n = m\omega^2 r,$$

где $a_n = \omega^2 r$ – нормальное ускорение, r – расстояние от массы до оси вращения.

В случае системы с распределенными параметрами (распределенной массой) элементарная сила инерции вычисляется по формуле

$$dF_{\text{и}} = dm\omega^2 r = \rho A dx \omega^2 r,$$

откуда интенсивность сил инерции

$$q_{\text{и}} = dF_{\text{и}}/dx = \rho A \omega^2 r.$$

Вычислим интенсивность сил инерции $q_{\text{и}}$ по участкам ломаного стержня $KLDM$ (рис. 9.3, а):

участок KL ($0 \leq x \leq l$): $(q_{\text{и}})_{KL} = \rho A \omega^2 l$;

участок LD ($0 \leq x \leq l$): $(q_{\text{и}})_{LD} = \rho A \omega^2 x \rightarrow x=0 \quad (q_{\text{и}})_{LD} = 0,$
 $x=l \quad (q_{\text{и}})_{LD} = \rho A \omega^2 l$;

на участке LD силы инерции изменяются по линейному закону и направлены вдоль участка LD (рис. 9.3, б);

участок DO ($0 \leq x \leq l$): $(q_{\text{и}})_{DO} = \rho A \omega^2 x \rightarrow x=0 \quad (q_{\text{и}})_{DO} = 0,$
 $x=l \quad (q_{\text{и}})_{DO} = \rho A \omega^2 l$;

на участке DO силы инерции изменяются по линейному закону и направлены вдоль участка DO (рис. 9.3, б);

участок OM ($0 \leq x \leq l$): $(q_{\text{и}})_{OM} = \rho A \omega^2 l$.

Кроме того, в точке M действует сила инерции от сосредоточенной массы m – $F_{\text{и}}(m_2) = m\omega^2 l = \rho A \omega^2 l^2$.

На рис. 9.3, б показаны эпюры сил инерции. На рис. 9.4 приведены эпюры внутренних силовых факторов для ломаного стержня $KLDM$.

Определение допускаемой угловой скорости вращения вала. Расчетная схема вала BC приведена на рис. 9.5. Внешней нагрузкой для

вала являются внутренние силовые факторы ломаного стержня, имеющие место в сечении D (см. эпюры на рис. 9.4):

$$N = 2,5\rho A\omega^2 l^2 - 1,5\rho A\omega^2 l^2 = \rho A\omega^2 l^2,$$

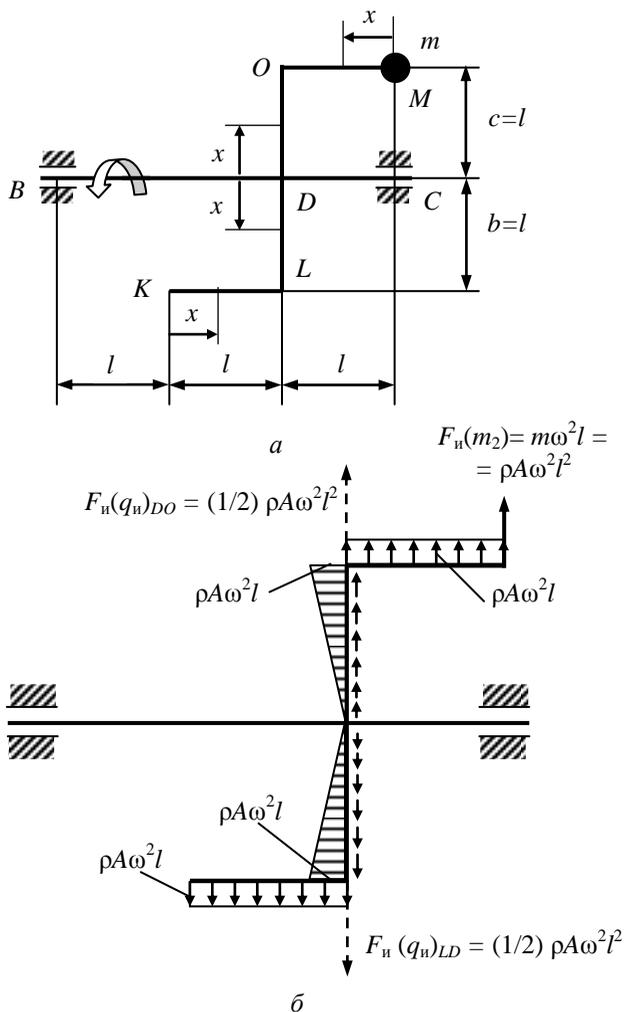


Рис. 9.3. Схема конструкции для расчета сил инерции (а) и распределение сил инерции по ломаному стержню (б)

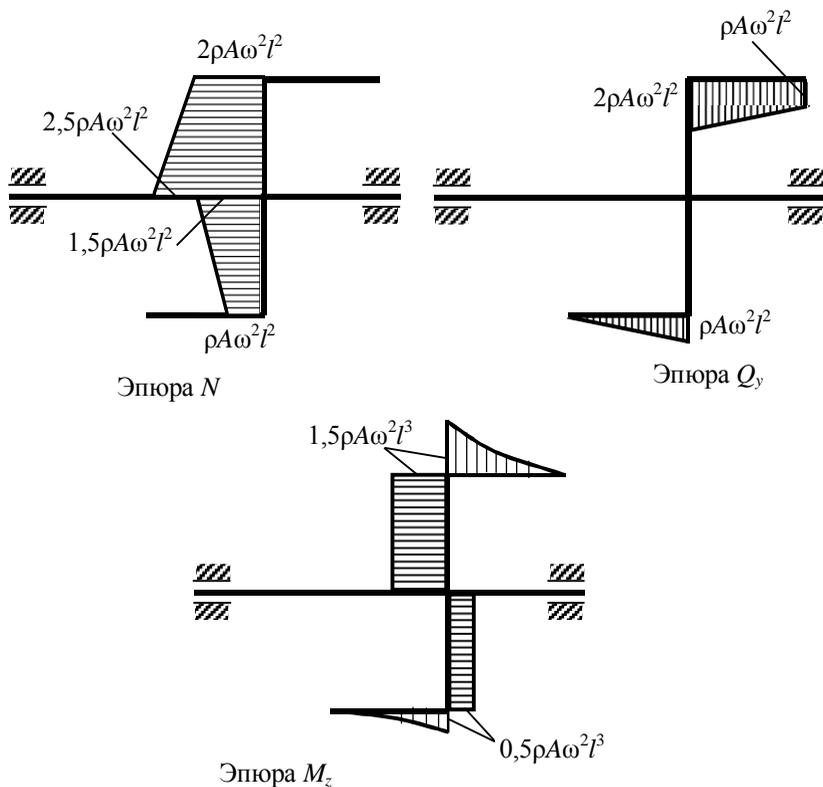


Рис. 9.4. Эпюры внутренних силовых факторов для ломаного стержня

$$M = 1,5\rho A\omega^2 l^3 + 0,5\rho A\omega^2 l^3 = 2\rho A\omega^2 l^3.$$

Определяем реакции опор (рис. 9.5):

$$\sum m_B = 0 \quad R_C(3l) + 2\rho A\omega^2 l^3 + \rho A\omega^2 l^2(2l) = 0 \rightarrow$$

$$R_C = - (4/3) \rho A\omega^2 l^2,$$

т. е. реакция опоры направлена в противоположную сторону;

$$\sum m_C = 0 \quad R_B(3l) - 2\rho A\omega^2 l^3 + \rho A\omega^2 l^2 l = 0 \rightarrow$$

$$R_B = (1/3)\rho A\omega^2 l^2.$$

Далее строим эпюру изгибающего момента (рис. 9.5) и по эпюре определяем значение максимального изгибающего момента: $M_{z \max} = (4/3)\rho A\omega^2 l^3$.

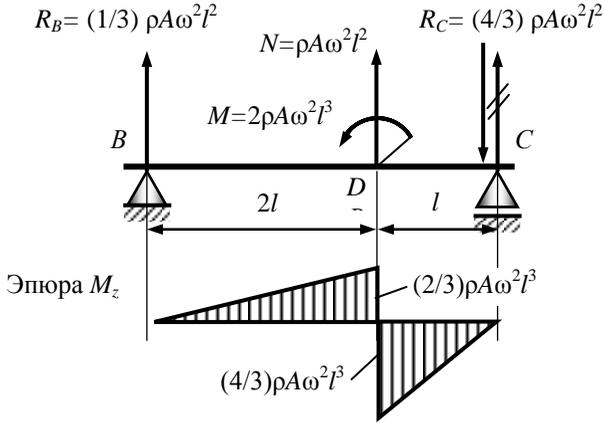


Рис. 9.5. Расчетная схема вала BC

Запишем условие прочности при изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_z} \leq \sigma .$$

Здесь $W_z = \pi d^3/32 = \pi R^3/4$. Тогда из условия прочности определяем допускаемую угловую скорость вала:

$$\frac{4/3 \rho A \omega^2 l^3}{\pi R^3/4} \leq \sigma ,$$

$$\omega \leq \sqrt{\frac{\sigma \cdot 3R}{16\rho l^3}} \leq \sqrt{\frac{150 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 7,8 \cdot 10^3 \cdot 0,5^3}} \leq 24 \text{ с}^{-1} . \quad \text{Ответ}$$

**Задача
14**

**Расчет упругих систем
на ударную нагрузку**

На стальную балку двутаврового поперечного сечения с высоты h падает груз весом G (рис. 9.6). Исходные данные приведены в табл. 9.2. При расчете принять:

- допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа,
- модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Требуется:

- 1) определить наибольшее нормальное напряжение в балке,
- 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, жесткость которой равна "с",
- 3) сравнить полученные результаты,
- 4) проверить прочность балки.

Таблица 9.2

Исходные данные к задаче 14

Номер строки	Схема по рис. 9.6	Номер двутавра	Вес G , кН	Длина l , м	Высота h , мм	Жесткость пружины c , кН/м
1	1	20	3	2	30	500
2	2	24	4	3	40	400
3	3	27	5	4	50	300
4	4	30	6	4	60	200
5	5	33	7	3	80	600
6	6	36	8	2	90	500
7	7	40	2	2	100	400
8	8	30	3	3	40	300
9	9	36	4	4	50	500
0	10	40	5	1	60	600
	е	д	е	д	г	д

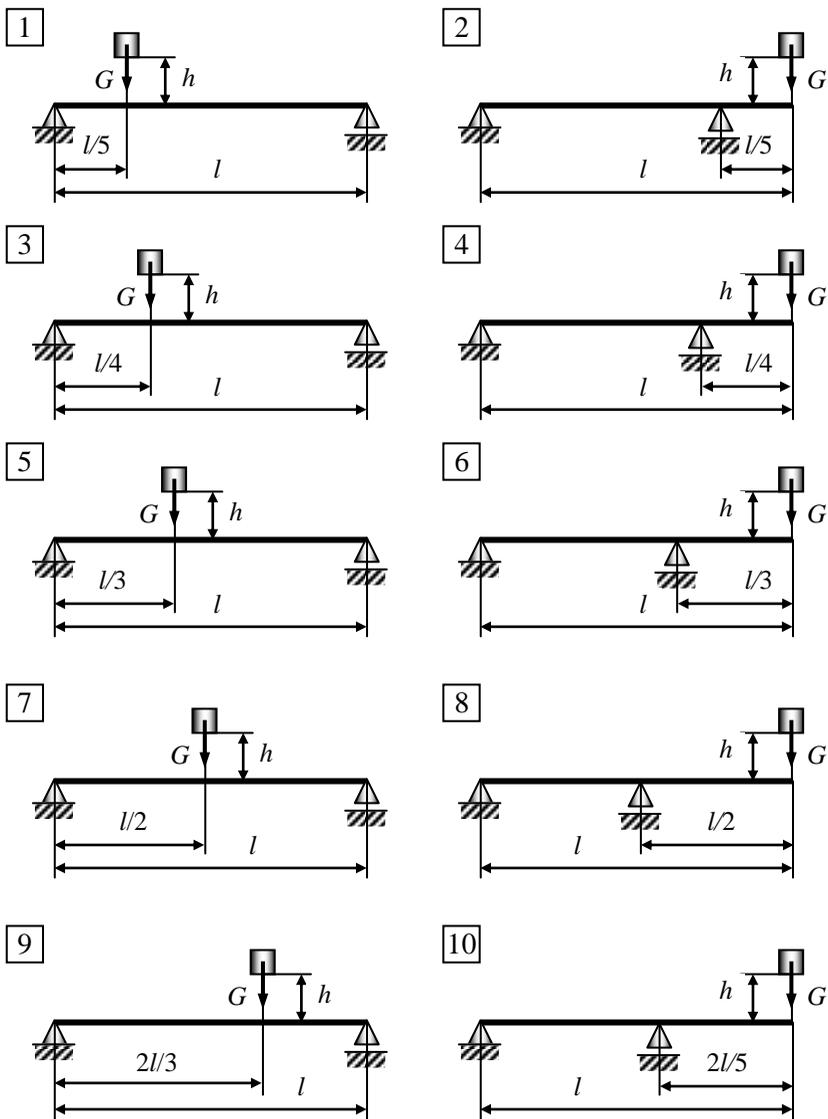


Рис. 9.6. Расчетные схемы к задаче 14

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

На стальную балку двутаврового поперечного сечения с высоты h падает груз весом G (рис. 9.7). При расчете принять: модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, допустимое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа. Исходные данные к задаче приведены в таблице.

Номер двутавра	Вес G , кН	Длина l , м	Высота h , мм	Жесткость пружины c , кН/м
24	4	2	40	500

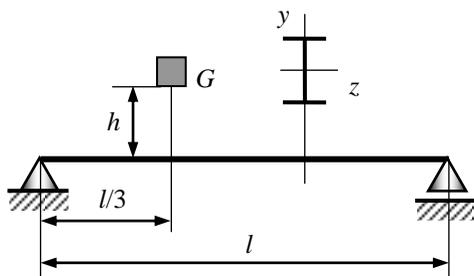


Рис. 9.7. Расчетная схема к задаче 14

Требуется:

- 1) определить наибольшее нормальное напряжение в балке,
- 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, жесткость которой равна " c ",
- 3) сравнить полученные результаты,
- 4) проверить прочность балки.

Решение

1. Определение наибольшего напряжения в балке на двух жестких опорах. Наибольшие напряжения в балке при изгибающем ударе определяются по формуле

$$\sigma_{д \max} = k_{д} \sigma_{ст \max},$$

где $k_{д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}$ – коэффициент динамичности,

$\sigma_{\text{ст max}} = \frac{M_z \text{ max}}{W_z}$ – наибольшее напряжение в балке при статическом

приложении нагрузки.

Для определения наибольшего изгибающего момента $M_z \text{ max}$ от статически приложенной силы G строится эпюра изгибающего момента для расчетной схемы, изображенной на рис. 9.8, а и определяется $M_z \text{ max} = 16/9$ кН·м.

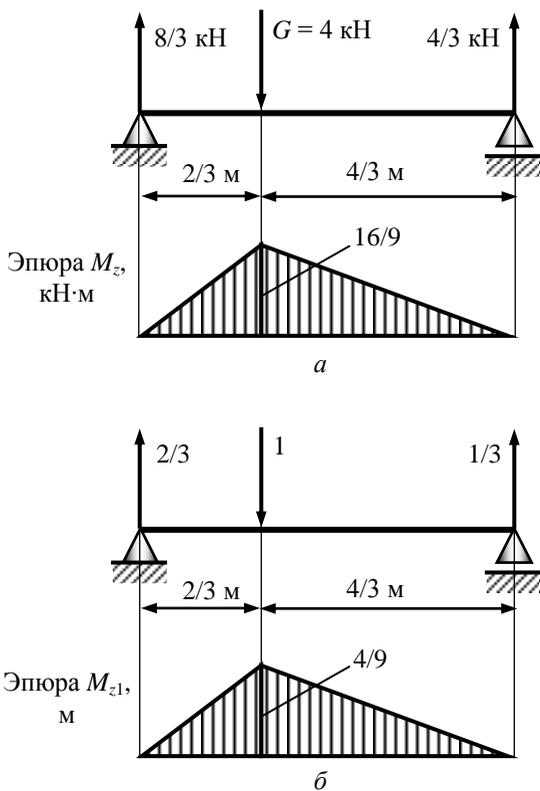


Рис. 9.8. Расчетные схемы балки:

а – для определения $\sigma_{\text{ст max}}$; б – единичное состояние для определения $\Delta_{\text{ст}}$

Тогда наибольшее напряжение в балке при статическом приложении нагрузки

$$\sigma_{\text{ст max}} = \frac{M_{z \text{ max}}}{W_z} = \frac{16/9 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м}}{289 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 6,15 \text{ МПа},$$

где $W_z = 289 \text{ см}^3$ (двутавр № 24, ГОСТ 8239-72).

Для вычисления $\Delta_{\text{ст}}$ по способу Верещагина необходимо изобразить единичное состояние для системы и построить эпюру изгибающего момента M_{z1} от единичной нагрузки (рис. 9.8, б). Далее, перемножая эпюры M_z и M_{z1} , получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{ст}} &= \frac{1}{EI_z} \left[\frac{1}{2} \frac{16}{9} \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \frac{4}{9} \right) + \frac{1}{2} \frac{16}{9} \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3} \frac{4}{9} \right) \right] = \frac{0,5267}{EI_z} = \\ &= \frac{0,5267 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м}^3}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 3460 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 0,761 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \end{aligned}$$

где $I_z = 3460 \text{ см}^4$ (двутавр № 24, ГОСТ 8239-72).

Коэффициент динамичности

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,04}{0,761 \cdot 10^{-4}}} = 33,4.$$

Наибольшие напряжения в балке при ударе:

$$\sigma_{\text{д max}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{ст max}} = 33,4 \cdot 6,15 \text{ МПа} = 205,4 \text{ МПа}. \quad \text{Ответ}$$

2. Определение наибольшего напряжения в балке при условии, что правая опора заменена пружиной. В случае опирания правого конца балки на пружину (рис. 9.9) при действии на балку статической силы G пружина под влиянием опорной реакции, равной $G/3$, укоротится на величину

$$a = G/(3c),$$

где $c = 500 \text{ кН/м}$ – жесткость пружины. Правый конец балки при этом опустится на величину a , а сечение балки в месте падения груза – на величину

$$a/3 = G/(9c) = 4/(9 \cdot 500) = 8,889 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Полное вертикальное перемещение балки от статического действия силы G в месте падения груза равно сумме величин прогиба, найденного при расчете балки без пружины, и перемещения, вызванного сжатием пружины, т. е.

$$\Delta'_{\text{ст}} = 0,761 \cdot 10^{-4} + 8,889 \cdot 10^{-4} = 9,65 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Коэффициент динамичности

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 0,04 \text{ м} / 9,65 \cdot 10^{-4} \text{ м}} = 10,16.$$

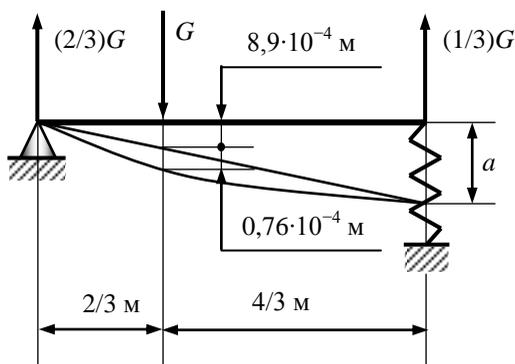


Рис. 9.9. Расчетная схема балки с пружиной

Наибольшее напряжение от статической силы G в данном случае такое же, как и для балки, не опертой на пружину, т. е. $\sigma_{\text{стmax}} = 6,15 \text{ МПа}$. Тогда наибольшие напряжения при ударе

$$\sigma_{\text{дmax}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{стmax}} = 10,16 \cdot 6,15 \text{ МПа} = 62,5 \text{ МПа}. \quad \text{Ответ}$$

Таким образом, установка пружины под один конец балки уменьшила наибольшие напряжения при ударе в 3,29 раза.

Проверка прочности балки. Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{дmax}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{стmax}} \leq \sigma.$$

Для балки без пружины

$$\sigma_{d_{\max}} = 205,4 \text{ МПа} > \sigma = 160 \text{ МПа} , \quad \text{Ответ}$$

т. е. условие прочности не выполняется. Для его выполнения необходимы изменения в конструкции, например, взять больший номер двутавра.

Для балки с пружиной

$$\sigma_{d_{\max}} = 62,5 \text{ МПа} < \sigma = 160 \text{ МПа} , \quad \text{Ответ}$$

т. е. условие прочности выполняется, но балка существенно недогружена. Также требуются изменения в конструкции.

.....

**Задача
15**

**Учет колебаний
упругих систем**

На двух стальных балках двутаврового сечения установлен двигатель массой m (рис. 9.10). Ротор двигателя массой m_0 вращается с постоянной частотой n (об/мин) и имеет эксцентриситет e . Исходные данные приведены в табл. 9.3.

Требуется:

- 1) произвести проверку конструкции на резонанс;
- 2) определить наибольшие напряжения в конструкции.

Указания

1. Собственный вес балки и силы сопротивления не учитывать.
2. Если при расчете конструкции имеет место резонанс, необходимо предусмотреть соответствующие мероприятия, обеспечивающие его отсутствие.

Таблица 9.3

Исходные данные к задаче 15

Номер строки	Расчетная схема по рис. 9.10	Номер двутавра	Длина l , м	Масса двигателя m , кг	Масса ротора m_0 , кг	Эксцентриситет e , мм	Частота вращения ротора n , об/мин
1	1	16	1,0	20	10	1	400
2	2	18	1,2	22	11	2	300
3	3	20	1,4	24	12	3	500
4	4	22	1,6	25	13	4	600
5	5	24	1,8	30	14	5	700
6	6	16	2,0	20	15	1	800
7	7	18	2,2	22	16	2	550
8	8	20	2,4	24	17	3	650
9	9	22	2,6	25	18	4	450
0	10	24	3,0	30	15	5	350
	е	д	г	е		д	г

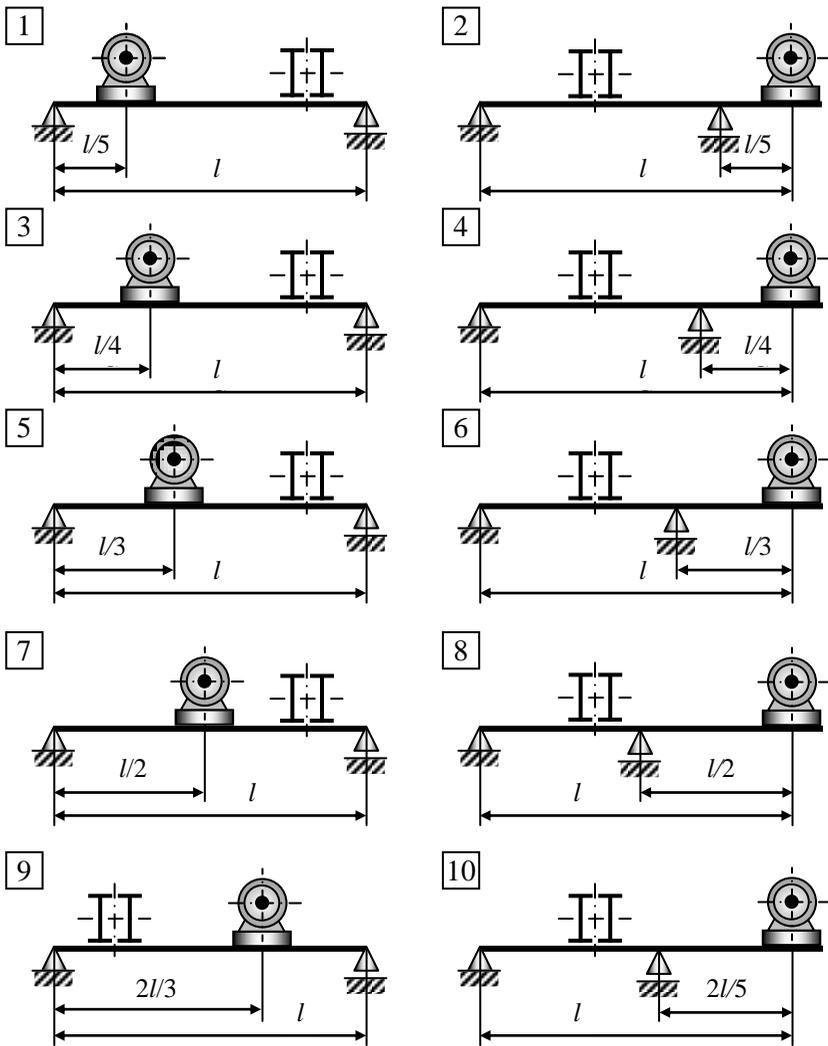


Рис. 9.10. Расчетные схемы к задаче 15

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

На двух стальных балках двутаврового сечения установлен двигатель массой m (рис. 9.11). Ротор двигателя массой m_0 вращается с постоянной частотой n (об/мин) и имеет эксцентриситет e . Исходные данные приведены в таблице.

Номер двутавра	Длина l , м	Масса двигателя m , кг	Масса ротора m_0 , кг	Эксцентриситет e , мм	Частота вращения ротора n , об/мин
10	2,0	300	100	2	945

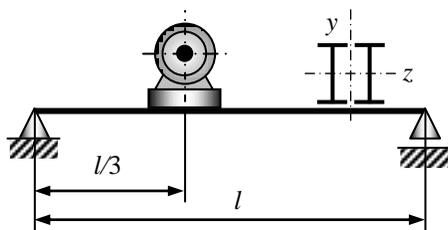


Рис. 9.11. Расчетная схема конструкции

Требуется:

- 1) произвести проверку конструкции на резонанс;
- 2) определить наибольшие напряжения в конструкции.

Указания

1. Собственный вес балки и силы сопротивления не учитывать.
2. Если при расчете конструкции имеет место резонанс, необходимо предусмотреть соответствующие мероприятия, обеспечивающие его отсутствие.

Решение

Проверка системы на резонанс. Круговая частота возмущающей силы

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 945}{30} = 98,91 \text{ с}^{-1}.$$

Круговая частота собственных колебаний системы

$$p = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}.$$

Для определения δ_{11} необходимо построить расчетную схему с внешней нагрузкой равной единице и эпюру изгибающего момента от этой единичной силы (рис. 9.12). Находим δ_{11} , умножая эпюру M_{z1} саму на себя по способу Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot 2I_z} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \right) \right] = \frac{0,1317}{EI_z}.$$

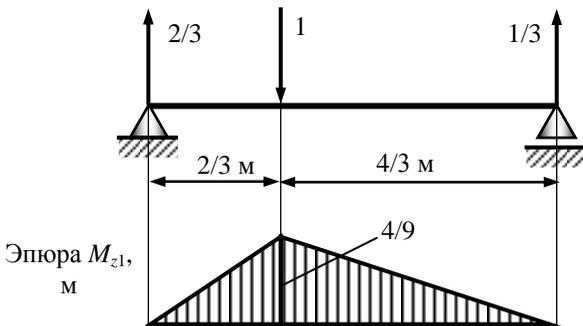


Рис. 9.12. Схема нагружения системы единичной силой

Тогда

$$p = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{EI_z}{m \cdot 0,1317}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 198 \cdot 10^{-8}}{300 \cdot 0,1317}} = 100,1 \text{ с}^{-1},$$

где $I_z = 198 \text{ см}^4$ – осевой момент инерции двутавра № 10 (ГОСТ 8239-72).

Отношение частот

$$\frac{\omega}{p} = \frac{98,91}{100,1} = 0,988$$

находится в зоне резонанса $0,7 < \omega/p < 1,3$.

Ответ

Отстройка от резонанса. Наиболее простым выходом из этого положения является замена профиля другим номером по стандарту, т. е. изменение жесткости системы.

Возьмем, например, двутавр №12 с $I_z = 350 \text{ см}^4$; в этом случае

$$p = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 350 \cdot 10^{-8}}{300 \cdot 0,1317}} = 133,2 \text{ с}^{-1};$$

$$\frac{\omega}{p} = \frac{98,91}{133,2} = 0,743,$$

т. е. при полученном отношении ω/p также возможен резонанс.

Для следующего номера двутавра №14 с $I_z = 72 \text{ см}^4$ имеем

$$p = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}}{300 \cdot 0,1317}} = 170,2 \text{ с}^{-1};$$

$$\frac{\omega}{p} = \frac{98,91}{170,2} = 0,58,$$

что находится вне зоны резонанса.

Ответ

Определяем коэффициент динамичности по формуле, используемой вне зоны резонанса:

$$k_d = \pm \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} = \pm \frac{1}{1 - \frac{98,91^2}{170,16^2}} = 1,51.$$

Напряжения. Определяем наибольшее значение возмущающей силы

$$F_0 = m_0 \omega^2 e = 100 \cdot 98,91^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 1956,6 \text{ Н}.$$

Напряжение, возникающее в системе под действием этой силы, при условии ее статического приложения (рис. 9.13) будет

$$\sigma_{\text{ст max}} F_0 = \frac{M_{z\text{max}} F_0}{2W_z} = \frac{869,6 \cdot 10^{-6} \text{ МН} \cdot \text{м}}{2 \cdot 81,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 5,32 \text{ МПа},$$

где $W_z = 81,7 \text{ см}^3$ – осевой момент сопротивления двутавра № 14 (ГОСТ 8239-72). Напряжение при вынужденных колебаниях равно

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{ст max}} F_0 = 1,51 \cdot 5,32 = 8,03 \text{ МПа}.$$

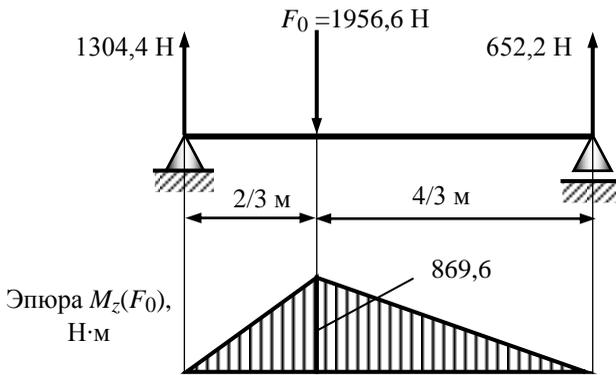


Рис. 9.13. Схема нагружения системы возмущающей силой F_0

Напряжения $\sigma_{\text{д}}$ накладываются на постоянные напряжения от собственного веса двигателя $G = mg = 3000 \text{ Н}$:

$$\sigma_{\text{ст max}} = \frac{M_{z\text{max}}(G)}{2W_z} = \frac{1333,3 \cdot 10^{-6} \text{ МН} \cdot \text{м}}{2 \cdot 81,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 8,16 \text{ МПа},$$

где $M_{z\text{max}}(G) = 1333,3 \text{ Н} \cdot \text{м}$ – наибольший изгибающий момент с эпюры $M_z(G)$ (рис. 9.14).

Наибольшие напряжения, возникающие в упругой системе,

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{max}} &= \sigma_{\text{ст max}} G + \sigma_{\text{д max}} F_0 = \\ &= 8,16 + 8,03 = 16,19 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Ответ

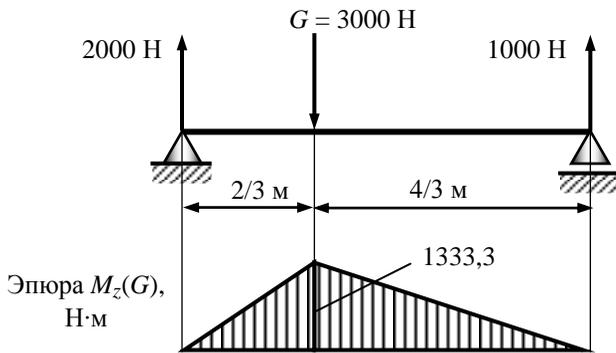


Рис. 9.14. Схема нагружения системы от веса двигателя G

РАЗДЕЛ II

Задачи, решаемые с применением ЭВМ

- *Решение задач с применением пакета MathCAD*
- *Решение задач с приведением исходных данных к безразмерному виду*
- *Решение задач с использованием метода конечных элементов (МКЭ)*

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПАКЕТА MATHCAD

10.1. Краткий обзор универсального математического пакета MathCad

MathCad – богатый программный пакет для решения математических задач, предоставляющий выбор инструментальных средств и поддерживающий ряд методов визуализации и анализа. Даже опытные пользователи MathCad постоянно обнаруживают новые возможности его использования.

Для ознакомления здесь приведен краткий обзор пакета MathCad, что позволит ориентироваться в его прикладном использовании.

В настоящей главе рассматривается работа, в основном, в русифицированной версии. Аналоги команд нерусифицированной версии указаны в скобках.

Окно MathCad. Главное меню. Панели

Окно MathCad – путь к математическим, графическим и символьным функциям, которые обеспечивают обработку, редактирование и управление Вашим "рабочим листом". Нажмите мышью на кнопку "Математика" ("Math"), чтобы увидеть массив доступных Вам вычислительных функциональных возможностей.

Главное меню:



Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Раздел меню Help содержит Quick Sheets (шпаргалки), в которых приводятся примеры программ. Они поясняют много общих математических задач – от построения графиков до анализа данных, фрагменты этих программ можно использовать при разработке собственных приложений.

Палитра “Математика” (Math Palette)

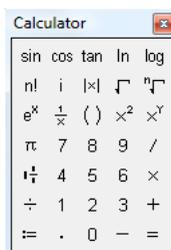


Отобразить палитру “Математика” можно, выбрав из главного меню команду Вид \ Математика (View \ Math Palette).

Эта палитра открывает окно математических операторов. Если установить курсор мыши над каждой из кнопок, Вы будете видеть сообщение о том, какую палитру вызывает каждая кнопка:



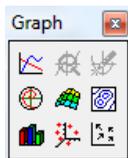
Арифметическая палитра



Все кнопки палитр имеют клавиатурные сокращения. Например, знак присваивания ($x:=5$) – := (двоеточие в латинском регистре).



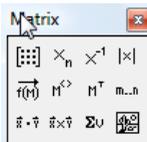
Палитра графиков



Чаще всего строят Декартовы графики, их клавиатурное сокращение – Shift 2.

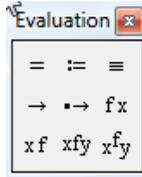


Палитра операций с векторами и матрицами





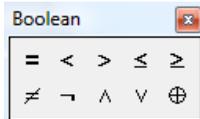
Палитра некоторых знаков



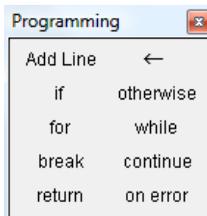
Палитра операторов суммирования, дифференцирования и интегрирования



Палитра логических (булевых) операций



Палитра программирования

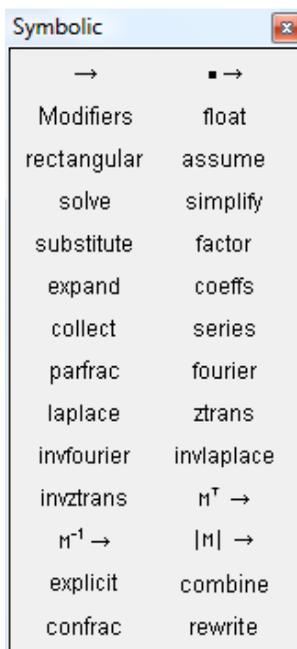




Палитра греческого алфавита



Палитра символьных вычислений



Панель инструментов стандартная:



обеспечивает быстрое выполнение многих общих задач в открытом "рабочем листе". Подсказки напомнят вам о функциях каждой из кнопок.

Вычисления в MathCad

Основа MathCad – полноэкранный числовой и символьный процессор. Когда Вы открываете новый MathCad-документ, Вы видите пустую рабочую область окна. Чтобы использовать MathCad как калькулятор, напечатайте выражение, значение которого Вы хотите определить, и затем напечатайте знак равенства, чтобы видеть результат:

$$35 + \frac{7}{13} = 35.538.$$

Кнопки палитры вызывают панели, включающие большинство математических операций, в которых Вы будете нуждаться, но Вы можете также напечатать имя любой функции или операции непосредственно на клавиатуре. Например, для вычисления высоты равностороннего треугольника можно использовать следующее выражение:

$$20 \cdot \sin(60 \cdot \text{deg}) = 10.$$

Здесь $60 \cdot \text{deg}$ – значение угла в градусах, по умолчанию аргумент функции синус исчисляется в радианах.

MathCad выполняет действия с матрицами, все сложные математические операции и, по-существу, обеспечивает все математические потребности инженерных вычислений. Вот некоторые примеры:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.438 & 0.063 \\ 0.313 & 0.188 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx = 0.983 .$$

Переменные, функции

Когда одно и то же выражение необходимо использовать во многих различных вычислениях, можно определять собственные константы, переменные и функции пользователя, которые используются так же, как и встроенные константы, переменные и функции.

Положим, что необходимо определять площадь круга для различных значений радиуса. Можно ввести переменную радиусом r и давать ей значения подобно этому:

$$r := 7 .$$

При определении переменных необходимо использовать знак присваивания $:=$. Когда Вы запишете формулу площади и напечатаете символ $=$, Вы получите числовой ответ:

$$\pi \cdot r^2 = 153.938 .$$

Теперь можно задать другое значение r и снова произвести вычисления.

Если предполагается многократно вычислять площадь круга для разных значений радиуса, Вы можете определить пользовательскую функцию подобно этой:

$$\text{area}(r) := \pi r^2 .$$

После имени функции в скобках через запятую обозначаются формальные параметры. Все переменные в правой части, не обозначенные в списке формальных параметров, являются глобальными переменными и должны быть определены до объявления функции.

Теперь всякий раз, когда будет необходимо найти площадь круга, следует использовать функцию

$$\text{area}(33.27) = 3.477 \times 10^3.$$

Можно формировать функции из уже имеющихся. Например, сторона квадрата с той же самой площадью, что и круга радиусом r

$$\text{side}(r) := \sqrt{\text{area}(r)};$$

$$\text{side}(2.2) = 3.899.$$

Решение уравнений

Выше были рассмотрены вычисления различных выражений. MathCad позволяет решать уравнения и системы уравнений в числовом и символьном виде. Ниже приведен пример вычисления реакции опоры с помощью решения уравнения равновесия:

$$R \cdot a - q \cdot \frac{a^2}{2} + M = 0$$

$$- \frac{a^2 \cdot q}{2}.$$

В уравнении используется знак "=" логического (Булева) равенства, его клавиатурное сокращение $\text{Ctrl} =$. Затем необходимо выделить переменную, относительно которой нужно решить уравнение, в данном примере R , а затем выбрать команду из главного меню: **Символы \ Переменная \ Вычислить (Symbolics \ Variable \ Solve)**. Ниже MathCad выдаст выражение для R .

Можно решать системы нелинейных уравнений численным способом. При этом необходимо задавать начальные приближения для неизвестных:

$$x := 1 \quad y := 1$$

Given

$$x^3 + \sin(x) = 25$$

$$y^2 - \cos(x) = 27$$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 2.915 \\ 5.102 \end{pmatrix}$$

Обратная связь

MathCad непрерывно отслеживает действия пользователя и выдает сообщения об ошибках и неверных действиях. При редактировании математических выражений в строке состояния печатаются советы пользователю и информация. Когда выполняется какая-то операция, которую MathCad не может понять, то проблемная запись выделяется красным цветом. И если щелкнуть мышью по выделенному выражению, то появится сообщение об ошибках. Например:


$$T := \frac{P}{\omega}$$

This variable is undefined.

Переменные P и ω не определены, и MathCad сообщает, что не знает, какие значения использовать в вычислении этой формулы.

MathCad производит вычисления в поле экрана слева направо и сверху вниз.

Так:

$$P := 1208$$

$$\omega := 8$$

$$T := \frac{P}{\omega}$$

но не так:

$$T := \frac{P}{\omega}$$

$$P := 1208$$

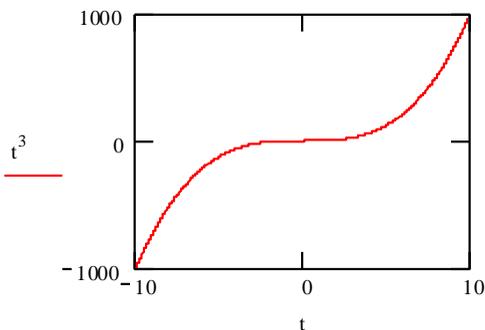
$$\omega := 8$$

Графика

Выше рассмотрены возможности MathCad как калькулятора и как решающего устройства. Но он также универсальный инструмент визуализации, который поддерживает полный набор графических типов, средства мультипликации и даже простой обработки изображения.

Графические функции и ввод данных для построения графиков

Чтобы создать график в MathCad, нажмите кнопку “графика” на панели инструментов, чтобы вызвать графическую палитру, и нажмите верхнюю левую кнопку для “XY-графика”. На листе появится “заготовка” для графика с незаполненными полями слева и снизу. В левом поле необходимо напечатать функцию, которую Вы хотите изобразить, скажем, t^3 , а в нижнем поле – задать аргумент этой функции (t). Как только вы щелкнете мышью снаружи графика или нажмете [Enter], появится изображение:



Подобно всем вычислениям графики сохраняются и, более того, их можно редактировать.

Встроенные примеры программ

В меню Помощь (Help) имеется весьма полезный раздел Шпаргалки (Qweek Sheets), представляющий собой широкий набор примеров программ, удобно структурированных по разделам:

- Вычисления.
- Векторы и матрицы.
- Решение уравнений.
- Графики и т. д.

Все программы являются готовыми листами MathCad и могут быть легко скопированы в Ваш рабочий лист полностью или необходимыми фрагментами.

10.2. Примеры решения задач

Построение эпюр внутренних силовых факторов при изгибе

Будем использовать следующее правило знаков для внутренних силовых факторов при изгибе:

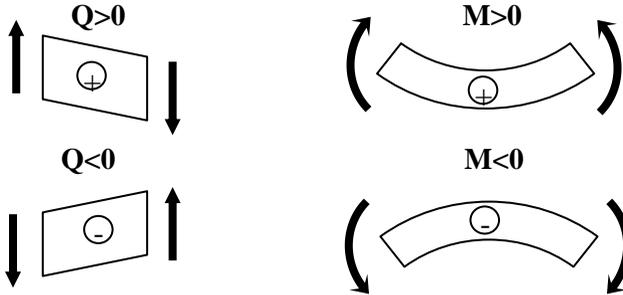


Рис. 10.1. Правило знаков

Для примера возьмем конкретную задачу с заданными численными значениями: $q = 1 \text{ Кн/м}$, $l = 1 \text{ м}$ (рис. 10.2).

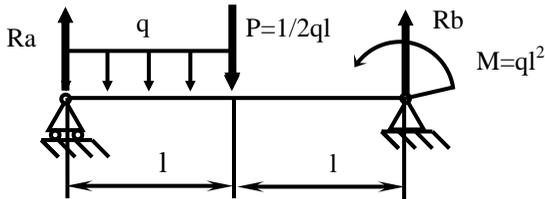


Рис. 10.2. Расчетная схема

Для вычисления реакций используем следующий алгоритм:

- составим сумму моментов относительно левой опоры – получим уравнение для определения реакции R_b .
- составим сумму моментов относительно правой опоры – получим уравнение для определения реакции R_a .
- для проверки правильности нахождения реакций составим сумму проекций всех сил, действующих на балку, на вертикальную ось.

Этот алгоритм может быть реализован средствами MathCad таким образом (рис. 10.3).

$$\begin{array}{l}
 q := 1000 \quad l := 1 \quad P := \frac{1}{2} \cdot q \cdot l \quad M := q \cdot l^2 \\
 \\
 Ra := 1 \\
 \text{Given} \quad Ra \cdot 2 \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{3}{2} \cdot l - P \cdot l - M = 0 \quad Ra := \text{Find}(Ra) = 1500 \\
 \\
 Rb := 1 \\
 \text{Given} \quad Rb \cdot 2 \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l - P \cdot l + M = 0 \quad Rb := \text{Find}(Rb) = 0 \\
 \\
 Ra + Rb - q \cdot l - P = 0
 \end{array}$$

Рис. 10.3. Программа для вычисления реакций. Вариант 1

Здесь для решения уравнений равновесия используется конструкция Given – Find. Она предназначена для решения систем уравнений и требует задания начальных значений неизвестных. Это позволяет сразу получить значение найденной реакции и присвоить его имени. Одна из реакций получилась равной нулю, а равенство нулю последнего выражения подтверждает правильность нахождения реакций.

Справедливости ради надо отметить, что найти реакции можно и другими способами. Например, можно использовать одну из кнопок палитры Evaluation toolbar для символьного решения уравнений (рис. 10.4).

$$\begin{array}{l}
 q := 1000 \quad l := 1 \quad P := \frac{1}{2} \cdot q \cdot l \quad M := q \cdot l^2 \\
 \\
 Ra := Ra \cdot 2 \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{3}{2} \cdot l - P \cdot l - M \text{ solve} \rightarrow 1500 \\
 \\
 Rb := Rb \cdot 2 \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l - P \cdot l + M \text{ solve} \rightarrow 0
 \end{array}$$

Рис. 10.4. Программа для вычисления реакций. Вариант 2

Справа от знака символического решения появилось численное значение, оно было присвоено имени реакции.

Очевидно, оба варианта решения равноценны.

Для вычисления внутренних силовых факторов воспользуемся методом сечений. В заданной расчетной схеме имеется два силовых участка (рис. 10.5).

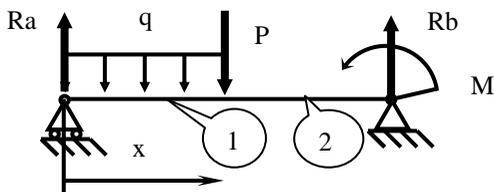


Рис. 10.5. Расчетная схема

В каждом из них поочередно проведем сечения и составим уравнения равновесия для одной из отсеченных частей. Координату x для обоих участков будем отсчитывать от левого конца балки. Это позволит записать общие выражения для

перерезывающей силы и изгибающего момента. Проведем сечение в первом силовом участке (рис. 10.6). В сечении приложим неизвестную пока силу Q_1 и момент M_1 . Их направление выбирается совершенно произвольно. Истинное направление внутренних силовых факторов

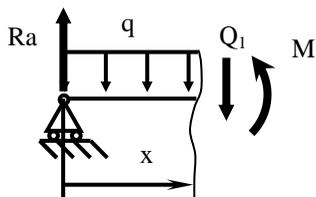


Рис. 10.6. Сечение в первом силовом участке

определяется по знакам полученных значений: если в результате решения получим положительное значение силового фактора, значит, его направление совпадает с принятым на рисунке. Если же в результате решения получим отрицательное значение силового фактора, значит, его истинное направление противоположно изображенному на

рисунке.

Составим уравнения равновесия – сумму сил на вертикальную ось и сумму моментов относительно точки сечения (рис. 10.6).

$$R_a - qx + Q_1 = 0 \quad R_a x - q \frac{x^2}{2} - M_1 = 0. \quad (1)$$

Из этих уравнений определим Q_1 и момент M_1 .

$$Q_1 = qx - R_a \quad M_1 = R_a x - q \frac{x^2}{2}. \quad (2)$$

Далее проведем сечение во втором силовом участке (рис. 10.7). В сечении приложим силу Q_2 и момент M_2 . Начало координаты x , как было условлено, оставим на левом конце балки. При этом распределенную нагрузку продолжим до конца балки, а для того чтобы не нарушить условие задачи, приложим такую же противоположно направленную распределенную нагрузку, действующую до конца балки.

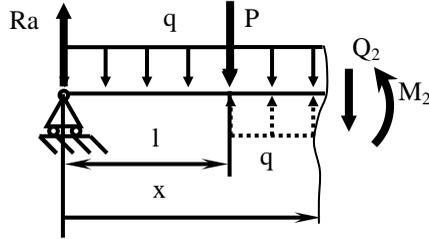


Рис. 10.7. Расчетная схема

Получим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} R_a - qx - P + q(x-l) + Q_2 &= 0; \\ R_a x - q \frac{x^2}{2} - P(x-l) + q \frac{(x-l)^2}{2} - M_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В этих уравнениях, в соответствии с границами второго участка, координата x изменяется от l до $2l$. Разрешим уравнения относительно Q_2 и M_2 :

$$\begin{aligned} Q_2 &= R_a - qx - P + q(x-l); \\ M_2 &= R_a x - q \frac{x^2}{2} - P(x-l) + q \frac{(x-l)^2}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Эти выражения отличаются от выражений (2) только слагаемыми, которые соответствуют нагрузкам, действующим на втором участке. Запишем общие выражения для внутренних силовых факторов, справедливые для всей балки:

$$\begin{aligned} Q(x) &= R_a - qx - P \Big|_{x>l} + q(x-l) \Big|_{x>l}; \\ M(x) &= R_a x - q \frac{x^2}{2} - P \Big|_{x>l} + q \frac{(x-l)^2}{2} \Big|_{x>l}. \end{aligned} \quad (5)$$

С помощью MathCad такие выражения можно моделировать разными способами. Один из них:

$$\begin{aligned}
 Q(x) &:= Ra - q \cdot x - P \cdot \Phi(x - l) + q \cdot (x - l) \cdot \Phi(x - l) \\
 M(x) &:= Ra \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} - P \cdot (x - l) \cdot \Phi(x - l) + q \cdot \frac{(x - l)^2}{2} \cdot \Phi(x - l)
 \end{aligned}$$

Рис. 10.8. Применение функции Хевисайда

Здесь используется функция Хевисайда, которая равна нулю, если аргумент отрицательный, и единице – во всех остальных случаях (рис. 10.8).

Вместо применения функции Хевисайда можно умножать соответствующие силовые факторы на логическую переменную ($x > l$), которая также принимает значения 1 или 0 в зависимости от того, истинно ли выражение в скобках или ложно (рис. 10.9).

$$\begin{aligned}
 Q(x) &:= Ra - q \cdot x - P \cdot (x > l) + q \cdot (x - l) \cdot (x > l) \\
 M(x) &:= Ra \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} - P \cdot (x - l) \cdot (x > l) + q \cdot \frac{(x - l)^2}{2} \cdot (x > l)
 \end{aligned}$$

Рис. 10.9. Использование логической переменной

Полученные функции можно использовать для построения графиков изменения внутренних силовых факторов по длине балки. В результате получим лист MathCad для решения поставленной задачи (рис. 10.10). Еще два примера приведены на рис. 10.11 и 10.12

$$q := 1000 \quad l := 1 \quad P := \frac{1}{2} \cdot q \cdot l \quad M := q \cdot l^2$$

$$Ra := 1$$

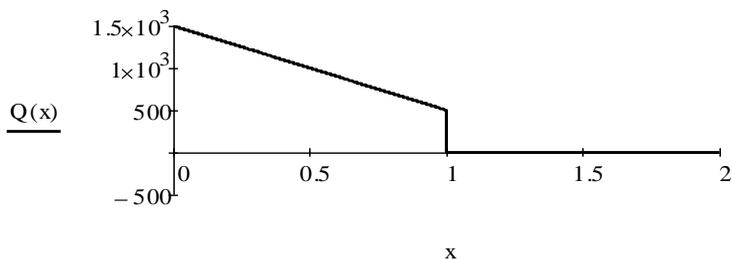
$$\text{Given} \quad Ra \cdot 2 \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{3}{2} \cdot l - P \cdot l - M = 0 \quad Ra := \text{Find}(Ra) = 1.5 \times 10^3$$

$$Rb := 1$$

$$\text{Given} \quad Rb \cdot 2 \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l - P \cdot l + M = 0 \quad Rb := \text{Find}(Rb) = 0$$

$$Ra + Rb - q \cdot l - P = 0$$

$$Q(x) := Ra - q \cdot x - P \cdot \Phi(x - l) + q \cdot (x - l) \cdot \Phi(x - l) \quad x := 0, 0.001 \dots 2.1$$



$$M(x) := Ra \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} - P \cdot (x - l) \cdot \Phi(x - l) + q \cdot \frac{(x - l)^2}{2} \cdot \Phi(x - l)$$

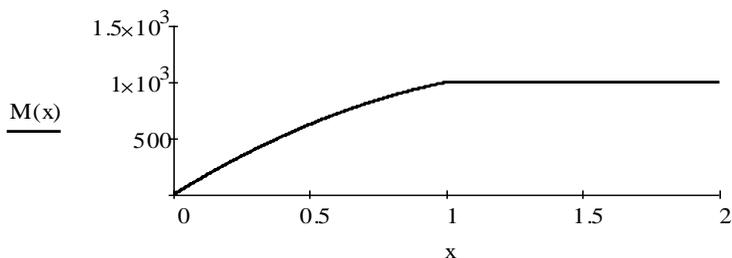
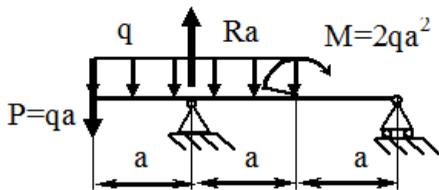


Рис. 10.10. Лист MathCad



$$q := 1000 \quad a := 1 \quad P := q \cdot a$$

$$M := 2 \cdot q \cdot a^2$$

$$Ra := 1$$

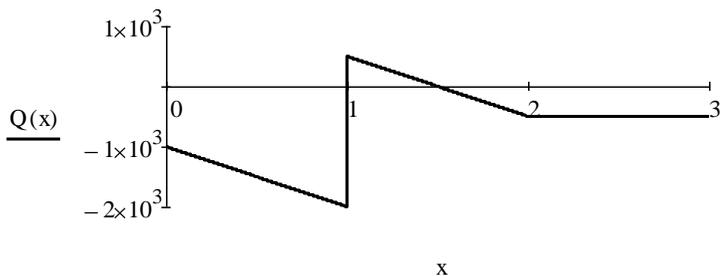
$$\text{Given } Ra \cdot 2 \cdot a - q \cdot 4 \cdot a^2 - P \cdot 3 \cdot a + M = 0 \quad Ra := \text{Find}(Ra) = 2.5 \times 10^3$$

$$Rb := 1$$

$$\text{Given } Rb \cdot 2 \cdot a + P \cdot a - M = 0 \quad Rb := \text{Find}(Rb) = 500$$

$$Ra + Rb - q \cdot 2 \cdot a - P = 0 \quad x := 0, 0.001 \dots 3 \cdot a$$

$$Q(x) := -P - q \cdot x + Ra \cdot \Phi(x - a) + q \cdot (x - 2 \cdot a) \cdot \Phi(x - 2 \cdot a)$$



$$M(x) := -P \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} + Ra \cdot (x - a) \cdot \Phi(x - a) + q \cdot \frac{(x - 2 \cdot a)^2}{2} \cdot \Phi(x - 2 \cdot a) \dots$$

$$+ M \cdot \Phi(x - 2 \cdot a)$$

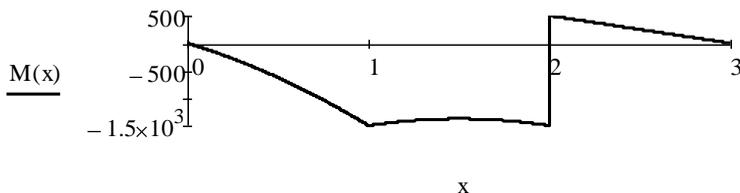
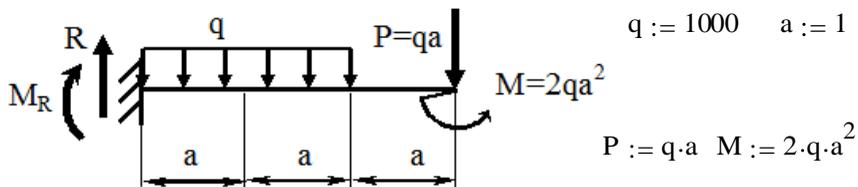


Рис. 10.11. Лист MathCad



$$R := 1$$

$$\text{Given } R - q \cdot 2 \cdot a - P = 0 \quad R := \text{Find}(R) = 3 \times 10^3$$

$$MR := 1$$

$$\text{Given } MR + q \cdot 2 \cdot a^2 + P \cdot 3 \cdot a - M = 0 \quad MR := \text{Find}(MR) = -3 \times 10^3$$

$$Q(x) := R - q \cdot x + q \cdot (x - 2 \cdot a) \cdot \Phi(x - 2 \cdot a) \quad x := 0, 0.001 \dots 3 \cdot a$$



$$M(x) := R \cdot x + MR - q \cdot \frac{x^2}{2} + q \cdot \frac{(x - 2 \cdot a)^2}{2} \cdot \Phi(x - 2 \cdot a)$$

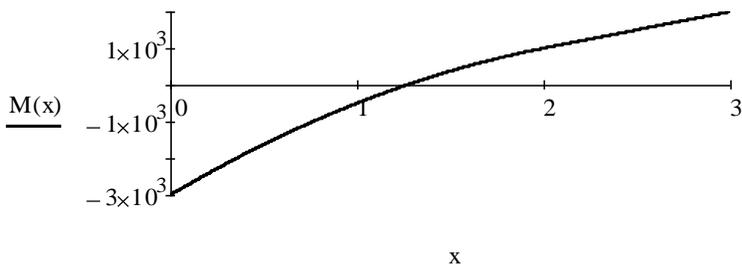


Рис. 10.12. Лист MathCad

Вычисление перемещений при изгибе с помощью универсального уравнения упругой линии балки

Для вычисления перемещений в статически определимых балках удобно использовать универсальное уравнение упругой линии балки. Оно представляет собой результат применения метода начальных параметров для интегрирования дифференциального уравнения изгиба балки. Теоретические сведения можно найти в учебнике [1], здесь же рассмотрим практические аспекты применения этого уравнения.

Метод начальных параметров позволяет получить две функции, выражающие изменение углов поворота и прогибов поперечных сечений по длине балки:

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 + \frac{1}{EJ} \left[\begin{aligned} & M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + \\ & + \sum_{i=1}^n M_i (x - a_i) \Phi(x - a_i) + \\ & + \sum_{i=1}^m P_i \frac{(x - b_i)^2}{2} \Phi(x - b_i) + \\ & + \sum_{i=1}^l q_i \frac{(x - c_i)^3}{3!} \Phi(x - c_i) . \end{aligned} \right] \quad (6)$$

$$w(x) = w_0 + \vartheta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[\begin{aligned} & M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \\ & + \sum_{i=1}^n M_i \frac{x - a_i}{2} \Phi(x - a_i) + \\ & + \sum_{i=1}^m P_i \frac{x - b_i}{3!} \Phi(x - b_i) + \\ & + \sum_{i=1}^l q_i \frac{x - c_i}{4!} \Phi(x - c_i) . \end{aligned} \right] \quad (7)$$

В этих выражениях $\vartheta(x)$ и $w(x)$ – угол поворота и прогиб поперечных сечений в произвольных точках оси балки. Начальные параметры ϑ_0 и w_0 – угол поворота и прогиб поперечного сечения на левом конце балки, они подлежат определению из граничных условий. M_0 и P_0 – изгибающий момент и сосредоточенная сила, действующие на левом конце балки. M_i и P_i – сосредоточенные изгибающие моменты и сосредоточенные силы, приложенные в точках с координатами a_i, b_i , а n и m – количество моментов и сил. Координата x всегда отсчитывается от левого конца балки. Под знаками сумм стоят уже знакомые нам множители $\Phi(x - l_i)$ – функции Хевисайда. Эти множители равны нулю при $x < l_i$ и единице при $x > l_i$. Последняя сумма содержит q_i – интенсивность равномерно распределенной нагрузки. Предполагается, что действие распределенной нагрузки начинается в сечении с координатой c_i , а заканчивается на правом конце балки. Если по условиям задачи действие распределенной нагрузки должно закончиться в сечении с координатой d_i , то от сечения d_i до правого конца прикладывается противоположно направленная нагрузка такой же интенсивности q_i . На рис. 10.13 показаны положительные направления силовых факторов.

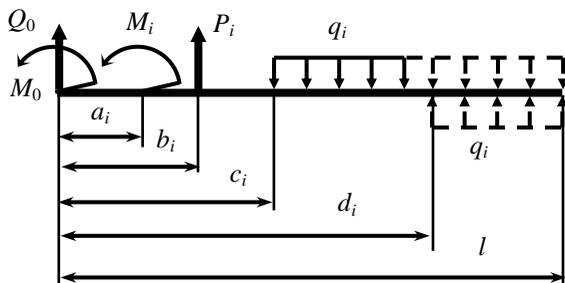


Рис. 10.13. Расчетная схема

В качестве примера рассмотрим задачу поперечного изгиба балки, для которой ранее были найдены реакции опор и внутренние силовые факторы. Поставим теперь задачу получить выражения для прогибов и углов поворота поперечных сечений балки (рис. 10.14). Выражения (6) и (7) содержат неизвестные начальные параметры ϑ_0 и w_0 . Очевидно, что начальный прогиб w_0 равен нулю, так как на левом конце балки имеется опора, препятствующая вертикальному смещению

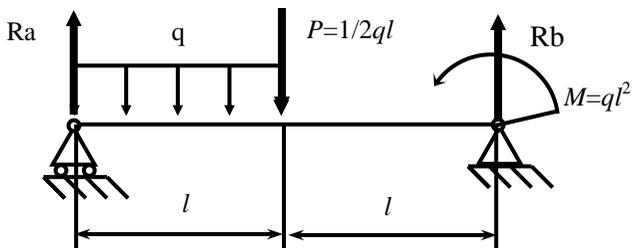


Рис. 10.14. Расчетная схема балки

концевого сечения. Второй параметр ϑ_0 определим с помощью граничного условия на правом конце балки, где также имеется шарнирно-неподвижная опора:

$$w(2l) = 0.$$

На рис. 10.15 приведена последовательность операторов MathCad, позволяющих получить разрешающее уравнение для вычисления ϑ_0 . Были выполнены следующие действия:

- 1) построено выражение для функции прогибов в произвольном сечении с координатой x ;

1)	$w(x) := \theta_0 \cdot x + \frac{1}{E \cdot J} \left[Ra \cdot \frac{x^3}{3!} - q \cdot \frac{x^4}{4!} + q \cdot \frac{(x-1)^4}{4!} \cdot \Phi(x-1) - P \cdot \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot \Phi(x-1) \right]$
2)	$\theta_0 \cdot x + \frac{1}{E \cdot J} \left[Ra \cdot \frac{x^3}{3!} - q \cdot \frac{x^4}{4!} + q \cdot \frac{(x-1)^4}{4!} \cdot \Phi(x-1) - P \cdot \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot \Phi(x-1) \right]$
3) 2.1 4)	$\frac{1 \cdot 32 \cdot Ra \cdot l^2 - 16 \cdot l^3 \cdot q - 4 \cdot P \cdot l^2 \cdot \Phi(l) + l^3 \cdot q \cdot \Phi(l) + 48 \cdot E \cdot J \cdot \theta_0 }{24 \cdot E \cdot J}$
5)	$\frac{1 \cdot 32 \cdot Ra \cdot l^2 - 16 \cdot l^3 \cdot q - 4 \cdot P \cdot l^2 \cdot \Phi(l) + l^3 \cdot q \cdot \Phi(l) + 48 \cdot E \cdot J \cdot \theta_0 }{24 \cdot E \cdot J} = 0$

Рис. 10.15. Формирование уравнения для вычисления начального угла θ_0

- 2) скопирована правая часть выражения для прогибов. Координату x нужно заменить здесь значением $2l$;
- 3) на свободном поле поставлен идентификатор $2l$ и занесен в буфер обмена. В выражении шага 2) выделен любой из идентификаторов x и активизирована планка `Symbolics-Variable-Substitute`;
- 4) это результат подстановки $2l$ в выражение шага 2), система автоматически привела подобные. Чтобы получить уравнение, нужно поставить знак равенства. Для этого выражение было выделено и с помощью `Ctrl+=` поставлен знак логического равенства («жирное равно»);
- 5) это уравнение будет скопировано в дальнейшем в файл, в котором будет вычислена константа θ_0 .

На рис. 10.16 приведен лист MathCad, реализующий вычисление прогибов и углов поворота поперечных сечений балки. Вначале программы вычисляются реакции опор – этот фрагмент целиком взят из раздела “Вычисление реакций опор и внутренних силовых факторов”. Затем с помощью процедуры `Given-Find` вычисляется параметр θ_0 . И, наконец, строятся графики функций $w(x)$ и $\vartheta(x)$ – прогибов и углов поворота поперечных сечений балки.

$$q := 1000 \quad l := 1 \quad P := \frac{1}{2} \cdot q \cdot l \quad M := q \cdot l^2 \quad E := 0.5 \cdot 10^{11}$$

$$b := 0.05 \quad h := 0.1 \quad J := \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$Ra := 1$$

$$\text{Given} \quad Ra \cdot 2 \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{3}{2} \cdot l - P \cdot l - M = 0 \quad Ra := \text{Find}(Ra) = 1.5 \times 10^3$$

$$Rb := 1$$

$$\text{Given} \quad Rb \cdot 2 \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l - P \cdot l + M = 0 \quad Rb := \text{Find}(Rb) = 0$$

$$Ra + Rb - q \cdot l - P = 0$$

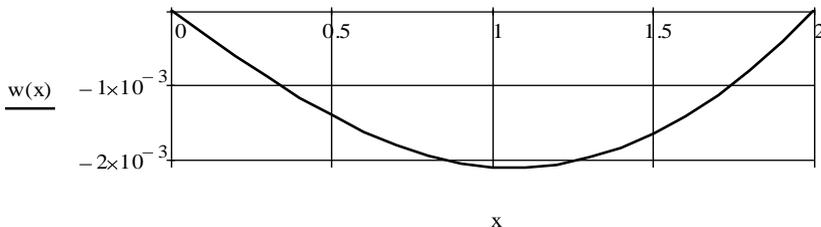
$$\theta_0 := 1$$

$$\text{Given} \quad \frac{l \cdot \left[32 \cdot Ra \cdot l^2 - 16 \cdot l^3 \cdot q - 4 \cdot P \cdot l^2 \cdot \Phi(l) + l^3 \cdot q \cdot \Phi(l) + 48 \cdot E \cdot J \cdot \theta_0 \right]}{24 \cdot E \cdot J} = 0$$

$$\theta_0 := \text{Find}(\theta_0) = -3.1 \times 10^{-3}$$

$$w(x) := \theta_0 \cdot x + \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[Ra \cdot \frac{x^2}{3!} - q \cdot \frac{x^4}{4!} + q \cdot \frac{(x-l)^4}{4!} \cdot \Phi(x-l) - P \cdot \frac{(x-l)^3}{3!} \cdot \Phi(x-l) \right]$$

$$x := 0, 0.1 \dots 2.1$$



$$\theta(x) := \theta_0 + \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[Ra \cdot \frac{x^2}{2} - q \cdot \frac{x^3}{3!} + q \cdot \frac{(x-l)^3}{3!} \cdot \Phi(x-l) - P \cdot \frac{(x-l)^2}{2} \cdot \Phi(x-l) \right]$$

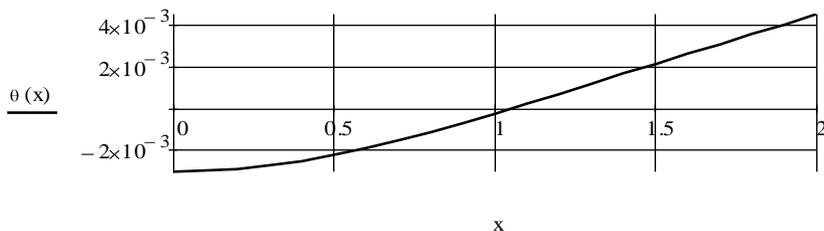
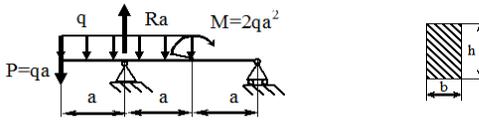


Рис. 10.16. Лист MatCad

Рассмотрим еще два примера.
Пример 1



$$q := 1000 \quad a := 1 \quad P := q \cdot a \quad M := 2 \cdot q \cdot a^2 \quad E := 0.5 \cdot 10^{11}$$

$$b := 0.1 \quad h := 0.10 \quad J := \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$Ra := 1$$

$$\text{Given} \quad Ra \cdot 2 \cdot a - q \cdot 4 \cdot a^2 - P \cdot 3 \cdot a + M = 0 \quad Ra := \text{Find}(Ra) = 2.5 \times 10^3$$

$$Rb := 1$$

$$\text{Given} \quad Rb \cdot 2 \cdot a + P \cdot a - M = 0 \quad Rb := \text{Find}(Rb) = 500$$

$$Ra + Rb - q \cdot 2 \cdot a - P = 0$$

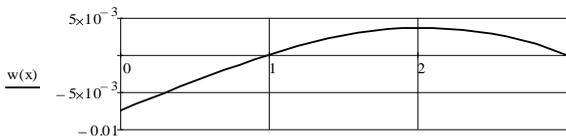
$$w(x) := w_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{1}{E \cdot J} \left[-P \cdot \frac{x^3}{3!} - q \cdot \frac{x^4}{4!} + q \cdot \frac{(x-2 \cdot a)^4}{4!} \cdot \Phi(x-2 \cdot a) + M \cdot \frac{(x-2 \cdot a)^2}{2} \cdot \Phi(x-2 \cdot a) \right]$$

$$\text{Given} \quad w(a) = 0 \quad w(3 \cdot a) = 0$$

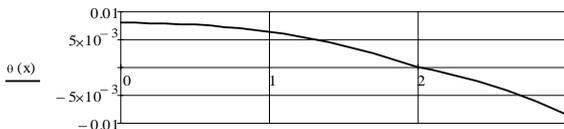
$$\begin{pmatrix} \theta_0 \\ w_0 \end{pmatrix} := \text{Find}(\theta_0, w_0) \rightarrow \begin{pmatrix} 0.00795 \\ -0.00745 \end{pmatrix}$$

$$w(x) := w_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{1}{E \cdot J} \left[-P \cdot \frac{x^3}{3!} - q \cdot \frac{x^4}{4!} + q \cdot \frac{(x-2 \cdot a)^4}{4!} \cdot \Phi(x-2 \cdot a) + M \cdot \frac{(x-2 \cdot a)^2}{2} \cdot \Phi(x-2 \cdot a) \right]$$

$$x := 0, 0.1 \dots 3 \cdot a$$

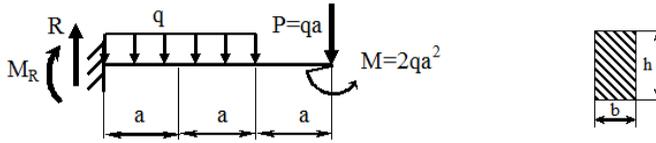


$$\theta(x) := \theta_0 + \frac{1}{E \cdot J} \left[-P \cdot \frac{x^2}{2} - q \cdot \frac{x^3}{3!} + q \cdot \frac{(x-2 \cdot a)^3}{3!} \cdot \Phi(x-2 \cdot a) + M \cdot (x-2 \cdot a) \cdot \Phi(x-2 \cdot a) \right]$$



x

Пример 2



$$q := 1000 \quad a := 1 \quad P := q \cdot a \quad M := 2 \cdot q \cdot a^2 \quad E := 0.5 \cdot 10^{11}$$

$$b := 0.1 \quad h := 0.10 \quad J := \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$R := 1$$

$$\text{Given} \quad R - q \cdot 2 \cdot a - P = 0$$

$$R := \text{Find}(R) = 3 \times 10^3$$

$$MR := 1$$

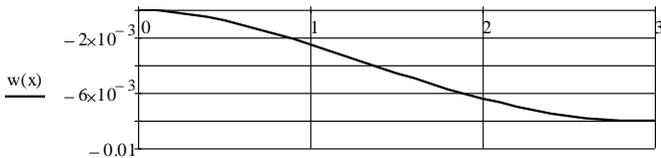
$$\text{Given} \quad MR + q \cdot 2 \cdot a^2 + P \cdot 3 \cdot a - M = 0$$

$$MR := \text{Find}(MR) = -3 \times 10^3$$

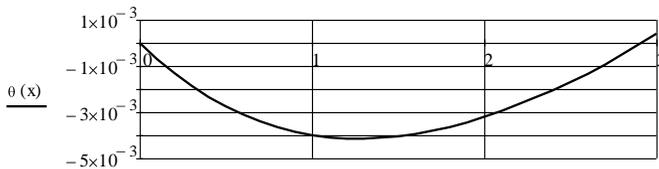
$$\begin{pmatrix} \theta_0 \\ w_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w(x) := w_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[MR \cdot \frac{x^2}{2} + R \cdot \frac{x^3}{3!} - q \cdot \frac{x^4}{4!} + q \cdot \frac{(x-2 \cdot a)^4}{4!} \cdot \Phi(x-2 \cdot a) \right]$$

$$x := 0, 0.1 \dots 3 \cdot a$$



$$\theta(x) := \theta_0 + \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[MR \cdot x + R \cdot \frac{x^2}{2} - q \cdot \frac{x^3}{3!} + q \cdot \frac{(x-2 \cdot a)^3}{3!} \cdot \Phi(x-2 \cdot a) \right]$$



x

Вычисление перемещений в криволинейном брусе с помощью интегралов Мора

Решим задачу вычисления вертикального и горизонтального перемещения в криволинейном брусе постоянного радиуса кривизны R . Брус обладает постоянной изгибной жесткостью EJ и нагружен на конце сосредоточенной силой P (рис. 10.17). Перемещение любой точки конструкции по заданному направлению вычисляется путем интегрирования следующего выражения:

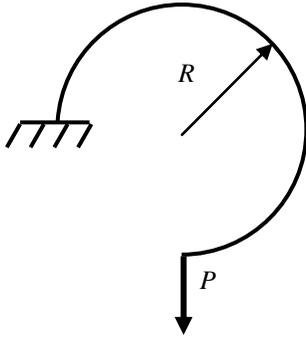


Рис. 10.17. Кривой стержень

$$\delta = \int_0^l \frac{M_P M_1}{EJ} ds, \quad (8)$$

где $M_P(s)$ – функция изгибающего момента, возникающего в поперечном сечении бруса от внешних нагрузок, $M_1(s)$ – функция изгибающего момента от единичной силы, приложенной к брусу в направлении разыскиваемого перемещения. В знаменателе – жесткость бруса на изгиб EJ . Интегрирование выполняется по всей длине бруса. Дифференциал ds в выражении (8) заменим:

$$ds = R d\varphi. \quad (9)$$

Соответственно поменяются и пределы интегрирования:

$$\delta = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{M_P M_1}{EJ} R d\varphi. \quad (10)$$

Чтобы установить зависимость $M_P(\varphi)$, проведем сечение (рис. 10.18) и

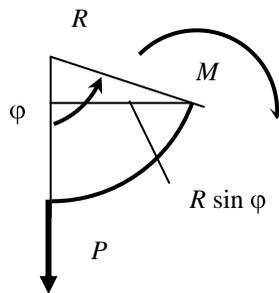


Рис. 10.18. Расчетная схема элемента стержня

составим уравнение равновесия – сумму моментов, действующих на отсеченную часть:

$$M_P(\varphi) = PR \sin \varphi. \quad (11)$$

Для нахождения вертикального перемещения конца бруса нужно вместо силы P приложить единичную силу. Соответственно в выражении для момента (11) нужно значение силы P положить равным единице:

$$M_1(\varphi) = R \sin \varphi. \quad (12)$$

Подставим в выражение (10) функции моментов:

$$\delta_{\text{гор}} = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{PR \sin \varphi R \sin \varphi}{EJ} R d\varphi. \quad (13)$$

Интегрирование выражения (13) выполним с помощью символического процессора MathCad:

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{P \cdot R \cdot \sin(\varphi) \cdot R \cdot \sin(\varphi)}{E \cdot J} \cdot R d\varphi \rightarrow \frac{3 \cdot \pi \cdot P \cdot R^3}{4 \cdot E \cdot J}. \quad (14)$$

В этом выражении знак интеграла взят из панели инструментов Calculus, а знак символического вычисления выражения – из панели Evaluation (рис. 10.19):

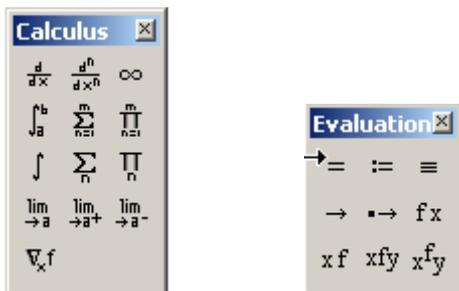


Рис. 10.19. Панели

Чтобы вычислить горизонтальное перемещение конца бруса, нужно приложить единичную силу, действующую в горизонтальном направлении (рис. 10.20). В выражении для момента (11) изменится плечо единичной силы.

$$M_1(\varphi) = R(1 - \cos \varphi). \quad (15)$$

Выражение для момента от внешних нагрузок (11) останется неизменным. Тогда для вычисления горизонтального перемещения нужно вычислить интеграл

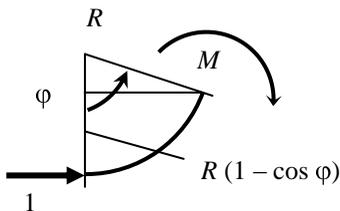


Рис. 10.20. Расчетная схема

$$\delta_{\text{верт}} = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{PR \sin \varphi R (1 - \cos \varphi)}{EJ} R d\varphi. \quad (16)$$

Снова применим символьный процессор MathCad:

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{P \cdot R \cdot \sin(f) \cdot R \cdot (1 - \cos(f))}{E \cdot J} \cdot R df \rightarrow \frac{P \cdot R^3}{2 \cdot E \cdot J}. \quad (17)$$

В дальнейшем в результирующие выражения (14) и (17) можно подставить значения силы P , радиуса R , изгибной жесткости EJ и получить численное значение прогибов. Впрочем, в этом случае можно сразу использовать численный процессор (рис. 10.21).

$P := 1000$	$R := 1$	$E := 2 \cdot 10^{11}$	$J := 500 \cdot 10^{-8}$
$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{P \cdot R \cdot \sin(f) \cdot R \cdot (1 - \cos(f))}{E \cdot J} \cdot R df = 5 \times 10^{-4}$			

Рис. 10.21. Использование численного процессора

Расчет статически неопределимой плоской рамы по методу сил

Решим задачу определения внутренних силовых факторов в плоской раме (рис. 10.22). Для простоты примем, что балки рамы изготовлены из одного материала и имеют одинаковый момент инерции. Эта рама трижды статически неопределима. Отбрасываем три «лишних связи» и внешнюю нагрузку. Получим основную систему (рис. 10.23). К основной системе прикладываем неизвестные реакции в направлении отброшенных связей и внешнюю нагрузку – получаем эквивалентную систему (рис. 10.24).

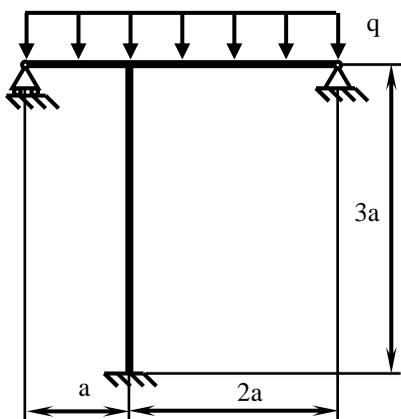


Рис. 10.22. Плоская рама

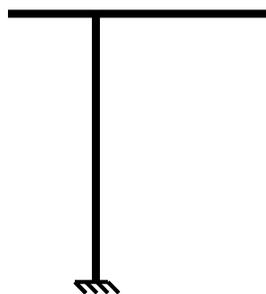


Рис. 10.23. Основная система

Для нахождения неизвестных реакций составляем каноническую систему уравнений:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0,$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

В этих уравнениях X_1, X_2, X_3 – неизвестные реакции «лишних связей», а остальные коэффициенты – суть перемещения в основной системе от некоторых силовых факторов по направлениям отброшенных связей. Они вычисляются с помощью интегралов Мора:

$$\delta_{ij} = \int_l \frac{M_i(x) \cdot M_j(x)}{EJ} dx,$$

$$\Delta_{iP} = \int_l \frac{M_i(x) \cdot M_P(x)}{EJ} dx.$$

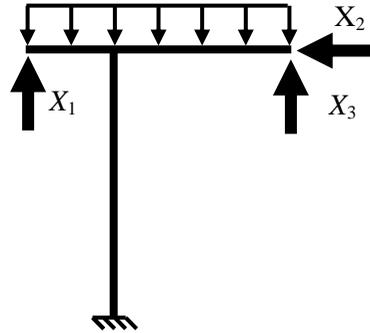


Рис. 10.24. Эквивалентная система

Здесь δ_{ij} – перемещение в основной системе по направлению i -й неизвестной от единичного силового фактора, приложенного вместо j -й неизвестной, а Δ_{iP} – то же перемещение в основной системе, но от внешней нагрузки; $M_i(x)$ и $M_j(x)$ – функции изгибающего момента, возникающего в основной системе от единичных силовых факторов, приложенных вместо i -й или j -й неизвестной, а $M_P(x)$ – функция изгибающего момента, возникающего в основной системе от внешней нагрузки. Интегрирование ведется по всей длине рамы, т. е. фактически в каждом выражении вместо одного интеграла их будет столько, сколько силовых участков имеется в расчетной схеме.

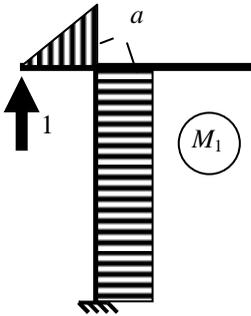


Рис. 10.25. Эпюра единичного момента

Следовательно, для вычисления коэффициентов канонической системы необходимо, во-первых, получить функции изгибающих моментов $M_i(x)$, $M_j(x)$ и $M_P(x)$, действующих в основной системе. Вначале к основной системе приложим единичную силу, заменяющую X_1 , определим функции изгибающих моментов, действующих на каждом участке и построим эпюру $M_1(x)$ (рис. 10.25).

Затем поочередно приложим единичные силы, заменяющие X_2 и X_3 , и определим еще две функции изгибающих моментов (рис. 10.26 и 10.27).

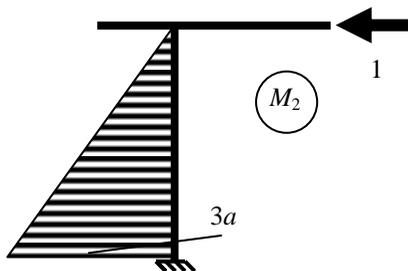


Рис. 10.26. Эпюра M_2

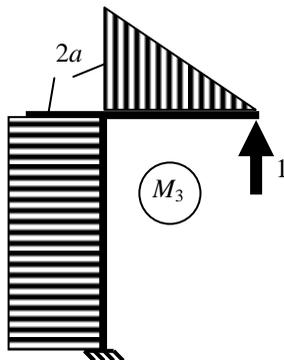


Рис. 10.27. Эпюра M_3

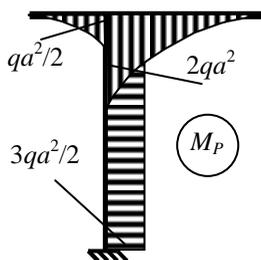


Рис. 10.28. Эпюра M_p

Нам потребуется также функция изгибающего момента, возникающего в основной системе от действия внешней нагрузки (рис. 10.28). Значения функций моментов по участкам удобно свести в таблицу (табл. 10.1).

Таблица 10.1

Силовой фактор	1-й силовой участок $0 \leq x \leq a$	2-й силовой участок $0 \leq x \leq 2a$	3-й силовой участок $0 \leq x \leq 3a$
M_1	x	0	$-a$
M_2	0	0	x
M_3	0	x	$2a$
M_p	$-q \frac{x^2}{2}$	$-q \frac{x^2}{2}$	$-\frac{3}{2} qa^2$

$$\begin{aligned}
 & a := 1 \qquad q := 1000 \\
 & M11(x) := x \quad M12(x) := 0 \quad M13(x) := -a \\
 & M21(x) := 0 \quad M22(x) := 0 \quad M23(x) := x \\
 & M31(x) := 0 \quad M32(x) := x \quad M33(x) := 2 \cdot a \\
 & MP1(x) := -q \cdot \frac{x^2}{2} \quad MP2(x) := -q \cdot \frac{x^2}{2} \quad MP3(x) := -\frac{3}{2} \cdot q \cdot a \\
 & \delta11 := \int_0^a M11(x) \cdot M11(x) \, dx + \int_0^{2 \cdot a} M12(x) \cdot M12(x) \, dx + \int_0^{3 \cdot a} M13(x) \cdot M13(x) \, dx \\
 & \delta12 := \int_0^a M11(x) \cdot M21(x) \, dx + \int_0^{2 \cdot a} M12(x) \cdot M22(x) \, dx + \int_0^{3 \cdot a} M13(x) \cdot M23(x) \, dx \\
 & \delta13 := \int_0^a M11(x) \cdot M31(x) \, dx + \int_0^{2 \cdot a} M12(x) \cdot M32(x) \, dx + \int_0^{3 \cdot a} M13(x) \cdot M33(x) \, dx \\
 & \delta22 := \int_0^a M21(x) \cdot M21(x) \, dx + \int_0^{2 \cdot a} M22(x) \cdot M22(x) \, dx + \int_0^{3 \cdot a} M23(x) \cdot M23(x) \, dx \\
 & \delta23 := \int_0^a M21(x) \cdot M31(x) \, dx + \int_0^{2 \cdot a} M22(x) \cdot M32(x) \, dx + \int_0^{3 \cdot a} M23(x) \cdot M33(x) \, dx \\
 & \delta33 := \int_0^a M31(x) \cdot M31(x) \, dx + \int_0^{2 \cdot a} M32(x) \cdot M32(x) \, dx + \int_0^{3 \cdot a} M33(x) \cdot M33(x) \, dx \\
 & \delta21 := \delta12 \quad \delta31 := \delta13 \quad \delta32 := \delta23 \\
 & \Delta1P := \int_0^a M11(x) \cdot MP1(x) \, dx + \int_0^{2 \cdot a} M12(x) \cdot MP2(x) \, dx + \int_0^{3 \cdot a} M13(x) \cdot MP3(x) \, dx \\
 & \Delta2P := \int_0^a M21(x) \cdot MP1(x) \, dx + \int_0^{2 \cdot a} M22(x) \cdot MP2(x) \, dx + \int_0^{3 \cdot a} M23(x) \cdot MP3(x) \, dx \\
 & \Delta3P := \int_0^a M31(x) \cdot MP1(x) \, dx + \int_0^{2 \cdot a} M32(x) \cdot MP2(x) \, dx + \int_0^{3 \cdot a} M33(x) \cdot MP3(x) \, dx
 \end{aligned}$$

Рис. 10.29. Фрагмент программы

Переходим теперь к программированию задачи в MathCad. Примем, что размер $a = 1$ м, а интенсивность распределенной нагрузки $q = 1000$ н. Так как изгибная жесткость всех стержней одинакова $EJ = \text{const}$, то она не будет участвовать в нахождении коэффициентов канонических уравнений. На рис. 10.29 приведен фрагмент программы реализующей вычисление коэффициентов.

Для вычисления коэффициентов используются единообразные выражения, которые многократно копируются. Остается только внимательно исправить значения индексов. На следующем фрагменте (рис. 10.30) приведено решение системы канонических уравнений и найденные значения неизвестных реакций.

$$\begin{array}{l}
 X1 := 1 \quad X2 := 1 \quad X3 := 1 \\
 \text{Given} \\
 \delta_{11} \cdot X1 + \delta_{12} \cdot X2 + \delta_{13} \cdot X3 + \Delta_{1P} = 0 \\
 \delta_{21} \cdot X1 + \delta_{22} \cdot X2 + \delta_{23} \cdot X3 + \Delta_{2P} = 0 \\
 \delta_{31} \cdot X1 + \delta_{32} \cdot X2 + \delta_{33} \cdot X3 + \Delta_{3P} = 0 \\
 \\
 \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{pmatrix} := \text{Find}(X1, X2, X3) = \begin{pmatrix} 182.143 \\ 42.857 \\ 798.214 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Рис. 10.30. Фрагмент решения системы уравнений

Теперь нужно вычислить изгибающие моменты, действующие в эквивалентной системе, и построить эпюры. На рис. 10.31 приведен соответствующий фрагмент. Графики функций моментов копируются затем в текстовый редактор Word – меню “Правка”, “специальная вставка”, вставить как “Рисунок (метафайл Windows)”. К выделенному рисунку применяется команда “Разгруппировать”, при этом он преобразуется в векторные примитивы редактора Word. Необходимые элементы (кривые изображающие функции) переносятся затем на расчетную схему. Значения функций в характерных точках сняты с графиков с помощью инструмента “Trace” (рис. 10.31).

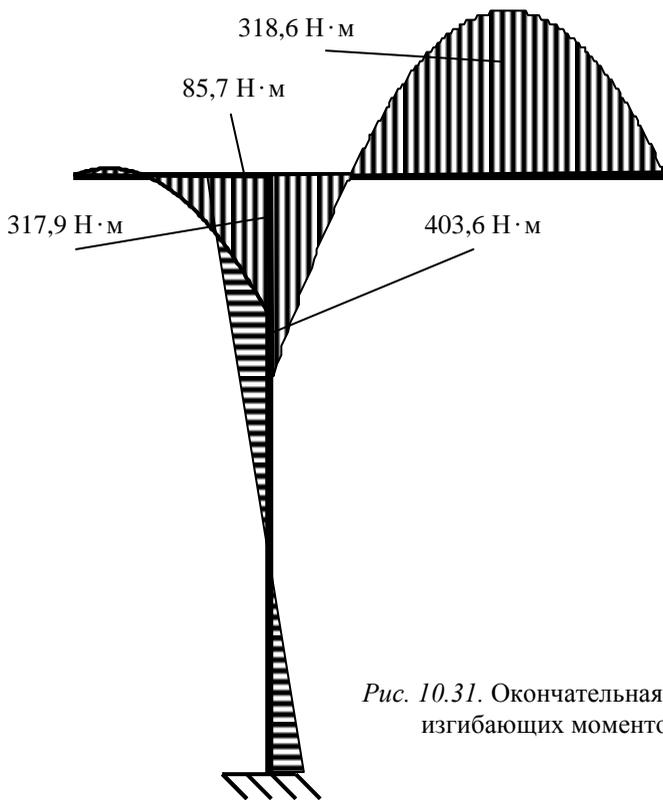


Рис. 10.31. Окончательная эпюра изгибающих моментов

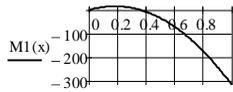
Последний фрагмент на рис. 10.32 относится к проверке правильности нахождения неизвестных реакций – X_1 , X_2 , X_3 . Здесь с помощью интегралов Мора вычисляются перемещения в эквивалентной системе по направлению отброшенных “лишних связей”. Полученные значения с полным основанием считаем равными нулю, тем более, что эти значения должны быть разделены на изгибную жесткость EJ .

$$M1(x) := MP1(x) + M11(x) \cdot X1 + M21(x) \cdot X2 + M31(x) \cdot X3$$

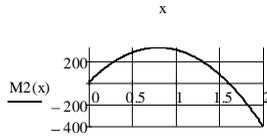
$$M2(x) := MP2(x) + M12(x) \cdot X1 + M22(x) \cdot X2 + M32(x) \cdot X3$$

$$M3(x) := MP3(x) + M13(x) \cdot X1 + M23(x) \cdot X2 + M33(x) \cdot X3$$

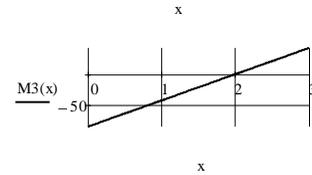
$$x := 0, 0,01 \dots a$$



$$x := 0, 0,01 \dots 2 \cdot a$$



$$x := 0, 0,01 \dots 3 \cdot a$$



$$\delta 1P := \int_0^a M11(x) \cdot M1(x) dx + \int_0^{2 \cdot a} M12(x) \cdot M2(x) dx + \int_0^{3 \cdot a} M13(x) \cdot M3(x) dx = 5.551 \times 10^{-11}$$

$$\delta 2P := \int_0^a M21(x) \cdot M1(x) dx + \int_0^{2 \cdot a} M22(x) \cdot M2(x) dx + \int_0^{3 \cdot a} M23(x) \cdot M3(x) dx = 1.179 \times 10^{-12}$$

$$\delta 3P := \int_0^a M31(x) \cdot M1(x) dx + \int_0^{2 \cdot a} M32(x) \cdot M2(x) dx + \int_0^{3 \cdot a} M33(x) \cdot M3(x) dx = 4.823 \times 10^{-10}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПРИВЕДЕНИЕМ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ К БЕЗРАЗМЕРНОМУ ВИДУ

Как правило, формулы сопротивления материалов предназначены для так называемого ручного счета и результаты решения задачи могут быть получены без применения вычислительной техники.

Однако в некоторых случаях (оптимизация конструкции, ее параметрическое исследование), когда требуется большое количество однотипных вычислений, целесообразно производить расчеты с помощью ЭВМ. При этом приходится разрабатывать специализированные программы, которые потом могут использоваться многократно для расчета подобных конструкций. При написании программ можно использовать как универсальные языки программирования, такие как Паскаль, Фортран, так и универсальные среды – MathCAD, EXCEL и др.

При разработке программ иногда приходится модифицировать расчетные формулы сопротивления материалов, приводить их к безразмерному виду и к виду, удобному для программирования.

В настоящем разделе будет рассмотрена задача параметрического исследования двутавровой стальной балки с применением среды EXCEL.

11.1. Расчетные формулы

При нахождении опорных реакций для балки удобно использовать уравнения двух моментов, но в отличие от “ручного” счета эти уравнения удобно записывать не относительно опор, а для некоторых двух фиксированных сечений балки, например, ее начала и конца.

Рассмотрим случай нагружения балки, имеющей N силовых участков (рис 11.1). На границах силовых участков могут быть приложены сосредоточенные усилия и моменты P_i, M_i , а также равномерно распределенная нагрузка q_i , которая должна заканчиваться на правом конце балки.

Ошибка!

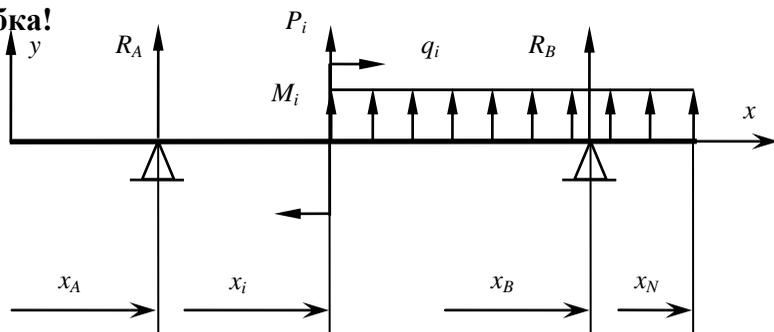


Рис. 11.1. Общий случай нагружения балки

Выражения для моментов от внешней нагрузки для левого M_0^P и правого M_N^P концов балки будут иметь вид

$$M_0^P = \sum_{i=0}^N \left(-M_i + P_i x_i - x_0 + q_i x_N - x_i \left(\frac{x_N + x_i}{2} - x_0 \right) \right); \quad (1)$$

$$M_N^P = \sum_{i=0}^N \left(-M_i + P_i x_i - x_N + q_i x_N - x_i \left(\frac{x_N + x_i}{2} - x_N \right) \right).$$

Записав условия равенства нулю моментов для левого и правого концов балки

$$R_A x_A + R_B x_B + M_0^P = 0, \quad (2)$$

$$-R_A x_N - x_A - R_B x_N - x_B + M_N^P = 0,$$

получим выражения для определения опорных реакций. Решать систему (2) удобнее всего численно. Так, по методу Крамера будем иметь:

$$R_A = \frac{D_A}{D}; \quad R_B = \frac{D_B}{D}; \quad D = x_N x_A - x_B;$$

$$D_A = -M_0^P x_N - x_B - M_N^P x_B; \quad D_B = +M_0^P x_N - x_A + M_N^P x_A.$$

При нахождении перерезывающих сил и изгибающих моментов удобно использовать метод перемещений. При этом, определив прогиб балки v из универсального уравнения упругой линии (см. задачу 7, II), силовые факторы можно вычислить из дифференциальных зависимостей

$$\vartheta = \frac{dv}{dx}, \quad M = EI \frac{d\vartheta}{dx} = EI \frac{d^2v}{dx^2}, \quad Q = \frac{dM}{dx}. \quad (3)$$

Универсальное уравнение упругой линии для балки, показанной на рис 11.1, имеет вид

$$v_j = v_0 + \vartheta_0 x_j + \frac{1}{EI} \sum_{i=0}^N t_{ij} \left(M_i \frac{x_j - x_i^2}{2!} + P_i \frac{x_j - x_i^3}{3!} + q_i \frac{x_j - x_i^4}{4!} \right), \quad (4)$$

где $t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } x_j > x_i \\ 0 & \text{при } x_j \leq x_i \end{cases}$, а v_j – прогиб в сечении x_j . (5)

Дифференцируя выражение (4), согласно (3) будем иметь:

$$\begin{aligned} \vartheta_j &= \vartheta_0 + \frac{1}{EJ} \sum_{i=0}^N t_{ij} \left(M_i \frac{x_j - x_i^1}{1!} + P_i \frac{x_j - x_i^2}{2!} + q_i \frac{x_j - x_i^3}{3!} \right); \\ M_j &= \sum_{i=0}^N t_{ij} \left(M_i + P_i \frac{x_j - x_i^1}{1!} + q_i \frac{x_j - x_i^2}{2!} \right); \\ Q_j &= \sum_{i=0}^N t_{ij} \left(P_i + q_i \frac{x_j - x_i^1}{1!} \right). \end{aligned} \quad (11.6)$$

При расчете также удобно пользоваться безразмерными величинами для внутренних силовых факторов и обобщенных прогибов. Так, если ввести безразмерные величины по формулам

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{a}; \quad \bar{M} = \frac{M}{q_0 a^2}; \quad \bar{Q} = \frac{Q}{q_0 a}; \quad \bar{q} = \frac{q}{q_0}; \\ \bar{\vartheta} &= \frac{\vartheta}{\left(\frac{q_0 a^3}{EJ}\right)}; \quad \bar{v} = \frac{v}{\left(\frac{q_0 a^4}{EJ}\right)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где a – некоторый характерный размер (например, длина силового участка), а q_0 – характерная величина распределенной нагрузки, то с учетом обозначений (7) выражения (4) и (6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{v}_j &= \bar{v}_0 + \bar{\vartheta}_0 X_j + F_j^v; \quad \bar{\vartheta}_j = \bar{\vartheta}_0 + F_j^\vartheta; \\ \bar{M}_j &= \sum_{i=0}^N t_{ij} \left(\bar{M}_i + \bar{P}_i \frac{X_j - X_i}{1!} + \bar{q}_i \frac{X_j - X_i}{2!} \right); \\ \bar{Q}_j &= \sum_{i=0}^N t_{ij} \left(\bar{P}_i + \bar{q}_i \frac{X_j - X_i}{1!} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} F_j^v &= \sum_{i=0}^N t_{ij} \left(\bar{M}_i \frac{X_j - X_i}{2!} + \bar{P}_i \frac{X_j - X_i}{3!} + \bar{q}_i \frac{X_j - X_i}{4!} \right); \\ F_j^\vartheta &= \sum_{i=0}^N t_{ij} \left(\bar{M}_i \frac{X_j - X_i}{1!} + \bar{P}_i \frac{X_j - X_i}{2!} + \bar{q}_i \frac{X_j - X_i}{3!} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

В задачах сопротивления материалов решение должно быть доведено до числа. В связи с этим возникают определенные трудности, свя-

занные с представлением данных в системных единицах. Так, в справочниках данные часто задаются в несистемных единицах, например, размеры сечения в [мм], а момент сопротивления – в [см³]. В то же время результат по напряжениям желательно получить в [МПа]. При использовании ЭВМ эту работу можно “поручить” машине, снабдив соответствующую формулу коэффициентом пересчета.

Рассмотрим определение этого коэффициента на примере вычисления нормальных напряжений. Пусть исходные значения заданы в следующих единицах: q_0 [кН/м], a [м], W [см³]. Тогда для определения напряжений будем иметь:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{M}{W} = \frac{\overline{M}q_0a^2 \text{ [кН/м][м}^2\text{]}}{W \text{ [см}^3\text{]}} = \frac{\overline{M}q_0a^2}{W} \frac{10^3 \text{ [Нм]}}{10^{-6} \text{ [м}^3\text{]}} = \\ &= \frac{\overline{M}q_0a^2}{W} 10^3 \text{ [МПа]}.\end{aligned}$$

Таким образом, если взять исходные величины в заданной размерности и умножить полученный результат на 10³, то размерность результата будет [МПа]. Аналогичные формулы пересчета могут быть получены и для других величин.

11.2. Особенности программирования в среде Excel

Среда EXCEL, или “Электронные таблицы”, является составной частью Microsoft Office и имеется практически на каждой персональной ЭВМ. Известно большое количество пособий по программированию в среде EXCEL, поэтому в данном разделе рассмотрим самые необходимые ее средства.

Поле EXCEL представляет собой электронную таблицу, в каждой ячейке которой могут быть записаны либо данные, либо формулы, работающие с этими данными. Формула от данных отличается тем, что начинается с символа «=». Каждая ячейка нумеруется по номеру столбца (латинская буква) и номеру строки (цифра), например: A5,

F15. EXCEL включает в себя большое количество встроенных функций, таких как СУММ(), МАХ(), МИН(), и так далее.

При программировании формул широко используются команды “Правка/Заполнить/Вниз”, “Правка/Заполнить/Вправо”, что позволяет программировать только одну ячейку таблицы, а формулы в остальных ячейках получать с помощью этих команд. При заполнении индексы ячеек, входящих в формулу, автоматически изменяются. Если по каким-либо причинам изменение ячеек не требуется, соответствующий индекс снабжается символом «\$». Например, в А\$5 будет при заполнении меняться номер столбца, а номер строки останется неизменным. Если в формуле присутствует константа, то символом «\$» нужно предварить как номер столбца, так и номер строки: \$D\$21.

Описанные средства делают программирование в EXCEL весьма эффективным и позволяют в сжатые сроки создать достаточно объемные программы.

Следует также отметить наличие в EXCEL весьма мощного “Мастера диаграмм”, что позволяет представлять результаты расчетов и в графическом виде.

11.3. Расчет на изгиб двутавровой балки

Условие задачи. Двутавровая стальная балка закреплена на двух шарнирных опорах и нагружена (табл. 11.1) в соответствии с заданной расчетной схемой (табл. 11.3). Допускаемые напряжения $\sigma = 160$ МПа, модуль упругости $E = 2.0 \cdot 10^5$ МПа. Одна из опор фиксирована, вторая – может находиться в одном из заданных сечений (табл. 11.2).

Варианты исходных данных и расчетные схемы приведены в табл. 11.1, 11.2 и 11.3.

Требуется:

1) из условия полной проверки на статическую прочность для каждого фиксированного положения второй опоры подобрать по ГОСТу требуемый номер двутаврового профиля;

2) для положения опоры, при котором балка имеет минимальный вес, построить эпюры силовых факторов, углов поворота и прогибов.

Таблица 11.1

Варианты исходных данных

Номер варианта	M_1 [кН·м]	P_1 [кН]	P_2 [кН]	q [кН/м]	a [м]
1	10	20	30	40	0,4
2	20	15	20	30	0,6
3	30	10	30	20	0,8
4	40	5	20	10	1,0
5	10	5	30	40	0,4
6	20	10	20	30	0,6
7	30	15	30	20	0,8
8	40	20	20	10	1,0

Таблица 11.2

Варианты исходных данных

Номер варианта	Опора А (номер сечения)	Опора В (номера сечений)
1	0	3,4,5
2	0	4,5,6
3	0	2,4,6
4	0	3,5,6
5	1	3,4,5
6	1	4,5,6
7	1	2,4,6
8	1	3,5,6

Варианты исходных данных

<p>1</p>	<p>2</p>
<p>3</p>	<p>4</p>
<p>5</p>	<p>6</p>
<p>7</p>	<p>8</p>
<p>9</p>	<p>10</p>

ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

Двутавровая балка закреплена на двух шарнирных опорах и нагружена в соответствии с расчетной схемой, как показано на рис. 11.2. Исходные данные и механические характеристики представлены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Исходные данные

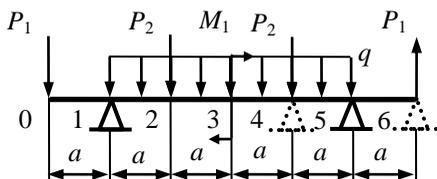


Рис. 11.2. Расчетная схема

Номер варианта	Значения параметров
M_1 [кНм]	40,0
P_1 [кН]	20,0
P_2 [кН]	10,0
q [кН/м]	30,0
a [м]	0,85
$[\sigma]$ [МПа]	160,0
E [МПа]	$2,0 \cdot 10^5$

Требуется из условия полной проверки на статическую прочность для случая, когда первая опора находится в сечении 1, а вторая опора – в сечениях 4, 5 или 6, подобрать по ГОСТу требуемый номер двутаврового профиля. Для положения второй опоры, при котором балка имеет минимальный вес, построить эпюры силовых факторов, углов поворота и прогибов балки.

Решение

Для решения задачи составляем программу в среде EXCEL. Книга EXCEL (рис 11.3) состоит из 3 страниц. На странице “Реакции опор” по заданным нагрузкам вычисляем опорные реакции. Для этого в столбце С3:С6 задаем исходные данные из табл. 1.4. В ячейках F3 и F4 задаем номера сечений для опор. В таблице В22:Н17 записываем значения нагрузки по сечениям. Так как по схеме распределенная нагрузка заканчивается в сечении 5, то продляем ее до конца балки, а в сечении 5 прикладываем такую же нагрузку, но с обратным знаком.

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2			Исходные данные						
3		q0[кН/м]	30		XA	1		qa=	25,5
4		a[м]	0,85		XB	5		qa*2=	21,675
5		E [МПа]	2,00E+05						
6		[S] [МПа]	160						
7									
8									
9									
10									
11			Размерные нагрузки						
12									
13									
14	Xi	0	1	2	3	4	5	6	
15	Mi[кНм]				40				
16	Pi[кН]	-20		-10		-10		20	
17	qi[кН/м]		-30				30		
18									
19		Безразмерные нагрузки							
20									
21	Xi	0	1	2	3	4	5	6	
22	Mi	0,0000	0,0000	0,0000	1,8454	0,0000	0,0000	0,0000	
23	Pi	-0,7843	0,0000	-0,3922	0,0000	-0,3922	0,0000	0,7843	
24	qi	0,0000	-1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	
25									
26		Моменты от внешней нагрузки							
27									
28	MPOi	0,0000	-17,5000	-0,7843	-1,8454	-1,5686	5,5000	4,7059	-11,4925
29	MPNi	4,7059	12,5000	1,5686	-1,8454	0,7843	-0,5000	0,0000	17,2134
30									
31		Определение реакций							
32									
33	d	-24,0000							
34	dA	-74,5744		RA	3,1073				
35	dB	-40,2491		RB	1,6770				
36									
37		Суммарная нагрузка							
38									
39	Xi	0,0000	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000	6,0000	
40	Mi	0,0000	0,0000	0,0000	1,8454	0,0000	0,0000	0,0000	
41	Pi	-0,7843	3,1073	-0,3922	0,0000	-0,3922	1,6770	0,7843	
42	qi	0,0000	-1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	
43									
44		Проверка опорных реакций							
45									
46	MOi	0,0000	-14,3927	-0,7843	-1,8454	-1,5686	13,8852	4,7059	0,00000
47	MNi	4,7059	-3,0363	1,5686	-1,8454	0,7843	-2,1770	0,0000	0,00000
48									
Реакции опор / Расчет на прочность / Определение перемещений									

Рис. 11.3. Книга EXCEL

В таблице В22:Н24 формируем безразмерную нагрузку по формулам (7). При заполнении таблицы используем команды “Правка/Заполнить/Вправо”. Так, формула в ячейке В22 имеет вид “=В15/IS\$4” (здесь и далее в тексте для выделения формулы она берется в скобки, хотя в программе эти скобки отсутствуют), где в ячейке I4 предварительно вычисляется вспомогательная величина $q_0 a^2$. В строках В28:Н28 и В29:Н29 вычисляются величины M_{0i}^P, M_{Ni}^P в формулах (1).

Например, команда в ячейке В28 имеет вид:

“=-В22+В23*(В21-\$B\$21)+В24*(H\$21-B21)*((H\$21+В21)/2-B\$21)”.

В ячейках I28 и I29 с помощью функций суммирования “=СУММ(В28:Н28)” и “=СУММ(В29:Н29)” находятся значения M_0^P, M_N^P .

Далее по формулам Крамера решается система уравнений (2) и определяются безразмерные опорные реакции. Эти опорные реакции добавляются к внешним нагрузкам и формируется таблица суммарной нагрузки В40:Н42. При добавлении нагрузок используется команда “=ЕСЛИ(В39=\$F\$3; В23+\$E\$34; ЕСЛИ(В39=\$F\$4; В23+\$E\$35; В23))”. В таблице В46:Н47 вычисляются значения M_{0i}, M_{Ni} от суммарной нагрузки и проверяется равенство нулю их суммы.

На странице “Расчет на прочность” в таблице В11:Н47 проводится расчет изгибающих моментов (рис. 11.4) по формулам (8). Так как на границах силовых участков эпюра моментов может иметь разрыв, расчеты проводятся при значениях $n - \delta$ и $n + \delta$, где δ – некоторая малая величина. В данной программе принято $\delta = 0,00001$. В столбце I10:I47 представлены значения изгибающих моментов в сечениях. В ячейке I49 с помощью оператора “=ABS(МИН(I10:I46))” вычисляется минимальное значение момента, а в I50 – “=ABS(МАКС(I10:I46))”: максимальное. В качестве расчетного значения $M_{расч}$ берется наибольшее из этих двух.

Значение $W_{\text{потр}} = \frac{M_{\text{расч}}}{[\sigma]}$ вычисляем в ячейке E51 по формуле

“=((I51*'Реакции опор'!I4)/Реакции опор'!C6)*1000”,

т. е. с использованием коэффициента пересчета.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
7														
8		Расчет изгибающих моментов												
9	y/x	0	1	2	3	4	5	6	[M]		[Smax][MPa]		[S][MPa]	
10	0,0								0,0000		0,0		0,0	
11	0,0	0,0000							0,0000		0,0		0,0	
12	0,2	-0,1569							-0,1569		7,2		6,7	
13	0,4	-0,3137							-0,3137		14,4		13,4	
14	0,6	-0,4706							-0,4706		21,6		20,1	
15	0,8	-0,6275							-0,6275		28,8		26,9	
16	1,0	-0,7843							-0,7843		36,0		33,6	
17	1,0	-0,7843	0,0000						-0,7843		36,0		33,6	
18	1,2	-0,9412	0,6015						-0,3397		15,6		14,5	
19	1,4	-1,0980	1,1629						0,0649		3,0		2,8	
20	1,6	-1,2549	1,6844						0,4295		19,7		18,4	
21	1,8	-1,4118	2,1658						0,7540		34,6		32,3	
22	2,0	-1,5686	2,6072						1,0386		47,7		44,5	
23	2,0	-1,5686	2,6073	0,0000					1,0386		47,7		44,5	
24	2,2	-1,7255	3,0087	-0,0784					1,2048		55,3		51,6	
25	2,4	-1,8824	3,3702	-0,1669					1,3310		61,1		57,0	
26	2,6	-2,0392	3,6916	-0,2353					1,4171		65,1		60,7	
27	2,8	-2,1961	3,9731	-0,3137					1,4633		67,2		62,6	
28	3,0	-2,3529	4,2145	-0,3922					1,4694		67,5		62,9	
29	3,0	-2,3529	4,2145	-0,3922	1,8454				3,3149		152,2		141,9	
30	3,2	-2,5098	4,4160	-0,4706	1,8454				3,2810		150,7		140,4	
31	3,4	-2,6667	4,5774	-0,5490	1,8454				3,2072		147,3		137,3	
32	3,6	-2,8235	4,6989	-0,6275	1,8454				3,0934		142,1		132,4	
33	3,8	-2,9804	4,7803	-0,7059	1,8454				2,9395		135,0		125,8	
34	4,0	-3,1372	4,8218	-0,7843	1,8454				2,7457		126,1		117,5	
35	4,0	-3,1373	4,8218	-0,7843	1,8454	0,0000			2,7457		126,1		117,5	
36	4,2	-3,2941	4,8233	-0,8627	1,8454	-0,0784			2,4334		111,7		104,1	
37	4,4	-3,4510	4,7847	-0,9412	1,8454	-0,1569			2,0811		95,6		89,1	
38	4,6	-3,6078	4,7062	-1,0196	1,8454	-0,2353			1,6889		77,6		72,3	
39	4,8	-3,7647	4,5876	-1,0980	1,8454	-0,3137			1,2566		57,7		53,8	
40	5,0	-3,9216	4,4291	-1,1765	1,8454	-0,3922			0,7843		36,0		33,6	
41	5,0	-3,9216	4,4291	-1,1765	1,8454	-0,3922	0,0000		0,7843		36,0		33,6	
42	5,2	-4,0784	4,2305	-1,2549	1,8454	-0,4706	0,3554		0,6275		28,8		26,9	
43	5,4	-4,2353	3,9920	-1,3333	1,8454	-0,5490	0,7508		0,4706		21,6		20,1	
44	5,6	-4,3922	3,7134	-1,4118	1,8454	-0,6275	1,1862		0,3137		14,4		13,4	
45	5,8	-4,5490	3,3949	-1,4902	1,8454	-0,7059	1,6616		0,1569		7,2		6,7	
46	6,0	-4,7059	3,0363	-1,5686	1,8454	-0,7843	2,1770		0,0000		0,0		0,0	
47	6,0	-4,7059	3,0363	-1,5686	1,8454	-0,7843	2,1771	0,0000	0,0000		0,0		0,0	
48														
49		Расчет W потр							[M min] =	0,7843				
50								[M max] =	3,3149					
51		Wпотр[см ⁴]							449,1	M расч =	3,3149	[Smax	152,2	
52										[S]	160,0			

Рис. 11.4. Расчет изгибающих моментов

Исходя из полученного значения $W_{\text{потр}}$ выбираем по ГОСТ 8239-72 ближайший по моменту сопротивления двутавровый профиль и проводим проверку по максимальным касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z^*}{dJ_z} \leq [\tau],$$

$$[\tau] = 0,6[\sigma] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа.}$$

Фрагмент программы для расчета максимальных касательных напряжений показан на рис. 11.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
53	Параметры двутавра														
54															
55	№	h (мм)	b (мм)	d (мм)	t (мм)	Jz (см ⁴)	Wz (см ³)	Sz (см ³)	SBz (см ³)						
56	30,0	300,0	135,0	6,5	10,2	7080,0	472,0	268,0	199,5	63,5	263,0				
57									WBz (см ³)						
58		Проверка по касательным напряжениям													
59	Xi/Xi	0	1	2	3	4	5	6	Qj	ТСj (МПа)	ТВj (МПа)	SBэкв (МПа)			
60	0,0								0,0000	0,0	0,0	0,0			
61	0,0	-0,7843							-0,7843	11,6	8,7	16,5			
62	0,2	-0,7843							-0,7843	11,6	8,7	20,1			
63	0,4	-0,7843							-0,7843	11,6	8,7	25,1			
64	0,6	-0,7843							-0,7843	11,6	8,7	30,8			
65	0,8	-0,7843							-0,7843	11,6	8,7	36,8			
66	1,0	-0,7843							-0,7843	11,6	8,7	36,8			
67	1,0	-0,7843	3,1073						2,3229	34,5	25,7	46,8			
68	1,2	-0,7843	2,9073						2,1230	31,5	23,5	40,7			
69	1,4	-0,7843	2,7073						1,9230	28,6	21,3	41,2			
70	1,6	-0,7843	2,5073						1,7230	25,6	19,0	46,2			
71	1,8	-0,7843	2,3073						1,5230	22,6	16,8	53,2			
72	2,0	-0,7843	2,1073						1,3230	19,6	14,6	51,2			
73	2,0	-0,7843	2,1073	-0,3922					0,9308	13,8	10,3	54,6			
74	2,2	-0,7843	1,9073	-0,3922					0,7308	10,9	8,1	58,7			
75	2,4	-0,7843	1,7073	-0,3922					0,5308	7,9	5,9	61,5			
76	2,6	-0,7843	1,5073	-0,3922					0,3308	4,9	3,7	62,9			
77	2,8	-0,7843	1,3073	-0,3922					0,1308	1,9	1,4	62,9			
78	3,0	-0,7843	1,1073	-0,3922					-0,0692	1,0	0,8	141,9			
79	3,0	-0,7843	1,1073	-0,3922	0,0000				-0,0692	1,0	0,8	140,4			
80	3,2	-0,7843	0,9073	-0,3922	0,0000				-0,2692	4,0	3,0	137,4			
81	3,4	-0,7843	0,7073	-0,3922	0,0000				-0,4692	7,0	5,2	132,7			
82	3,6	-0,7843	0,5073	-0,3922	0,0000				-0,6692	9,9	7,4	126,5			
83	3,8	-0,7843	0,3073	-0,3922	0,0000				-0,8692	12,9	9,6	118,7			
84	4,0	-0,7843	0,1073	-0,3922	0,0000				-1,0692	15,9	11,8	119,3			
85	4,0	-0,7843	0,1073	-0,3922	0,0000	-0,3922			-1,4614	21,7	16,2	107,8			
86	4,2	-0,7843	-0,0927	-0,3922	0,0000	-0,3922			-1,8614	24,7	18,4	94,6			
87	4,4	-0,7843	-0,2927	-0,3922	0,0000	-0,3922			-1,8614	27,6	20,6	80,6			
88	4,6	-0,7843	-0,4927	-0,3922	0,0000	-0,3922			-2,0614	30,6	22,8	66,7			
89	4,8	-0,7843	-0,6927	-0,3922	0,0000	-0,3922			-2,2614	33,6	25,0	54,8			
90	5,0	-0,7843	-0,8927	-0,3922	0,0000	-0,3922			-2,4614	36,6	27,2	57,9			
91	5,0	-0,7843	-0,8927	-0,3922	0,0000	-0,3922	1,6771		-0,7843	11,6	8,7	30,8			
92	5,2	-0,7843	-1,0927	-0,3922	0,0000	-0,3922	1,8770		-0,7843	11,6	8,7	25,1			
93	5,4	-0,7843	-1,2927	-0,3922	0,0000	-0,3922	2,0770		-0,7843	11,6	8,7	20,1			
94	5,6	-0,7843	-1,4927	-0,3922	0,0000	-0,3922	2,2770		-0,7843	11,6	8,7	16,5			
95	5,8	-0,7843	-1,6927	-0,3922	0,0000	-0,3922	2,4770		-0,7843	11,6	8,7	15,0			
96	6,0	-0,7843	-1,8927	-0,3922	0,0000	-0,3922	2,6770		-0,7843	11,6	8,7	15,0			
97	6,0	-0,7843	-1,8927	-0,3922	0,0000	-0,3922	2,6771	0,7843	0,0000	0,0	0,0	0,0			
98										ТС	27,2	SB	141,9		
99										ТВ	96	SI	160,0		
100															
101															

Рис. 11.5. Фрагмент программы

Если выполняется условие $\tau_{\max} \leq [\tau]$, то оставляем выбранный номер двутавра, в противном случае его нужно увеличить. На этом же рисунке показано вычисление максимальных эквивалентных напряжений в точке B (рис. 11.6):

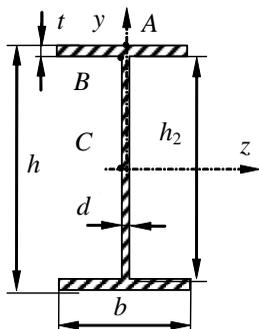


Рис. 11.6. Двутавровое сечение

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \sqrt{\sigma_B^2 + 3\tau_B^2} ;$$

$$\sigma_B = \frac{My_B}{J_z}, \quad \tau_B = \frac{QS_{zB}^*}{dJ_z} .$$

$$S_{zB}^* = bt h_2 + t / 2 .$$

По разработанной программе выполняем расчеты для заданных значений положения опоры B и результаты сводим в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Результаты расчетов

\bar{X}_B	$W_{\text{потр}}$ [см ³]	Номер двутавра	W [см ³]	σ_{\max} , МПа	τ_{\max} , МПа	σ_B max экв, МПа
4	297,6	24а	317	150,2	29,8	139,3
5	449,1	30	472	152,2	27,2	141,9
6	544,4	36	601	144,9	20,1	134,8

Таким образом, с точки зрения весовых характеристик из предложенных вариантов наиболее выгодным является вариант расположения второй опоры в 4-м сечении.

Для построения эпюр перемещений и углов поворота используем формулы (8), (9). Фрагменты программ для вычисления безразмерных прогибов и углов поворота показаны на рис. 11.7 и 11.8.

Алгоритм вычисления функций F_j^v, F_j^g аналогичен алгоритму вычисления для моментов и перерезывающих сил. Так формула в ячейке В10 имеет вид “=ЕСЛИ(\$A10>B\$3; (\$A10-B\$3)*

$(\$A10-B\$3)*(\$B4/2+B\$5*(\$A10-B\$3)/6+B\$6*(\$A10-B\$3)$

$*(\$A10-B\$3)/24)$; “””. Столбец I10:I40 содержит значения F_j^v, F_j^g .

Для нахождения постоянных $\bar{v}_0, \bar{\vartheta}_0$ из (8) получаем, приравняв прогиб на опорах нулю,

$$\bar{v}_A = \bar{v}_0 + \bar{\vartheta}_0 X_A + F_A^v = 0; \tag{10}$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_0 + \bar{\vartheta}_0 X_B + F_B^v = 0.$$

Для нахождения значений F_A^v, F_B^g при произвольном расположении опор организованы столбцы I10:I40 и J10:J40. В ячейках этих столбцов командами типа “=ЕСЛИ(\$A10=’Реакции опор!’\$F\$3; \$I10; ”)” выбираются значения функций для текущего положения опор.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1			Заданные нагрузки										
2													
3	Xi	0,0000	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000	6,0000					
4	Mi	0,0000	0,0000	0,0000	1,8454	0,0000	0,0000	0,0000					
5	Pi	-0,7843	2,5483	-0,3922	0,0000	1,8439	0,0000	0,7843					
6	qi	0,0650	-1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000					
7													
8													
9	Xj/Xi	0	1	2	3	4	5	6	Fvj	FvA	FvB	Votn	TetaOtn
10	0,0								0,0000			0,2163	-0,0856
11	0,2	-0,0010							-0,0010			0,1981	-0,1012
12	0,4	-0,0084							-0,0084			0,1737	-0,1483
13	0,6	-0,0282							-0,0282			0,1367	-0,2267
14	0,8	-0,0669							-0,0669			0,0809	-0,3365
15	1,0	-0,1307							-0,1307	-0,1307		0,0000	-0,4777
16	1,2	-0,2259	0,0033						-0,2226			-0,1089	-0,6006
17	1,4	-0,3587	0,0261						-0,3326			-0,2361	-0,6610
18	1,6	-0,5354	0,0863						-0,4491			-0,3697	-0,6668
19	1,8	-0,7624	0,2004						-0,5620			-0,4997	-0,6260
20	2,0	-1,0458	0,3830						-0,6627			-0,6176	-0,5467
21	2,2	-1,3919	0,6475	-0,0005					-0,7449			-0,7169	-0,4447
22	2,4	-1,8071	1,0053	-0,0042					-0,8059			-0,7950	-0,3358
23	2,6	-2,2975	1,4665	-0,0141					-0,8451			-0,8513	-0,2280
24	2,8	-2,8695	2,0395	-0,0335					-0,8635			-0,8868	-0,1294
25	3,0	-3,5294	2,7310	-0,0654					-0,8638			-0,9042	-0,0479
26	3,2	-4,2834	3,5452	-0,1129	0,0369				-0,8132			-0,8707	0,3776
27	3,4	-5,1378	4,4888	-0,1793	0,1476				-0,6807			-0,7553	0,7699
28	3,6	-6,0988	5,5606	-0,2677	0,3322				-0,4737			-0,5655	1,1211
29	3,8	-7,1728	6,7621	-0,3812	0,5905				-0,2013			-0,3102	1,4232
30	4,0	-8,3660	8,0921	-0,5229	0,9227				0,1260		0,1260	0,0000	1,6682
31	4,2	-9,6847	9,5478	-0,6959	1,3287	0,0025			0,4983			0,3552	1,8849
32	4,4	-11,1352	11,1247	-0,9035	1,8085	0,0197			0,9142			0,7540	2,1022
33	4,6	-12,7237	12,8168	-1,1488	2,3622	0,0664			1,3729			1,1956	2,3122
34	4,8	-14,4565	14,6165	-1,4348	2,9896	0,1573			1,8723			1,6779	2,5068
35	5,0	-16,3399	16,5147	-1,7647	3,6909	0,3073			2,4083			2,1968	2,6780
36	5,2	-18,3801	18,5004	-2,1417	4,4660	0,5310	0,0001		2,9757			2,7470	2,8192
37	5,4	-20,5835	20,5613	-2,5689	5,3149	0,8433	0,0011		3,6881			3,3224	2,9290
38	5,6	-22,9563	22,6834	-3,0494	6,2376	1,2588	0,0054		4,1794			3,9165	3,0074
39	5,8	-25,5048	24,8510	-3,5864	7,2341	1,7923	0,0171		4,8032			4,5232	3,0545
40	6,0	-28,2353	27,0469	-4,1830	8,3045	2,4585	0,0417		5,4333			5,1362	3,0701
41										FA	FB		
42										-0,1307	0,1260		

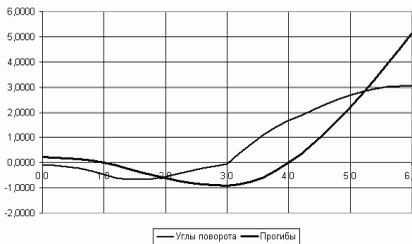
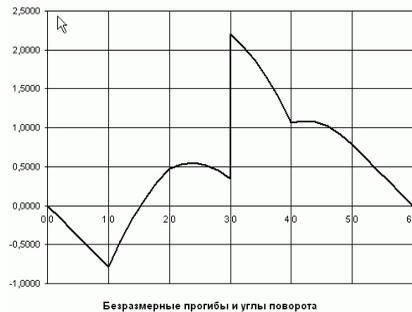
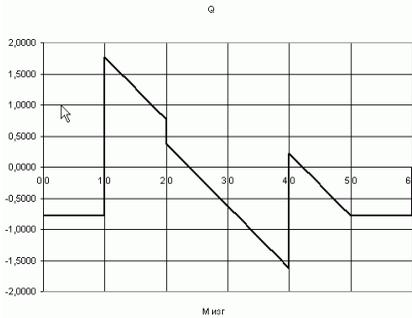
Рис. 11.7. Фрагмент программы

В ячейках J42 и K42 производится суммирование по указанным столбцам, в результате чего значения функций записываются в фиксированных ячейках и используются при решении системы (10). В столбцах L10:L40 и M10:M40 вычисляются значения безразмерных прогибов и углов поворота.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
43			Расчет углов поворота										
44										v_0	τ_0		
45			F_{tij}								0,2163	-0,0856	
46	X_j/X_i	0	1	2	3	4	5	6				F_{Tetaj}	
47	0,0											0,0000	
48	0,2	-0,0157										-0,0157	
49	0,4	-0,0627										-0,0627	
50	0,6	-0,1412										-0,1412	
51	0,8	-0,2510										-0,2510	
52	1,0	-0,3922										-0,3922	
53	1,2	-0,5647	0,0496									-0,5151	
54	1,4	-0,7686	0,1932									-0,5754	
55	1,6	-1,0039	0,4227									-0,5812	
56	1,8	-1,2706	0,7301									-0,5405	
57	2,0	-1,5686	1,1075									-0,4612	
58	2,2	-1,8980	1,5467	-0,0078								-0,3591	
59	2,4	-2,2588	2,0400	-0,0314								-0,2502	
60	2,6	-2,6510	2,5791	-0,0706								-0,1425	
61	2,8	-3,0745	3,1562	-0,1255								-0,0438	
62	3,0	-3,5294	3,7632	-0,1961								0,0377	
63	3,2	-4,0157	4,3921	-0,2824	0,3691							0,4631	
64	3,4	-4,5333	5,0350	-0,3843	0,7382							0,8555	
65	3,6	-5,0824	5,6838	-0,5020	1,1073							1,2067	
66	3,8	-5,6627	6,3305	-0,6353	1,4764							1,5088	
67	4,0	-6,2745	6,9671	-0,7843	1,8454							1,7537	
68	4,2	-6,9176	7,5857	-0,9490	2,2145	0,0369						1,9705	
69	4,4	-7,5922	8,1782	-1,1294	2,5836	0,1475						2,1878	
70	4,6	-8,2980	8,7367	-1,3255	2,9527	0,3319						2,3977	
71	4,8	-9,0353	9,2530	-1,5373	3,3218	0,5900						2,5923	
72	5,0	-9,8039	9,7193	-1,7647	3,6909	0,9220						2,7636	
73	5,2	-10,6039	10,1276	-2,0078	4,0600	1,3276	0,0013					2,9047	
74	5,4	-11,4353	10,4697	-2,2667	4,4291	1,8070	0,0107					3,0145	
75	5,6	-12,2980	10,7378	-2,5412	4,7982	2,3602	0,0360					3,0930	
76	5,8	-13,1922	10,9238	-2,8314	5,1672	2,9871	0,0853					3,1400	
77	6,0	-14,1176	11,0198	-3,1373	5,5363	3,6878	0,1667					3,1557	

Рис. 11.8. Фрагмент программы

По результатам расчета строим графики \bar{M} , \bar{N} , \bar{v} , $\bar{\vartheta}$ (рис. 11.9). На этом же рисунке приведена таблица значений размерного прогиба и угла поворота.



	A	B	C	D	E
79					
80			Размерные прогибы и углы повор		
81	Xj	V[мм]	Teta[град]		
82	0,0	0,4457	-0,0101		
83	0,2	0,082	-0,0120		
84	0,4	0,3579	-0,0175		
85	0,6	0,2817	-0,0268		
86	0,8	0,1667	-0,0397		
87	1,0	0,0000	-0,0564	-0,0564	
88	1,2	-0,2245	-0,0709		
89	1,4	-0,4865	-0,0780		
90	1,6	-0,7618	-0,0787		
91	1,8	-1,0297	-0,0739		
92	2,0	-1,2725	-0,0645		
93	2,2	-1,4772	-0,0525		
94	2,4	-1,6381	-0,0396		
95	2,6	-1,7541	-0,0269		
96	2,8	-1,8273	-0,0153		
97	3,0	-1,8631	-0,0057		
98	3,2	-1,7942	0,0446		
99	3,4	-1,5564	0,0909		
100	3,6	-1,1652	0,1324		
101	3,8	-0,6391	0,1680		
102	4,0	0,0000	0,1969		0,1969
103	4,2	0,7320	0,2225		
104	4,4	1,5537	0,2482		
105	4,6	2,4637	0,2730		
106	4,8	3,4573	0,2960		
107	5,0	4,5266	0,3162		
108	5,2	5,6604	0,3328		
109	5,4	6,8459	0,3458		
110	5,6	8,0702	0,3551		
111	5,8	9,3203	0,3606		
112	6,0	10,5834	0,3625		
113					
114	Vmin[мм]	-1.8631			
115	Vmax[мм]	10.5834			
116	TetaA[гр]	-0.0564			
117	TetaB[гр]	0.1969			
118					

Рис. 11.9. Графики прогибов и углов поворота

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МКЭ)

Здесь рассматривается применение конечно-элементного пакета COSMOS/M к решению задач прочности.

12.1. Общие сведения о МКЭ

В методе конечных элементов (МКЭ), как это следует из названия, основным понятием является понятие конечного элемента.

Как известно, в результате действия приложенных сил конструкция деформируется, и эта деформация может быть описана с помощью поля перемещений. Найти равновесное поле перемещений \vec{u} – это задача теории упругости. Размерность вектора перемещений \vec{u} зависит от размерности задачи.

Метод конечных элементов позволяет приближенно найти поле перемещений упругого тела. Для этого тело разбивается на совокупность достаточно малых подобластей, называемых в дальнейшем конечными элементами (КЭ). Эта процедура называется дискретизацией тела. Основная идея МКЭ заключается в том, что любую непрерывную величину (в данном случае перемещение) в какой-либо области можно приближенно задать совокупностью значений в дискретных точках (в нашем случае в вершинах КЭ). В пределах каждого КЭ поле перемещений аппроксимируется с помощью функций формы по значениям перемещений в узлах элемента. Математически задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых перемещений, которую в матричном виде можно представить следующим образом:

$$KU = F ,$$

где K – матрица жесткости конструкции, которая формируется путем сложения матриц жесткости всех КЭ; U – вектор неизвестных узловых

перемещений; F – вектор узловых нагрузок. Размерности указанных матриц равны произведению общего числа выбранных узлов конструкции на число степеней свободы каждого узла.

В 80-х годах XX века появились в большом числе программные комплексы, основанные на методе конечных элементов как наиболее универсальном численном методе решения краевых задач. В настоящее время наибольшее распространение получили NASTRAN, ANSYS, COSMOS/M и другие. Эти пакеты прикладных программ реализуют технологию МКЭ для расчета на прочность, устойчивость и колебания конструкций, а также для решения задач аэро-, гидро- и электродинамики. Квалифицированное применение подобных пакетов требует понимания основ МКЭ. Особенностью всех пакетов является их модульная структура. Существует основной модуль, содержащий постпроцессор – совокупность команд для подготовки конечно-элементной модели, просмотра результатов. При запуске на счет основной модуль обращается к соответствующему модулю (статический анализ, расчет на устойчивость, собственные колебания, динамический анализ, нелинейный статический и динамический анализ, температурный анализ, усталостная прочность, оптимизация, электромагнитный модуль, гидродинамический модуль и др.). Ниже приведены задачи, которые требуется решить с помощью пакета COSMOS/M.

12.2. Общие сведения о пакете COSMOS/M

Пакет COSMOS/M разработан корпорацией “Structural Research and Analysis Corporation” (США). В этом пакете основным модулем является GEOSTAR. После запуска пакета (команда «geostar.exe») необходимо задать имя, которое будет присвоено всем файлам, связанным с данной задачей. После запуска появляется меню и статусная строка с клавишами наиболее употребительных команд. Все команды содержатся в меню, которые объединены в группы. Дадим краткую характеристику каждой из этих групп.

- **File** – содержит в себе команды открытия ранее созданного проекта или нового, сохранения, печати, выхода из пакета и др.
- **Edit** – имеет команды графического изображения на экране, выдачи листинга на экран, удаления объектов и др. Отметим, что

большинство команд этой группы содержится также и в других группах.

- **Geometry** – содержит в себе команды построения геометрии модели.
- **Meshing** – включает в себя команды разбиения построенной модели на КЭ.
- **PropSet** – охватывает собой команды задания группы элементов, характеристик материалов, реальные константы группы КЭ (толщина пластины, характеристики стержневого КЭ и т. п.).
- **LoadsBC** – содержит в себе команды задания нагрузок (силовые, температурные и др.) и граничных условий (условий закрепления). Здесь **BC** – **Boundary Condition** (граничные условия).
- **Control** – имеет команды активизации нужных атрибутов КЭ перед разбиением, команды связи с CAD-системами, управления печатью, задание переменных, функций и др.
- **Display** – включает в себя команды управления изображения на экране (например, изменения точки наблюдения, вращение изображения), а также команды графического представления (в виде двумерного графика) рассчитанной величины (например, изменения напряжения по заданному сечению) или заданной величины (например, если нужно проконтролировать дискретно заданные пары значений диаграммы напряжений и деформаций $\sigma - \epsilon$).
- **Analysis** – содержит в себе команды установки параметров решения всех доступных блоков (статика, устойчивость, собственные колебания и др.) и команды запуска на счет.
- **Result** – имеет команды изображения на экране полученных результатов, выдачи листингов всех или экстремальных результатов (например, максимальных напряжений и перемещений).
- **Windows** – включает в себя команды управления окнами на экране (открытие новых окон, расположение их в определенном порядке, закрытие окон).
- **Help** – содержит встроенную справку по всем командам COSMOS/M.

Анализ структуры реальной конструкции приводит к выводу: любое сооружение, конструкцию можно представить набором стержней, пластин, оболочек и трехмерных тел. В механике деформируемого

твердого тела принято описывать деформирование стержня через перемещения его осевой линии, перемещения пластин и оболочек благодаря известной гипотезе прямых нормалей однозначно определяются деформированием их срединной поверхности. Поэтому любую конструкцию для расчета следует описать как набор одномерных, двумерных и трехмерных тел, соединенных между собой. Отсюда следует, что для формирования геометрии конструкции необходимо располагать командами задания точек, линий, элементов поверхностей и объемов. Лишь затем можно приступить к описанию физических параметров и расчету на прочность.

Ограничимся рассмотрением стержневых (одномерных) КЭ. Любую ферменную и рамную конструкцию можно представить набором ферменных и балочных КЭ. В пакете COSMOS/M используются следующие объекты для построения геометрии ферменной или рамной конструкции:

- **Ключевые точки** (Key Points, сокращенная аббревиатура **PT**).
- **Кривые** (Curves, **CR**). Кривая является однопараметрическим объектом, каждая кривая на концах содержит 2 ключевые точки (**PT**).

При описании геометрии конструкции используются следующие системы координат.

- Глобальные системы имеют номера 0, 1, 2 соответственно для декартовой, цилиндрической и сферической систем координат. По умолчанию при открытии новой проблемы установлена глобальная декартова система координат.
- Кроме глобальных пользователь может задать локальные системы координат, присвоив им номера 3–50. Каждой из локальных систем координат при задании присваивается тип декартовой (метка 0), цилиндрической (метка 1) или сферической (метка 2).

Задание локальной системы координат можно реализовать различными способами. Командой *Geometry/Coordinate_Systems/3 Points* предусматривается задание номеров трех предварительно определенных ключевых точек, не лежащих на одной прямой: точка 1 определяет начало координат, линия 1-2 – направление оси x , точка 3 – направление оси y , которая всегда перпендикулярна линии 1-2 и лежит в плоскости, проходящей через точки 1, 2, 3 (рис. 12.1). Направление оси z зависит

от того, правая или левая система координат задается. Другой способ введения локальной системы координат основан на задании шести величин: координат центра локальной системы x_0, y_0, z_0 относительно глобальной и углов поворота осей $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ (команда *Geometry/Coordinate_Systems/3 Angles*).

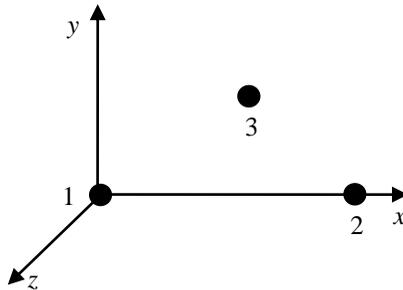


Рис. 12.1. Задание локальной системы координат

12.3. Конечные элементы и их атрибуты

Рассмотрим на примере одномерных элементов. Эти элементы представляют собой отрезки прямых с узлами на концах. В табл. 12.1 приведены наиболее распространенные одномерные КЭ из библиотеки COSMOS/M. Отметим, что для пространственного балочного КЭ в общем случае задается 3 узла: два узла определяют концы КЭ, 3-й узел используется для ориентации сечения в пространстве.

Атрибутами КЭ являются элементная группа, реальные константы и материал.

1. Элементная группа (Element group, сокращенно **EG**). Задаются командой *PropSets/Element Group*. Указывается имя КЭ и его опции – особенности при его применении (например, метод интегрирования, наличие или отсутствие пластических деформаций и др).
2. Реальная константа (Real Constant, **RC**). Задаются командой *PropSets/Real Constant*. Команда выполняется после задания ти-

па КЭ, в зависимости от которого запрашиваются характеристики КЭ (площадь сечения для ферменных элементов TRUSS2D, 3D, характеристики сечения для балочных КЭ типа BEAM и т. д.). Для балочных элементов, имеющих типовое сечение (прямоугольник, круг, труба и др.), реальные константы удобнее задавать командой *PropSets/Beam Section*.

3. Свойства материала (Material Properties, **MP**). Задаются командой *PropSets/Material Property*. Имена наиболее употребляемых характеристик материала, принятых в COSMOS/M, приведены в табл. 12.2. Каждому из задаваемых материалов присваивается номер, который не привязан к конкретному типу КЭ и может задаваться независимо.

Таблица 12.1

Типы одномерных конечных элементов, используемых в COSMOS/M

Описание одномерных КЭ	Имя КЭ
Плоский ферменный двухузловой КЭ (2 степени свободы в узле)	TRUSS2D**
Пространственный ферменный двухузловой КЭ (3 степени свободы в узле)	TRUSS3D
Элемент пружины (2 степени свободы – осевое перемещение и угол поворота)	SPRING
Плоский балочный 2- узловой КЭ (3 степени свободы в узле)	BEAM2D
Пространственный балочный КЭ (6 степеней свободы в узле)	BEAM3D

** «D» – dimension (размерность).

Обозначения при задании свойств материала

Название в COSMOS/M	Пояснение
<i>EX, EY, EZ</i>	Модули упругости в соответствующих направлениях (для изотропного материала задается <i>EX</i>)
<i>NUXY, NUYZ, NUXZ</i>	Коэффициенты Пуассона (для изотропного материала задается <i>NUXY</i>)
<i>GXY, GYZ, GXZ</i>	Модули сдвига в соответствующих плоскостях (для изотропного материала задавать не обязательно)
<i>DENS</i>	Плотность материала

Отметим, что материал также можно выбрать из встроенной библиотеки COSMOS/M (выбор осуществляется командой *PropSets/Pick Material Lib*, в которой также следует указать используемую систему единиц, при этом «SI» соответствует системе СИ).

Следует иметь в виду, что перед разбиением на КЭ должны быть активными номера соответствующих EG, RC и MP. По умолчанию активными являются номера атрибутов, которые заданы последними. Для изменения номеров активных атрибутов используется команда *Control/Activate/Set Entity*. Более удобно активные номера устанавливать в таблице, появляющейся после выполнения команды *Control/Utility/Status Table 1* (имеется также клавиша *Status1* на панели задач COSMOS/M).

12.4. Примеры решения задач с помощью COSMOS/M

Приведем типичную последовательность команд, выполняемых при использовании пакета COSMOS/M.

1. Задание группы КЭ (команды *PropSets/Element Group*).
2. Задание характеристик материала (команды *PropSets/Material Property* или *PropSets/Pick Material Lib*).

3. Задание реальных констант (команды *PropSets/Real Constant*).
4. Создание геометрии модели (меню *Geometry*).
5. Моделирование конструкции конечными элементами (меню *Meshing*).
6. Задание граничных условий и нагрузок (меню *LoadsBC*).
7. Задание опций (дополнительных свойств) решения (например, для статического анализа командой *Analysis/Static/Static Analysis Option*). Данный этап не является обязательным, если пользователя устраивают опции, установленные по умолчанию.
8. Запуск на счет (например, командой *Analysis/Static/Run Static Analysis* для статического анализа).
9. Просмотр графических результатов (меню *Results*).

Наиболее важными файлами COSMOS/M являются (ниже *name* – имя проблемы, задаваемой при запуске пакета):

- **name.ses** – содержит в себе последовательность всех команд решения. После запуска COSMOS/M командой *File/Load* можно заново выполнить все команды;
- **name.out** – включает в себя распечатку результатов. Объем выводимой информации регулируется командами меню *Analysis/Output Options*.

12.5. Варианты заданий для выполнения расчетно-графических работ с помощью пакета COSMOS/M

1. Расчет ферменных конструкций

Исходные данные. Дана ферменная конструкция, т. е. конструкция, состоящая из стержней, соединенных шарнирно. Если такую конструкцию нагружать только в узлах, то все стержни этой конструкции будут работать только на растяжение или сжатие.

Сечение элементов конструкции – прямоугольник, размеры которого указаны на рисунке соответствующего варианта. Вертикальные и наклонные стержни изготовлены из стали, горизонтальные – из алюминия. Модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, разрушающие

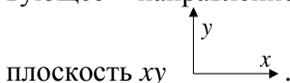
напряжения – $\sigma_B = 550$ МПа. Модуль упругости алюминия $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа, разрушающие напряжения – $\sigma_B = 80$ МПа.

Требуется:

- 1) определить систему координат;
- 2) задать геометрию конструкции;
- 3) провести расчет ферменной конструкции (тип КЭ – TRUSS2D).
Здесь предполагается, что в узлах стержни соединены посредством шарниров. В конце данного подраздела указан порядок расчета ферменной конструкции.

Рекомендации по расчету ферменной конструкции

1. Все данные задавать в системе СИ.
2. Перед заданием геометрии рекомендуется выбрать соответствующее направление взгляда на систему координат –



3. Задание геометрии (*PT*, *CR*).
4. Задание атрибутов конечных элементов (КЭ) включает в себя:
 - задание типа КЭ: *Propsets* → *Element Group* → *TRUSS2D*;
 - задание материала: *Propsets* → *Material Property* (*EX* - модуль упругости);
 - задание площади сечения: *Propsets* → *Real Constant*.

Для проверки в меню *Propsets* можно использовать команды *List EG*, *MP*, *RC*, для удаления – команды *Del EG*, *MP*, *RC*.

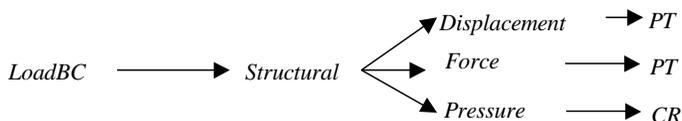
5. Разбиение на конечные элементы.

Перед каждым разбиением активизировать соответствующий номер материала (*Control/Activate/Set Entity*). Выбрать «*MP*» и соответствующий номер материала. После этого разбивать только те кривые, которые относятся к данному материалу. При выполнении задания использовать лишь один из двух способов, указанных ниже (рекомендуется первый).

- 1-й способ разбиения – параметрический с указанием числа КЭ вдоль каждой кривой. При использовании ферменного КЭ *TRUSS2D* задается только один КЭ на каждой кривой. В противном случае полученная конструкция превратится в подвиж-

ный механизм. Параметрическое разбиение осуществляется командой Meshing→ParametricMesh →Curves. В опции “число узлов (Number of nodes per element)” установить 2, в опции “число элементов на каждой кривой (Number of elements on each curve)” установить 1.

- 2-й способ – автоматическое разбиение, с указанием среднего (*average*) размера КЭ. Так как при использовании ферменного КЭ *TRUSS2D* задается *только один* КЭ на каждой кривой, то в качестве среднего размера следует задать наибольшую длину кривой созданной конструкции. В этом случае каждой кривой будет соответствовать только один КЭ. Автоматическое разбиение осуществляется командой Meshing→AutoMesh →Curves. В опции “число узлов (number nodes)” установить 2.
- 6. Слияние узлов в граничных точках кривых Meshing→Nodes→Merge. Ликвидация пустот в нумерации осуществляется командой Meshing→Nodes →Compress. Меню Meshing→Nodes, Meshing→ Element содержат также команды редактирования и просмотра: List, Delete, Plot и др.
- 7. Задание граничных условий, сил.



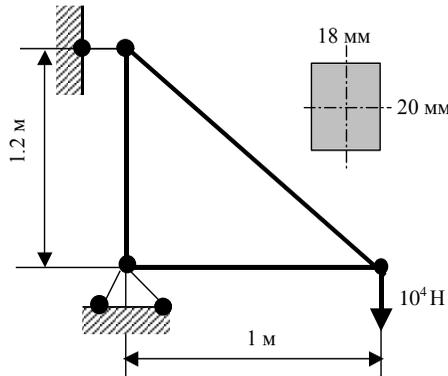
В этом же разделе содержатся команды редактирования, удаления и просмотра.

- 8. Запуск на счет.
 - Предварительно рекомендуется проверить задание исходных данных и разбиение конструкции (команды Analysis→Data Check, Analysis →Run Check (указать тип Static).
 - Далее рекомендуется установить опцию вычисления напряжений Analysis→Static→Stres Analysis Option (в строке “*Stress print flag*” установить значение 0 - печатать).
 - Запуск на счет Analysis→Static→Run Static Analysis.
- 9. Для просмотра результатов счета используется меню Result. В частности, деформированное состояние в увеличенном мас-

штабе можно просмотреть командой *Result*→*Plot*→*Deformed Shape*.

Подробные результаты содержатся в *OUT*-файле, который можно просмотреть в своей папке с помощью какого-либо редактора или прямо из COSMOS/M командой *File*→*Edit a File* (далее разыскивается файл с расширением *out*).

ПРИМЕР РАСЧЕТА ФЕРМЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ



Задание геометрии рамной конструкции

PT,1,0,0,0

PT,2,1,0,0

PT,3,0,1.2,0

CRLINE,1,1,2

CRLINE,2,2,3

CRLINE,3,1,3

Задание группы КЭ

EGROUP,1,TRUSS2D,0,0,0,0,0,0,0

Задание реальных констант (площади сечения)

RCONST,1,1,1,2,18E-3*20E-3,0

Задание параметров материала (модуля упругости) стальных стержней (вертикального и наклонного)

MPROP,1,EX,2.1E11

Параметрическое разбиение на КЭ стальных стержней

M_CR,2,3,1,2,1,1

Задание параметров материала (модуля упругости) горизонтально-го алюминиевого стержня

MPROP,1,EX,7E10

Параметрическое разбиение на КЭ алюминиевого стержня

M_CR,1,1,1,2,1,1

Слияние узлов

NMERGE,1,6,1,0.0001,0,1,0

Удаление пустот в нумерации узлов, которая может возникнуть после слияния

NCOMPRESS,1,3

Закрепление узлов

DPT,1,UX,0,1,1,UY,

DPT,3,UX,0,3,1,

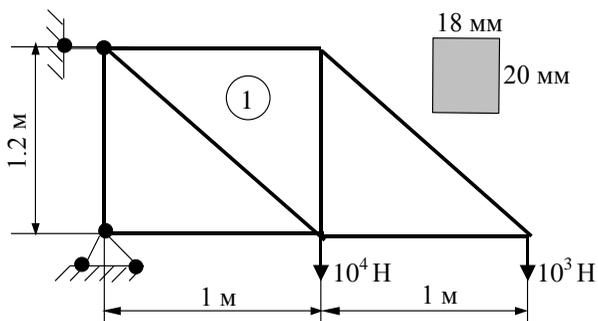
Задание сосредоточенной силы

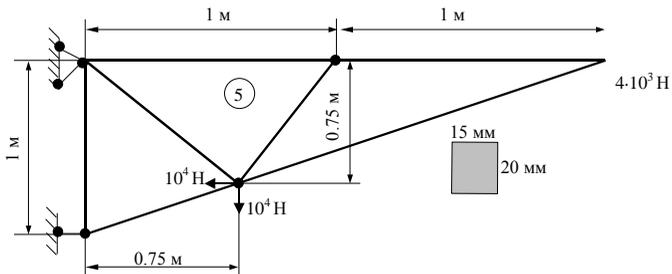
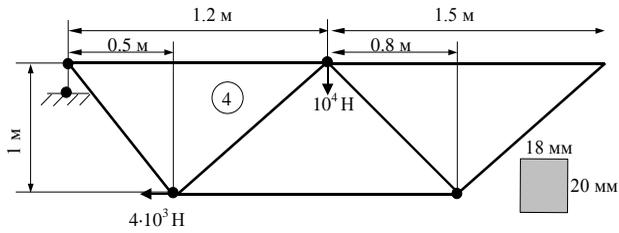
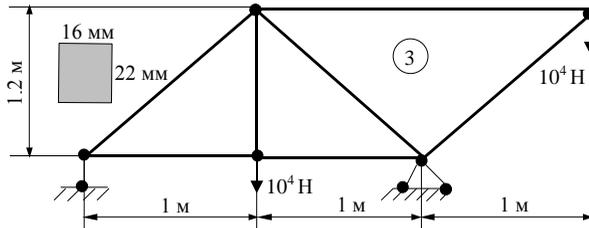
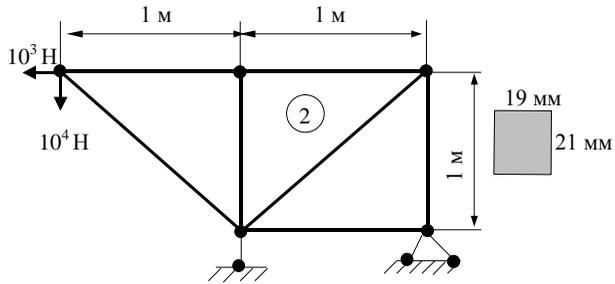
FPT,2,FY,-1E4,2,1

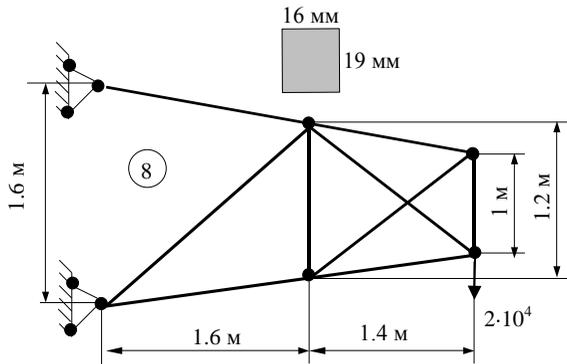
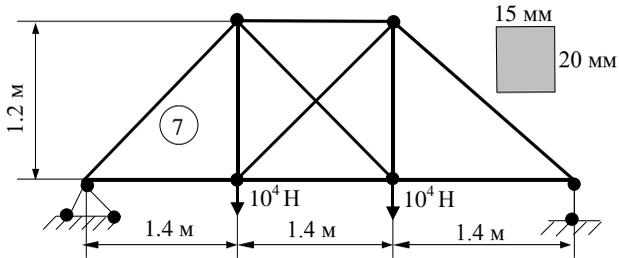
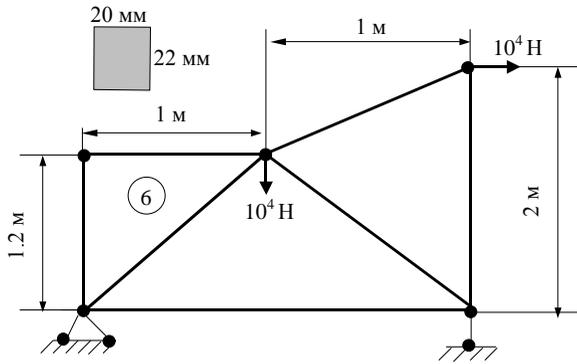
Запуск на счет

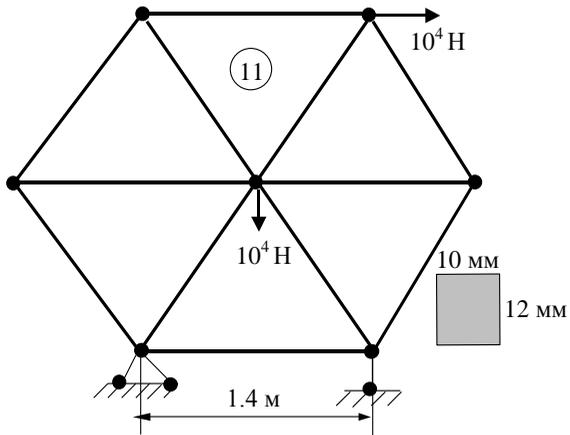
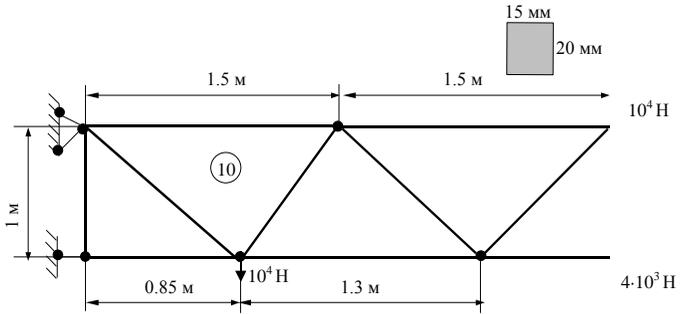
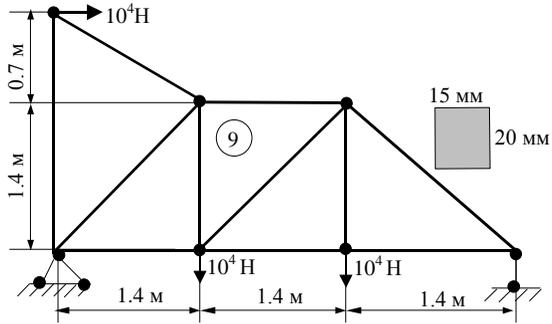
R_STATIC

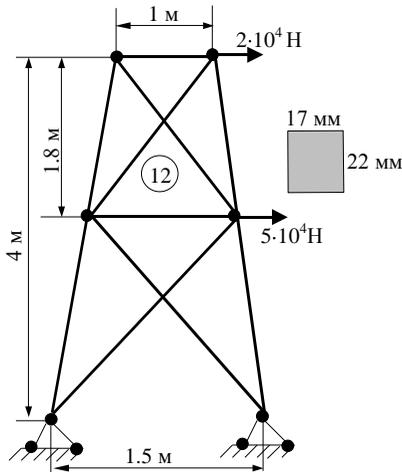
Варианты исходных данных для расчета ферменных конструкций











2. Расчет рамных конструкций

Исходные данные. Дана рамная конструкция. Сечение элементов конструкции – прямоугольник, размеры которого указаны на рисунке. Вертикальные и наклонные стержни изготовлены из стали, горизонтальные – из алюминия. Модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, плотность – 7800 кг/м^3 , разрушающие напряжения $\sigma_B = 500$ МПа. Модуль упругости алюминия $E = 0.72 \cdot 10^5$ МПа, плотность 2700 кг/м^3 , разрушающие напряжения $\sigma_B = 90$ МПа.

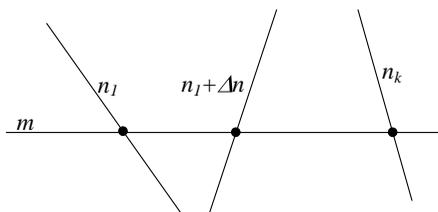
Требуется:

- 1) определить систему координат;
- 2) задать геометрию конструкции;
- 3) рассчитать конструкцию как рамную (тип КЭ – BEAM2D);
- 4) провести анализ полученных результатов.

Рекомендации по расчету рамной конструкции

1. Все данные задавать в системе СИ.
2. Перед заданием геометрии рекомендуется выбрать соответствующее направление взгляда на систему координат – плоскость xy .
3. Задание геометрии (PT , CR).

Разбиение кривой на 2 равные части осуществляется командой Geometry→Curves→Manipulation→Break (equally).



Если кривая разбивается путем пересечения с некоторой кривой, то рекомендуется следующая последовательность. Пусть необходимо разбить кривые $n_1 \dots n_k$ с шагом Δn пересекающей их

вспомогательной кривой m (см. рисунок). Длина вспомогательной кривой m не важна, лишь бы она пересекала все нужные кривые. Образуются ключевые точки путем пересечения кривой m с кривыми $n_1 \dots n_k$ (команда Geometry→Points→Generation→Cr/Cr Intersection). Далее кривые $n_1 \dots n_k$ разбиваем на части с помощью образованных ключевых точек (команда Geometry→Curves→Manipulation→Break near Pt). Вспомогательную кривую m можно удалить.

4. Задание атрибутов конечных элементов (КЭ) включает в себя:

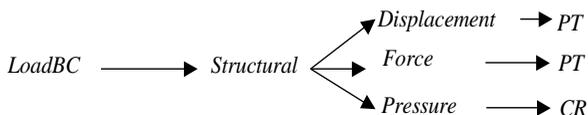
- задание типа КЭ: Propsets→Element Group→BEAM2D;
- задание материала: Propsets→Material Property (*EX – модуль упругости, NUXY – коэффициент Пуассона, DENS – плотность материала*). **Каждому материалу присваивается свой номер!**
- задание характеристик сечения: Propsets→Beam Section. В опции «Number of Section» оставить “1” – прямоугольное сечение (*Rectangular Section*). Далее задать высоту (H) и ширину (B) сечения. Данная команда заменяет Propsets→Real Constants и позволяет не вычислять все характеристики сечения (площадь, моменты инерции).

Для проверки в меню Propsets можно использовать команды List EG, MP, RC, для удаления – команды Del EG, MP, RC.

5. Разбиение на конечные элементы.

Перед каждым разбиением активизировать соответствующий номер материала (Control/Activate/Set Entity). Выбрать “MP” и соответствующий номер материала. После этого разбивать только те кривые, которые относятся к данному материалу. Разбиение осуществляется только одним из способов, указанных ниже (рекомендуется 2-м).

- 1-й способ – параметрическое разбиение, с указанием числа КЭ вдоль каждой кривой. В отличие от ферменной конструкции здесь можно разбивать каждую кривую на любое число КЭ. Параметрическое разбиение осуществляется командой Meshing→Parametric Mesh→Curves. В опции “число узлов (*Number of nodes per element*)” установить **2**, в опции “число элементов на каждой кривой (*Number of elements on each curve*)” установить желаемое число (по умолчанию предлагается 2).
 - 2-й способ – автоматическое разбиение, с указанием среднего (*average*) размера КЭ. Автоматическое разбиение осуществляется командой Meshing→AutoMesh→Curves. В опции “Средний размер элементов (*Average element size*)” задать нужное число (в метрах), в опции “Число узлов (*Number of nodes per element*)” установить 2.
6. Слияние узлов в граничных точках кривых Meshing→Nodes→Merge. Ликвидация пустот в нумерации осуществляется командой Meshing→Nodes→Compress. Меню Meshing→Nodes, Meshing→Element содержит также команды редактирования и просмотра: List, Delete, Plot и др.
 7. Задание условий закрепления, сил, давления (*Displacement* – перемещение, *Force* – сила, *Pressure* – давление).



8. Запуск на счет (**Статический анализ**).
 - Предварительно рекомендуется проверить задание исходных данных и разбиение конструкции (команды Analysis→Data Check, Analysis→Run Check (указать тип Static).
 - Далее рекомендуется установить опцию вычисления напряжений Analysis→Static→Stres Analysis Option (в строке “*Stress print flag*” установить значение 0 – печатать).
 - Запуск на счет Analysis→Static→Run Static Analysis.
9. Для просмотра результатов счета используется меню Result. В частности, деформированное состояние в увеличенном масштабе можно просмотреть командой Result→Plot→Deformed

Shape. Для просмотра эпюр силовых факторов (Fr – нормальная сила, Vr – поперечная сила, Mt – изгибающий момент) используется команда Result→Plot→Beam Diagrams. Максимальные значения параметров можно получить командой Result→Extremes→Beam and Force.

Подробные результаты содержатся в *OUT*-файле, который можно просмотреть в своей папке с помощью какого-либо редактора или прямо из COSMOS/M командой File→Edit a File (далее разыскивается файл с расширением *out*).

10. Запуск на счет при **расчете собственных частот**.

При расчете собственных частот обязательно должна быть задана плотность материала (*DENS* – *density*). Заданные силы при этом расчете не учитываются.

- Задание числа собственных частот Analysis→Frequency/ Buckling→Frequency Options. В первой опции задать число частот (например, 10).
- Запуск на счет

Analysis→Frequency/Buckling→Run Frequency.

Для просмотра результатов счета используется меню Result. В частности, анимацию собственной формы (номер которой от 1 до 10 задается) можно просмотреть командой Result→Plot→Animate. Список всех заказанных собственных частот (в Герцах) можно посмотреть с помощью команды Result →Available Results. Подробные результаты содержатся в *OUT*-файле.

11. Запуск на счет при **расчете на устойчивость**.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Рассмотрим пример статического расчета пространственной рамы под действием распределенной нагрузки (рис. 12.2).

Задание геометрии рамной конструкции

PT,1,2.,0,0

PT,2,0,4,0,1.

CRLINE,1,1,2

CRGEN,5,1,1,1,1,0,0,60

CRLINE,7,2,4

CRLINE,8,1,3

CRGEN,5,7,8,1,1,0,0,60

PT,13,0,0,0

Задание группы КЭ, параметров материала, реальных констант

EGROUP,1,BEAM3D,0,0,0,0,0,0,0

PICK_MAT,1,A_STEEL,SI

BMSECTDEF,1,1,1,1,9,0.05,0.02,0,0,0,0,0,0

Автоматическое разбиение на КЭ

MA_CR,1,18,1,0.2,3,13

NMERGE,1,168,1,0.0001,0,1,0

NCOMPRESS,1,166

Условия закрепления

DPT,1,UZ,0,11,2,

DPT,1,UX,0,7,6,UY,

Приложение нагрузки

FCR,1,FZ,-200.,18,1

Контроль подготовленной модели и исходных данных

R_CHECK,STATIC

Запуск на счет

R_STATIC

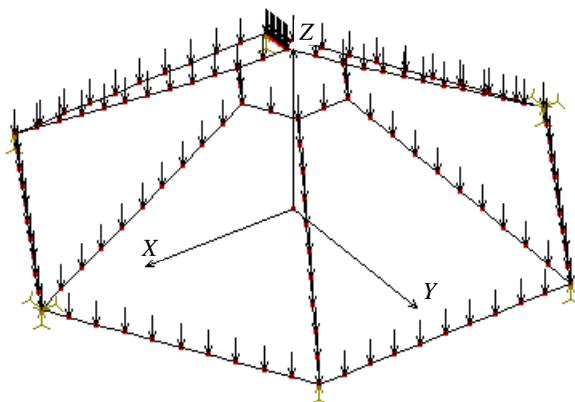
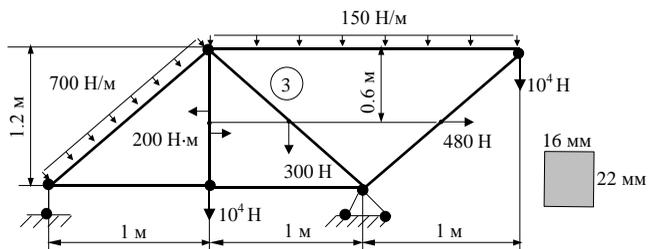
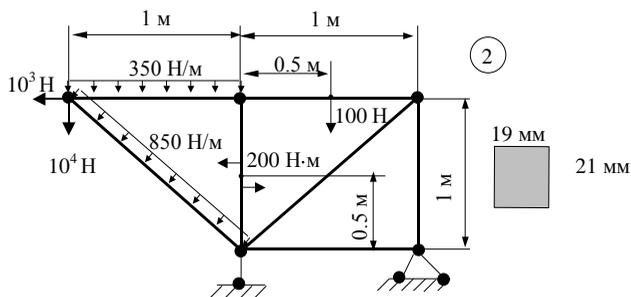
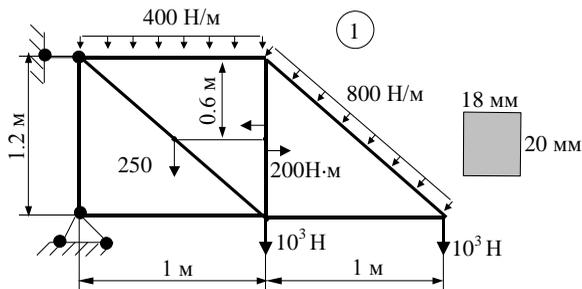
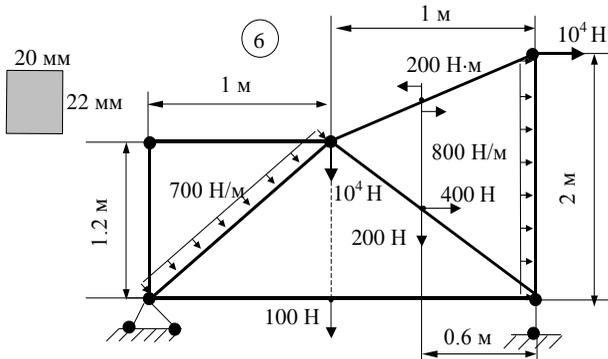
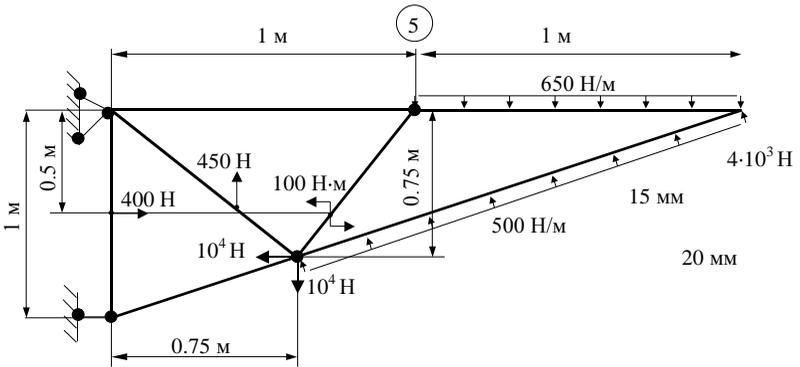
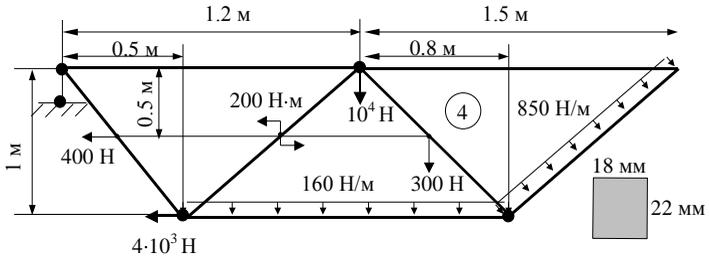
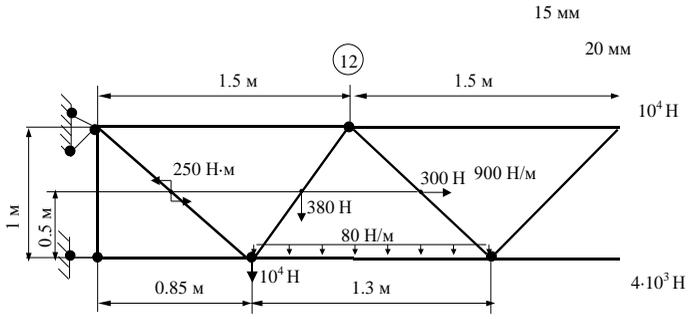
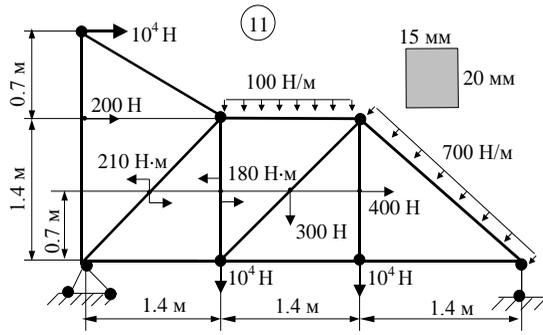
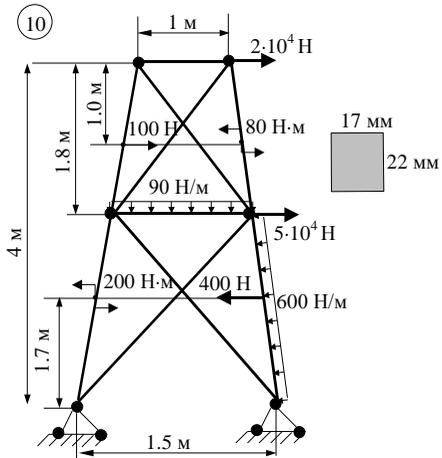


Рис. 12.2. Пространственная рама под действием распределенной нагрузки

Варианты исходных данных для расчета плоских рамных конструкций







Литература к разделу II (по МКЭ)

1. *Присекин В.Л., Расторгуев Г.И.* Основы метода конечных элементов в задачах строительной механики ЛА: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. – 144 с.
2. *Присекин В.Л., Расторгуев Г.И.* Основы метода конечных элементов: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 124 с.
3. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
4. *Метод* конечных элементов: учеб. пособие для студ. вузов / П.М. Варвак, И.М. Бузин, А.С. Городецкий и др. – Киев.: Вища школа, 1981. – 176 с.
5. *Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 280 с.
6. *Постнов В.А.* Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 280 с.
7. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

А. Учебники и учебные пособия

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2000. – 560 с.
2. Атапин В.Г., Пель А.Н., Темников А.И. Сопротивление материалов: учебник. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. – 556 с. – («Учебники НГТУ»).
3. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
4. Дарков А.Н., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1989. – 622 с.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 591 с.

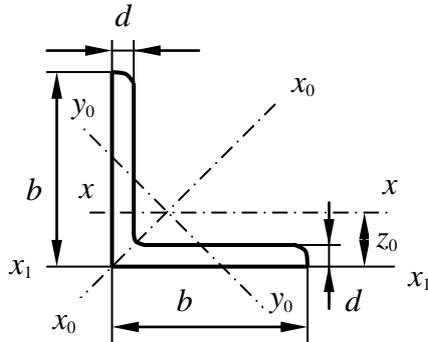
Б. Пособия по решению задач

6. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. – М.: Высшая школа, 1999. – 592 с.
7. Миролюбов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. – М.: Высшая школа, 1985. – 399 с.

Приложение

Таблица П1

Сталь прокатная угловая равнополочная
(ГОСТ 8509 – 72)



272

Номер профиля	Размеры		Площадь профиля	Масса 1 пог. м	Справочные величины для осей							
	b	d			x - x		x ₀ - x ₀		y ₀ - y ₀		x ₁ -x ₁	z ₀
					I _x	i _x	I _{x₀} max	i _{x₀} max	I _{y₀} min	i _{y₀} min		
	мм				см ²	кг	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	3,5	3,86	3,03	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
		4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57

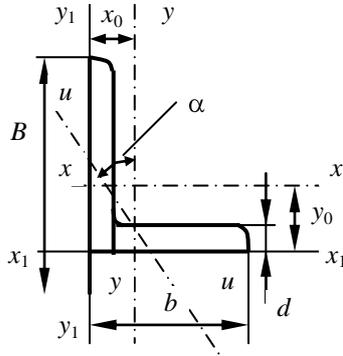
6,3	63	4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7	9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
7,5	75	8	10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
		5	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6	8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
8	80	8	11,5	9,02	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9	12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18
		5,5	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
9	90	7	10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8	12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27
		6	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7	12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
10	100	8	13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
		6,5	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
10	100	8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16	29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06

Номер профиля	Размеры		Площадь профиля	Масса 1 пог. м	Справочные величины для осей							
	<i>b</i>	<i>d</i>			<i>x - x</i>		<i>x₀ - x₀</i>		<i>y₀ - y₀</i>		<i>x₁-x₁</i>	<i>z₀</i>
					<i>I_x</i>	<i>i_x</i>	<i>I_{x₀}</i> max	<i>i_{x₀}</i> max	<i>I_{y₀}</i> min	<i>i_{y₀}</i> min	<i>I_{x₁}</i>	
	мм				см ²	кг	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см
11	110	7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
12,5	125	8	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14	33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
14	140	16	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
		9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
16	160	12	32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
		10	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11	34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12	37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14	43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
18	180	18	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20	60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
		11	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12	42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89

20	200	12	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13	50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16	62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20	76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25	94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30	111,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16	68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
25	250	16	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18	87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20	97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
		22	106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25	119,7	94,0	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28	133,1	104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30	142,0	111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31

Таблица П2

Сталь прокатная угловая неравнополочная
(ГОСТ 8510 – 72)



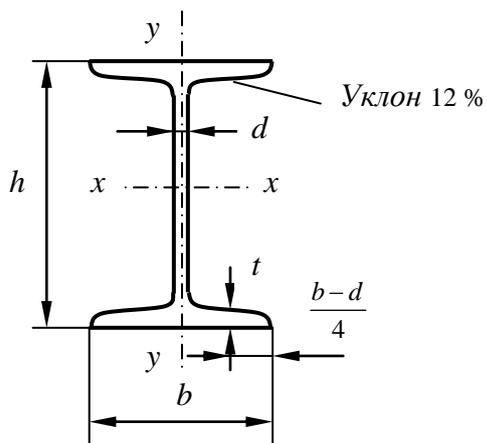
Номер профиля	Размеры			Площадь профиля см ²	Масса 1 пог. м кг	Справочные данные для осей										
	B	b	d			x - x		y - y		x ₁ - x ₁		y ₁ - y ₁		u - u		Угол наклона оси tg α
						I _x	i _x	I _y	i _y	I _{x₁}	Расстояние от центра тяжести, y ₀ см	I _{y₁} min	Расстояние от центра тяжести, x ₀ см	I _u min	i _u min	
						см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см	
6,3/4,0	63	40	4	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
			5	4,98	3,91	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,72	0,86	0,396
			6	5,90	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393
			8	7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386

7/4,5	70	45	4,5	5,07	3,98	25,3	2,23	8,25	1,28	51	2,25	13,6	1,03	4,88	0,98	0,407
			5	5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
			6	7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
			8	9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430
8/5	80	50	5	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,6	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
			6	7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386
9/5,6	90	56	5,5	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
			6	8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384
			8	11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
			7	11,1	8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8	12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
			10	15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6,5	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
			7	12,3	9,64	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,60	28,8	1,53	0,402
			8	13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	11	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407
			8	16	12,5	256	4	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10	19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12	23,4	18,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	18	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
			10	22,2	17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409
16/10	160	100	9	22,9	18	606	5,15	186	2,85	1221	5,19	330	2,23	110	2,2	0,391
			10	25,3	19,8	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390
			12	30	23,6	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
			14	34,7	27,3	897	5,08	272	2,8	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385

Номер профиля	Размеры			Площадь профиля	Масса 1 пог. м	Справочные данные для осей										
	B	b	d			x - x		y - y		x ₁ - x ₁		y ₁ - y ₁		u - u		
						I _x	i _x	I _y	i _y	I _{x1}	Расстояние от центра тяжести, y ₀	I _{y1} min	Расстояние от центра тяжести, x ₀	I _u min	i _u min	Угол наклона оси tg α
	мм					см ²	кг	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см	
18/11	180	110	10	28,3	22,2	952	5,8	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
			12	33,7	26,4	1123	5,77	324	3,1	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374
20/12, 5	200	125	11	34,9	27,4	1449	6,45	446	3,58	2920	6,5	718	2,79	264	2,75	0,392
			12	37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392
			14	43,9	34,4	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390
			16	49,8	39,1	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
25/16	250	160	12	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410
			16	63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408
			18	71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407
			20	78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405

Таблица ПЗ

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые
(ГОСТ 8239 – 72)



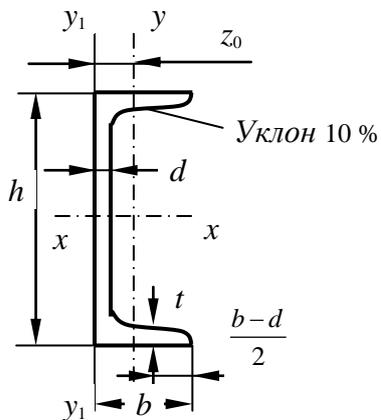
279

Номер профиля	Размеры				Площадь сечения	Масса 1 пог. м	I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y
	h	b	d	t									
	мм												
10	100	55	4,5	7,2	12	9,46	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38

Номер профиля	Размеры				Площадь сечения	Масса 1 пог. м	I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y
	h	b	d	t									
	мм												
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5	7,8	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	19,9	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	22,7	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,5
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37

24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,4	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6	9,8	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6	10,2	43,2	33,9	5500	407	11,3	229	337	50	2,8
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	39,2	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7	11,2	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13	72,6	57	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	92,6	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	108	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Таблица П4



Сталь горячекатаная. Швеллеры
(ГОСТ 8240 – 72)

Номер профиля	Размеры				Площадь сечения	Масса 1 пог. м	Справочные величины для осей							
	h	b	d	t			x – x				y – y			z ₀
							I _x	W _x	i _x	S _x	I _y	W _y	i _y	
мм				см ²	кг	см ⁴	см ³	см	см ³	см ⁴	см ³	см	см	
5	50	32	4,4	7,0	6,16	4,8	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,9	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24

8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	12,3	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	13,3	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	19,8	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	21,0	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	22,6	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46

Номер профиля	Размеры				Площадь сечения	Масса 1 пог. м	Справочные величины для осей							
	h	b	d	t			$x-x$				$y-y$			z_0
							I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y	
	мм						см ²	кг	см ⁴	см ³	см	см ³	см ⁴	см ³
24	240	90	5,6	10,0	30,6	24,0	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	25,8	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	31,8	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

**Нормальные линейные размеры (мм)
Основные ряды по ГОСТ 6636-69 (выдержка из ГОСТ)**

Интервал размеров, мм	Ряды размеров														
	Ra5	Ra10		Ra20				Ra40							
От 1,0 до 500	1,0	1,0	1,2	1,0	1,1	1,2	1,4	1,0	1,05	1,1	1,15	1,2	1,3	1,4	1,5
	1,6	1,6	2,0	1,6	1,8	2,0	2,2	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,4
	2,5	2,5	3,2	2,5	2,8	3,2	3,6	2,5	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8
	4,0	4,0	5,0	4,0	4,5	5,0	5,6	4,0	4,2	4,5	4,8	5,0	5,3	5,6	6,0
	6,3	6,3	8,0	6,3	7,1	8,0	9,0	6,3	6,7	7,1	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5
	10	10	12	10	11	12	14	10	10,5	11	11,5	12	13	14	15
	16	16	20	16	18	20	22	16	17	18	19	20	21	22	24
	25	25	32	25	28	32	36	25	26	28	30	32	34	36	38
	40	40	50	40	45	50	56	40	42	45	48	50	53	56	60
	63	63	80	63	71	80	90	63	67	71	75	80	85	90	95
	100	100	125	100	110	125	140	100	105	110	120	125	130	140	150
	160	160	200	160	180	200	220	160	170	180	190	200	210	220	240
	250	250	320	250	280	320	360	250	260	280	300	320	340	360	380
400	400	500	400	450	500	—	400	420	450	480	500	—	—	—	

При выборе размеров рядам с более крупной градацией и входящим в них размерам должно отдаваться предпочтение: ряд Ra5 следует предпочитать ряду Ra10, ряд Ra10 – ряду Ra20, ряд Ra20 – ряду Ra40.

Кроме основных рядов размеров, указанных в табл. П5, допускается применять производные ряды (см. табл. П6).

Дополнительные линейные размеры (мм) по ГОСТ 6636-69

1,25	4,9	16,5	62	205	730	2430	8250
1,35	5,2	17,5	65	215	775	2580	8750
1,45	5,5	18,5	70	230	825	2720	9250
1,55	5,8	19,5	73	270	875	2900	9750
1,65	6,2	20,5	78	290	925	3070	10300
1,75	6,5	21,5	82	310	975	3250	10900
1,85	7,0	23	88	315	1030	3450	11500
1,95	7,3	27	92	330	1090	3650	12200
2,05	7,8	29	98	350	1150	3870	12800
2,15	8,2	31	102	370	1220	4120	13600
2,3	8,8	33	108	390	1280	4370	14500
2,7	9,2	35	112	410	1360	4620	15500
2,9	9,8	37	115	440	1450	4870	16500
3,1	10,2	39	118	460	1550	5150	17500
3,3	10,8	41	135	490	1650	5450	18500
3,5	11,2	44	145	515	1750	5800	19500
3,7	11,8	46	155	545	1850	6150	
3,9	12,5	49	165	580	1950	6500	
4,1	13,5	52	175	615	2060	6900	
4,4	14,5	55	185	650	2180	7300	
4,6	15,5	58	195	690	2300	7750	

Таблица П7

**Единицы измерения механических величин
в Международной системе (СИ)**

Наименование величин	Наименование единиц	Обозначения	Соотношения единиц
Сила, груз	Ньютон	Н	$1 \text{ Н} \approx 0,1 \text{ кгс};$ $1 \text{ кгс} = 9,80665 \text{ Н} \approx 10 \text{ Н}$
Погонная интенсивность нагрузки		Н/м	$1 \text{ Н/м} \approx 0,1 \text{ кгс/м}$
Напряжение	Паскаль	Па	$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2 \approx 0,1 \text{ кгс/м}^2$ $1 \text{ МПа} \approx 10 \text{ кгс/см}^2$
Модуль упругости	Паскаль	Па	$1 \text{ Па} \approx 0,1 \text{ кгс/м}^2;$
Момент силы		Н·м	$1 \text{ Н·м} \approx 0,1 \text{ кгс·м}$
Работа, энергия	Джоуль (ньютон умноженный на метр)	Дж	$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н·м} \approx 0,1 \text{ кгс·м}$
Мощность	Ватт (джоуль в секунду)	Вт	$1 \text{ Вт} \approx 0,1 \text{ кгс/м·с}$
Длина	Метр	м	$1 \text{ м} = 100 \text{ см} = 1000 \text{ мм}$
Масса	Килограмм	кг	
Плотность (удельная масса)		кг/м ³	
Удельный вес		Н/м ³	

Таблица П8

Кратные и дольные единицы

Кратные единицы						
Наименования	Тера	Гига	Мега	Кило	Гекто	Дека
Обозначения	Т	Г	М	к	г	да
Множители	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10
Дольные единицы						
Наименования	Деци	Санتي	Милли	Микро	Нано	Пико
Обозначения	д	с	м	мк	н	п
Множители	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}

Коллектив авторов

**СБОРНИК ЗАДАНИЙ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ**

Учебное пособие

Редактор *Л.Н. Ветчакова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Подписано в печать 26.11.2008. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 250 экз.
Уч.-изд. л. 15,34. Печ. л. 16,5. Изд. № 211. Заказ № 1537. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20